

Chuyên đề Cao học ngành Toán

LÝ THUYẾT TÔPÔ

PGS.TS. Trần Văn Ân

Lý thuyết Tôpô

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1978.

Lý thuyết Tôpô

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1978.
- [2] J. Kelley, *Tôpô đại cương*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1973.

Lý thuyết Tôpô

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phan Đức Chính, *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1978.
- [2] J. Kelley, *Tôpô đại cương*, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1973.
- [3] Đỗ văn Lưu, *Tôpô đại cương*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1998.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1. Các khái niệm cơ bản

1.1.1. Định nghĩa. Cho tập hợp X . Họ $\mathcal{T}$ các tập con của X được gọi là một *tôpô* nếu thỏa mãn các điều kiện sau

$$(T_1) \quad \phi, X \in \mathcal{T};$$

$$(T_2) \quad \text{Nếu } G_\alpha \in \mathcal{T}, \alpha \in \Lambda \text{ thì } \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \in \mathcal{T};$$

$$(T_3) \quad \text{Nếu } G_1, G_2 \in \mathcal{T}, \text{ thì } G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}.$$

Khi đó cặp $(X, \mathcal{T})$ được gọi là một *không gian tôpô*. Các phần tử của X được gọi là *điểm* của không gian tôpô, các tập hợp thuộc $\mathcal{T}$ được gọi là các *tập mở*.

Nhận xét rằng từ (T_3) ta suy ra nếu $G_i \in \mathcal{T}, i = 1, \dots, n$, thì

$$\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{T}$$

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Các ví dụ. 1) Giả sử X là một tập hợp tùy ý, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Khi đó $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và nó được gọi là *tôpô thô* trên X , $(X, \mathcal{T})$ được gọi là không gian tôpô thô.

2) Giả sử X là một tập hợp tùy ý, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Khi đó $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và nó được gọi là *tôpô rời rạc* trên X , $(X, \mathcal{T})$ được gọi là không gian tôpô rời rạc.

3) Giả sử $X = \mathbb{R}$. Ký hiệu

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, i \in I, I \text{ là tập chỉ số tùy ý} \right\}.$$

Khi đó $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và nó được gọi là *tôpô tự nhiên* hay *tôpô thông thường* trên $\mathbb{R}$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.2. Định nghĩa. Cho tập hợp X . Giả sử $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ là hai tôpô trên X . Ta nói rằng tôpô $\mathcal{T}$ là *thô hơn* tôpô $\mathcal{U}$ (hay tôpô $\mathcal{U}$ là *mịn hơn* tôpô $\mathcal{T}$) nếu $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$. Lúc đó ta cũng nói rằng tôpô $\mathcal{T}$ là *yếu hơn* tôpô $\mathcal{U}$ (hay tôpô $\mathcal{U}$ là *mạnh hơn* tôpô $\mathcal{T}$).

1.1.3. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Tập $E \subset X$ được gọi *đóng* nếu tập $X \setminus E$ là mở.

Nhận xét Ký hiệu $\mathcal{F}$ là họ tất cả các tập con đóng của không gian tôpô X . Khi đó họ $\mathcal{F}$ có các tính chất

(F₁) $\phi, X \in \mathcal{F}$.

(F₂) Giao của một họ tùy ý các tập hợp thuộc $\mathcal{F}$ cũng thuộc $\mathcal{F}$;

(F₃) Hợp của hai tập hợp thuộc họ $\mathcal{F}$ cũng thuộc họ $\mathcal{F}$;

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.4. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $X, E \subset X$. Giao của họ tất cả các tập con đóng của X mà chứa E cũng là một tập đóng chứa E . Ta gọi giao đó là *bao đóng* của E và ký hiệu là $\overline{E}$, nghĩa là

$$\overline{E} = \bigcap \{F : F \text{ đóng}, E \subset F \subset X\}.$$

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.4. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $X, E \subset X$. Giao của họ tất cả các tập con đóng của X mà chứa E cũng là một tập đóng chứa E . Ta gọi giao đó là *bao đóng* của E và ký hiệu là $\overline{E}$, nghĩa là

$$\overline{E} = \bigcap \{F : F \text{ đóng}, E \subset F \subset X\}.$$

1.1.5. Các tính chất của bao đóng

- a) $E \subset \overline{E}$ với mọi $E \subset X$;
- b) Nếu $E \subset F \subset X$, thì $\overline{E} \subset \overline{F}$;
- c) Với mọi $E, F \subset X$ ta có $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$;
- d) $\overline{E} = \overline{(\overline{E})} = \overline{\overline{E}}$;
- e) Giả sử $E \subset X$. Khi đó tập E là đóng khi và chỉ khi $E = \overline{E}$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.6. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Tập $U \subset X$ được gọi là *lân cận* của A trong X , nếu tồn tại tập mở $V \subset X$ sao cho $A \subset V \subset U$.

Trường hợp $A = \{x\}$, thì ta nói rằng U là *lân cận của điểm* x .

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.6. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Tập $U \subset X$ được gọi là *lân cận* của A trong X , nếu tồn tại tập mở $V \subset X$ sao cho $A \subset V \subset U$.

Trường hợp $A = \{x\}$, thì ta nói rằng U là *lân cận của điểm* x .

1.1.7. Mệnh đề. Giả sử X là không gian tôpô, $x \in X$. Ký hiệu $\mathcal{U}(x)$ là họ tất cả các lân cận của điểm x . Khi đó ta có

- (1) Nếu $V \in \mathcal{U}(x)$, thì $x \in V$;
- (2) Nếu $V \in \mathcal{U}(x)$ và $V \subset W$, thì $W \in \mathcal{U}(x)$;
- (3) Nếu $U, V \in \mathcal{U}(x)$, thì $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$;
- (4) Nếu $U \in \mathcal{U}(x)$, thì tồn tại $V \in \mathcal{U}(x)$ sao cho $V \subset U$ và $U \in \mathcal{U}(y)$ với mọi $y \in V$.

Chứng minh dành cho bạn đọc.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.8. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $E \subset X$, $x \in X$.

Điểm x được gọi là *điểm trong* của E nếu E là một lân cận của x ;

Điểm x được gọi là *điểm ngoài* của E nếu $X \setminus E$ là một lân cận của x ;

Điểm x được gọi là *điểm giới hạn* của E nếu với mọi lân cận U của x ta luôn có $U \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$;

Điểm x được gọi là *điểm dính* của E nếu với mọi lân cận U của x ta luôn có $U \cap E \neq \emptyset$;

Điểm x được gọi là *điểm biên* của E nếu với mọi lân cận U của x ta luôn có $U \cap E \neq \emptyset$ và $U \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$;

Tập hợp tất cả các điểm trong của E được gọi là *phần trong* của E và ký hiệu là E° hay $\text{Int}E$;

Tập hợp tất cả các điểm ngoài của E được gọi là *phần ngoài* của E và ký hiệu là $\text{Ext}E$;

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Tập hợp tất cả các điểm giới hạn của E được gọi là *tập dẫn xuất* của E và ký hiệu là E' ;

Tập hợp tất cả các điểm biên của E được gọi là *biên* của E và ký hiệu là ∂E .

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Tập hợp tất cả các điểm giới hạn của E được gọi là *tập dẫn xuất* của E và ký hiệu là E' ;

Tập hợp tất cả các điểm biên của E được gọi là *biên* của E và ký hiệu là ∂E .

1.1.9. Mệnh đề. Cho không gian tôpô X . Khi đó

- (1) Tập $E \subset X$ là đóng khi và chỉ khi $E' \subset E$;
- (2) $\bar{E} = E \cup E'$;
- (3) Bao đóng của E là tập đóng bé nhất chứa E .

1.1.10. Mệnh đề. Cho không gian tôpô X . Khi đó

- (1) Phần trong của E là tập mở lớn nhất được chứa trong E ;
- (2) Tập $E \subset X$ là mở khi và chỉ khi E là lân cận của mọi điểm thuộc nó.

Chứng minh xem như bài tập.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.11. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Họ $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ được gọi là một *cơ sở* của tôpô $\mathcal{T}$, nếu với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận U của x , tồn tại $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V \subset U$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.11. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Họ $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ được gọi là một cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$, nếu với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận U của x , tồn tại $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V \subset U$.

1.1.12. Định lý. Điều kiện cần và đủ để họ $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ là một cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$ là mọi $U \in \mathcal{T}$ có thể biểu diễn được dưới dạng $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ với $V_i \in \mathcal{B}, i \in I$.

Chứng minh. Đủ. Từ giả thiết điều kiện đủ ta có $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Bây giờ giả sử x là điểm bất kỳ thuộc X và U là lân cận mở bất kỳ của x . Vì $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ với $V_i \in \mathcal{B}, i \in I$, nên tồn tại $i_0 \in I$ sao cho $x \in V_{i_0} \subset U$.

CẦN Giả sử $\mathcal{B}$ là cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$. Khi đó $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Giả sử $U \in \mathcal{T}$, nghĩa là U là tập mở trong X . Theo Định nghĩa 1.1.11 với bất kỳ $x \in U$

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

tồn tại $V_x \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V_x \subset U$. Vì thế ta có $U \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset U$. Do đó ta thu được $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ với $V_x \in \mathcal{B}$ với mọi $x \in U$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

tồn tại $V_x \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V_x \subset U$. Vì thế ta có $U \subset \bigcup_{x \in U} V_x \subset U$. Do đó ta thu được $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ với $V_x \in \mathcal{B}$ với mọi $x \in U$.

1.1.13. Mệnh đề. Giả sử $\mathcal{B}$ là một họ các tập con nào đó của một tập hợp X cho trước sao cho $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$. Nếu với mọi cặp $U, V \in \mathcal{B}$ và với mọi $x \in U \cap V$, tồn tại $W \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in W \subset U \cap V$, thì tồn tại một tôpô $\mathcal{T}$ trên X nhận họ $\mathcal{B}$ làm cơ sở.

Chứng minh. Ký hiệu $\mathcal{T}$ là họ tất cả các hợp tùy ý của các phần tử thuộc $\mathcal{B}$. Khi đó dễ thấy rằng $\mathcal{T}$ thỏa mãn các điều kiện (T_1) và (T_2) .

Bây giờ giả sử $U, V \in \mathcal{T}$. Lấy bất kỳ $x \in U \cap V$, ta có $x \in U, x \in V$. Do đó tồn tại $V_1 \in \mathcal{B}$ và $V_2 \in \mathcal{B}$ để $x \in V_1 \subset U, x \in V_2 \subset V$. Bởi vậy $x \in V_1 \cap V_2$. Từ giả thiết suy ra tồn tại $W_x \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in W_x \subset V_1 \cap V_2 \subset U \cap V$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Từ đó suy ra $U \cap V \subset \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \subset U \cap V$. Vì thế ta có

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \in \mathcal{T}.$$

Do đó $\mathcal{T}$ là một tôpô. Từ Định lý 1.1.12 suy ra rằng $\mathcal{T}$ nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

Từ đó suy ra $U \cap V \subset \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \subset U \cap V$. Vì thế ta có

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \in \mathcal{T}.$$

Do đó $\mathcal{T}$ là một tôpô. Từ Định lý 1.1.12 suy ra rằng $\mathcal{T}$ nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở.

1.1.14. Định nghĩa. Họ σ các tập con của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là một *tiền cơ sở* của tôpô $\mathcal{T}$ trên X nếu $X = \bigcup \{S : S \in \sigma\}$ và họ tất cả các giao hữu hạn của các phần tử thuộc họ σ lập thành một cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$.

Ví dụ. Trong $\mathbb{R}$ họ $\sigma = \{(-\infty, a), (b, +\infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ là một tiền cơ sở của tôpô thông thường.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.15. Định nghĩa. Không gian tôpô X mà tôpô của nó có cơ sở đếm được được gọi là *không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai*.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.15. Định nghĩa. Không gian tôpô X mà tôpô của nó có cơ sở đếm được được gọi là *không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai*.

1.1.16. Mệnh đề. Giả sử A là tập con không đếm được của không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai X . Khi đó tập A chứa điểm giới hạn của nó.

Chứng minh. Giả sử A không chứa điểm giới hạn nào của nó. Khi đó với mọi $x \in A$, tồn tại lân cận U_x của x sao cho $U_x \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Giả sử $\mathcal{B}$ là cơ sở đếm được của tôpô $\mathcal{T}$ trên X . Khi đó tồn tại $B_x \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in B_x \subset U_x$ mà $B_x \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$. Suy ra tương ứng $x \mapsto B_x$ từ A vào $\mathcal{B}$ là một đơn ánh. Vì A là tập không đếm được, nên $\mathcal{B}$ cũng là họ không đếm được. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy A chứa điểm giới hạn của nó.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.17. Định nghĩa. Cho X là không gian tôpô, $A, B \subset X$. Tập A được gọi là *trù mật* trong tập hợp B nếu $B \subset \overline{A}$. Nếu $\overline{A} = X$, thì A được gọi là *trù mật khắp nơi* trong X .

Không gian tôpô X được gọi là *khả ly* nếu nó chứa một tập con đếm được trù mật khắp nơi trong X .

Ví dụ. $\mathbb{R}$ là không gian khả ly theo tôpô thông thường, vì có tập các số hữu tỷ trù mật trong $\mathbb{R}$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.17. Định nghĩa. Cho X là không gian tôpô, $A, B \subset X$. Tập A được gọi là *trù mật* trong tập hợp B nếu $B \subset \overline{A}$. Nếu $\overline{A} = X$, thì A được gọi là *trù mật khắp nơi* trong X .

Không gian tôpô X được gọi là *khả ly* nếu nó chứa một tập con đếm được trù mật khắp nơi trong X .

Ví dụ. $\mathbb{R}$ là không gian khả ly theo tôpô thông thường, vì có tập các số hữu tỷ trù mật trong $\mathbb{R}$.

1.1.18. Định lý. *Mỗi không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai là một không gian khả ly.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở đếm được trong X . Với mỗi $B \in \mathcal{B}$ ta chọn phần tử $x_B \in B$. Khi đó tập hợp $A = \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$ là đếm được. Ta sẽ chứng minh rằng $\overline{A} = X$. Muốn vậy ta sẽ chứng minh

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

rằng $X \setminus \bar{A} = \emptyset$. Thật vậy, vì $X \setminus \bar{A}$ là tập mở trong X và $(X \setminus \bar{A}) \cap A = \emptyset$, nên $X \setminus \bar{A} = \emptyset$. Vì nếu $X \setminus \bar{A} \neq \emptyset$, giả sử $x \in X \setminus \bar{A}$. Khi đó tồn tại $B \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in B \subset X \setminus \bar{A}$. Suy ra $x_B \in A \cap X \setminus \bar{A}$. Điều này mâu thuẫn với điều là $(X \setminus \bar{A}) \cap A = \emptyset$. Vậy $X = \bar{A}$.

1.1.19. Định nghĩa. Cho không gian tôpô X , $x \in X$ và $\mathcal{U}(x)$ là họ tất cả các lân cận của x . Họ $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ được gọi là *cơ sở lân cận của điểm* x nếu với mọi $U \in \mathcal{U}(x)$ tồn tại $V \in \mathcal{B}(x)$ sao cho $x \in V \subset U$.

Không gian tôpô X mà tại mỗi điểm của nó có một cơ sở lân cận đếm được, được gọi là *không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất*.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.20. Mệnh đề. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương

- (a) $x \in \overline{A}$;
- (b) Với mỗi cơ sở $\mathcal{B}(x)$ của x và với mỗi $U \in \mathcal{B}(x)$ ta có $U \cap A \neq \emptyset$;
- (c) Tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}(x)$ của x sao cho $U \cap A \neq \emptyset$ với mỗi $U \in \mathcal{B}(x)$.

Chứng minh. (a) $\Rightarrow$ (b) Giả sử rằng (b) không đúng, nghĩa là có một cơ sở $\mathcal{B}(x)$ của x và một $U \in \mathcal{B}(x)$ sao cho $U \cap A = \emptyset$. Khi đó ta có $A \subset X \setminus U$ và $X \setminus U$ đóng. Vì thế $\overline{A} \subset X \setminus U$ và $x \notin \overline{A}$. Điều này mâu thuẫn với (a).

(b) $\Rightarrow$ (c) là hiển nhiên.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

(c) $\Rightarrow$ (a) Giả sử rằng (a) không đúng, nghĩa là $x \notin \overline{A}$. Khi đó, tồn tại một tập đóng F chứa A sao cho $x \notin F$. Xét tập $V = X \setminus F$, ta có V mở, $x \in V$ và $V \cap A = \emptyset$. Vì $\mathcal{B}(x)$ là cơ sở lân cận của x , nên tồn tại $U \in \mathcal{B}(x)$ sao cho $x \in U \subset V$. Lúc đó ta có $U \cap A = \emptyset$. Điều này mâu thuẫn với (c).

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

(c) $\Rightarrow$ (a) Giả sử rằng (a) không đúng, nghĩa là $x \notin \bar{A}$. Khi đó, tồn tại một tập đóng F chứa A sao cho $x \notin F$. Xét tập $V = X \setminus F$, ta có V mở, $x \in V$ và $V \cap A = \emptyset$. Vì $\mathcal{B}(x)$ là cơ sở lân cận của x , nên tồn tại $U \in \mathcal{B}(x)$ sao cho $x \in U \subset V$. Lúc đó ta có $U \cap A = \emptyset$. Điều này mâu thuẫn với (c).

1.1.21. Hệ quả. Nếu U là tập mở và $U \cap A = \emptyset$, thì $U \cap \bar{A} = \emptyset$.

Đặc biệt, nếu U và V là các tập mở rời nhau, thì $U \cap \bar{V} = \emptyset = \bar{U} \cap V$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x \in U \cap \bar{A}$. Vì $\mathcal{U}(x)$ cũng là một cơ sở lân cận của x , nên theo Mệnh đề 1.1.20 (b) ta có $U \cap A \neq \emptyset$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì thế $U \cap \bar{A} = \emptyset$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.22. Định nghĩa. a) Họ $\{A_s\}_{s \in S}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là *hữu hạn địa phương* nếu với mỗi điểm $x \in X$ tồn tại một lân cận U của x sao cho tập $\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ là tập hữu hạn.

b) Họ $\{A_s\}_{s \in S}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là *rời rạc* nếu với mỗi điểm $x \in X$ tồn tại một lân cận U của x sao cho U có giao với nhiều nhất là một tập hợp của họ này.

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.22. Định nghĩa. a) Họ $\{A_s\}_{s \in S}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là *hữu hạn địa phương* nếu với mỗi điểm $x \in X$ tồn tại một lân cận U của x sao cho tập $\{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ là tập hữu hạn.

b) Họ $\{A_s\}_{s \in S}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là *rời rạc* nếu với mỗi điểm $x \in X$ tồn tại một lân cận U của x sao cho U có giao với nhiều nhất là một tập hợp của họ này.

1.1.23. Định lý. Với mỗi họ hữu hạn địa phương $\{A_s\}_{s \in S}$ ta có đẳng thức
$$\overline{\bigcup_{s \in S} A_s} = \bigcup_{s \in S} \overline{A_s}.$$

Chứng minh. Từ các tính chất của bao đóng ta suy ra $\overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$ với mỗi $s \in S$. Vì thế ta có $\bigcup_{s \in S} \overline{A_s} \subset \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$. Để chứng minh bao hàm thức ngược lại trước hết ta lưu ý rằng: nhờ tính hữu hạn địa phương

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

của họ $\{A_s\}_{s \in S}$, với mỗi $x \in \overline{\bigcup_{s \in S} A_s}$, tồn tại một lân cận U của x sao cho tập $S_x = \{s \in S : U \cap A_s \neq \emptyset\}$ là hữu hạn. Khi đó từ Mệnh đề 1.1.20 ta suy ra rằng $x \notin \overline{\bigcup_{s \in S \setminus S_x} A_s}$. Vì $x \in \overline{\bigcup_{s \in S} A_s} = \overline{\bigcup_{s \in S_x} A_s} \cup \overline{\bigcup_{s \in S \setminus S_x} A_s}$, nên từ nhận xét trên ta có $x \in \bigcup_{s \in S_x} \overline{A_s} \subset \bigcup_{s \in S} \overline{A_s}$. Vậy $\overline{\bigcup_{s \in S} A_s} \subset \bigcup_{s \in S} \overline{A_s}$.

Do đó ta có

$$\overline{\bigcup_{s \in S} A_s} = \bigcup_{s \in S} \overline{A_s}.$$

Từ định lý trên ta có các hệ quả sau

Chương 1. Không gian tôpô

1.1 Các khái niệm cơ bản

1.1.24. Hệ quả. Giả sử $\{A_s\}_{s \in S}$ là họ hữu hạn địa phương và $A = \bigcup_{s \in S} A_s$. Nếu A_s đóng với mọi $s \in S$, thì A là đóng và nếu A_s vừa mở vừa đóng với mọi $s \in S$ thì A vừa mở vừa đóng.

1.1.25. Hệ quả. Nếu $\{A_s\}_{s \in S}$ là họ hữu hạn địa phương (rời rạc), thì họ $\{\overline{A_s}\}_{s \in S}$ cũng là họ hữu hạn địa phương (tương ứng, rời rạc).

Chứng minh các Hệ quả này dành cho bạn đọc.

Chương 1. Không gian tôpô

1.2 Tôpô cảm sinh, tính tách được

1.2. Tôpô cảm sinh, tính tách được

1.2.1. Định nghĩa. Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô, $Y \subset X$. Khi đó họ $\mathcal{U} = \{U \subset Y : U = Y \cap V, V \in \mathcal{T}\}$ là một tôpô trên Y . Tôpô $\mathcal{U}$ được gọi là *tôpô cảm sinh bởi tôpô $\mathcal{T}$ trên Y* .

Không gian tôpô $(Y, \mathcal{U})$ được gọi là *không gian con* của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$.

Nhận xét. Nếu $(Y, \mathcal{U})$ là không gian con của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ và $(Z, \mathcal{B})$ là không gian con của không gian $(Y, \mathcal{U})$, thì $(Z, \mathcal{B})$ là không gian con của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.2 Tôpô cảm sinh, tính tách được

1.2. Tôpô cảm sinh, tính tách được

1.2.1. Định nghĩa. Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô, $Y \subset X$. Khi đó họ $\mathcal{U} = \{U \subset Y : U = Y \cap V, V \in \mathcal{T}\}$ là một tôpô trên Y . Tôpô $\mathcal{U}$ được gọi là *tôpô cảm sinh bởi tôpô $\mathcal{T}$ trên Y* .

Không gian tôpô $(Y, \mathcal{U})$ được gọi là *không gian con* của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$.

Nhận xét. Nếu $(Y, \mathcal{U})$ là không gian con của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ và $(Z, \mathcal{B})$ là không gian con của không gian $(Y, \mathcal{U})$, thì $(Z, \mathcal{B})$ là không gian con của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$.

1.2.2. Định lý. Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô, $(Y, \mathcal{U})$ là không gian con của nó và $A \subset Y$. Khi đó

(a) Tập A là đóng theo tôpô $\mathcal{U}$ khi và chỉ khi $A = Y \cap F$ với F là tập đóng theo tôpô $\mathcal{T}$;

Chương 1. Không gian tôpô

1.2 Tôpô cảm sinh, tính tách được

(b) Điểm $y \in Y$ là điểm giới hạn của tập A theo tôpô $\mathcal{U}$ khi và chỉ khi nó là điểm giới hạn của A theo tôpô $\mathcal{T}$;

$$(c) \overline{A}^{\mathcal{U}} = \overline{A}^{\mathcal{T}} \cap Y.$$

Chứng minh. (a) Ta có A đóng trong Y theo tôpô $\mathcal{U}$ khi và chỉ khi $Y \setminus A$ là mở trong Y theo tôpô $\mathcal{U}$ khi và chỉ khi $Y \setminus A = Y \cap V$ với V mở theo tôpô $\mathcal{T}$ khi và chỉ khi $A = (X \setminus V) \cap Y$ với V mở theo tôpô $\mathcal{T}$ khi và chỉ khi $A = Y \cap F$ với F đóng theo tôpô $\mathcal{T}$.

(b) Giả sử $y \in Y$ là điểm giới hạn của A theo tôpô $\mathcal{U}$. Khi đó với mọi lân cận mở U của y theo $\mathcal{T}$, tập $V = U \cap Y$ là lân cận mở của y theo tôpô $\mathcal{U}$. Do đó ta có $V \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. Vì thế $U \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$, nghĩa là y là điểm giới hạn của A theo $\mathcal{T}$.

Ngược lại, giả sử $y \in Y$ là điểm giới hạn của A theo tôpô $\mathcal{T}$ và U là lân cận mở của y trong Y theo tôpô $\mathcal{U}$. Khi đó $U = Y \cap V$ với V là tập mở theo tôpô $\mathcal{T}$. Vì $V \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ và $A \subset Y$ nên ta có

Chương 1. Không gian tôpô

1.2 Tôpô cảm sinh, tính tách được

$U \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$, nghĩa là y là điểm giới hạn của A theo tôpô $\mathcal{U}$.

$$\begin{aligned} \text{(c) Ta có } \overline{A}^{\mathcal{U}} &= \bigcap \{F \subset Y : F \text{ đóng theo } \mathcal{U}, A \subset F\} = \\ &= \bigcap \{E \cap Y : E \text{ đóng theo } \mathcal{T}, A \subset E\} = \\ &= [\bigcap \{E : E \text{ đóng theo } \mathcal{T}, A \subset E\}] \cap Y = \overline{A}^{\mathcal{T}} \cap Y. \end{aligned}$$

Chương 1. Không gian tôpô

1.2 Tôpô cảm sinh, tính tách được

$U \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$, nghĩa là y là điểm giới hạn của A theo tôpô $\mathcal{U}$.

$$\begin{aligned} \text{(c) Ta có } \overline{A}^{\mathcal{U}} &= \bigcap \{F \subset Y : F \text{ đóng theo } \mathcal{U}, A \subset F\} = \\ &= \bigcap \{E \cap Y : E \text{ đóng theo } \mathcal{T}, A \subset E\} = \\ &= [\bigcap \{E : E \text{ đóng theo } \mathcal{T}, A \subset E\}] \cap Y = \overline{A}^{\mathcal{T}} \cap Y. \end{aligned}$$

1.2.3. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô. Các tập con A, B của X được gọi là *tách được* nếu $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.2 Tôpô cảm sinh, tính tách được

$U \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$, nghĩa là y là điểm giới hạn của A theo tôpô $\mathcal{U}$.

$$\begin{aligned} \text{(c) Ta có } \overline{A}^{\mathcal{U}} &= \bigcap \{F \subset Y : F \text{ đóng theo } \mathcal{U}, A \subset F\} = \\ &= \bigcap \{E \cap Y : E \text{ đóng theo } \mathcal{T}, A \subset E\} = \\ &= [\bigcap \{E : E \text{ đóng theo } \mathcal{T}, A \subset E\}] \cap Y = \overline{A}^{\mathcal{T}} \cap Y. \end{aligned}$$

1.2.3. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô. Các tập con A, B của X được gọi là *tách được* nếu $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.

1.2.4. Mệnh đề. Các tập con A, B của không gian tôpô X là tách được khi và chỉ khi chúng là các tập vừa mở vừa đóng rời nhau trong không gian con $A \cup B$.

Chứng minh. CẦN. Giả sử A và B tách được. Ký hiệu $\widetilde{B}$ là bao đóng của B trong không gian con $A \cup B$ và $\overline{B}$ là bao đóng của B trong X .

Chương 1. Không gian tôpô

1.2 Tôpô cảm sinh, tính tách được

Khi đó nhờ Mệnh đề 1.2.2 ta có

$$\tilde{B} = \overline{B} \cap (A \cup B) = (\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B) = B,$$

nghĩa là B đóng trong không gian con $A \cup B$.

Tương tự ta chứng minh được A đóng trong không gian con $A \cup B$.
Do $A = (A \cup B) \setminus B$ và $B = (A \cup B) \setminus A$ và chứng minh trên ta suy ra A và B là các tập mở trong không gian con $A \cup B$. Dễ thấy $A \cap B = \emptyset$.
Đủ. Giả sử A và B là các tập vừa mở vừa đóng trong không gian con $A \cup B$ và $A \cap B = \emptyset$. Ký hiệu $\tilde{A}$ là bao đóng của A trong không gian con $A \cup B$ và $\overline{A}$ là bao đóng của A trong X . Khi đó ta có

$$\overline{A} \cap B = [\tilde{A} \cap (A \cup B)] \cap B = \tilde{A} \cap B = A \cap B = \emptyset.$$

Tương tự ta chứng minh được $\overline{B} \cap A = \emptyset$. Vậy A và B là các tập tách được.

Chương 1. Không gian tôpô

1.2 Tôpô cảm sinh, tính tách được

1.2.5. Định lý. Giả sử Y và Z là các tập con cùng đóng hoặc cùng mở của không gian tôpô X . Khi đó $Y \setminus Z$ và $Z \setminus Y$ là tách được.

Chứng minh của định lý này dành cho độc giả tham khảo ở [2].

1.2.6. Định lý. Giả sử không gian tôpô X là hợp của các tập con Y và Z sao cho $Y \setminus Z$ và $Z \setminus Y$ tách được. Khi đó bao đóng trong X của tập $A \subset X$ là hợp của bao đóng trong Y của tập $A \cap Y$ với bao đóng trong Z của tập $A \cap Z$.

Chứng minh mời độc giả xem [2].

1.2.7. Hệ quả. Giả sử không gian tôpô X là hợp của các tập Y và Z sao cho $Y \setminus Z$ và $Z \setminus Y$ tách được. Khi đó tập con A của X là đóng (mở) khi và chỉ khi tập $A \cap Y$ là đóng (tương ứng, mở) trong Y và tập $A \cap Z$ là đóng (tương ứng, mở) trong Z .

Chứng minh mời độc giả xem [2].

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

1.3. Lưới và sự hội tụ

1.3.1. Định nghĩa. Cho tập $D \neq \emptyset$. Quan hệ $\geq$ trên D được gọi là một *sự định hướng* trên D nếu thỏa mãn các điều kiện

- (a) Nếu m, n, p là các phần tử thuộc D sao cho $m \geq n$, $n \geq p$, thì $m \geq p$;
- (b) $m \geq m$ với mọi $m \in D$;
- (c) Nếu $m, n \in D$, thì tồn tại $p \in D$ sao cho $p \geq m$ và $p \geq n$.

Tập hợp D cùng với một sự định hướng $\geq$ trên D được gọi là một *tập có hướng* và ký hiệu là $(D, \geq)$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

1.3. Lưới và sự hội tụ

1.3.1. Định nghĩa. Cho tập $D \neq \emptyset$. Quan hệ $\geq$ trên D được gọi là một *sự định hướng* trên D nếu thỏa mãn các điều kiện

(a) Nếu m, n, p là các phần tử thuộc D sao cho $m \geq n$, $n \geq p$, thì $m \geq p$;

(b) $m \geq m$ với mọi $m \in D$;

(c) Nếu $m, n \in D$, thì tồn tại $p \in D$ sao cho $p \geq m$ và $p \geq n$.

Tập hợp D cùng với một sự định hướng $\geq$ trên D được gọi là một *tập có hướng* và ký hiệu là $(D, \geq)$.

1.3.2. Định nghĩa. Giả sử $(D, \geq)$ là một tập có hướng. Ta gọi một hàm $S : D \rightarrow X$ là một *lưới trong* X (hay đơn giản là *lưới* hoặc là *dãy suy rộng*) và ký hiệu là $\{S_n, n \in D, \geq\}$ (hay $\{S_n\}_{n \in D}$).

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

Lưới $\{S_n, n \in D, \geq\}$ được gọi là *nằm trong* $U \subset X$ từ một lúc nào đó nếu tồn tại một $m \in D$ sao cho với $n \in D$ và $n \geq m$, thì $S_n \in U$.

Lưới $\{S_n, n \in D, \geq\}$ được gọi là *thường xuyên gặp* U nếu với mỗi $m \in D$ tồn tại $n \in D$ sao cho $n \geq m$ và $S_n \in U$.

1.3.3. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $\{S_n\}_{n \in D}$ là một lưới trong X . Lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ được gọi là *hội tụ trong* X đến điểm $s \in X$, nếu với mọi lân cận U của s , lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ nằm trong U từ một lúc nào đó.

Không gian tôpô X được gọi là T_2 -không gian hay (*không gian Hausdorff*) nếu với mọi $x, y \in X$ mà $x \neq y$ tồn tại các lân cận U_x của x và V_y của y sao cho $U_x \cap V_y = \emptyset$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

Lưới $\{S_n, n \in D, \geq\}$ được gọi là *nằm trong* $U \subset X$ từ một lúc nào đó nếu tồn tại một $m \in D$ sao cho với $n \in D$ và $n \geq m$, thì $S_n \in U$.

Lưới $\{S_n, n \in D, \geq\}$ được gọi là *thường xuyên gặp* U nếu với mỗi $m \in D$ tồn tại $n \in D$ sao cho $n \geq m$ và $S_n \in U$.

1.3.3. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $\{S_n\}_{n \in D}$ là một lưới trong X . Lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ được gọi là *hội tụ trong* X đến điểm $s \in X$, nếu với mọi lân cận U của s , lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ nằm trong U từ một lúc nào đó.

Không gian tôpô X được gọi là T_2 -không gian hay (*không gian Hausdorff*) nếu với mọi $x, y \in X$ mà $x \neq y$ tồn tại các lân cận U_x của x và V_y của y sao cho $U_x \cap V_y = \emptyset$.

1.3.4. Định lý. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Khi đó

(a) Điểm s là điểm giới hạn của A khi và chỉ khi tồn tại một lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ trong $A \setminus \{s\}$ hội tụ đến s ;

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

(b) Điểm s thuộc bao đóng $\overline{A}$ khi và chỉ khi tồn tại một lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ trong A hội tụ đến s ;

(c) Tập A là đóng trong X khi và chỉ khi không có lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ nào trong A hội tụ đến điểm thuộc $X \setminus A$.

Chứng minh dành cho độc giả, xem [2].

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

(b) Điểm s thuộc bao đóng $\overline{A}$ khi và chỉ khi tồn tại một lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ trong A hội tụ đến s ;

(c) Tập A là đóng trong X khi và chỉ khi không có lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ nào trong A hội tụ đến điểm thuộc $X \setminus A$.

Chứng minh dành cho độc giả, xem [2].

1.3.5. Định lý. Không gian tôpô X là Hausdorff khi và chỉ khi không có lưới nào trong X hội tụ đến hai điểm khác nhau.

Chứng minh dành cho độc giả, xem [2].

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

(b) Điểm s thuộc bao đóng $\overline{A}$ khi và chỉ khi tồn tại một lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ trong A hội tụ đến s ;

(c) Tập A là đóng trong X khi và chỉ khi không có lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ nào trong A hội tụ đến điểm thuộc $X \setminus A$.

Chứng minh dành cho độc giả, xem [2].

1.3.5. Định lý. Không gian tôpô X là Hausdorff khi và chỉ khi không có lưới nào trong X hội tụ đến hai điểm khác nhau.

Chứng minh dành cho độc giả, xem [2].

1.3.6. Định nghĩa. Lưới $\{T_m\}_{m \in D}$ được gọi là *lưới con* của lưới $\{S_n\}_{n \in E}$ nếu tồn tại một hàm $N : D \rightarrow E$ sao cho

(a) $T = S_o N$ (hay $T_i = S_{N_i}$, $i \in D$);

(b) Với mỗi $m \in E$ tồn tại một $n \in D$ sao cho nếu $p \geq n$, thì $N_p \geq m$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

1.3.7. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $\{S_n\}_{n \in D}$ là lưới trong X . Điểm $s \in X$ được gọi là *điểm giới hạn của lưới* $\{S_n\}_{n \in D}$, nếu lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ thường xuyên gặp mỗi lân cận của s .

Chương 1. Không gian tôpô

1.3. Lưới và sự hội tụ

1.3.7. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $\{S_n\}_{n \in D}$ là lưới trong X . Điểm $s \in X$ được gọi là *điểm giới hạn của lưới* $\{S_n\}_{n \in D}$, nếu lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ thường xuyên gặp mỗi lân cận của s .

1.3.8. Định lý. Điểm $s \in X$ là điểm giới hạn của lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ trong không gian tôpô X khi và chỉ khi tồn tại một lưới con $\{S'_m\}_{m \in D'}$ của lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ hội tụ đến s .

Chứng minh dành cho độc giả, xem [2].

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4.1. Định nghĩa. Cho các không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ và $(Y, \mathcal{U})$. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ vào không gian tôpô $(Y, \mathcal{U})$ được gọi là $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ -*liên tục* (hay đơn giản, *liên tục*) nếu với mọi $U \in \mathcal{U}$ ta có $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4.1. Định nghĩa. Cho các không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ và $(Y, \mathcal{U})$. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ vào không gian tôpô $(Y, \mathcal{U})$ được gọi là $(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ -liên tục (hay đơn giản, liên tục) nếu với mọi $U \in \mathcal{U}$ ta có $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

1.4.2. Định lý. Cho ánh xạ $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{U})$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương

- (a) f là ánh xạ liên tục;
- (b) Với mọi tập đóng $B \subset Y$ ta có $f^{-1}(B)$ đóng trong X ;
- (c) Với mọi tập S thuộc tiền cơ sở σ trong Y , $f^{-1}(S)$ là tập mở trong X ;
- (d) Với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận U của $f(x)$ ta có $f^{-1}(U)$ là một lân cận của x ;

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

- (e) Với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận U của $f(x)$, tồn tại lân cận V của x sao cho $f(V) \subset U$;
- (f) Với mọi điểm $s \in X$ và mọi lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ trong X hội tụ tới s ta có lưới $\{f(S_n)\}_{n \in D}$ hội tụ đến điểm $f(s)$;
- (g) Với mọi tập con $A \subset X$ ta có $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
- (h) Với mọi tập con $B \subset Y$ ta có $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$;
- (i) Với mọi tập con $B \subset Y$ ta có $f^{-1}(\text{Int} B) \subset \text{Int} f^{-1}(B)$.

Chứng minh dành cho độc giả, xem tài liệu tham khảo [2].

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

- (e) Với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận U của $f(x)$, tồn tại lân cận V của x sao cho $f(V) \subset U$;
- (f) Với mọi điểm $s \in X$ và mọi lưới $\{S_n\}_{n \in D}$ trong X hội tụ tới s ta có lưới $\{f(S_n)\}_{n \in D}$ hội tụ đến điểm $f(s)$;
- (g) Với mọi tập con $A \subset X$ ta có $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
- (h) Với mọi tập con $B \subset Y$ ta có $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$;
- (i) Với mọi tập con $B \subset Y$ ta có $f^{-1}(\text{Int} B) \subset \text{Int} f^{-1}(B)$.

Chứng minh dành cho độc giả, xem tài liệu tham khảo [2].

1.4.3. Định lý. Giả sử X, Y, Z là các không gian tôpô. Nếu $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ là ánh xạ liên tục, thì ánh xạ hợp $gf : X \rightarrow Z$ là liên tục.

Chứng minh dành cho độc giả.

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4.4. Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô X lên không gian tôpô Y được gọi là *đồng phôi* nếu f là một song ánh và cả hai ánh xạ f và f^{-1} đều liên tục.

Nếu $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ đồng phôi thì ta nói rằng không gian tôpô X *đồng phôi* với không gian tôpô Y và ký hiệu là $X \simeq Y$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4.4. Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô X lên không gian tôpô Y được gọi là *đồng phôi* nếu f là một song ánh và cả hai ánh xạ f và f^{-1} đều liên tục.

Nếu $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ đồng phôi thì ta nói rằng không gian tôpô X *đồng phôi* với không gian tôpô Y và ký hiệu là $X \simeq Y$.

1.4.5. Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y được gọi là *ánh xạ mở (đóng)* nếu ảnh của mọi tập mở (đóng) trong X là tập mở (đóng) trong Y .

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4.4. Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô X lên không gian tôpô Y được gọi là *đồng phôi* nếu f là một song ánh và cả hai ánh xạ f và f^{-1} đều liên tục.

Nếu $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ đồng phôi thì ta nói rằng không gian tôpô X *đồng phôi* với không gian tôpô Y và ký hiệu là $X \simeq Y$.

1.4.5. Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y được gọi là *ánh xạ mở* (đóng) nếu ảnh của mọi tập mở (đóng) trong X là tập mở (đóng) trong Y .

1.4.6. Mệnh đề. Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh liên tục từ không gian tôpô X lên không gian tôpô Y . Khi đó các khẳng định sau là tương đương: (a) f là phép đồng phôi;
(b) f là ánh xạ mở;
(c) f là ánh xạ đóng.

Chứng minh dành cho độc giả.

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4.7. Nhận xét. Nếu $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ liên tục và $A \subset X$. Ký hiệu $f|_A$ là cái thu hẹp của f lên không gian con A của X . Khi đó $f|_A : A \rightarrow Y$ là ánh xạ liên tục từ không gian con A vào Y .

Vấn đề đặt ra là: Giả sử $\{A_i\}_{i \in I}$ là một họ các tập con của không gian tôpô X sao cho $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ và $f_i : A_i \rightarrow Y$, $i \in I$ là ánh xạ liên tục sao cho $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$. Với điều kiện nào thì ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ xác định bởi $f(x) = f_i(x)$ nếu $x \in A_i$ là ánh xạ liên tục?

1.4.8. Định nghĩa. Họ $\mathcal{U}$ các tập hợp được gọi là *cái phủ* của tập hợp B nếu $B \subset \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\}$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4.9. Định nghĩa. Ta nói rằng tôpô của không gian tôpô X là *tương thích* với cái phủ $\mathcal{S} = \{A_i\}_{i \in I}$ của X nếu từ điều kiện $M \subset X$ và $M \cap A_i$ là mở (đóng) trong A_i , với mọi $i \in I$ ta suy ra M là mở (đóng) trong không gian tôpô X .

Chương 1. Không gian tôpô

1.4. Ánh xạ liên tục, ánh xạ đồng phôi

1.4.9. Định nghĩa. Ta nói rằng tôpô của không gian tôpô X là *tương thích* với cái phủ $\mathcal{S} = \{A_i\}_{i \in I}$ của X nếu từ điều kiện $M \subset X$ và $M \cap A_i$ là mở (đóng) trong A_i , với mọi $i \in I$ ta suy ra M là mở (đóng) trong không gian tôpô X .

1.4.10. Định lý. Nếu tôpô của không gian tôpô X tương thích với cái phủ $\mathcal{S}$ của X , thì ánh xạ f liên tục khi và chỉ khi cái thu hẹp của nó lên các tập hợp A_i của cái phủ $\mathcal{S}$ là liên tục trên A_i , với mọi $i \in I$.

Chứng minh. CẦN Hiển nhiên.

ĐỦ Giả sử V là tập mở bất kỳ trong Y . Với mỗi $i \in I$ ta có $f_i = f|_{A_i} : A_i \rightarrow Y$. Khi đó ta có $U = f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$. Vì f_i liên tục, nên ta có $U \cap A_i = f_i^{-1}(V)$ là mở trong A_i . Từ giả thiết và Định nghĩa 1.4.9 ta suy ra U mở trong X .

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5. Các tiên đề tách

1.5.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là T_1 -không gian nếu với mọi $x, y \in X$ mà $x \neq y$ tồn tại các lân cận U_x của x và V_y của y sao cho $y \notin U_x$ và $x \notin V_y$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5. Các tiên đề tách

1.5.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là T_1 -không gian nếu với mọi $x, y \in X$ mà $x \neq y$ tồn tại các lân cận U_x của x và V_y của y sao cho $y \notin U_x$ và $x \notin V_y$.

1.5.2. Mệnh đề. Không gian tôpô X là T_1 -không gian khi và chỉ khi với mọi $x \in X$ tập một điểm $\{x\}$ là tập đóng trong X .

Chứng minh dành cho độc giả.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5. Các tiên đề tách

1.5.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là T_1 -không gian nếu với mọi $x, y \in X$ mà $x \neq y$ tồn tại các lân cận U_x của x và V_y của y sao cho $y \notin U_x$ và $x \notin V_y$.

1.5.2. Mệnh đề. Không gian tôpô X là T_1 -không gian khi và chỉ khi với mọi $x \in X$ tập một điểm $\{x\}$ là tập đóng trong X .

Chứng minh dành cho độc giả.

1.5.3. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là T_2 -không gian (hay là không gian Hausdorff) nếu với mọi $x, y \in X$ mà $x \neq y$ tồn tại các lân cận U_x của x và V_y của y sao cho $U_x \cap V_y = \emptyset$.

Nhận xét. Mọi T_2 -không gian là T_1 -không gian.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.4. Mệnh đề. *Mọi không gian con của một T_2 -không gian là một T_2 -không gian.*

Chứng minh dành cho độc giả.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.4. Mệnh đề. *Mọi không gian con của một T_2 -không gian là một T_2 -không gian.*

Chứng minh dành cho độc giả.

1.5.5. Mệnh đề. *Giả sử X là một không gian tôpô, Y là không gian Hausdorff, $f, g : X \rightarrow Y$ là các ánh xạ liên tục. Khi đó*

- (a) Tập $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ là tập hợp đóng;*
- (b) Nếu $f = g$ trên một tập hợp con trù mật của X , thì $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.*

Chứng minh dành cho độc giả.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.4. Mệnh đề. Mọi không gian con của một T_2 -không gian là một T_2 -không gian.

Chứng minh dành cho độc giả.

1.5.5. Mệnh đề. Giả sử X là một không gian tôpô, Y là không gian Hausdorff, $f, g : X \rightarrow Y$ là các ánh xạ liên tục. Khi đó

- (a) Tập $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ là tập hợp đóng;
- (b) Nếu $f = g$ trên một tập hợp con trù mật của X , thì $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.

Chứng minh dành cho độc giả.

1.5.6. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *chính qui* nếu với mọi $x \in X$ và với mọi tập đóng F trong X không chứa x , tồn tại một lân cận U_x của điểm x và lân cận V_F của tập F sao cho $U_x \cap V_F = \emptyset$.

Không gian chính qui và T_1 -không gian được gọi là T_3 -không gian.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.7. Định lý. Không gian tôpô X là chính qui khi và chỉ khi với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận mở U của x , tồn tại một lân cận mở V của x sao cho $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.

Chứng minh. CẦN Giả sử x là điểm bất kỳ trong X và U là lân cận mở bất kỳ của x . Đặt $F = X \setminus U$. Khi đó F là tập đóng trong X không chứa x . Vì X là không gian chính qui, tồn tại lân cận mở U_x của x và lân cận mở V_F của F sao cho $U_x \cap V_F = \emptyset$. Đặt $V = U_x$. Khi đó ta có $V \subset X \setminus V_F$. Vì thế ta có $x \in V \subset \overline{V} \subset \overline{X \setminus V_F} \subset X \setminus V_F \subset U$.

ĐỦ Giả x là điểm bất kỳ trong X và F là tập đóng bất kỳ trong X không chứa x . Đặt $U = X \setminus F$. Khi đó ta có $x \in U$. Nhờ giả thiết điều kiện đủ, tồn tại tập mở V trong X sao cho $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Đặt $U_x = V$ và $V_F = X \setminus \overline{V}$. Khi đó U_x, V_F thứ tự là lân cận của điểm x và tập F thoả mãn $U_x \cap V_F = \emptyset$.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.8. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *hoàn toàn chính qui* nếu với mọi $x \in X$ và mọi tập đóng F không chứa x , tồn tại một ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ và $f(y) = 1$ với mọi $y \in F$.

Một không gian hoàn toàn chính qui và là T_1 -không gian được gọi là *không gian Tikhônôp* (hay $T_{3\frac{1}{2}}$ -không gian).

Nhận xét. Một không gian hoàn toàn chính qui là không gian chính qui. Từ đó suy ra một không gian Tikhônôp là T_3 -không gian.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.8. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *hoàn toàn chính qui* nếu với mọi $x \in X$ và mọi tập đóng F không chứa x , tồn tại một ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ và $f(y) = 1$ với mọi $y \in F$.

Một không gian hoàn toàn chính qui và là T_1 -không gian được gọi là *không gian Tikhônôp* (hay $T_{3\frac{1}{2}}$ -không gian).

Nhận xét. Một không gian hoàn toàn chính qui là không gian chính qui. Từ đó suy ra một không gian Tikhônôp là T_3 -không gian.

1.5.9. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *không gian chuẩn tắc* nếu với mọi cặp các tập con đóng A, B bất kỳ rời nhau của X , tồn tại các lân cận U của A và V của B sao cho $U \cap V = \emptyset$.

Một không gian chuẩn tắc và T_1 -không gian được gọi là T_4 -không gian.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.8. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *hoàn toàn chính qui* nếu với mọi $x \in X$ và mọi tập đóng F không chứa x , tồn tại một ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ và $f(y) = 1$ với mọi $y \in F$.

Một không gian hoàn toàn chính qui và là T_1 -không gian được gọi là *không gian Tikhônôp* (hay $T_{3\frac{1}{2}}$ -không gian).

Nhận xét. Một không gian hoàn toàn chính qui là không gian chính qui. Từ đó suy ra một không gian Tikhônôp là T_3 -không gian.

1.5.9. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *không gian chuẩn tắc* nếu với mọi cặp các tập con đóng A, B bất kỳ rời nhau của X , tồn tại các lân cận U của A và V của B sao cho $U \cap V = \emptyset$.

Một không gian chuẩn tắc và T_1 -không gian được gọi là T_4 -không gian.

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.10. Định lý. *Không gian tôpô X là chuẩn tắc khi và chỉ khi với mọi tập đóng F và với mọi tập mở U trong X chứa F , tồn tại tập mở V trong X sao cho $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Chứng minh tương tự Định lý 1.5.7, dành cho bạn đọc.

1.5.11. Định lý. *Mọi không gian metric đều là T_4 -không gian.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

Chương 1. Không gian tôpô

1.5. Các tiên đề tách

1.5.10. Định lý. *Không gian tôpô X là chuẩn tắc khi và chỉ khi với mọi tập đóng F và với mọi tập mở U trong X chứa F , tồn tại tập mở V trong X sao cho $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Chứng minh tương tự Định lý 1.5.7, dành cho bạn đọc.

1.5.11. Định lý. *Mọi không gian metric đều là T_4 -không gian.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

1.5.12. Định lý (Uryson). *Nếu A, B là hai tập đóng bất kỳ rời nhau trong không gian chuẩn tắc X , thì tồn tại một hàm liên tục $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên X sao cho*

$$(a) \quad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{với mọi } x \in X;$$

$$(b) \quad f(x) = 0 \quad \text{với mọi } x \in A;$$

$$(c) \quad f(x) = 1 \quad \text{với mọi } x \in B.$$

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.1 Các khái niệm cơ bản

2.1. Tổng tôpô

2.1.1. Định nghĩa. Cho họ các không gian tôpô $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, trong đó $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ nếu $\alpha \neq \beta$ và $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Giả sử $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ là ánh xạ nhúng, $\alpha \in \Lambda$. Gọi $\mathcal{T}$ là tôpô mịn nhất trên X sao cho tất cả các ánh xạ i_α , $\alpha \in \Lambda$ liên tục. Tập hợp X cùng với tôpô $\mathcal{T}$ được gọi là *tổng tôpô* của các không gian tôpô $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ và ký hiệu là $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ hoặc $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_k$ nếu $\Lambda = \{1, 2, \dots, k\}$.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.1 Các khái niệm cơ bản

2.1. Tổng tôpô

2.1.1. Định nghĩa. Cho họ các không gian tôpô $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, trong đó $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ nếu $\alpha \neq \beta$ và $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Giả sử $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ là ánh xạ nhúng, $\alpha \in \Lambda$. Gọi $\mathcal{T}$ là tôpô mịn nhất trên X sao cho tất cả các ánh xạ i_α , $\alpha \in \Lambda$ liên tục. Tập hợp X cùng với tôpô $\mathcal{T}$ được gọi là *tổng tôpô* của các không gian tôpô $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ và ký hiệu là $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ hoặc $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_k$ nếu $\Lambda = \{1, 2, \dots, k\}$.

2.1.2. Nhận xét. 1. Dễ dàng chứng minh được rằng họ $\sigma = \{G \subset X : i_\alpha^{-1}(G) \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ là tiền cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}$ là tôpô mịn nhất trên X sao cho tất cả các i_α , $\alpha \in \Lambda$ liên tục.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.1 Các khái niệm cơ bản

2. Để thấy rằng $G \in \mathcal{T}$ khi và chỉ khi $G \cap X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ với mọi $\alpha \in \Lambda$.
Do đó tôpô $\mathcal{T}$ là tôpô tương thích với cái phủ $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.1 Các khái niệm cơ bản

2. Để thấy rằng $G \in \mathcal{T}$ khi và chỉ khi $G \cap X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ với mọi $\alpha \in \Lambda$.
Do đó tôpô $\mathcal{T}$ là tôpô tương thích với cái phủ $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

2.1.3. Định lý. Giả sử $f : \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow Y$ là ánh xạ từ tổng tôpô $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ vào không gian tôpô Y . Khi đó f liên tục khi và chỉ khi ánh xạ tích $f_\alpha i_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ liên tục với mọi $\alpha \in \Lambda$, trong đó i_α là phép nhúng X_α vào $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$.

Chứng minh. Giả sử f liên tục. Từ giả thiết ánh xạ $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ liên tục ta suy ra $f_\alpha i_\alpha$ liên tục với mọi $\alpha \in \Lambda$.

Ngược lại, Giả sử $f_\alpha i_\alpha$ liên tục với mọi $\alpha \in \Lambda$. Vì $f_\alpha i_\alpha = f|_{X_\alpha}$ và Nhận xét 2.1.2 tôpô $\mathcal{T}$ tương thích với cái phủ $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, dùng Định lý 1.4.10 ta suy ra f liên tục.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.1 Các khái niệm cơ bản

2.1.4. Định lý. Với mỗi $\alpha \in \Lambda$, ánh xạ $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là vừa mở, vừa đóng.

Chứng minh. Với bất kỳ $\alpha \in \Lambda$ và bất kỳ tập mở $U \subset X_\alpha$. Khi đó ta có $U \cap X_\alpha = U$ và $U \cap X_\beta = \emptyset$ với mọi $\beta \neq \alpha$. Vì U mở trong X_α và $\emptyset$ mở trong X_β với mọi β . Từ Nhận xét 2.1.2 ta suy ra U mở trong $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Vì $i_\alpha(U) = U$, ta suy ra $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là ánh xạ mở.

Tương tự ta chứng minh được i_α là ánh xạ đóng.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.1 Các khái niệm cơ bản

2.1.5. Hệ quả. Với mỗi $\alpha \in \Lambda$, ánh xạ $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là phép nhúng đồng phôi X_α thành không gian con vừa mở, vừa đóng trong $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

Chứng minh. Vì X_α vừa mở, vừa đóng trong X_α , theo Định lý 2.1.4 ta suy ra $i_\alpha(X_\alpha)$ vừa mở, vừa đóng trong $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Theo Mệnh đề 1.4.6 ánh xạ $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là phép nhúng đồng phôi.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.1 Các khái niệm cơ bản

2.1.5. Hệ quả. Với mỗi $\alpha \in \Lambda$, ánh xạ $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là phép nhúng đồng phôi X_α thành không gian con vừa mở, vừa đóng trong $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

Chứng minh. Vì X_α vừa mở, vừa đóng trong X_α , theo Định lý 2.1.4 ta suy ra $i_\alpha(X_\alpha)$ vừa mở, vừa đóng trong $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Theo Mệnh đề 1.4.6 ánh xạ $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là phép nhúng đồng phôi.

2.1.6. Định lý. Tổng tôpô của các T_i -không gian là T_i -không gian, với $i = 1, 2, 3, 4$.

Chứng minh dành cho độc giả.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.2 Không gian tích

2.2. Không gian tích

2.2.1. Định nghĩa. Cho họ các không gian tôpô $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$. Xét tập hợp tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Với mỗi $\alpha \in \Lambda$, ta ký hiệu $P_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ là phép chiếu tự nhiên xác định bởi $P_\alpha(x) = x_\alpha$ với mỗi $x = (x_\alpha) \in X$.

Tôpô $\mathcal{T}$ yếu nhất trên $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ sao cho các ánh xạ P_α , $\alpha \in \Lambda$ liên tục được gọi là *tôpô tích* (hay *tôpô Tikhonôp*) của các tôpô $\mathcal{T}_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, trên tập tích $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

Không gian $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ với tôpô tích được gọi là *tích* hay *tích Tikhonôp* của các không gian tôpô X_α , $\alpha \in \Lambda$.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.2 Không gian tích

2.2.2. Định lý. Tôpô tích trên tập tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ có cơ sở $\mathcal{B}$ gồm các tập V có dạng $V = \bigcap_{\alpha \in I} P_\alpha^{-1}(G_\alpha)$, trong đó $G_\alpha \subset X_\alpha$ là tập mở trong X_α , $\alpha \in I$ và I là tập con hữu hạn của Λ .

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.2 Không gian tích

2.2.2. Định lý. Tôpô tích trên tập tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ có cơ sở $\mathcal{B}$ gồm các tập V có dạng $V = \bigcap_{\alpha \in I} P_\alpha^{-1}(G_\alpha)$, trong đó $G_\alpha \subset X_\alpha$ là tập mở trong X_α , $\alpha \in I$ và I là tập con hữu hạn của Λ .

2.2.3. Định lý. Với mỗi $\alpha \in \Lambda$, phép chiếu tự nhiên $P_\alpha : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ là ánh xạ mở.

Chứng minh. Trước hết, giả sử U là tập mở bất kỳ thuộc cơ sở $\mathcal{B}$ của tôpô $\mathcal{T}$, theo Định lý 2.2.2 tồn tại một họ hữu hạn $I \subset \Lambda$ và các tập mở $G_\alpha \subset X_\alpha$ với mỗi $\alpha \in I$ sao cho $U = \bigcap_{\alpha \in I} P_\alpha^{-1}(G_\alpha)$. Khi đó nếu $\alpha \in I$ ta có $P_\alpha(U) = G_\alpha$ còn nếu $\alpha \in \Lambda \setminus I$ thì ta có $P_\alpha(U) = X_\alpha$.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.2 Không gian tích

Nhưng cả G_α và X_α đều là các tập mở trong X_α . Do đó $P_\alpha(U)$ là tập mở trong X_α .

Bây giờ giả sử V là tập mở bất kỳ trong $\mathcal{T}$. Khi đó $V = \bigcup_{j \in J} U_j$ trong đó $U_j \in \mathcal{B}$ với mọi $j \in J$. Vì $P_\alpha(U_j)$ là mở trong X_α với mọi $j \in J$ và $P_\alpha(V) = P_\alpha(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} P_\alpha(U_j)$, ta suy ra $P_\alpha(V)$ là tập mở trong X_α hay P_α là ánh xạ mở.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.2 Không gian tích

Nhưng cả G_α và X_α đều là các tập mở trong X_α . Do đó $P_\alpha(U)$ là tập mở trong X_α .

Bây giờ giả sử V là tập mở bất kỳ trong $\mathcal{T}$. Khi đó $V = \bigcup_{j \in J} U_j$ trong đó $U_j \in \mathcal{B}$ với mọi $j \in J$. Vì $P_\alpha(U_j)$ là mở trong X_α với mọi $j \in J$ và $P_\alpha(V) = P_\alpha(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} P_\alpha(U_j)$, ta suy ra $P_\alpha(V)$ là tập mở trong X_α hay P_α là ánh xạ mở.

2.2.4. Định lý. Giả sử Y là không gian tôpô và $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là tích của các không gian tôpô X_α , $\alpha \in \Lambda$. Để ánh xạ $f : Y \rightarrow X$ liên tục, điều kiện cần và đủ là với mỗi $\alpha \in \Lambda$ ánh xạ $P_\alpha \circ f : Y \rightarrow X_\alpha$ liên tục.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.2 Không gian tích

2.2.5. Định lý. (a) Nếu X_α , $\alpha \in \Lambda$ là T_k -không gian với $1 \leq k \leq 3\frac{1}{2}$, thì $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ cũng là T_k -không gian;

(b) Nếu $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ khác rỗng và là T_k -không gian với $1 \leq k \leq 4$, thì X_α là T_k -không gian với mọi $\alpha \in \Lambda$.

Chứng minh. (a) - Vì T_1, T_2 -không gian cùng một kiểu chứng minh, nên ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp T_2 -không gian.

Giả sử X_α là T_2 -không gian, $\alpha \in \Lambda$, với bất kỳ $x, y \in X$ và $x \neq y$. Do $x \neq y$, nên tồn tại $i_0 \in \Lambda$ sao cho $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Vì X_{i_0} là T_2 -không gian, nên tìm được các lân cận mở U, V tương ứng của x_{i_0} và y_{i_0} sao cho $U \cap V = \emptyset$. Từ đó ta có $P_{i_0}^{-1}(U)$ và $P_{i_0}^{-1}(V)$ là các lân cận mở tương ứng của x và y trong không gian tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ thoả mãn

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.2 Không gian tích

$P_{i_0}^{-1}(U) \cap P_{i_0}^{-1}(V) = \emptyset$. Vậy $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là T_2 -không gian.

- Giả sử X_α là T_3 -không gian, $\alpha \in \Lambda$. Từ chứng minh trên ta chỉ cần chứng minh $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ là không gian chính qui. Giả sử $x \in X$ và U là

lân cận mở bất kỳ của x thuộc cơ sở $\mathcal{B}$ của tôpô tích, nghĩa là

$x = (x_\alpha) \in U = \bigcap_{i=1}^n P_i^{-1}(U_i)$ với U_i mở trong X_i , $i = 1, \dots, n$. Khi đó ta

có $x_i \in U_i$, $i = 1, \dots, n$. Do X_i là không gian chính qui, nên tồn tại các lân cận mở V_i của x_i trong X_i , sao cho $x_i \in V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$.

Từ đó ta có $x \in \bigcap_{i=1}^n P_i^{-1}(V_i) \subset \bigcap_{i=1}^n P_i^{-1}(\overline{V_i}) \subset \bigcap_{i=1}^n P_i^{-1}(U_i) = U$.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.2 Không gian tích

Đặt $V = \bigcap_{i=1}^n P_i^{-1}(V_i)$, ta có V mở trong X và $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Vậy X là không gian chính qui.

Chứng minh các phần còn lại dành cho độc giả.

2.2.6. Định lý. Không gian tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ thoả mãn tiên đề đếm được thứ k , $k = 1, 2$ khi và chỉ khi X_α là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ k với mọi α , trừ ra một tập đếm được các X_α , còn tất cả đều là không gian thô.

Chứng minh dành cho độc giả, xem [2].

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.3 Không gian thương

2.3. Không gian thương

2.3.1. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ và một quan hệ tương đương R trên X . Ký hiệu X/R là tập tất cả các lớp thương theo quan hệ tương đương R và $\pi : X \rightarrow X/R$ là ánh xạ thương cho bởi $\pi(x) = [x]$ với mọi $x \in X$. Tôpô mịn nhất trên tập thương X/R sao cho ánh xạ thương π liên tục được gọi là *tôpô thương* trên X/R . Tập thương X/R cùng với tôpô thương trên nó được gọi là *không gian thương* và ánh xạ $\pi : X \rightarrow X/R$ được gọi là *phép chiếu tự nhiên*.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.3 Không gian thương

2.3. Không gian thương

2.3.1. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ và một quan hệ tương đương R trên X . Ký hiệu X/R là tập tất cả các lớp thương theo quan hệ tương đương R và $\pi : X \rightarrow X/R$ là ánh xạ thương cho bởi $\pi(x) = [x]$ với mọi $x \in X$. Tôpô mịn nhất trên tập thương X/R sao cho ánh xạ thương π liên tục được gọi là *tôpô thương* trên X/R . Tập thương X/R cùng với tôpô thương trên nó được gọi là *không gian thương* và ánh xạ $\pi : X \rightarrow X/R$ được gọi là *phép chiếu tự nhiên*.

2.3.2. Mệnh đề. Tôpô thương trên tập thương X/R là họ

$$\mathcal{U} = \{U \subset X/R : \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

Chứng minh. Dễ thấy rằng $\phi \in \mathcal{U}$ và $X/R \in \mathcal{U}$. Với họ bất kỳ

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.3 Không gian thương

$U_i \in \mathcal{U}$, $i \in I$ vì $\mathcal{T}$ là tôpô, từ đẳng thức $\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$ ta

suy ra $\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \in \mathcal{T}$. Tương tự, vì $\mathcal{T}$ là tôpô ta có

$\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Vậy $\mathcal{U}$ là một tôpô trên X/R .

Bây giờ giả sử $\mathcal{B}$ là một tôpô trên X/R sao cho phép chiếu π liên tục. Khi đó với mỗi $B \in \mathcal{B}$ ta có $\pi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Do đó $B \in \mathcal{U}$. Vậy $\mathcal{U}$ là tôpô mịn nhất trên X/R sao cho ánh xạ π liên tục. Do đó $\mathcal{U}$ là tôpô thương.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.3 Không gian thương

$U_i \in \mathcal{U}$, $i \in I$ vì $\mathcal{T}$ là tôpô, từ đẳng thức $\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$ ta

suy ra $\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \in \mathcal{T}$. Tương tự, vì $\mathcal{T}$ là tôpô ta có

$\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Vậy $\mathcal{U}$ là một tôpô trên X/R .

Bây giờ giả sử $\mathcal{B}$ là một tôpô trên X/R sao cho phép chiếu π liên tục. Khi đó với mỗi $B \in \mathcal{B}$ ta có $\pi^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Do đó $B \in \mathcal{U}$. Vậy $\mathcal{U}$ là tôpô mịn nhất trên X/R sao cho ánh xạ π liên tục. Do đó $\mathcal{U}$ là tôpô thương.

Nhận xét. Từ Mệnh đề 2.3.2 ta suy ra tập $B \subset X/R$ là đóng theo tôpô thương khi và chỉ khi $\pi^{-1}(B)$ là đóng theo tôpô $\mathcal{T}$ trong X .

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.3 Không gian thương

2.3.3. Định lý. Nếu $\pi : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X/R, \mathcal{B})$ là ánh xạ liên tục từ không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ lên không gian tôpô $(X/R, \mathcal{B})$ và ánh xạ mở (hoặc đóng), thì $\mathcal{B}$ là tôpô thương.

Chứng minh Giả sử π là ánh xạ mở. Ký hiệu $\mathcal{U}$ là tôpô thương trên X/R . Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{B} = \mathcal{U}$. Vì π liên tục và $\mathcal{U}$ là tôpô mịn nhất trên X/R để π liên tục, ta suy ra $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$. Bây giờ giả sử $U \in \mathcal{U}$. Từ Mệnh đề 2.3.2 ta suy ra $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Nhờ giả thiết π là ánh xạ mở và $U = \pi[\pi^{-1}(U)]$ ta suy ra $U \in \mathcal{B}$. Vậy $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$. Do đó ta có $\mathcal{B} = \mathcal{U}$.

Trường hợp f là ánh xạ đóng, chứng minh hoàn toàn tương tự.

Chương II. Tổng tôpô, không gian tích, không gian thương

2.3 Không gian thương

2.3.3. Định lý. Nếu $\pi : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X/R, \mathcal{B})$ là ánh xạ liên tục từ không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ lên không gian tôpô $(X/R, \mathcal{B})$ và ánh xạ mở (hoặc đóng), thì $\mathcal{B}$ là tôpô thương.

Chứng minh Giả sử π là ánh xạ mở. Ký hiệu $\mathcal{U}$ là tôpô thương trên X/R . Ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{B} = \mathcal{U}$. Vì π liên tục và $\mathcal{U}$ là tôpô mịn nhất trên X/R để π liên tục, ta suy ra $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$. Bây giờ giả sử $U \in \mathcal{U}$. Từ Mệnh đề 2.3.2 ta suy ra $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Nhờ giả thiết π là ánh xạ mở và $U = \pi[\pi^{-1}(U)]$ ta suy ra $U \in \mathcal{B}$. Vậy $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$. Do đó ta có $\mathcal{B} = \mathcal{U}$.

Trường hợp f là ánh xạ đóng, chứng minh hoàn toàn tương tự.

2.3.4. Định lý. Ánh xạ $f : X/R \rightarrow Y$ từ không gian thương X/R vào không gian tôpô Y là liên tục khi và chỉ khi ánh xạ hợp $f_o\pi : X \rightarrow Y$ liên tục.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

3.1. Phép nhúng vào khối lập phương

Ta gọi là *khối lập phương* và ký hiệu là Q^A tập hợp tất cả các hàm $f : A \rightarrow Q$ xác định trên một tập hợp A nào đó và nhận giá trị trong đoạn $Q = [0, 1]$. Tôpô trên Q^A là tôpô hội tụ theo điểm (hay hội tụ theo toạ độ).

3.1.1. Định nghĩa. Giả sử $F = \{f : X \rightarrow Y_f\}$ với X, Y_f là các không gian tôpô. Khi đó ánh xạ $e : X \rightarrow \prod_{f \in F} Y_f$ cho bởi $[e(x)]_f = f(x)$, với mọi $x \in X$ được gọi là *ánh xạ định giá*.

3.1.2. Định nghĩa. a) Họ $F = \{f : X \rightarrow Y_f\}$ được gọi là *tách các điểm* của X nếu với mỗi cặp các điểm $x, y \in X$ mà $x \neq y$ tồn tại $f \in F$ sao cho $f(x) \neq f(y)$.

b) Họ $F = \{f : X \rightarrow Y_f\}$ được gọi là *tách các điểm và tập đóng* nếu với mỗi tập con đóng A của X và với mỗi điểm $x \in X \setminus A$, tồn tại ánh xạ $f \in F$ sao cho $f(x) \notin \overline{f(A)}$.

Chương III. Mêtric hoá

3.1 Phép nhúng vào khối lập phương

b) Họ $F = \{f : X \rightarrow Y_f\}$ được gọi là *tách các điểm và tập đóng* nếu với mỗi tập con đóng A của X và với mỗi điểm $x \in X \setminus A$, tồn tại ánh xạ $f \in F$ sao cho $f(x) \notin \overline{f(A)}$.

3.1.3. Bổ đề. Giả sử F là họ các ánh xạ liên tục $f : X \rightarrow Y_f$ từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y_f . Khi đó

(a) Ánh xạ định giá $e : X \rightarrow \prod_{f \in F} Y_f$ là ánh xạ liên tục của không gian tôpô X vào không gian tích $\prod_{f \in F} Y_f$;

(b) Nếu họ F tách các điểm và các tập đóng, thì ánh xạ định giá e là ánh xạ mở của không gian X lên không gian con $e[X]$;

(c) Ánh xạ e là đơn ánh khi và chỉ khi họ F tách các điểm.

Chứng minh. (a) Vì $P_{f \circ} e(x) = f(x)$ với mọi $x \in X$. Theo Định lý 2.2.4 ta suy ra e liên tục.

Chương III. Mêtric hoá

3.1 Phép nhúng vào khối lập phương

(b) Giả sử F là họ tách các điểm và tập đóng và U là tập mở bất kỳ trong X , ta cần chứng minh rằng $e(U)$ là tập mở trong $e[X]$. Thật vậy, giả sử x là điểm bất kỳ thuộc U , vì F tách các điểm và tập đóng nên tồn tại hàm f_o sao cho $f_o(x) \notin \overline{f_o(X \setminus U)}$. Đặt

$W = P_{f_o}^{-1} \left(Y_{f_o} \setminus \overline{f_o(X \setminus U)} \right)$. Ta có W là tập mở trong không gian tích

$\prod_{f \in F} Y_f$, chứa $e(x)$ và $W \cap e[X] = e(U)$. Vì thế $e(x)$ là điểm trong của

$e(U)$ trong không gian con $e[X]$. Vì x tùy ý ta nhận được $e(U)$ là tập mở trong không gian con $e[X]$.

(c) Giả sử e là đơn ánh và $x, y \in X$ với $x \neq y$. Khi đó ta có $e(x) \neq e(y)$. Do đó tồn tại hàm $f \in F$ sao cho $f(x) \neq f(y)$. Vì vậy họ F tách các điểm của không gian tôpô X .

Chương III. Métroc hoá

3.1 Phép nhúng vào khối lập phương

Ngược lại, giả sử họ F tách các điểm của không gian tôpô X . Khi đó với các điểm bất kỳ $x, y \in X$ mà $x \neq y$, tồn tại $f \in F$ sao cho $f(x) \neq f(y)$. Từ cách đặt e ta suy ra $e(x) \neq e(y)$. Vậy e là một đơn ánh.

Ngược lại, giả sử họ F tách các điểm của không gian tôpô X . Khi đó với các điểm bất kỳ $x, y \in X$ mà $x \neq y$, tồn tại $f \in F$ sao cho $f(x) \neq f(y)$. Từ cách đặt e ta suy ra $e(x) \neq e(y)$. Vậy e là một đơn ánh.

3.1.4. Định lý. *Để một không gian tôpô là không gian Tikhônôp điều kiện cần và đủ là nó đồng phôi với một không gian con của khối lập phương nào đó.*

Chứng minh. CẦN. Giả sử X là không gian tôpô Tikhônôp. Ký hiệu F là họ tất cả các ánh xạ liên tục từ X vào đoạn $[0, 1]$. Vì X là không gian Tikhônôp, nên F là họ khác rỗng, tách các điểm và tập đóng. Vì vậy, theo Bổ đề 3.1.3, ánh xạ định giá $e : X \rightarrow \prod_{f \in F} [0, 1]$ là phép đồng phôi của X lên không gian con $e[X]$ của $[0, 1]^F$.

ĐỦ. Vì $[0, 1]$ là một không gian Tikhônôp. Theo Định lý 2.2.5 tích của họ tuỳ ý các không gian Tikhônôp là không gian Tikhônôp, hơn nữa một không gian con của không gian Tikhônôp là không gian Tikhônôp ta suy ra nếu X đồng phôi với một không gian của khối lập phương $Q^A = \prod_{\alpha \in A} [0, 1]$, thì X là một không gian Tikhônôp.

3.2. Không gian métroc và giả métroc

3.2.1. Định nghĩa. Cho tập hợp X . Hàm $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một *métroc* nếu thoả mãn các điều kiện

- (a) $d(x, y) = d(y, x)$ với mọi $x, y \in X$;
- (b) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ với mọi $x, y, z \in X$;
- (c) $d(x, y) = 0$ nếu $x = y$;
- (d) Nếu $d(x, y) = 0$, thì $x = y$.

Hàm d được gọi là *giả métroc* nếu nó thoả mãn các điều kiện (a), (b), (c).

Cặp (X, d) được gọi là *không gian métroc (giả métroc)* nếu d là métroc (tương ứng, giả métroc).

Nhận xét. Ký hiệu $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ và $\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ và lần lượt gọi chúng là *hình cầu mở*, *hình cầu đóng* tâm x bán kính r . Khi đó họ tất cả các hình cầu mở $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ lập thành một cơ sở của một tôpô nào đó trên không gian (X, d) . Tôpô này được gọi là *tôpô métic* (*giả métic*) hoặc *tôpô sinh bởi métic* (*giả métic* d).

Dễ thấy rằng mỗi hình cầu đóng $\overline{B}(x, r)$ là tập con đóng đối với tôpô giả métic.

Nhận xét. Ký hiệu $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ và $\bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ và lần lượt gọi chúng là *hình cầu mở*, *hình cầu đóng* tâm x bán kính r . Khi đó họ tất cả các hình cầu mở $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ lập thành một cơ sở của một tôpô nào đó trên không gian (X, d) . Tôpô này được gọi là *tôpô mêtric* (*giả mêtric*) hoặc *tôpô sinh bởi mêtric* (*giả mêtric* d).

Dễ thấy rằng mỗi hình cầu đóng $\bar{B}(x, r)$ là tập con đóng đối với tôpô giả mêtric.

3.2.2. Định lý. *Giả sử A là tập con của không gian giả mêtric (X, d) . Với mỗi $x \in X$ ta đặt $d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$. Khi đó hàm $d(., A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm liên tục của biến x theo tôpô giả mêtric.*

Chứng minh. Từ bất đẳng thức $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ với mọi $x, y \in X$ và với mọi $z \in A$, ta suy ra $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Thay

đổi vai trò của x và y ta được $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$. Vì thế ta có $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Từ bất đẳng thức này dễ thấy rằng hàm $d(., A)$ liên tục.

đổi vai trò của x và y ta được $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$. Vì thế ta có $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Từ bất đẳng thức này dễ thấy rằng hàm $d(., A)$ liên tục.

3.2.3. Định lý. Giả sử (X, d) là không gian giả mêtric, $A \subset X$. Khi đó ta có $\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

Chứng minh. Từ Định lý 3.2.2 ta có hàm $d(., A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục. Vì thế, tập $\{x \in X : d(x, A) = 0\}$ là tập con đóng của X chứa A . Vì vậy, $\bar{A} \subset \{x \in X : d(x, A) = 0\}$. Bây giờ giả sử $x \notin \bar{A}$. Khi đó tồn tại hình cầu mở $B(x, r)$ sao cho $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Vì thế $d(x, A) \geq r > 0$. Điều này chứng tỏ $\{x \in X : d(x, A) = 0\} \subset \bar{A}$. Do đó ta có $\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

đổi vai trò của x và y ta được $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$. Vì thế ta có $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$. Từ bất đẳng thức này dễ thấy rằng hàm $d(., A)$ liên tục.

3.2.3. Định lý. Giả sử (X, d) là không gian giả mêtric, $A \subset X$. Khi đó ta có $\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

Chứng minh. Từ Định lý 3.2.2 ta có hàm $d(., A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục. Vì thế, tập $\{x \in X : d(x, A) = 0\}$ là tập con đóng của X chứa A . Vì vậy, $\bar{A} \subset \{x \in X : d(x, A) = 0\}$. Bây giờ giả sử $x \notin \bar{A}$. Khi đó tồn tại hình cầu mở $B(x, r)$ sao cho $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Vì thế $d(x, A) \geq r > 0$. Điều này chứng tỏ $\{x \in X : d(x, A) = 0\} \subset \bar{A}$. Do đó ta có $\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.

3.2.4. Định lý. Mỗi không gian giả mêtric là không gian chuẩn tắc.

Chứng minh. Giả sử A, B là các tập con đóng rời nhau của không

gian giả métroc X và $d(x, A)$, $d(x, B)$ là khoảng cách từ điểm x đến các tập A và B tương ứng. Đặt $U = \{x \in X : d(x, A) - d(x, B) < 0\}$ và $V = \{x \in X : d(x, A) - d(x, B) > 0\}$. Vì hàm $x \mapsto d(x, A) - d(x, B)$ với mọi $x \in X$ liên tục theo biến x . Vì vậy các tập U, V là các tập mở lần lượt chứa A và B sao cho $U \cap V = \emptyset$. Vì vậy, (X, d) là không gian chuẩn tắc.

gian giả mêtric X và $d(x, A)$, $d(x, B)$ là khoảng cách từ điểm x đến các tập A và B tương ứng. Đặt $U = \{x \in X : d(x, A) - d(x, B) < 0\}$ và $V = \{x \in X : d(x, A) - d(x, B) > 0\}$. Vì hàm $x \mapsto d(x, A) - d(x, B)$ với mọi $x \in X$ liên tục theo biến x . Vì vậy các tập U, V là các tập mở lần lượt chứa A và B sao cho $U \cap V = \emptyset$. Vì vậy, (X, d) là không gian chuẩn tắc.

3.2.5. Định lý. (a) *Mỗi không gian giả mêtric là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất;*

(b) *Không gian giả mêtric thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai khi và chỉ khi nó là không gian khả ly.*

Chứng minh. (a) Vì họ $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ là cơ sở của tôpô giả mêtric, nên với x bất kỳ thuộc X , họ $\{B(x, r) : r > 0\}$ là một cơ sở lân cận tại điểm x . Với mỗi $r > 0$, tồn tại số tự nhiên n sao cho $\frac{1}{n} < r$.

Lúc đó ta có $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, r)$. Vậy, họ $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ lập thành một cơ sở đếm được tại điểm x . Do đó X là một không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

(b) CẦN. Suy từ Định lý 1.1.18 Chương I.

ĐỦ. Giả sử X là không gian giả mêtric khả ly. Khi đó trong X tồn tại một tập con đếm được $A = \{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ trù mật khắp nơi trong X . Ký hiệu $\mathcal{U} = \{B(a_n, \frac{1}{m}) : n, m = 1, 2, \dots\}$. Khi đó họ $\mathcal{U}$ là đếm được. Giả sử x là điểm bất kỳ thuộc X và U là lân cận bất kỳ của điểm x . Khi đó vì X là giả mêtric, tồn tại hình cầu mở $B(x, r)$ sao cho $B(x, r) \subset U$. Lấy $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\frac{1}{m} < r$. Vì X khả ly, nên tồn tại $a_n \in A$ sao cho $a_n \in B(x, \frac{1}{2m})$. Khi đó ta có $x \in B(a_n, \frac{1}{2m}) \subset B(x, r) \subset U$. Vậy X là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai.

Giả sử A là tập con của không gian giả métic (X, d) . Ta gọi số $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ là *đường kính* của tập A và ký hiệu là $\text{diam } A$.

Giả sử A là tập con của không gian giả métic (X, d) . Ta gọi số $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ là *đường kính* của tập A và ký hiệu là $\text{diam } A$.

3.2.6. Định lý. *Giả sử (X, d) là không gian giả métic. Với mỗi $x, y \in X$ ta đặt $e(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. Khi đó (X, e) là không gian giả métic và tôpô của nó trùng với tôpô của không gian (X, d) . Do đó, mỗi không gian giả métic đồng phôi với một không gian giả métic có đường kính không vượt quá 1.*

Chứng minh dành cho đọc giả, xem [2].

Giả sử A là tập con của không gian giả mêtric (X, d) . Ta gọi số $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ là *đường kính* của tập A và ký hiệu là $\text{diam } A$.

3.2.6. Định lý. *Giả sử (X, d) là không gian giả mêtric. Với mỗi $x, y \in X$ ta đặt $e(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$. Khi đó (X, e) là không gian giả mêtric và tôpô của nó trùng với tôpô của không gian (X, d) . Do đó, mỗi không gian giả mêtric đồng phôi với một không gian giả mêtric có đường kính không vượt quá 1.*

Chứng minh dành cho đọc giả, xem [2].

3.2.7. Định lý. *Giả sử (X_n, d_n) là một dãy các không gian giả mêtric có đường kính bé hơn hoặc bằng 1. Ký hiệu $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Với mỗi cặp $x = (x_n), y = (y_n) \in X$ ta đặt $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$. Khi đó*

- (a) d là một giả métroc trên X ;
- (b) Tôpô giả métroc trên X trùng với tôpô tích.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

(a) d là một giả mêtric trên X ;

(b) Tôpô giả mêtric trên X trùng với tôpô tích.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

3.2.8. Định nghĩa. Cho hai không gian giả mêtric (X, d) và (Y, e) . Ánh xạ $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ được gọi là *đẳng cự* nếu

$$d(x, y) = e[f(x), f(y)] \quad \text{với mọi } x, y \in X.$$

Nhận xét. Mỗi ánh xạ đẳng cự là liên tục và mỗi ánh xạ đẳng cự lên giữa các không gian mêtric là một phép đồng phôi.

Tích của hai ánh xạ đẳng cự là một ánh xạ đẳng cự.

ChươngIII. Métic hoá

3.3 Métic hoá

3.3. Métic hoá

3.3.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *giả métic hoá* được nếu tồn tại một giả métic d trên X sao cho tôpô giả métic của nó trùng với tôpô xuất phát của X

3.3.2. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *không gian Lindôlôp* nếu mỗi phủ mở của X đều chứa một phủ con đếm được.

Chương III. Métroc hoá

3.3 Métroc hoá

3.3. Métroc hoá

3.3.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *giả métroc hoá* được nếu tồn tại một giả métroc d trên X sao cho tôpô giả métroc của nó trùng với tôpô xuất phát của X

3.3.2. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *không gian Lindôlôp* nếu mỗi phủ mở của X đều chứa một phủ con đếm được.

3.3.3. Định lý. *Mỗi không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai là một không gian Lindôlôp.*

Chứng minh. Giả sử X là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ 2 với cơ sở đếm được $\mathcal{B}$ và $\mathcal{U}$ là phủ mở bất kỳ của của X . Vì mỗi phần tử của $\mathcal{U}$ là hợp của một họ nào đó các phần tử của $\mathcal{B}$, nên tồn tại họ con $\mathcal{C}$ của $\mathcal{B}$, phủ X sao cho mỗi phần tử của $\mathcal{C}$ được chứa trong

ChươngIII. Métroc hoá

3.3 Métroc hoá

một phần tử nào đó của họ $\mathcal{U}$. Với mỗi $B \in \mathcal{C}$ ký hiệu $U_B \in \mathcal{U}$ sao cho $B \subset U_B$. Khi đó họ $\mathcal{D} = \{U_B : B \in \mathcal{C}\}$ là một họ con đếm được của họ $\mathcal{U}$ mà phủ X .

ChươngIII. Métroc hoá

3.3 Métroc hoá

một phần tử nào đó của họ $\mathcal{U}$. Với mỗi $B \in \mathcal{C}$ ký hiệu $U_B \in \mathcal{U}$ sao cho $B \subset U_B$. Khi đó họ $\mathcal{D} = \{U_B : B \in \mathcal{C}\}$ là một họ con đếm được của họ $\mathcal{U}$ mà phủ X .

3.3.4. Định lý. *Mỗi không gian Lindơlôp, chính qui là không gian chuẩn tắc.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

Chương III. Mêtric hoá

3.3 Mêtric hoá

một phần tử nào đó của họ $\mathcal{U}$. Với mỗi $B \in \mathcal{C}$ ký hiệu $U_B \in \mathcal{U}$ sao cho $B \subset U_B$. Khi đó họ $\mathcal{D} = \{U_B : B \in \mathcal{C}\}$ là một họ con đếm được của họ $\mathcal{U}$ mà phủ X .

3.3.4. Định lý. *Mỗi không gian Lindơlôp, chính qui là không gian chuẩn tắc.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

3.3.5. Định lý. *Giả sử X là không gian T_1 -chính qui, thoả mãn tiên đề đếm được thứ 2. Khi đó X đồng phôi với một không gian con của*

$Q^\omega = \prod_{n=1}^{\infty} Q$. *Do đó, X là mêtric hoá được.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh rằng tồn tại một họ đếm được các ánh xạ liên tục từ X vào Q tách các điểm và tập đóng. Thật vậy, gọi $\mathcal{B}$ là cơ sở đếm được của tôpô trên X và $\mathcal{U} = \{(U, V) : U, V \in \mathcal{B} \text{ sao cho } \overline{U} \subset V\}$. Khi đó $\mathcal{U}$ là họ đếm được.

Chương III. Mêtric hoá

3.3 Mêtric hoá

Theo các Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4 và Định lý 1.5.12, với mỗi cặp $(U, V) \in \mathcal{U}$, tồn tại một ánh xạ liên tục $f_{U,V} : X \rightarrow Q$ sao cho $f(\overline{U}) = 0$ và $f(X \setminus V) = 1$. Đặt $F = \{f_{U,V} : (U, V) \in \mathcal{U}\}$. Rõ ràng F là họ đếm được. Ta sẽ chứng minh rằng F tách các điểm và tập đóng. Thật vậy, với bất kỳ tập đóng B và bất kỳ $x \in X \setminus B$, chọn $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V \subset X \setminus B$ và chọn $(U, V) \in \mathcal{U}$ sao cho $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. Khi đó $f_{U,V} \in F$ thoả mãn $f(x) = 0$ và $f(B) = 1$, hay $f(x) \notin \overline{f(B)}$. Vì thế theo Bổ đề 3.1.3, ánh xạ định giá $e : X \rightarrow \prod_{f \in F} Q = Q^\omega$ là phép đồng phôi.

Chương III. Métic hoá

3.3 Métic hoá

Theo các Định lý 3.3.3, Định lý 3.3.4 và Định lý 1.5.12, với mỗi cặp $(U, V) \in \mathcal{U}$, tồn tại một ánh xạ liên tục $f_{U,V} : X \rightarrow Q$ sao cho $f(\overline{U}) = 0$ và $f(X \setminus V) = 1$. Đặt $F = \{f_{U,V} : (U, V) \in \mathcal{U}\}$. Rõ ràng F là họ đếm được. Ta sẽ chứng minh rằng F tách các điểm và tập đóng. Thật vậy, với bất kỳ tập đóng B và bất kỳ $x \in X \setminus B$, chọn $V \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in V \subset X \setminus B$ và chọn $(U, V) \in \mathcal{U}$ sao cho $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. Khi đó $f_{U,V} \in F$ thoả mãn $f(x) = 0$ và $f(B) = 1$, hay $f(x) \notin \overline{f(B)}$. Vì thế theo Bổ đề 3.1.3, ánh xạ định giá $e : X \rightarrow \prod_{f \in F} Q = Q^\omega$ là phép đồng phôi.

3.3.6. Định lý. *Giả sử X là T_1 -không gian. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương*

- (a) X là không gian chính qui, thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai;
- (b) X đồng phôi với không gian con của khối lập phương Q^ω ;
- (c) X là métic hoá được và khả ly.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

Chương III. Métroc hoá

3.3 Métroc hoá

3.3.7. Định nghĩa. Họ $\mathcal{U}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là họ σ -hữu hạn địa phương (σ -rời rạc) nếu $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, trong đó mỗi $\mathcal{U}_n$, $n = 1, 2, \dots$ là họ hữu hạn địa phương (tương ứng, rời rạc).

Chương III. Métic hoá

3.3 Métic hoá

3.3.7. Định nghĩa. Họ $\mathcal{U}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là họ σ -hữu hạn địa phương (σ -rời rạc) nếu $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, trong đó mỗi $\mathcal{U}_n$, $n = 1, 2, \dots$ là họ hữu hạn địa phương (tương ứng, rời rạc).

3.3.8. Định nghĩa. Phủ $\mathcal{B}$ của X được gọi là cái mịn của cái phủ $\mathcal{U}$ nếu mỗi phần tử $B \in \mathcal{B}$ tồn tại $U \in \mathcal{U}$ sao cho $B \subset U$.

Chương III. Métic hoá

3.3 Métic hoá

3.3.7. Định nghĩa. Họ $\mathcal{U}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là họ σ -hữu hạn địa phương (σ -rời rạc) nếu $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, trong đó mỗi $\mathcal{U}_n$, $n = 1, 2, \dots$ là họ hữu hạn địa phương (tương ứng, rời rạc).

3.3.8. Định nghĩa. Phủ $\mathcal{B}$ của X được gọi là cái mịn của cái phủ $\mathcal{U}$ nếu mỗi phần tử $B \in \mathcal{B}$ tồn tại $U \in \mathcal{U}$ sao cho $B \subset U$.

3.3.9. Định lý. Giả sử X là không gian tôpô. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương

- (a) X là không gian métic hoá được;
- (b) X là T_3 -không gian có một cơ sở σ -hữu hạn địa phương;
- (c) X là T_3 -không gian có một cơ sở σ -rời rạc.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được là *không gian compac* nếu mỗi phủ mở của X chứa một phủ con hữu hạn.

Tập con A của không gian tôpô X được là *tập compac* nếu không gian con A với tôpô cảm sinh là không gian compac .

4.1.2. Định nghĩa. Họ $\mathcal{U}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là *có tính giao hữu hạn* (hay là *họ có tâm*) nếu giao của họ hữu hạn bất kỳ các phần tử thuộc $\mathcal{U}$ đều khác rỗng.

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được là *không gian compac* nếu mỗi phủ mở của X chứa một phủ con hữu hạn.

Tập con A của không gian tôpô X được là *tập compac* nếu không gian con A với tôpô cảm sinh là không gian compac .

4.1.2. Định nghĩa. Họ $\mathcal{U}$ các tập con của không gian tôpô X được gọi là *có tính giao hữu hạn* (hay là *họ có tâm*) nếu giao của họ hữu hạn bất kỳ các phần tử thuộc $\mathcal{U}$ đều khác rỗng.

4.1.3. Định lý. Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ là *không gian compac* khi và chỉ khi mỗi họ có tâm các tập con đóng của X đều có giao khác rỗng.

Chứng minh. CẦN. Giả sử X là không gian compac và $\mathcal{F}$ là

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

một họ có tâm các tập con đóng của X . Ta cần chứng minh rằng $\bigcap \{U : U \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$. Giả sử rằng $\bigcap \{U : U \in \mathcal{F}\} = \emptyset$. Khi đó ta có $X \setminus (\bigcap \{U : U \in \mathcal{F}\}) = \bigcup \{X \setminus U : U \in \mathcal{F}\} = X$. Vì $X \setminus U$ là tập mở với mọi $U \in \mathcal{F}$ và X compac, nên tồn tại họ hữu hạn $U_1, \dots, U_n$ sao cho $\bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i) = X$. Vì thế ta có $\bigcap_{i=1}^n U_i = \emptyset$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{F}$ là họ có tâm.

ĐỦ. Giả sử $\mathcal{U}$ là phủ mở bất kỳ của không gian tôpô X . Nếu không tồn tại họ hữu hạn nào của $\mathcal{U}$ sao cho hợp của chúng phủ X , nghĩa là họ $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ là họ các tập con đóng của X có tính giao hữu hạn. Vì thế theo giả thiết điều kiện đủ, họ $\mathcal{F}$ có giao khác rỗng, nghĩa là $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} (X \setminus U) \neq \emptyset$. Suy ra $X \neq \bigcup \{U : U \in \mathcal{U}\}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{U}$ là cái phủ của X . Vậy X là không gian compac.

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1.4. Mệnh đề. *Hợp hữu hạn các tập con compac của không gian tôpô X là tập compac.*

Chứng minh dành cho độc giả.

4.1.5. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Điểm x thuộc không gian tôpô X được gọi là *điểm ω -giới hạn* của tập A nếu mỗi lân cận của điểm x chứa vô hạn điểm của tập A .

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1.4. Mệnh đề. *Hợp hữu hạn các tập con compac của không gian tôpô X là tập compac.*

Chứng minh dành cho độc giả.

4.1.5. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Điểm x thuộc không gian tôpô X được gọi là *điểm ω -giới hạn* của tập A nếu mỗi lân cận của điểm x chứa vô hạn điểm của tập A .

4.1.6. Bổ đề. *Mỗi dãy trong không gian tôpô X có điểm giới hạn khi và chỉ khi mỗi tập con vô hạn của X có điểm ω -giới hạn.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo[2].

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1.4. Mệnh đề. *Hợp hữu hạn các tập con compac của không gian tôpô X là tập compac.*

Chứng minh dành cho độc giả.

4.1.5. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $A \subset X$. Điểm x thuộc không gian tôpô X được gọi là *điểm ω -giới hạn* của tập A nếu mỗi lân cận của điểm x chứa vô hạn điểm của tập A .

4.1.6. Bổ đề. *Mỗi dãy trong không gian tôpô X có điểm giới hạn khi và chỉ khi mỗi tập con vô hạn của X có điểm ω -giới hạn.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo[2].

4.1.7. Bổ đề. *Nếu X là không gian Lindolop và mỗi dãy trong X có điểm giới hạn, thì X là không gian compac.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{U}$ là phủ mở bất kỳ của không gian tôpô X . Vì X là không gian Lindolop, nên tồn tại một phủ con đếm được $\mathcal{U}_1$ của $\mathcal{U}$,

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

chẳng hạn $\mathcal{U}_1 = \{U_1, U_2, \dots\}$. Bây giờ ta xây dựng một phủ hữu hạn của X từ phủ $\mathcal{U}_1$ như sau:

Đặt $V_1 = U_1$. Với mỗi $p \geq 2$ ta đặt V_p là tập hợp đầu tiên trong các tập U_n mà U_n không bị phủ bởi các tập $V_1, V_2, \dots, V_{p-1}$. Quá trình xây dựng này được kết thúc sau một số hữu hạn bước. Khi đó họ hữu hạn $\{V_i\}$ là một họ con hữu hạn của họ $\mathcal{U}$ và họ $\{V_i\}$ phủ X . Giả sử quá trình trên kéo dài ra vô hạn, nghĩa là với mỗi $p \geq 2$ ta có thể chọn được phần tử $x_p \in X$ sao cho $x_p \notin V_i$ với mỗi $i < p$. Gọi x là điểm giới hạn của dãy $\{x_p\}$. Khi đó vì họ $\mathcal{U}_1$ phủ X , nên tồn tại một $m \in \mathbb{N}^*$ để $x \in U_m$. Từ cách xây dựng của dãy $\{V_i\}$ suy ra tồn tại số $q \in \mathbb{N}^*$ để $x \in V_q$. Do x là điểm giới hạn của dãy $\{x_p\}$ và V_q là tập mở chứa x , nên tồn tại $p > q$ để $x_p \in V_q$. Điều này mâu thuẫn với cách xây dựng dãy $\{x_p\}$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ cách xây dựng các tập V_i kết thúc sau một số hữu hạn bước. Vậy X là không gian compac.

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1.8. Bổ đề. Nếu X là không gian compac, thì mỗi dãy điểm của X có điểm giới hạn.

Chứng minh. Giả sử X là không gian compac và $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ trong X . Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $A_n = \{x_m : m \geq n\}$. Rõ ràng là họ $\{A_n\}$ có là họ có tính giao hữu hạn và họ $\{\overline{A_n}\}$ cũng có tính giao hữu hạn. Vì X compac, tồn tại điểm $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Khi đó x là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$. Vì nếu ngược lại, tồn tại một lân cận U của điểm x và một số $p \in \mathbb{N}$ sao cho $U \cap A_p = \emptyset$. Vì thế $x \notin \overline{A_p}$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ x là điểm giới hạn của $\{x_n\}$.

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

4.1.8. Bổ đề. Nếu X là không gian compac, thì mỗi dãy điểm của X có điểm giới hạn.

Chứng minh. Giả sử X là không gian compac và $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ trong X . Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ký hiệu $A_n = \{x_m : m \geq n\}$. Rõ ràng là họ $\{A_n\}$ có là họ có tính giao hữu hạn và họ $\{\overline{A_n}\}$ cũng có tính giao hữu hạn. Vì X compac, tồn tại điểm $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Khi đó x là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$. Vì nếu ngược lại, tồn tại một lân cận U của điểm x và một số $p \in \mathbb{N}$ sao cho $U \cap A_p = \emptyset$. Vì thế $x \notin \overline{A_p}$. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ x là điểm giới hạn của $\{x_n\}$.

4.1.9. Mệnh đề. Giả sử X là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Khi đó các điều kiện sau là tương đương

- (a) Mỗi tập con vô hạn của X có điểm ω -giới hạn;
- (b) Mỗi dãy trong X có điểm giới hạn;

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

(c) Mỗi dãy trong X có dãy con hội tụ đến một điểm nào đó của X .

Chứng minh. (a) $\Leftrightarrow$ (b) suy từ Bổ đề 4.1.6.

(c) $\Rightarrow$ (b) là hiển nhiên.

(b) $\Rightarrow$ (c) Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ trong không gian X và x là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$. Vì X là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất, nên tại điểm x tồn tại cơ sở lân cận đếm được $\mathcal{B}(x) = \{U_n\}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $U_{n+1} \subset U_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta chọn phần tử $x_{n_k} \in U_k$. Dãy $\{x_{n_k}\}$ vừa chọn là dãy hội tụ đến x .

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

(c) *Mỗi dãy trong X có dãy con hội tụ đến một điểm nào đó của X .*

Chứng minh. (a) $\Leftrightarrow$ (b) suy từ Bổ đề 4.1.6.

(c) $\Rightarrow$ (b) là hiển nhiên.

(b) $\Rightarrow$ (c) Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ trong không gian X và x là điểm giới hạn của dãy $\{x_n\}$. Vì X là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất, nên tại điểm x tồn tại cơ sở lân cận đếm được $\mathcal{B}(x) = \{U_n\}$. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $U_{n+1} \subset U_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó với mỗi $k \in \mathbb{N}$ ta chọn phần tử $x_{n_k} \in U_k$. Dãy $\{x_{n_k}\}$ vừa chọn là dãy hội tụ đến x .

4.1.10. Mệnh đề. *Giả sử X là không gian thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*

(a) *Mỗi tập con vô hạn của X có điểm ω -giới hạn;*

(b) *Mỗi dãy trong X có điểm giới hạn;*

Chương IV. Không gian compac

4.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

- (c) *Mỗi dãy trong X có dãy con hội tụ đến một điểm nào đó của X ;*
- (d) *X là không gian compac.*

Chứng minh. Vì mỗi không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai là không gian thỏa mãn tiên đề đếm được thứ nhất nên từ Mệnh đề 4.1.9 ta suy ra $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$.

Phép kéo theo $(b) \Rightarrow (d)$ suy từ Định lý 3.3.3 và Bổ đề 4.1.7.

Phép kéo theo $(d) \Rightarrow (b)$ suy từ Bổ đề 4.1.8.

Chương IV. Không gian compac

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2.1. Định lý. *Nếu F là tập con đóng của không gian compac X , thì F là tập compac*

Chứng minh dành cho bạn đọc, xem như bài tập.

Chương IV. Không gian compac

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2.1. Định lý. *Nếu F là tập con đóng của không gian compac X , thì F là tập compac*

Chứng minh dành cho bạn đọc, xem như bài tập.

4.2.2. Định lý. *Nếu X là một không gian tôpô Hausdorff, thì mọi tập con compac K của X đều đóng.*

Chứng minh xem như bài tập.

Chương IV. Không gian compac

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2.1. Định lý. *Nếu F là tập con đóng của không gian compac X , thì F là tập compac*

Chứng minh dành cho bạn đọc, xem như bài tập.

4.2.2. Định lý. *Nếu X là một không gian tôpô Hausdorff, thì mọi tập con compac K của X đều đóng.*

Chứng minh xem như bài tập.

4.2.3. Định lý. *Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ liên tục từ không gian compac X lên không gian tôpô Y . Khi đó Y là không gian compac.*

Nếu giả thiết thêm Y là không gian Hausdorff và $f : X \rightarrow Y$ là song ánh, thì f là phép đồng phôi.

Chứng minh xem như bài tập.

Chương IV. Không gian compac

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2.4. Định lý. Nếu A và B là các tập compac không giao nhau của không gian Hausdorff X , thì tồn tại các lân cận U của A và V của B sao cho $U \cap V = \emptyset$.

Do đó, mỗi không gian tôpô Hausdorff compac là một không gian chuẩn tắc.

Chứng minh. Giả sử A, B là các tập con compac của không gian Hausdorff X và $A \cap B = \emptyset$. Cố định $x \in A$. Khi đó với mỗi $y \in B$ tồn tại các lân cận mở U_y của x và V_y của y sao cho $U_y \cap V_y = \emptyset$. Họ $\{V_y : y \in B\}$ là một phủ mở của B . Vì B compac, tồn tại họ hữu hạn $\{V_{y_i}\}_{i=1}^k$ sao cho $B \subset \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}$. Đặt $U(x) = \bigcap_{i=1}^k U_{y_i}$ và $V(x) = \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}$. Khi đó tương tự như chứng minh của Định lý 4.2.2 ta có $U(x)$ là tập mở chứa x , $V(x)$ là tập mở chứa B và $U(x) \cap V(x) = \emptyset$. Vì họ $\{U(x) : x \in A\}$ là

Chương IV. Không gian compac

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

một phủ mở của A và A compac, nên tồn tại họ hữu hạn $U(x_1), \dots, U(x_s)$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^s U(x_i)$. Đặt $U = \bigcup_{i=1}^s U(x_i)$ và $V = \bigcap_{i=1}^s V(x_i)$. Ta có U là tập mở chứa A , V là tập mở chứa B và $U \cap V = \emptyset$.

Trường hợp X là không gian Hausdorff compac. Khi đó với hai tập đóng bất kỳ A, B rời nhau, vì X compac, theo Định lý 4.2.1 A, B là các tập con compac rời nhau của X . Theo chứng minh trên tồn tại các tập mở U chứa A và tập mở V chứa B sao cho $U \cap V = \emptyset$. Vậy X là không gian chuẩn tắc.

Chương IV. Không gian compac

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2.5. Định lý. *Nếu X là không gian tôpô chính qui, A là tập con compac và U là lân cận của A , thì tồn tại lân cận đóng V của A sao cho $V \subset U$.*

Do đó mỗi không gian chính qui, compac là không gian chuẩn tắc.

Chứng minh. Giả sử A là tập con compac của X và U là lân cận của A . Vì X là không gian chính qui, nên với mỗi $x \in A$, tồn tại lân cận mở W_x của x sao cho $\overline{W_x} \subset U$. Họ $\{W_x : x \in A\}$ là phủ mở của A . Vì A compac, tồn tại họ hữu hạn $W_{x_1}, \dots, W_{x_k}$ phủ A sao cho

$\overline{W_{x_i}} \subset U, i = 1, 2, \dots, k$. Đặt $V = \bigcup_{i=1}^k \overline{W_{x_i}}$. Khi đó V là lân cận đóng của A thoả mãn $A \subset V \subset U$.

Chứng minh phần còn lại xem như bài tập.

Chương IV. Không gian compac

4.2. Tính compac và các tiên đề tách

4.2.6. Định lý. Giả sử X là không gian chính qui, compac, A là tập con compac và U là lân cận của A . Khi đó tồn tại một hàm liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 1$ với mọi $x \in A$ và $f(y) = 0$ với mọi $y \in X \setminus U$.

Chứng minh. Giả sử A là tập con compac của X và U là lân cận mở của A . Vì X là không gian chính qui, compac, nên theo Định lý 4.2.5 X là không gian chuẩn tắc và tồn tại một lân cận đóng V của A sao cho $A \subset V \subset U$. Sử dụng Định lý Uryson cho cặp tập đóng rời nhau trong X là V và $X \setminus U$ ta suy ra tồn tại hàm liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 1$ với mọi $x \in V$ và $f(y) = 0$ với mọi $y \in X \setminus U$. Vì $A \subset V$ ta suy ra $f(x) = 1$ với mọi $x \in A$ và $f(y) = 0$ với mọi $y \in X \setminus U$.

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.1. Định nghĩa. Họ $\mathcal{L}$ các tập con của tập hợp X được gọi là *một lọc* trong X nếu thoả mãn các điều kiện

- (a) Nếu $A \in \mathcal{L}$ thì $A \neq \emptyset$;
- (b) Nếu $A, B \in \mathcal{L}$, thì $A \cap B \in \mathcal{L}$;
- (c) Nếu $A \in \mathcal{L}$ và $A \subset B \subset X$, thì $B \in \mathcal{L}$.

Ví dụ. Nếu $Y \subset X$ và $Y \neq \emptyset$, thì họ tất cả các tập con của X chứa Y là một lọc trong X .

Họ $\mathcal{U}(x)$ tất cả các lân cận của của điểm x thuộc không gian tôpô X là một lọc trong X .

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.1. Định nghĩa. Họ $\mathcal{L}$ các tập con của tập hợp X được gọi là *một lọc* trong X nếu thoả mãn các điều kiện

- (a) Nếu $A \in \mathcal{L}$ thì $A \neq \emptyset$;
- (b) Nếu $A, B \in \mathcal{L}$, thì $A \cap B \in \mathcal{L}$;
- (c) Nếu $A \in \mathcal{L}$ và $A \subset B \subset X$, thì $B \in \mathcal{L}$.

Ví dụ. Nếu $Y \subset X$ và $Y \neq \emptyset$, thì họ tất cả các tập con của X chứa Y là một lọc trong X .

Họ $\mathcal{U}(x)$ tất cả các lân cận của của điểm x thuộc không gian tôpô X là một lọc trong X .

4.3.2. Định nghĩa. Lọc $\mathcal{L}$ trong không gian tôpô X được gọi là *hội tụ* đến điểm $x \in X$ nếu $\mathcal{L}$ chứa họ tất cả các lân cận của điểm x .

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.3. Định lý. *Nếu X là một T_2 -không gian, thì mỗi lọc trong X chỉ hội tụ đến một điểm duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử lọc $\mathcal{L}$ hội tụ đến hai điểm x và y với $x \neq y$. Khi đó vì X là T_2 -không gian, nên tồn tại lân cận U của x và lân cận V của y sao cho $U \cap V = \emptyset$. Vì lọc $\mathcal{L}$ hội tụ đến x và y , nên $U \in \mathcal{L}$ và $V \in \mathcal{L}$. Từ định nghĩa của lọc ta suy ra $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{L}$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của lọc.

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.3. Định lý. Nếu X là một T_2 -không gian, thì mỗi lọc trong X chỉ hội tụ đến một điểm duy nhất.

Chứng minh. Giả sử lọc $\mathcal{L}$ hội tụ đến hai điểm x và y với $x \neq y$. Khi đó vì X là T_2 -không gian, nên tồn tại lân cận U của x và lân cận V của y sao cho $U \cap V = \emptyset$. Vì lọc $\mathcal{L}$ hội tụ đến x và y , nên $U \in \mathcal{L}$ và $V \in \mathcal{L}$. Từ định nghĩa của lọc ta suy ra $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{L}$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của lọc.

4.3.4. Định nghĩa. Lọc $\mathcal{L}$ trong tập hợp X được gọi là một *siêu lọc* nếu không tồn tại một lọc $\mathcal{L}'$ nào mà $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ và $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}'$.

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.3. Định lý. Nếu X là một T_2 -không gian, thì mỗi lọc trong X chỉ hội tụ đến một điểm duy nhất.

Chứng minh. Giả sử lọc $\mathcal{L}$ hội tụ đến hai điểm x và y với $x \neq y$. Khi đó vì X là T_2 -không gian, nên tồn tại lân cận U của x và lân cận V của y sao cho $U \cap V = \emptyset$. Vì lọc $\mathcal{L}$ hội tụ đến x và y , nên $U \in \mathcal{L}$ và $V \in \mathcal{L}$. Từ định nghĩa của lọc ta suy ra $\emptyset = U \cap V \in \mathcal{L}$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của lọc.

4.3.4. Định nghĩa. Lọc $\mathcal{L}$ trong tập hợp X được gọi là một *siêu lọc* nếu không tồn tại một lọc $\mathcal{L}'$ nào mà $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ và $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}'$.

4.3.5. Định lý. Với mọi lọc $\mathcal{L}$ trong tập hợp X đều tồn tại một siêu lọc $\mathcal{U}$ chứa lọc $\mathcal{L}$.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.6. Định lý. *Nếu $\mathcal{U}$ là một siêu lọc trong tập hợp X và nếu A, B là hai tập hợp con khác rỗng của X với $A \cup B \in \mathcal{U}$, thì hoặc $A \in \mathcal{U}$ hoặc $B \in \mathcal{U}$.*

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.6. Định lý. Nếu $\mathcal{U}$ là một siêu lọc trong tập hợp X và nếu A, B là hai tập hợp con khác rỗng của X với $A \cup B \in \mathcal{U}$, thì hoặc $A \in \mathcal{U}$ hoặc $B \in \mathcal{U}$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $A \notin \mathcal{U}$ và $B \notin \mathcal{U}$. Xét họ $\mathcal{U}^* = \{C \subset X : A \cup C \in \mathcal{U}\}$. Khi đó $\mathcal{U}^*$ là một lọc trong X , vì

- (a) Vì $A \cup \phi = A \notin \mathcal{U}$, nên $\phi \notin \mathcal{U}^*$;
- (b) Nếu $C_1, C_2 \in \mathcal{U}^*$, thì ta có $A \cup C_1 \in \mathcal{U}$ và $A \cup C_2 \in \mathcal{U}$. Suy ra $A \cup (C_1 \cap C_2) = (A \cup C_1) \cap (A \cup C_2) \in \mathcal{U}$. Vậy, $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{U}^*$;
- (c) Nếu $C \in \mathcal{U}^*$ và $C \subset D$, thì vì $A \cup C \in \mathcal{U}$ ta có $A \cup D \in \mathcal{U}$. Điều này kéo theo $D \in \mathcal{U}^*$.

Mặt khác, nếu $C \in \mathcal{U}$, thì $A \cup C \in \mathcal{U}$. Do đó $C \in \mathcal{U}^*$, nghĩa là ta có $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^*$. Ta lại có $B \in \mathcal{U}^*$, nhưng $B \notin \mathcal{U}$. Do đó $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}^*$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng $\mathcal{U}$ là một siêu lọc.

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.7. Định lý. *Để không gian tôpô X là compac điều kiện cần và đủ là mọi siêu lọc trong X đều hội tụ.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.7. Định lý. Để không gian tôpô X là compac điều kiện cần và đủ là mọi siêu lọc trong X đều hội tụ.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

4.3.8. Định lý. Để tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ của các không gian tôpô X_α , $\alpha \in \Lambda$ là một không gian compac điều kiện cần và đủ là X_α là không gian compac, với mọi $\alpha \in \Lambda$.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

Chương IV. Không gian compac

4.3. Lọc và siêu lọc

4.3.7. Định lý. *Để không gian tôpô X là compac điều kiện cần và đủ là mọi siêu lọc trong X đều hội tụ.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

4.3.8. Định lý. *Để tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_{\alpha}$ của các không gian tôpô X_{α} , $\alpha \in \Lambda$ là một không gian compac điều kiện cần và đủ là X_{α} là không gian compac, với mọi $\alpha \in \Lambda$.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

4.3.9. Định lý. *Tập con của không gian Ôclit n -chiều là compac khi và chỉ khi nó đóng và bị chặn.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

Chương IV. Không gian compac

4.4. Không gian compac địa phương

4.4. Không gian compac địa phương

4.4.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *compac địa phương*, nếu tại mỗi điểm $x \in X$ có một lân cận đóng, compac.

Nhận xét. Mỗi không gian compac là compac địa phương. Mỗi không gian con đóng của không gian compac địa phương là không gian compac địa phương.

Chứng minh Nhận xét này xem như bài tập.

Chương IV. Không gian compac

4.4. Không gian compac địa phương

4.4. Không gian compac địa phương

4.4.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *compac địa phương*, nếu tại mỗi điểm $x \in X$ có một lân cận đóng, compac.

Nhận xét. Mỗi không gian compac là compac địa phương. Mỗi không gian con đóng của không gian compac địa phương là không gian compac địa phương.

Chứng minh Nhận xét này xem như bài tập.

4.4.2. Định lý. Nếu không gian compac địa phương X là T_2 -không gian hoặc không gian chính qui, thì họ các lân cận đóng, compac của mỗi điểm lập thành một cơ sở lân cận tại điểm đó.

Chứng minh. Giả sử x là điểm bất kỳ của không gian compac địa phương X và U là một lân cận bất kỳ của x . Vì X compac địa phương,

Chương IV. Không gian compac

4.4. Không gian compac địa phương

nên tồn tại lân cận đóng compac C của x . Khi đó $C \cap U$ cũng là một lân cận của x .

Nếu X là không gian chính qui, thì tồn tại lân cận đóng V của x sao cho $x \in V \subset C \cap U$. Vì C compac, ta suy ra V là lân cận compac.

Nếu X là T_2 -không gian và $W = \text{Int}C \cap U$, thì vì mỗi không gian con của T_2 -không gian là T_2 -không gian ta suy ra $\overline{W}$ cũng là một T_2 -không gian, compac. Nhờ Định lý 4.2.4 ta có $\overline{W}$ là không gian chính qui. Vì thế lân cận mở W chứa một lân cận đóng compac V của x trong W . Vì W mở và X là T_2 -không gian suy ra V cũng là một lân cận của x trong X .

Chương IV. Không gian compac

4.4. Không gian compac địa phương

nên tồn tại lân cận đóng compac C của x . Khi đó $C \cap U$ cũng là một lân cận của x .

Nếu X là không gian chính qui, thì tồn tại lân cận đóng V của x sao cho $x \in V \subset C \cap U$. Vì C compac, ta suy ra V là lân cận compac.

Nếu X là T_2 -không gian và $W = \text{Int}C \cap U$, thì vì mỗi không gian con của T_2 -không gian là T_2 -không gian ta suy ra $\overline{W}$ cũng là một T_2 -không gian, compac. Nhờ Định lý 4.2.4 ta có $\overline{W}$ là không gian chính qui. Vì thế lân cận mở W chứa một lân cận đóng compac V của x trong W . Vì W mở và X là T_2 -không gian suy ra V cũng là một lân cận của x trong X .

4.4.3. Hệ quả. *Mỗi T_2 -không gian compac địa phương là không gian chính qui.*

Chứng minh suy trực tiếp từ Định lý 4.4.2.

Chương IV. Không gian compac

4.4. Không gian compac địa phương

4.4.4. Định lý. *Giả sử A là tập con đóng, compac của không gian chính qui, compac địa phương X và U là lân cận của A . Khi đó tồn tại lân cận đóng, compac V của A sao cho $A \subset V \subset U$.*

Hơn nữa, trên X tồn tại một hàm liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(y) = 1$ với mọi $y \in X \setminus V$.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

Chương IV. Không gian compac

4.4. Không gian compac địa phương

4.4.4. Định lý. Giả sử A là tập con đóng, compac của không gian chính qui, compac địa phương X và U là lân cận của A . Khi đó tồn tại lân cận đóng, compac V của A sao cho $A \subset V \subset U$.

Hơn nữa, trên X tồn tại một hàm liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(y) = 1$ với mọi $y \in X \setminus V$.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

4.4.5. Hệ quả. Mỗi không gian chính qui, compac địa phương là hoàn toàn chính qui.

Mỗi T_2 -không gian compac địa phương là không gian Tikhonop.

Chương IV. Không gian compac

4.4. Không gian compac địa phương

4.4.4. Định lý. Giả sử A là tập con đóng, compac của không gian chính qui, compac địa phương X và U là lân cận của A . Khi đó tồn tại lân cận đóng, compac V của A sao cho $A \subset V \subset U$.

Hơn nữa, trên X tồn tại một hàm liên tục $f : X \rightarrow [0, 1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(y) = 1$ với mọi $y \in X \setminus V$.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

4.4.5. Hệ quả. Mỗi không gian chính qui, compac địa phương là hoàn toàn chính qui.

Mỗi T_2 -không gian compac địa phương là không gian Tikhonov.

4.4.6. Định lý. Để tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ của các không gian tôpô X_α ,

$\alpha \in \Lambda$ là không gian compac địa phương điều kiện cần và đủ là tất cả các không gian X_α , $\alpha \in \Lambda$ là không gian compac, trừ ra một số hữu hạn các không gian X_{α_i} , $i = 1, \dots, k$ là không gian compac địa phương.

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

4.5. Sự compac hoá

Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là không gian tôpô không compac. Ký hiệu $X^* = X \cup \{\infty\}$ với $\infty \notin X$. Trên X^* ta xét họ các tập con của nó cho bởi

$$\mathcal{U} = \{U \subset X^* : U \in \mathcal{T}, \text{ hoặc } X^* \setminus U \text{ là tập đóng, compac trong } X\}.$$

Khi đó ta có

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

4.5. Sự compac hoá

Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là không gian tôpô không compac. Ký hiệu $X^* = X \cup \{\infty\}$ với $\infty \notin X$. Trên X^* ta xét họ các tập con của nó cho bởi

$$\mathcal{U} = \{U \subset X^* : U \in \mathcal{T}, \text{ hoặc } X^* \setminus U \text{ là tập đóng, compac trong } X\}.$$

Khi đó ta có

4.5.1. Định lý. $(X^*, \mathcal{U})$ là không gian compac và $(X, \mathcal{T})$ là không gian con của nó.

X^* là T_2 -không gian khi và chỉ khi X là T_2 -không gian.

Chứng minh. (a) $\mathcal{U}$ là tôpô trên X^* . Thật vậy, dễ thấy rằng $\emptyset \in \mathcal{U}$ và $X^* \in \mathcal{U}$.

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

Giả sử $U_i, i \in I$ là họ tuỳ ý thuộc $\mathcal{U}$. Nếu $\infty \notin \bigcup_{i \in I} U_i$, thì $\infty \notin U_i$ với mọi $i \in I$. Do đó $U_i \in \mathcal{T}$ với mọi $i \in I$. Vì vậy, $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Nếu $\infty \in \bigcup_{i \in I} U_i$, thì ký hiệu $S = \{i \in I : \infty \in U_i\}$. Khi đó tập $X^* \setminus \left[\bigcup_{i \in S} U_i \right]$ là tập đóng compac và vì $X^* \setminus \left[\bigcup_{i \in I} U_i \right]$ là tập con đóng của tập compac $X^* \setminus \left[\bigcup_{i \in S} U_i \right]$ nên $\bigcup_{i \in I} U_i$ là tập mở theo tôpô $\mathcal{U}$.

Giả sử $U, V \in \mathcal{U}$. Khi đó nếu $\infty \in U \cap V$, thì $\infty \in U$ và $\infty \in V$. Do đó $X^* \setminus (U \cap V) = (X^* \setminus U) \cup (X^* \setminus V)$ là tập đóng compac trong X . Vậy, $U \cap V \in \mathcal{U}$. Nếu $\infty \notin U \cap V$. Khi đó ta xét các trường hợp

Nếu $\infty \notin U$ và $\infty \notin V$, thì $U, V \in \mathcal{T}$. Do đó $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Nếu $\infty \notin U$ và $\infty \in V$, thì $U \cap V = U \cap V \cap X$. Vì $\infty \in V$, nên

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

$X^* \setminus V = X \setminus V$ là tập đóng trong X , nên $V \cap X$ là tập mở trong X . Vì vậy, $U \cap V = U \cap V \cap X$ là tập mở trong X . Trường hợp $\infty \in U$ và $\infty \notin V$ chứng minh tương tự.

Vậy $\mathcal{U}$ là một tôpô trên X^* .

Dễ dàng chứng minh rằng tôpô $\mathcal{T}$ là tôpô cảm sinh của tôpô $\mathcal{U}$ lên X . Vậy $(X, \mathcal{T})$ là không gian con của không gian tôpô $(X^*, \mathcal{U})$.

(b) $(X^*, \mathcal{U})$ là không gian compac. Giả sử $\mathcal{V}$ là một phủ mở bất kỳ của X^* . Khi đó tồn tại $U \in \mathcal{V}$ sao cho $\infty \in U$. Khi đó ta có $X \setminus U$ là tập con compac của X . Do đó tồn tại một phủ con hữu hạn $\mathcal{V}_1$ của $\mathcal{V}$ phủ $X \setminus U$. Khi đó họ $\mathcal{V}_1 \cup U$ là phủ hữu hạn của X^* . Vậy X^* là không gian compac.

(c) Nếu X^* là T_2 -không gian, thì không gian con của nó cũng là T_2 -không gian. Hơn nữa X là không gian compac địa phương. Thật

Chương IV. Không gian compact

4.5. Sự compact hoá

vậy, với bất kỳ $x \in X$ và điểm ∞ . vì X^* là T_2 -không gian nên tồn tại các lân cận mở U của x và V của ∞ sao cho $U \cap V = \emptyset$. Khi đó ta có $X^* \setminus V = X \setminus V$ là tập đóng compact chứa U . Do đó $X \setminus V$ là lân cận đóng compact của x .

Ngược lại, nếu X là T_2 -không gian compact địa phương và x, y là các điểm bất kỳ của X^* . Nếu $x, y \in X$, thì do X là T_2 -không gian nên tồn tại các tập mở U, V trong X để $U \cap V = \emptyset$. Khi đó U, V cũng là các tập mở trong X^* . Nếu $y = \infty$, thì vì X là không gian compact địa phương, nên tại điểm x có một lân cận đóng và compact U . Khi đó đặt $V = X^* \setminus U$ ta có V là lân cận của ∞ và $U \cap V = \emptyset$. Vậy, X^* là T_2 -không gian.

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

vậy, với bất kỳ $x \in X$ và điểm ∞ . vì X^* là T_2 -không gian nên tồn tại các lân cận mở U của x và V của ∞ sao cho $U \cap V = \emptyset$. Khi đó ta có $X^* \setminus V = X \setminus V$ là tập đóng compac chứa U . Do đó $X \setminus V$ là lân cận đóng compac của x .

Ngược lại, nếu X là T_2 -không gian compac địa phương và x, y là các điểm bất kỳ của X^* . Nếu $x, y \in X$, thì do X là T_2 -không gian nên tồn tại các tập mở U, V trong X để $U \cap V = \emptyset$. Khi đó U, V cũng là các tập mở trong X^* . Nếu $y = \infty$, thì vì X là không gian compac địa phương, nên tại điểm x có một lân cận đóng và compac U . Khi đó đặt $V = X^* \setminus U$ ta có V là lân cận của ∞ và $U \cap V = \emptyset$. Vậy, X^* là T_2 -không gian.

Nhận xét. Dễ thấy rằng X là không gian con trù mật trong X^* . Nếu $(X, \mathcal{T})$ là không gian compac, thì điểm ∞ là điểm cô lập của tôpô $\mathcal{U}$ trên X^* và ngược lại.

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

4.5.2. Định nghĩa. (Compac hoá một điểm) Không gian tôpô $(X^*, \mathcal{U})$ được gọi là *cái compac hoá một điểm* của không gian tôpô X .

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

4.5.2. Định nghĩa. (Compac hoá một điểm) Không gian tôpô $(X^*, \mathcal{U})$ được gọi là *cái compac hoá một điểm* của không gian tôpô X .

4.5.3. Định nghĩa. Cho không gian tôpô X . *Compac hoá* của X là cặp (f, Y) trong đó Y là không gian compac, f là ánh xạ đồng phôi của X lên không gian con trù mật của Y .

Compac hoá (f, Y) là Hausdorff nếu Y là không gian Hausdorff.

Nhận xét. Theo Định nghĩa 4.5.3, compac hoá một điểm của không gian X là compac hoá (i, X^*) với i là ánh xạ đồng nhất.

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

4.5.4. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô tùy ý, $F(X)$ là họ tất cả các hàm liên tục nhận giá trị trong $Q = [0, 1]$, $e : X \rightarrow Q^{F(X)}$ là ánh xạ định giá từ X vào hình lập phương $Q^{F(X)}$. *Compac hoá Stone-Cech* của không gian X là cặp $(e, \beta(X))$, ở đây $\beta(X)$ là bao đóng của tập $e(X)$ trong hình lập phương $Q^{F(X)}$.

Chương IV. Không gian compac

4.5. Sự compac hoá

4.5.4. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô tùy ý, $F(X)$ là họ tất cả các hàm liên tục nhận giá trị trong $Q = [0, 1]$, $e : X \rightarrow Q^{F(X)}$ là ánh xạ định giá từ X vào hình lập phương $Q^{F(X)}$. *Compac hoá Stone-Cech* của không gian X là cặp $(e, \beta(X))$, ở đây $\beta(X)$ là bao đóng của tập $e(X)$ trong hình lập phương $Q^{F(X)}$.

4.5.5. Định lý. Nếu X là không gian Tikhônôp và $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ liên tục của X vào T_2 -không gian compac Y , thì tồn tại một thác triển liên tục $f : \beta(X) \rightarrow Y$ từ compac hoá $\beta(X)$ vào Y

Chính xác hơn, giả sử $(e, \beta(X))$ là compac hoá Stone-Cech. Khi đó $f \circ e^{-1}$ có thể thác triển thành ánh xạ liên tục từ không gian $\beta(X)$ vào Y .

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6. Tính paracompắc

4.6.1. Định lý. Nếu $\mathcal{U}$ là phủ mở của tập con compac A của không gian giả metric (X, d) , thì tồn tại một số $r > 0$ sao cho một r -hình cầu mở tâm tại điểm bất kỳ của A được chứa trong một phần tử nào đó của phủ $\mathcal{U}$.

Chứng minh. Do A compac, $\mathcal{U}$ là cái phủ của A , nên tồn tại họ con hữu hạn của $\mathcal{U}$ phủ A gồm các tập $U_1, \dots, U_n$. Ký hiệu $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm xác định trên X cho bởi $f_i(x) = d(x, X \setminus U_i)$ với mọi $x \in X$, $i = 1, \dots, n$ và $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm cho bởi $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} f_i(x)$ với mọi

$x \in X$. Khi đó f_i và f là hàm liên tục, $i = 1, \dots, n$. Vì với mỗi điểm $x \in A$ tồn tại $1 \leq i \leq n$ sao cho $x \in U_i$. Do đó ta có $f(x) \geq f_i(x) > 0$, với mỗi $x \in A$. Khi đó $f(A)$ là tập con compac của $(0, +\infty)$. Do đó với mỗi $x \in A$ có một $1 \leq i \leq n$ sao cho $f_i(x) > r$. Từ đó suy ra hình cầu mở $B(x, r) \subset U_i$.

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.2. Hệ quả. *Nếu A là tập con compac của không gian giả metric và U là lân cận của A , thì với số $r > 0$ nào đó U chứa r -hình cầu mở tâm tại điểm tùy ý của A .*

Chương IV. Không gian compact

4.6. Tính paracompact

4.6.2. Hệ quả. Nếu A là tập con compact của không gian giả metric và U là lân cận của A , thì với số $r > 0$ nào đó U chứa r -hình cầu mở tâm tại điểm tùy ý của A .

Bây giờ giả sử (X, d) là không gian giả metric. Ký hiệu $V = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < r\}$ và $V[x] = \{y \in X : (x, y) \in V\}$. Khi đó $V[x]$ là hình cầu mở tâm tại x , bán kính r .

Ký hiệu $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ và gọi Δ là đường chéo. Khi đó V là tập con mở của $X \times X$ và $\Delta \subset V$. Từ Định lý 4.6.1 ta có

4.6.3. Hệ quả. Nếu $\mathcal{U}$ là phủ mở của không gian giả metric compact, thì có một lân cận V của đường chéo Δ trong $X \times X$ sao cho với mỗi $x \in X$ tập hợp $V[x]$ được chứa trong một phần tử nào đó của họ $\mathcal{U}$.

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.4. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{U})$. Phủ $\mathcal{U}$ của không gian tôpô X được gọi là *đơn kiểu* nếu tồn tại một lân cận V của đường chéo Δ sao cho với mỗi $x \in X$ tập hợp $V[x]$ được chứa trong một phần tử nào đó của họ $\mathcal{U}$.

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompact

4.6.4. Định nghĩa. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{U})$. Phủ $\mathcal{U}$ của không gian tôpô X được gọi là *đơn kiểu* nếu tồn tại một lân cận V của đường chéo Δ sao cho với mỗi $x \in X$ tập hợp $V[x]$ được chứa trong một phần tử nào đó của họ $\mathcal{U}$.

4.6.5. Định lý. Nếu phủ mở $\mathcal{U}$ của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ có cái mịn đóng hữu hạn địa phương, thì $\mathcal{U}$ là cái phủ đơn kiểu.

Do đó, mỗi phủ mở của không gian chính qui compac là đơn kiểu.

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{U}$ là một phủ mở của không gian tôpô X và $\mathcal{B}$ là cái mịn đóng hữu hạn địa phương. Với mỗi $A \in \mathcal{B}$ ta chọn phần tử $U_A \in \mathcal{U}$ sao cho $A \subset U_A$. Ký hiệu $V_A = (U_A \times U_A) \cup [X \setminus A] \times (X \setminus A)$. Khi đó V_A là lân cận mở của đường chéo Δ trong $X \times X$, đồng thời nếu $x \in A$, thì $V_A[x] = U_A$. đặt $V = \cap \{V_A : A \in \mathcal{B}\}$. Khi đó với mỗi $x \in X$ ta có $V[x] \subset V_A[x] = U_A$. Do đó hệ tất cả các tập hợp dạng

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

$V[x]$ lập thành một cái mịn của $\mathcal{U}$. Ta chỉ còn chứng minh rằng rằng V là lân cận của đường chéo Δ . Thật vậy, với mỗi $(x, x) \in \Delta$ ta tìm được một lân cận W của x chỉ cắt một số hữu hạn phần tử của phủ $\mathcal{B}$. Nếu $W \cap A = \emptyset$, thì $W \subset X \setminus A$ và $W \times W \subset V_A$. Do đó V chứa giao của $W \times W$ với một số hữu hạn tập hợp V_A . Vì thế V là lân cận của điểm (x, x) .

Cuối cùng, nếu X là không gian compac, chính qui thì mỗi phủ mở $\mathcal{U}$ có cái mịn hữu hạn đóng. Do đó mỗi phủ mở là đơn kiểu.

Chương IV. Không gian compact

4.6. Tính paracompact

$V[x]$ lập thành một cái mịn của $\mathcal{U}$. Ta chỉ còn chứng minh rằng rằng V là lân cận của đường chéo Δ . Thật vậy, với mỗi $(x, x) \in \Delta$ ta tìm được một lân cận W của x chỉ cắt một số hữu hạn phần tử của phủ $\mathcal{B}$. Nếu $W \cap A = \emptyset$, thì $W \subset X \setminus A$ và $W \times W \subset V_A$. Do đó V chứa giao của $W \times W$ với một số hữu hạn tập hợp V_A . Vì thế V là lân cận của điểm (x, x) .

Cuối cùng, nếu X là không gian compact, chính qui thì mỗi phủ mở $\mathcal{U}$ có cái mịn hữu hạn đóng. Do đó mỗi phủ mở là đơn kiểu.

4.6.6. Định nghĩa. Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là *paracompact* nếu nó chính qui và mỗi phủ mở của nó có cái mịn mở hữu hạn địa phương.

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompact

Bây giờ giả sử U là tập con của $X \times X$. Với mỗi $x \in X$ ta ký hiệu $U[x] = \{y \in X : (x, y) \in U\}$ và với mỗi $A \subset X$ ta ký hiệu $U[A] = \{y \in X : (x, y) \in U, \text{ với } x \text{ nào đó thuộc } A\}$. Dễ thấy rằng $U[A] = \bigcup_{x \in A} U[x]$.

Ký hiệu $U^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in U\}$. Tập $U \subset X \times X$ được gọi là tập đối xứng, nếu $U = U^{-1}$. Dễ thấy rằng tập $U \cap U^{-1}$ là tập đối xứng.

Nếu U, V là các tập con của tích $X \times X$ thì ta ký hiệu $U \circ V = \{(x, z) | (x, y) \in V, (y, z) \in U, \text{ với } y \text{ nào đó thuộc } X\}$.

Nếu V đối xứng, thì $V \circ V = \bigcup_{y \in X} (V[y] \times V[y])$. Đối với mỗi tập $A \subset X$ ta có $U \circ V[A] = U[V[A]]$.

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.7. Bổ đề. *Nếu không gian X là chính qui và mỗi phủ mở của nó có cái mịn mở hữu hạn địa phương, thì mỗi phủ mở của nó có cái mịn hữu hạn địa phương đóng.*

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.7. Bổ đề. *Nếu không gian X là chính qui và mỗi phủ mở của nó có cái mịn mở hữu hạn địa phương, thì mỗi phủ mở của nó có cái mịn hữu hạn địa phương đóng.*

4.6.8. Bổ đề. *Giả sử X là không gian tôpô sao cho mỗi phủ mở là đơn kiểu. Nếu U là lân cận của đường chéo Δ trong $X \times X$, thì tồn tại lân cận đối xứng V của đường chéo sao cho $V \circ V \subset U$.*

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.7. Bổ đề. Nếu không gian X là chính qui và mỗi phủ mở của nó có cái mịn mở hữu hạn địa phương, thì mỗi phủ mở của nó có cái mịn hữu hạn địa phương đóng.

4.6.8. Bổ đề. Giả sử X là không gian tôpô sao cho mỗi phủ mở là đơn kiểu. Nếu U là lân cận của đường chéo Δ trong $X \times X$, thì tồn tại lân cận đối xứng V của đường chéo sao cho $V \circ V \subset U$.

4.6.9. Bổ đề. Cho không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ mà mỗi phủ mở của nó là đơn kiểu và $\mathcal{A}$ là họ hữu hạn địa phương (hoặc rời rạc) các tập con của không gian tôpô X . Khi đó tồn tại một lân cận V của đường chéo Δ trong $X \times X$ sao cho họ tất cả các tập $\{V[A] : A \in \mathcal{A}\}$ là hữu hạn địa phương (tương ứng, rời rạc).

Chứng minh của các Bổ đề trên, xem tài liệu tham khảo[2].

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.10. Hệ quả. *Mỗi không gian paracompắc là không gian chuẩn tắc.*

Chứng minh. Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là không gian paracompắc. Khi đó mỗi phủ mở của nó là đơn kiểu. Giả sử A, B là hai tập đóng rời nhau trong X . Ký hiệu $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Khi đó $\mathcal{A}$ là họ rời rạc. Sử dụng Bổ đề 4.6.9 tồn tại một lân cận V của Δ sao cho $\{V[A], V[B]\}$ là rời rạc. Vì $V[A], V[B]$ là các lân cận tương ứng của A và B , nên $(X, \mathcal{T})$ là không gian chuẩn tắc.

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.10. Hệ quả. *Mỗi không gian paracompắc là không gian chuẩn tắc.*

Chứng minh. Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là không gian paracompắc. Khi đó mỗi phủ mở của nó là đơn kiểu. Giả sử A, B là hai tập đóng rời nhau trong X . Ký hiệu $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Khi đó $\mathcal{A}$ là họ rời rạc. Sử dụng Bổ đề 4.6.9 tồn tại một lân cận V của Δ sao cho $\{V[A], V[B]\}$ là rời rạc. Vì $V[A], V[B]$ là các lân cận tương ứng của A và B , nên $(X, \mathcal{T})$ là không gian chuẩn tắc.

4.6.11. Bổ đề. *Nếu X là không gian tôpô sao cho mỗi phủ mở là đơn kiểu, thì mỗi phủ mở của X có cái mịn mở σ -rời rạc..*

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.10. Hệ quả. *Mỗi không gian paracompắc là không gian chuẩn tắc.*

Chứng minh. Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là không gian paracompắc. Khi đó mỗi phủ mở của nó là đơn kiểu. Giả sử A, B là hai tập đóng rời nhau trong X . Ký hiệu $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Khi đó $\mathcal{A}$ là họ rời rạc. Sử dụng Bổ đề 4.6.9 tồn tại một lân cận V của Δ sao cho $\{V[A], V[B]\}$ là rời rạc. Vì $V[A], V[B]$ là các lân cận tương ứng của A và B , nên $(X, \mathcal{T})$ là không gian chuẩn tắc.

4.6.11. Bổ đề. *Nếu X là không gian tôpô sao cho mỗi phủ mở là đơn kiểu, thì mỗi phủ mở của X có cái mịn mở σ -rời rạc..*

4.6.12. Bổ đề. *Nếu mỗi phủ mở của không gian có cái mịn hữu hạn σ -địa phương mở, thì mỗi phủ mở có cái mịn hữu hạn địa phương.*

Chứng minh của các Bổ đề trên, xem tài liệu tham khảo[2].

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

4.6.13. Định lý. Nếu X là không gian tôpô chính qui, thì các điều kiện sau đây là tương đương

- (a) Không gian X là paracompắc ;
- (b) Mỗi phủ mở của X có cái mịn Hữu hạn địa phương;
- (c) Mỗi phủ mở của X có cái mịn σ -rời rạc mở;
- (d) Mỗi phủ mở của X là đơn kiểu;
- (e) Mỗi phủ mở của X có cái mịn σ -rời rạc mở;
- (f) Mỗi phủ mở của X có cái mịn hữu hạn σ -địa phương mở.

Chứng minh. Phép suy (a) $\Rightarrow$ (b) suy từ định nghĩa không gian paracompắc .

Phép suy (b) $\Rightarrow$ (c) suy từ Bổ đề 4.6.7.

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

Phép suy (c) $\Rightarrow$ (d) suy từ Định lý 4.6.5.

Phép suy (d) $\Rightarrow$ (e) suy từ Bổ đề 4.6.11.

Phép suy (e) $\Rightarrow$ (f) là hiển nhiên.

Phép suy (f) $\Rightarrow$ (a) suy từ Bổ đề 4.6.12.

Chương IV. Không gian compac

4.6. Tính paracompắc

Phép suy (c) $\Rightarrow$ (d) suy từ Định lý 4.6.5.

Phép suy (d) $\Rightarrow$ (e) suy từ Bổ đề 4.6.11.

Phép suy (e) $\Rightarrow$ (f) là hiển nhiên.

Phép suy (f) $\Rightarrow$ (a) suy từ Bổ đề 4.6.12.

4.6.14. Hệ quả. *Mỗi không gian giả metric hoá được là không gian paracompắc.*

Chứng minh. Suy từ Định lý 3.3.11 và Định lý 4.6.13.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

5.1. Không gian liên thông

A. Liên thông đường

5.1.1. Định nghĩa. Giả sử X là không gian tôpô, $a, b \in X$. Ánh xạ liên tục $s : [0, 1] \rightarrow X$ sao cho $s(0) = a$, $s(1) = b$ được gọi là *đường cong* (hay *cung*) nối a với b .

5.1.2. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *liên thông tuyến tính* (hay *liên thông đường*) nếu với hai điểm bất kỳ $a, b \in X$ bao giờ cũng tồn tại một đường cong nối a với b .

Ví dụ. - Đoạn $[a, b]$ bất kỳ trong không gian các số thực $\mathbb{R}$ là liên thông đường.

- Không gian Ôclit $\mathbb{R}^n$ là không gian liên thông tuyến tính.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

B. Không gian liên thông

5.1.3. Định nghĩa. Không gian tôpô (X, T) được là *liên thông* nếu X không thể biểu diễn được dưới dạng hợp của hai tập hợp con khác rỗng, tách được.

Tập con A của không gian tôpô (X, T) được là *liên thông* nếu không gian con A với tôpô cảm sinh là không gian liên thông.

Nhận xét. Dễ dàng chứng minh rằng tập $Y \subset X$ là liên thông khi và chỉ khi Y không là hợp của hai tập con khác rỗng tách được nào cả.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

B. Không gian liên thông

5.1.3. Định nghĩa. Không gian tôpô (X, T) được là *liên thông* nếu X không thể biểu diễn được dưới dạng hợp của hai tập hợp con khác rỗng, tách được.

Tập con A của không gian tôpô (X, T) được là *liên thông* nếu không gian con A với tôpô cảm sinh là không gian liên thông.

Nhận xét. Dễ dàng chứng minh rằng tập $Y \subset X$ là liên thông khi và chỉ khi Y không là hợp của hai tập con khác rỗng tách được nào cả.

5.1.4. Mệnh đề. Tập con Y của không gian tôpô X là liên thông khi và chỉ khi các tập $\emptyset$ và Y là các tập vừa mở, vừa đóng duy nhất của Y .

Chứng minh dành cho độc giả.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

5.1.5. Mệnh đề. Đoạn $[a, b]$ bất kỳ trong $\mathbb{R}$ là tập liên thông.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng đoạn $[a, b] = A \cup B$ trong đó A, B là các tập con khác rỗng vừa đóng, vừa mở rời nhau của $[a, b]$ và giả thiết rằng $a \in A$. Ký hiệu $M = \{x \in [a, b] : [a, x) \subset A\}$. Vì A mở, nên $M \neq \emptyset$. Đặt $c = \sup M$. Khi đó $c \in M$. Thật vậy, với mỗi điểm $x' \in [a, c)$, theo định nghĩa cận trên đúng tồn tại một điểm $y \in (x', c)$. Vì thế $[a, y] \subset A$. Do đó $x' \in A$, nghĩa là $[a, c) \subset A$. Bởi vậy, $c \in M$. Lại vì A đóng nên $[a, c] \subset A$. Bây giờ ta sẽ chứng tỏ rằng $c = b$. Nếu ngược lại $c < b$, thì từ tính mở của A tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset A$. Vì thế $c + \varepsilon \in M$. Điều này mâu thuẫn với cách đặt $c = \sup M$. Toàn bộ chứng minh trên chứng tỏ rằng $[a, b] \subset A$. Kết luận này trái với giả thiết phản chứng.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

5.1.6. Định lý. Tập con A của không gian tôpô X là tập liên thông khi và chỉ khi với mỗi cặp các tập con mở U, V trong X sao cho $A \subset U \cup V$, nếu $A \cap U \neq \emptyset$ và $A \cap V \neq \emptyset$, thì $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Chứng minh xem như bài tập.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

5.1.6. Định lý. Tập con A của không gian tôpô X là tập liên thông khi và chỉ khi với mỗi cặp các tập con mở U, V trong X sao cho $A \subset U \cup V$, nếu $A \cap U \neq \emptyset$ và $A \cap V \neq \emptyset$, thì $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Chứng minh xem như bài tập.

5.1.7. Định lý. Giả sử A là tập hợp liên thông trong không gian tôpô X và B là tập con của X sao cho $A \subset B \subset \overline{A}$. Khi đó B là tập liên thông.

Từ đó suy ra nếu A liên thông thì $\overline{A}$ cũng liên thông.

Chứng minh. Giả sử B là tập không liên thông. Khi đó $B = B_1 \cup B_2$ trong đó B_1, B_2 là các tập mở khác rỗng và $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Vì $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$. Do A trù mật trong B và B_1, B_2 mở, nên $A \cap B_1 \neq \emptyset$, $A \cap B_2 \neq \emptyset$ và $(A \cap B_1) \cap (A \cap B_2) = \emptyset$. Suy ra A là tập không liên thông. Điều này mâu thuẫn với giả thiết A liên thông. Vậy B là tập liên thông.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

5.1.8. Định lý. *Ảnh liên tục của một không gian liên thông là một không gian liên thông.*

Chúng minh xem như bài tập.

Nhận xét. Từ định lý 5.1.8 ta suy ra $s([0, 1])$ là tập liên thông trong X .

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

5.1.8. Định lý. *Ảnh liên tục của một không gian liên thông là một không gian liên thông.*

Chứng minh xem như bài tập.

Nhận xét. Từ định lý 5.1.8 ta suy ra $s([0,1])$ là tập liên thông trong X .

5.1.9. Định lý. *Một không gian liên thông tuyến tính thì liên thông.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng X là không gian liên thông tuyến tính nhưng không liên thông, nghĩa là tồn tại các tập vừa mở, vừa đóng khác rỗng U và V sao cho $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Khi đó với hai điểm bất kỳ $a \in U$, $b \in V$ tồn tại đường cong s nối a với b . Xét tập $s([0,1])$ ta có $s([0,1]) = (s([0,1]) \cap U) \cup (s([0,1]) \cap V)$, $U \cap V = \emptyset$, U, V mở $U \cap s([0,1]) \neq \emptyset$, $V \cap s([0,1]) \neq \emptyset$. Vậy tập $s([0,1])$ không liên thông. Điều này mâu thuẫn.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

Nhận xét. Không gian Öclit $\mathbb{R}^n$ là không gian liên thông.

5.1.10. Định lý. *Giả sử $\mathcal{U}$ là họ nào đó các tập con liên thông của không gian tôpô X . Nếu không có hai phần tử nào của họ $\mathcal{U}$ tách được, thì $\bigcup\{A : A \in \mathcal{U}\}$ là tập liên thông.*

Chứng minh. Ký hiệu $C = \bigcup\{A : A \in \mathcal{U}\}$ và D là tập con vừa mở, vừa đóng trong C . Khi đó với mỗi tập hợp $A \in \mathcal{U}$, tập hợp $A \cap D$ vừa mở, vừa đóng trong A . Vì tập A liên thông, nên hoặc $A \subset D$ hoặc $A \subset C \setminus D$. Nếu A và B là các phần tử của họ $\mathcal{U}$ thì các bao hàm thức $A \subset D$ và $B \subset C \setminus D$ không đồng thời xảy ra, vì nếu ngược lại thì do A và B tương ứng là các tập con của các tập tách được C và $C \setminus D$, nên chúng cũng tách được. Do đó hoặc mỗi phần tử của họ $\mathcal{U}$ là tập con của $C \setminus D$, khi đó $D = \emptyset$, hoặc mỗi phần tử của họ $\mathcal{U}$ là tập con của D , khi đó $C \setminus D = \emptyset$.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

5.1.11. Định nghĩa. Ta gọi mỗi tập con liên thông cực của không gian tôpô X là *thành phần liên thông* của không gian đó.

Thành phần của tập con A của một không gian tôpô là thành phần của không gian con A với tôpô cảm sinh.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.1 Không gian liên thông

5.1.11. Định nghĩa. Ta gọi mỗi tập con liên thông cực của không gian tôpô X là *thành phần liên thông* của không gian đó.

Thành phần của tập con A của một không gian tôpô là thành phần của không gian con A với tôpô cảm sinh.

5.1.12. Định lý. (a) *Mỗi tập con liên thông của một không gian tôpô được chứa trong một thành phần nào đó.*

(b) *Mỗi thành phần là tập đóng.*

(c) *Các thành phần khác nhau của một không gian tôpô là tách được.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

5.1.13. Định lý. Để tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_{\alpha}$ của các không gian tôpô

X_{α} , $\alpha \in \Lambda$ là không gian liên thông điều kiện cần và đủ là X_{α} liên thông, với mọi $\alpha \in \Lambda$.

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [1].

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.2 Không gian liên thông địa phương

5.2. Không gian liên thông địa phương

5.2.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *liên thông địa phương* nếu mỗi điểm $x \in X$ có một cơ sở lân cận liên thông.

Tập con A của không gian tôpô X được gọi là *tập liên thông địa phương* nếu A là không gian liên thông địa phương với tôpô cảm sinh.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.2 Không gian liên thông địa phương

5.2. Không gian liên thông địa phương

5.2.1. Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *liên thông địa phương* nếu mỗi điểm $x \in X$ có một cơ sở lân cận liên thông.

Tập con A của không gian tôpô X được gọi là *tập liên thông địa phương* nếu A là không gian liên thông địa phương với tôpô cảm sinh.

5.2.2. Định lý. Không gian tôpô X là liên thông địa phương khi và chỉ khi mọi thành phần liên thông của tập mở là tập mở.

Chứng minh. CẦN. Giả sử X là không gian liên thông địa phương, U là tập con mở bất kỳ của X và C là thành phần liên thông nằm trong U . Ta cần chứng minh rằng C mở. Giả sử x là điểm tùy ý thuộc C . Khi đó $x \in U$. Vì U mở và X liên thông địa phương ta suy ra tồn tại một lân cận liên thông V sao cho $x \in V \subset U$. Do C là thành phần liên thông trong U nên $x \in V \subset C$. Vì thế C mở.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.2 Không gian liên thông địa phương

ĐỦ. Giả sử mọi thành phần liên thông của một tập mở là tập mở và x là điểm bất kỳ thuộc X . Ta cần chứng minh rằng x có một cơ sở lân cận gồm các tập hợp liên thông. Thật vậy, giả sử U là lân cận mở của x . Ký hiệu C là thành phần liên thông chứa điểm x và $C \subset U$. Theo giả thiết C mở, vì thế C là một lân cận liên thông của x thoả mãn $x \in C \subset U$. Vậy X là không gian liên thông địa phương.

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.2 Không gian liên thông địa phương

ĐỦ. Giả sử mọi thành phần liên thông của một tập mở là tập mở và x là điểm bất kỳ thuộc X . Ta cần chứng minh rằng x có một cơ sở lân cận gồm các tập hợp liên thông. Thật vậy, giả sử U là lân cận mở của x . Ký hiệu C là thành phần liên thông chứa điểm x và $C \subset U$. Theo giả thiết C mở, vì thế C là một lân cận liên thông của x thoả mãn $x \in C \subset U$. Vậy X là không gian liên thông địa phương.

5.2.3. Hệ quả. *Nếu X là không gian compact và liên thông địa phương, thì số thành phần liên thông của nó là hữu hạn.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

Chương V. Không gian liên thông, liên thông địa phương

5.2 Không gian liên thông địa phương

ĐỦ. Giả sử mọi thành phần liên thông của một tập mở là tập mở và x là điểm bất kỳ thuộc X . Ta cần chứng minh rằng x có một cơ sở lân cận gồm các tập hợp liên thông. Thật vậy, giả sử U là lân cận mở của x . Ký hiệu C là thành phần liên thông chứa điểm x và $C \subset U$. Theo giả thiết C mở, vì thế C là một lân cận liên thông của x thoả mãn $x \in C \subset U$. Vậy X là không gian liên thông địa phương.

5.2.3. Hệ quả. *Nếu X là không gian compact và liên thông địa phương, thì số thành phần liên thông của nó là hữu hạn.*

Chứng minh xem tài liệu tham khảo [2].

5.2.4. Định lý. *Để tích $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_{\alpha}$ của các không gian tôpô*

X_{α} , $\alpha \in \Lambda$ là không gian liên thông địa phương, điều kiện cần và đủ là mọi X_{α} , $\alpha \in \Lambda$ đều là không gian liên thông địa phương, ngoài ra trừ ra một số hữu hạn còn hầu hết các X_{α} là không gian liên thông.