Các bài toán về khoảng cách

Vũ Trọng Hải - mt123

I.Lý thuyết cơ bản cần nhớ

* Khoảng cách giữa hai điểm $M(x_1,y_1)$ và $N(x_2,y_2)$ là $MN = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

* Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Cho điểm $M(x_o,y_o)$ và đường thẳng $Ax+By+C=0(\Delta)$. Khi đó:

$$d(M,\Delta) = \frac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

II. Một số ví dụ có giải

Dạng 1: Các bài toán về khoảng cách thoả mãn một điều kiện cho trước

VD1: Cho hàm số $y= f(x) = \frac{x^3-3}{x+2}$ (C). Tìm trên (C) những điểm cách đều 2 trục toạ độ.

Giải

Ta thấy nhửng điểm cách đều hai trục toạ độ chính là tất cả các điểm nằm trên đường thẳng $y=\pm x$.

Vậy các điểm phải tìm chính là giao điểm của đường thẳng $y=\pm x$ và (C).

Hoành độ giao điểm chính là nghiệm của phương trình:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x^2-3}{x+2}=x\\ \frac{x^2-3}{x+2}=-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{-3}{2}\\ 2x^2+2x-3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{-3}{2}\\ x=-1\pm\sqrt{7}\end{array}\right. \text{(thoả điều kiện)}$$

(Với $x\neq-2$)

Vậy trên (C) có 3 điểm mà từ đó khoảng cách đến hai trục bằng nhau là :

$M_1(\frac{-3}{2}, \frac{-3}{2})$,$M_2(-1-\sqrt{7}, -1-\sqrt{7})$, $M_3(-1+\sqrt{7},-1+\sqrt{7})$

VD2: Cho hàm số (C): $y= \frac{x^2+x+2}{x-1}$. Tìm tất cả các cặp điểm M_1 , M_2 nằm trên (C) và đối xứng với nhau qua $I(0,\frac{5}{2})$.

Giải

Gọi (D) là phương trình đường thẳng đi qua $I(0,\frac{5}{2})$ và có hệ số góc k. Khi đó phương trình của (d) là:$y=kx+\frac{5}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D) là:

$$\frac{x^2+x+2}{x-1} = kx+\frac{5}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq1\\ (k-1)x^2+(\frac{3}{2}-k)x-\frac{9}{2}=0\end{cases} \text{(I)}$$

Để (D) cắt (C) tại hai điểm M_1 , M_2 đối xứng với nhau qua $I(0,\frac{5}{2})$ thì trước hết phương trình hai của hệ (I) phải có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho

$$\frac{S}{2} = \frac{x_1+x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

Với $k=\frac{3}{2}$ thì phương trình hai của (I) trở thành: $x^2 - 9=0 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

Vậy $M_1(-3,-2)$ và $M_2(3,7)$ là hai điểm phải tìm.

.

VD3: Cho hàm số: $y=\frac{x^2+5x+15}{x+3}$ (C)

Tỉm $M\in(C)$ để khoảng cách tử M đến Ox gấp hai lần khoảng cách từ M đến Oy.

Giải

Giả sử $M(x,y)\in(C)$. Khoảng cách từ M(x,y) đến hai trục là:

- Trục Ox: $|y| = \frac{x^2+5x+15}{x+3} = d_1$

- Trục Oy: $|x| = d_2$

Ta có: $d_1=2d_2 \Leftrightarrow |y| =2|x|$. Xét hai trường hợp sau:

$$*)\ \begin{cases} y=2x \\ y=\frac{x^2+5x+15}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2x=\frac{x^2+5x+15}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2+x-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{(-1-\sqrt{61})}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{61}}{2} \end{array} \right.$$

$$*)\ \begin{cases} y=-2x \\ y=\frac{x^2+5x+15}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ -2x=\frac{x^2+5x+15}{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ 3x^2+11x+15=0 \end{cases} \text{(I)}$$

Ta thấy phương trình hai của (I) có $\Delta<0 \Rightarrow$ (I) vô nghiệm.

Vậy các điểm M phải tìm là: $M_1(\frac{-1-\sqrt{61}}{2},-1-\sqrt{61})$ và $M_2(\frac{-1+\sqrt{61}}{2},-1+\sqrt{61})$.

Dạng 2: Bài toán tỉm cực trị của khoảng cách

VD4:Cho hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ (C)

Tỉm tất cả các điểm trên đồ thị sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiện cận là nhỏ nhất.

Giải

$$y=\frac{x^2-x+1}{x-1}= x+\frac{1}{x-1}$$

Ta có: $\lim_{x\to 1^-} y = -\infty$ và $\lim_{x\to 1^+} y=+\infty \Rightarrow$ (C) có tiệm cận đứng là $x-1=0(\Delta_1)$

$\lim_{x\to -\infty}(y-x)=0$ và $\lim_{x\to +\infty}(y-x)=0 \Rightarrow$ (C) có tiện cận xiên $x-y=0(\Delta_2)$.

Gọi $M(x_0,y_0)\in(C) \Rightarrow y_o=x_o+\frac{1}{x_o-1}$..

$d_1(M,\Delta_1) = |x_0-1|$

$d_2(M,\Delta_2)=\dfrac{|x_o-y_0|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|x_o-y_o-\dfrac{1}{x_o-1}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}|x_o-1|}$

$d_1+d_2=|x_0-1|+\dfrac{1}{\sqrt{2}|x_o-1|}\geq 2\sqrt{|x_0-1|.\dfrac{1}{\sqrt{2}|x_o-1|}}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow |x_0-1|=\dfrac{1}{\sqrt{2}|x_o-1|}\Leftrightarrow (x_o-1)^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x_o=1\pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$.

Vậy có hai điểm $M_1\left(1-\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}},\ 1-\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}-\sqrt{8}\right)$ và $M_2\left(1+\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}},\ 1+\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}+\sqrt{8}\right)$

Làm cho tổng khoảng cách của chúng đến hai tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất là $2\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$.

VD5: Cho (C) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. Tìm $M\in(C)$ sao cho tổng khoảng cách từ M tới hai trục toạ độ Ox,Oy là nhỏ nhất.

Giải

Gọi $M(x,y)\in(C)$. ta thấy tổng khoảng cách từ M đến Ox,Oy là:

$d(M)=|MH|+|MK|=|x|+|y|=|x|+\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

Ta thấy: khi toạ độ của M là $M(1,0)\in(C)$ thì d(M)=1. Do đó giá trị nhỏ nhất của d(M) sẽ nhỏ hơn hoặc bằng 1. Ta chì cần xét bài toán với x,y thoả các điều kiện sau:

$\begin{cases}|x|<1\\|y|<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|<1\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1.$

Khi đó d(M0 trở thành: $d(M)=x+\dfrac{1-x}{1+x}=x-1+\dfrac{2}{x+1}=(x+1)+\dfrac{2}{x+1}-2\geq 2\sqrt{(x+1)\dfrac{2}{x+1}}-2$

$=2\sqrt{2}-2$

Vậy min $d(M)=2(\sqrt{2}-1)$ xảy ra khi $\begin{cases}0<x<1\\x+1=\dfrac{2}{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1\Rightarrow M(\sqrt{2}-1,1-\sqrt{2})$

VD6: Tìm trên mỗi nhánh của đồ thị (C) $y=\dfrac{-x^2+2x-5}{x-1}$ các điểm M_1, M_2 sao cho $|M_1M_2|$ nhỏ nhất.

Giải

$y=\dfrac{-x^2+2x-5}{x-1}=-x+1-\dfrac{4}{x-1}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty\Rightarrow$ (C) có tiệm cận đứng là x=1.

Gọi $M_1(x_1,y_1)$ thuộc nhánh trái của (C) và $M_2(x_2,y_2)$ thuộc nhánh phải của (C).

Đặt $\begin{cases} x_1=1-a \\ x_2=1+b \\ a,b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=a+\frac{4}{a} \\ y_2=-b-\frac{4}{b} \end{cases}$

Ta có: $M_1M_2^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = (-a-b)^2 + (a+b+\frac{4}{a}+\frac{4}{b})^2$

$$=(a+b)^2 + (a+b+\frac{4(a+b)}{ab})^2 = (a+b)^2\left[1+(1+\frac{4}{ab})^2\right] \ge (2\sqrt{ab})^2 (2+\frac{8}{ab}+\frac{16}{a^2b^2})$$

(theo bất đẳng thức cosi)

$$=4ab(2+\frac{8}{ab}+\frac{16}{a^2b^2}) = 8(ab+\frac{8}{ab}+4) \ge 8(2\sqrt{ab\frac{8}{ab}} + 4)$$

$\Rightarrow M_1M_2^2 \ge 32(\sqrt{2}+1)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b>0 \\ ab=\frac{8}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\sqrt[4]{8} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1(1-\sqrt[4]{8},\sqrt[4]{8}+2\sqrt[4]{2}) \\ M_2(1+\sqrt[4]{8},-\sqrt[4]{8}-2\sqrt[4]{2}) \end{cases}$

III.Bài tập đề nghị

Bài 1: Cho (C) $y=\frac{2x^2-3x-5}{x-1}$. Tìm $M\in(C)$ để khoảng cách tử M đến Ox gấp ba lần khoảng cách từ M đến Oy.

Bài 2: Cho (C) $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$. Tìn trên (C) những điểm sao cho khoảng cách từ đó đến đường thẳng 3x+y+6=0 là nhỏ nhất.

ĐS: $A(\frac{-5}{2},\frac{-5}{2})$, $B(\frac{-5}{2},\frac{-5}{2})$

Bài 3: Cho hàm số $y=\frac{(m+1)x+m}{x+m}$. Tìm trên đồ thị hàm số ứng với m=1 những điểm có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận nhỏ nhất.

Bài 4: Cho $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$. Tìm trên mỗi nhánh của (C) các điểm M_1,M_2 sao cho $|M_1M_2|$ là nhỏ nhất.

Bài 5: Cho (C_a): $y=\frac{2x^2\sin a-3x\cos a+6}{x-1}$. Tìm a để khoảng cách từ O(0,0) đế tiện cận xiên lớn nhất.

Bài 6: Cho hàm số: $y = x + \frac{1}{x+1}$. Tìm m để đường thẳng y=m cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho $OA\perp OB$ (với o là gốc toạ độ)

ĐS: $m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 7: Cho hàm số: $y=f(x)=\frac{x^2+x-5}{x-1}$ (C).

a. Tìm trên hai nhánh phân biệt của (C) hai điểm A,B sao cho AB ngắn nhất.

b. Chứng minh tích của hai khoảng cách từ hai điểm bất kì trên (C) đến hai đường tiện cận là một hằng số.

ĐS: a. $A\left(2-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, f(2-\frac{1}{\sqrt[4]{2}})\right)$, $B\left(2+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, f(2+\frac{1}{\sqrt[4]{2}})\right)$

b. $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Tài liệu tham khảo

- Tuyển tập cac chuyên đề luyện thi đại học phần hàm số của Trần Phương.
- Phương pháp giải toán hàm số của Mai Xuân Hệ.
- Một số tài liệu trên internet.