Chương 1

Đa thức đối xứng hai biến

1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1. *Một đơn thức $f(x, y)$ của các biến độc lập x, y (trường hợp chung nhất có thể là các số phức) được hiểu là hàm số có dạng*

$$f(x, y) = a_{kl}x^k y^l,$$

trong đó $a_{kl} \neq 0$ là một số (hằng số), k, l là những số nguyên không âm. Số a_{kl} được gọi là hệ số, còn $k + l$ được gọi là bậc của đơn thức $f(x, y)$ và được kí hiệu là

$$\deg\left[f(x, y)\right] = \deg\left[ax^k y^l\right] = k + l.$$

Các số k, l tương ứng được gọi là bậc của đơn thức đối với các biến x, y. Như vậy, bậc của đơn thức hai biến bằng tổng các bậc của các đơn thức theo từng biến.

Chẳng hạn: $3x^2y$ và $\dfrac{2}{3}x^2y^3$ là các đơn thức theo x, y với bậc tương ứng bằng 3 và 5.

Định nghĩa 1.2. *Hai đơn thức của các biến x, y được gọi là đồng dạng (tương tự), nếu chúng chỉ có hệ số khác nhau. Như vậy, hai đơn thức được gọi là đồng dạng, nếu chúng có dạng : $Ax^k y^l$, $\;Bx^k y^l \;\; (A \neq B)$.*

Định nghĩa 1.3. *Giả sử $Ax^k y^l$ và $Bx^m y^n$ là hai đơn thức của các biến x, y. Ta nói rằng đơn thức $Ax^k y^l$ trội hơn đơn thức $Bx^m y^n$ theo thứ tự của các biến x, y, nếu $k > m$, hoặc $k = m$ và $l > n$.*

Chẳng hạn : Đơn thức x^4y^2 là trội hơn đơn thức x^2y^7, còn đơn thức x^4y^6 là trội hơn đơn thức x^4y^5.

Định nghĩa 1.4. *Một hàm số $P(x,y)$ được gọi là một đa thức theo các biến số x,y, nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hữu hạn các đơn thức. Như vậy, đa thức $P(x,y)$ theo các biến số x,y là hàm số có dạng*

$$P(x,y) = \sum_{k+l\leqslant m} a_{kl}x^ky^l.$$

Bậc lớn nhất của các đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 1.5. *Đa thức $P(x,y)$ được gọi là đối xứng, nếu nó không thay đổi khi đổi chỗ của x và y, nghĩa là*

$$P(x,y) = P(y,x).$$

Chẳng hạn :

$$P(x,y) = x^2 + xy + y^2, \quad Q(x,y) = x^2y + xy^2$$

là các đa thức đối xứng của các biến x,y.

Định nghĩa 1.6. *Các đa thức σ_j $(j = 1,2)$, trong đó*

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy.$$

được gọi là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x,y.

Định nghĩa 1.7. *Đa thức đối xứng $f(x,y)$ được gọi thuần nhất bậc m, nếu:*

$$f(tx,ty) = t^m f(x,y), \ \forall t \neq 0.$$

1.2 Tổng luỹ thừa và công thức Waring

Định nghĩa 1.8. *Các đa thức $s_k = x^k + y^k (k = 1,2,\dots)$ được gọi là các tổng luỹ thừa bậc k của các biến x,y.*

Định lý 1.1. *Mỗi tổng luỹ thừa $s_m = x^m + y^m$ có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức bậc m của σ_1 và σ_2.*

Chứng minh. Ta có

$$\sigma_1 s_{k-1} = (x+y)(x^{k-1}+y^{k-1}) = x^k + y^k + xy(x^{k-2}+y^{k-2}) = s_k + \sigma_2 s_{k-2}.$$

Như vậy

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}. \tag{1.1}$$

Công thức (1.1) được gọi là công thức Newton nó cho phép tính s_k theo s_{k-1} và s_{k-2}. Với $m = 1, m = 2$, Định lí 1.1 đúng vì

$$s_1 = x + y = \sigma_1,$$

$$s_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Giả sử định lí đã đúng cho $m < k$. Khi đó s_{k-2}, s_{k-1} lần lượt là các đa thức bậc $k-2, k-1$ của σ_1, σ_2. Theo công thức (1.1) ta suy ra s_k là đa thức bậc k của σ_1 và σ_2. Theo nguyên lí quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Sử dụng công thức (1.1) và các biểu thức của s_1, s_2 ở chứng minh trên, dễ dàng nhận được các biểu thức sau

$s_1 = x + y = \sigma_1,$

$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$

$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$

$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$

$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2.$

Việc tính các tổng luỹ thừa s_k theo công thức lặp (1.1) không được thuận tiện vì phải biết trước các tổng s_k và s_{k-1}. Đôi khi ta cần có biểu thức của s_k chỉ phụ thuộc vào σ_1 và σ_2. Công thức tương ứng được tìm ra năm 1779 bởi nhà toán học Anh E. Waring.

Định lý 1.2 (*Công thức Waring*). *Tổng luỹ thừa s_k được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở σ_1, σ_2 theo công thức:*

$$\frac{s_k}{k} = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!(k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m, \tag{1.2}$$

trong đó $[k/2]$ kí hiệu là phần nguyên của $k/2$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh công thức (1.2) bằng phương pháp quy nạp. Với $k = 1, k = 2$ công thức tương ứng có dạng

$$s_1 = \sigma_1, \quad \frac{1}{2}s_2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \sigma_2.$$

Như vậy, với $k = 1, k = 2$ công thức (1.2) đúng.

Giả sử công thức Waring đã đúng cho $s_1, s_2, ..., s_{k-1}$. Để chứng minh công thức đó đúng cho s_k chúng ta sử dụng công thức (1.1). Ta có

$$\frac{1}{k}s_k = \frac{1}{k}[\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}] =$$

$$= \frac{k-1}{k}\sigma_1 . \sum_m \frac{(-1)^m (k-m-2)!}{m!(k-2m-2)!} \sigma_1^{k-2m-1} \sigma_2^m -$$

$$-\frac{k-2}{k}\sigma_2 . \sum_n \frac{(-1)^n (k-n-3)!}{n!(k-2n-2)!} \sigma_1^{k-2n-2} \sigma_2^n =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_m \frac{(-1)^m (k-m-2)!(k-1)}{m!(k-2m-1)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m -$$

$$-\frac{1}{k} \sum_n \frac{(-1)^n (k-n-3)!(k-2)}{n!(k-2n-2)!} \sigma_1^{k-2n-2} \sigma_2^{n+1}.$$

Trong tổng thứ hai thay $n+1$ bởi m. Khi đó hai tổng có thể kết hợp thành một như sau:

$$\frac{1}{k}s_k = \frac{1}{k} \sum_m \frac{(-1)^m (k-m-2)!(k-1)}{m!(k-2m-1)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m -$$

$$-\frac{1}{k} \sum_m \frac{(-1)^{m-1} (k-m-2)!(k-2)}{(m-1)!(k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_m (-1)^m (k-m-2)!\left[\frac{k-1}{m!(k-2m-1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{k-2}{(m-1)!(k-2m)!}\right]\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m.$$

Sử dụng các công thức

$$\frac{1}{(m-1)!} = \frac{m}{m!}, \quad \frac{1}{(k-2m-1)!} = \frac{k-2m}{(k-2m)!}$$

ta có

$$\frac{k-1}{m!(k-2m-1)!} + \frac{k-2}{(m-1)!(k-2m)!} = \frac{k(k-m-1)}{m!(k-2m)!}.$$

Cuối cùng, vì

$$(k-m-2)!(k-m-1) = (k-m-1)!,$$

nên ta có công thức cần phải chứng minh:

$$\boxed{\frac{s_k}{k} = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!(k-2m)!}\sigma_1^{k-2m}\sigma_2^m.}$$

Định lí 1.2 được chứng minh.

Sử dụng công thức Waring dễ dàng nhận được các biểu thức của $s_k = x^k + y^k$ theo $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$ sau đây:

$s_1 = \sigma_1,$

$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$

$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2,$

$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2,$

$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2,$

$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3,$

$s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3,$

$s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4,$

$s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4,$

$s_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5.$

1.3 Các định lí cơ bản về đa thức đối xứng hai biến

Định lý 1.3 (*Định lí cơ bản*). *Mọi đa thức đối xứng $P(x,y)$ của các biến x,y đều có thể biểu diễn được dưới dạng đa thức $p(\sigma_1,\sigma_2)$ theo các biến $\sigma_1 = x+y$ và $\sigma_2 = xy$, nghĩa là*

$$P(x,y) = p(\sigma_1,\sigma_2). \tag{1.3}$$

Chứng minh. Trước hết xét trường hợp đơn thức, trong đó luỹ thừa của x và y cùng bậc, nghĩa là đơn thức dạng ax^ky^k. Hiển nhiên là

$$ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k.$$

Tiếp theo, xét đơn thức dạng $bx^ky^l (k \neq l)$. Vì đa thức là đối xứng, nên có số hạng dạng bx^ly^k. Để xác định, ta giả sử $k < l$ và xét tổng của hai đơn thức trên

$$b(x^ky^l + x^ly^k) = bx^ky^k(x^{l-k} + y^{l-k}) = b\sigma_2^k s_{l-k}.$$

Theo công thức Waring s_{l-k} là một đa thức của các biến σ_1, σ_2 , nên nhị thức nói trên là một đa thức của σ_1, σ_2.
Vì mọi đa thức đối xứng là tổng của các số hạng dạng ax^ky^k và $b(x^ky^l + x^ly^k)$, nên mọi đa thức đối xứng đều biểu diễn được ở dạng đa thức theo các biến σ_1 và σ_2. Định lí được chứng minh.

Định lý 1.4 (*Tính duy nhất*). *Nếu các đa thức $\varphi(\sigma_1,\sigma_2)$ và $\psi(\sigma_1,\sigma_2)$ khi thay $\sigma_1 = x+y, \sigma_2 = xy$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $P(x,y)$, thì chúng phải trùng nhau, nghĩa là $\varphi(\sigma_1,\sigma_2) \equiv \psi(\sigma_1,\sigma_2)$.*

Chứng minh. Đặt $\phi(\sigma_1,\sigma_2) = \varphi(\sigma_1,\sigma_2) - \psi(\sigma_1,\sigma_2)$. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\phi(x+y,xy) = \varphi(x+y,xy) - \psi(x+y,xy) = P(x,y) - P(x,y) = 0.$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng $\phi(\sigma_1,\sigma_2) \equiv 0$. Dễ thấy rằng, sau khi mở ngoặc thì biểu thức

$$f(x,y) := (x+y)^k(xy)^l$$

là một đa thức của các biến x, y và có số hạng trội nhất theo thứ tự các biến x, y là $x^{k+l}y^l$.

Giả sử $\phi(\sigma_1, \sigma_2)$ có dạng

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{k,l} A_{kl}\sigma_1^k\sigma_2^l.$$

Để tìm số hạng trội nhất, chúng ta sẽ chọn trong $\phi(\sigma_1, \sigma_2)$ các số hạng có $k + l$ là lớn nhất. Tiếp theo, trong các số hạng nói trên, chọn ra các số hạng với giá trị lớn nhất của l. Ví dụ, nếu

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2) = -\sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_1\sigma_2^4 - 6\sigma_1\sigma_2^2 + 10\sigma_2^3 - 7\sigma_1 + 5\sigma_2 + 1$$

thì số hạng được chọn sẽ là $2\sigma_1\sigma_2^4$.

Như vậy, giả sử chọn được đơn thức $A\sigma_1^m\sigma_2^n$. Khi đó, nếu thay $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$, thì số hạng trội nhất của ϕ sẽ là $Ax^{m+n}y^n$. Thật vậy, giả sử $B\sigma_1^k\sigma_2^l$ là đơn thức tuỳ ý khác với $Ax^{m+n}y^n$. Khi đó theo cách chọn ta có hoặc $m+n > l+l$, hoặc $m+n = k+l$, nhưng $n > l$. Trong cả hai trường hợp thì $Ax^{m+n}y^n$ trội hơn $Bx^{k+l}y^l$.

Như vậy chúng ta đã chứng tỏ rằng $Ax^{m+n}y^n$ là đơn thức trội nhất của $\phi(x + y, xy)$, nên $\phi(x + y, xy) \neq 0, \forall x, y$, nếu $\phi(\sigma_1, \sigma_2) \not\equiv 0$. Vậy, ta có $\phi(\sigma_1, \sigma_2) \equiv 0$. Định lí được chứng minh.

Để minh hoạ, xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.1. Biểu diễn đa thức đối xứng

$$f(x, y) = x^5 + x^4y + x^3y^3 + xy^4 + y^5.$$

Lời giải. Sử dụng công thức Waring ta có

$$f(x, y) = (x^5 + y^5) + xy(x^3 + y^3) + (xy)^3 = s_5 + \sigma_2 s_3 + \sigma_2^3 =$$

$$= (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) + \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + \sigma_2^3 = \sigma_1^5 - 4\sigma_1^3\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^3.$$

Bài tập

Hãy biểu diễn các đa thức đối xứng sau đây theo các đa thức đối xứng cơ sở.

1. $x^3 + y^3 + (x+y)^3$.

2. $x^4 + y^4 + (x+y)^4$.

3. $(x+y)^5 - x^5 - y^5$.

4. $2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$.

5. $x^5 + 3x^3y^2 - x^3y^3 + 2xy^4 - 7x^2y^2 + y^5 + 3x^2y^3 - 5xy^3 - 5x^3y + 2x^4y$.

1.4 Hệ phương trình đối xứng hai ẩn và ứng dụng

Giả sử $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ là các đa thức đối xứng. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} P(x,y) &= 0, \\ Q(x,y) &= 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Bằng cách đặt $x+y = \sigma_1, xy = \sigma_2$, trên cơ sở Định lí cơ bản, ta đưa hệ (1.4) về dạng:

$$\begin{cases} p(\sigma_1,\sigma_2) &= 0, \\ q(\sigma_1,\sigma_2) &= 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Hệ phương trình (1.5) thường đơn giản hơn hệ (1.4) và ta có thể dễ dàng tìm được nghiệm (σ_1, σ_2). Sau khi tìm được các giá trị của σ_1, σ_2, cần phải tìm các giá trị của các ẩn số x và y là nghiệm của hệ (1.4). Điều này có thể thực hiện được nhờ định lí sau đây.

Định lý 1.5. *Giả sử σ_1 và σ_2 là các số thực nào đó. Khi đó phương trình bậc hai*

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0 \tag{1.6}$$

và hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y &= \sigma_1, \\ xy &= \sigma_2. \end{cases} \tag{1.7}$$

liên hệ với nhau như sau: nếu z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình (1.6), *thì hệ* (1.7) *có nghiệm*

$$\begin{cases} x &= z_1, \\ y &= z_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x &= z_2, \\ y &= z_1 \end{cases}$$

và ngoài ra không còn có nghiệm nào khác. Ngược lại, nếu $x = a, y = b$ là nghiệm của hệ (1.7) *thì các số a, b là nghiệm của phương trình* (1.6).

Chứng minh. Nếu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình (1.6), thì theo công thức Viète :

$$z_1 + z_2 = \sigma_1, \qquad z_1 z_2 = \sigma_2,$$

suy ra

$$\begin{cases} x_1 &= z_1, \\ y_1 &= z_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 &= z_2, \\ y_2 &= z_1 \end{cases}$$

là các nghiệm của hệ (1.7). Vấn đề không còn có nghiệm nào khác sẽ được suy ra từ mệnh đề sau cùng của định lí và sẽ được chứng minh dưới đây.

Giả sử $x = a, y = b$ là nghiệm của hệ (1.7), nghĩa là

$$a + b = \sigma_1, \qquad ab = \sigma_1\sigma_2.$$

Khi đó ta có

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = z^2 - (a+b)z + ab = (z-a)(z-b).$$

Điều đó chứng tỏ rằng các số a, b là nghiệm của phương trình bậc hai (1.6). Định lí được chứng minh.

Cuối cùng chú ý rằng, điều kiện cần và đủ để phương trình (1.6) có nghiệm là

$$\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0. \tag{1.8}$$

Để minh hoạ xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 &= 35, \\ x + y &= 5. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $x+y=\sigma_1, xy=\sigma_2$. Ta có

$$x^3+y^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2.$$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases}\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2 &= 35,\\ \sigma_1 &= 5.\end{cases}$$

Từ hệ phương trình này tìm được $\sigma_2=6$. Khi đó x, y sẽ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y &= 5,\\ xy &= 6.\end{cases}$$

Theo Định lí 1.5, x và y là nghiệm của phương trình

$$z^2-5z+6=0$$

và ta tìm được các nghiệm của hệ phương trình đã cho :

$$\begin{cases}x_1 &= 2,\\ y_1 &= 3,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2 &= 3,\\ y_2 &= 2.\end{cases}$$

Ví dụ 1.3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3-y^3=5,\\ xy^2-x^2y=1.\end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình trên chưa phải là hệ đối xứng. Nếu đặt $z=-y$, thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x^3+z^3 &= 5,\\ xy^2+x^2z &= 1\end{cases}$$

là hệ đối xứng đối với x và z. Đặt $\sigma_1=x+z,\ \ \sigma_2=xz$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2) &= 5,\\ \sigma_1\sigma_2 &= 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma_1\sigma_2 &= 1,\\ \sigma_1^3-3 &= 5.\end{cases}$$

Hệ cuối cùng có nghiệm $\sigma_1=2, \sigma_2=\dfrac{1}{2}$. Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+z &= 2,\\ xz &= \dfrac{1}{2},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y &= 2,\\ xy=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Giải hệ trên ta có các nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}, \\ y_1 = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}, \\ y_2 = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ví dụ 1.4 (*Thi HSG lớp 10 thành phố Hà Nội, 1999-2000*). Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y = 18, \\ xy(x+1)(y+1) = m. \end{cases}$$

a) Giải hệ với $m = 72$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm.

Lời giải. Hệ phương trình đã cho là hệ đối xứng theo các biến x, y. Tuy nhiên, nếu ta đặt $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$ thì sẽ gặp khó khăn khi phải đưa về hệ bậc 2 theo σ_1, σ_2, nhất là hệ có tham số. Để ý rằng, nếu viết phương trình đầu của hệ ở dạng

$$x(x+1)+y(y+1) = 18$$

thì hệ cũng đối xứng theo các biến

$$X = x(x+1), \quad Y = y(y+1).$$

và có dạng

$$\begin{cases} X+Y = 18; \\ XY = m. \end{cases}$$

Ta có X, Y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 18t + m = 0. \tag{1.9}$$

a) Với $m = 72$, phương trình (1.9) trở thành

$$t^2 - 18t + 72 = 0.$$

Từ đó ta tìm được

$$\begin{cases} X = 12, \\ Y = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 6, \\ Y = 12. \end{cases}$$

Trở lại cách đặt ẩn, ta có các hệ sau:

$$\begin{cases} x(x+1) = & 12, \\ y(y+1) = & 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+1) = & 6, \\ y(y+1) = & 12. \end{cases}$$

Giải các hệ này ta tìm được 8 nghiệm của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} x = & 3, \\ y = & 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = & 3, \\ y = & -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = & -4, \\ y = & 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = & -4, \\ y = & -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = & 2, \\ y = & 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = & -3, \\ y = & 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = & 2, \\ y = & -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = & -3, \\ y = & -4. \end{cases}$$

b) Dễ thấy rằng

$$x(x+1) = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}.$$

Do đó từ cách đặt ẩn X, Y, suy ra điều kiện của X, Y là: $X \geq -\frac{1}{4}, Y \geq -\frac{1}{4}$.

kí hiệu

$$f(t) = t^2 - 18t + m.$$

Khi đó hệ ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1.9) có hai nghiệm X_1, X_2 thoả mãn điều kiện: $X_1 \geq X_2 \geq -\frac{1}{4}$.

Từ đó ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \Delta' \geq & 0, \\ 1.f(-\frac{1}{4}) \geq & 0, \\ \frac{s}{2} \geq & -\frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 - m \geq & 0, \\ m + \frac{73}{76} \geq & 0, \\ 9 \geq & -\frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{73}{16} \leqslant m \leqslant 81.$$

Ví dụ 1.5. Giải phương trình căn thức

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[4]{x} = y$, $\sqrt[4]{97-x} = z$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} y + z & = & 5, \\ y^4 + z^4 & = & 97. \end{cases}$$

Đặt $\sigma_1 = y + z, \sigma_2 = yz$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sigma_1 & = & 5, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 & = & 97. \end{cases}$$

Từ đó ta có phương trình bậc hai đối với σ_2:

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0.$$

Phương trình này có các nghiệm: $\sigma_2 = 6, \quad \sigma_2 = 44$. Như vậy, bài toán dẫn đến giải hai hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+z & = & 5, \\ yz & = & 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z & = & 5, \\ yz & = & 44. \end{cases}$$

Hệ thứ nhất có các nghiệm:

$$\begin{cases} y_1 & = & 2, \\ z_1 & = & 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 & = & 3, \\ z_2 & = & 2. \end{cases}$$

Từ đó tìm được các nghiệm của phương trình đã cho: $x_1 = 16, \quad x_2 = 81$. Dễ thấy rằng hệ còn lại vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 16, \quad x_2 = 81$.

Ví dụ 1.6. Giải phương trình

$$x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 9.$$

Lời giải. Đặt $y = \sqrt{17 - x^2}$. Điều kiện của x, y là $|x| \leqslant \sqrt{17}, \quad y \geq 0$. Với các điều kiện trên thì phương trình đã cho tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x + y + xy & = & 9, \\ x^2 + y^2 & = & 17. \end{cases}$$

Đặt $\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy$. Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 & = & 9, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 & = & 17. \end{cases}$$

Từ phương trình đầu của hệ trên, ta có $\sigma_2 = 9 - \sigma_1$. Thay biểu thức trên vào phương trình còn lại của hệ, ta được phương trình

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 35 = 0.$$

Giải phương trình trên ta có các nghiệm $\sigma_1 = 5, \quad \sigma_1 = -7$. Với $\sigma_1 = 5$, ta có $\sigma_2 = 4$, với $\sigma_1 = -7$, thì $\sigma_2 = 16$.

Với $\sigma_1 = 5, \ \sigma_2 = 4$, thì x, y là các nghiệm của phương trình

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Giải phương trình này ta được

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4, \\ y = 1. \end{cases}$$

Với $\sigma_1 = -7, \quad \sigma_2 = 16$, thì x, y là các nghiệm của phương trình

$$t^2 + 7t + 16 = 0.$$

Dễ thấy rằng phương trình trên đây vô nghiệm. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 1$ và $x = 4$.

Ví dụ 1.7. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^3 + y^3 + 1 = 3xy.$$

Lời giải. Đặt $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$. Phương trình trở thành

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 1 = 3\sigma_2 \Leftrightarrow (\sigma_1 + 1)(\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 - 3\sigma_2) = 0.$$

Trường hợp 1 : $\sigma_1 + 1 = 0$, ta có $x + y + 1 = 0$, phương trình có vô số nghiệm nguyên $(x \in \mathbb{Z}, y = -1 - y)$.

Trường hợp 2 : $\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 - 3\sigma_2 = 0$. Ta viết phương trình này ở dạng

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 = 3\sigma_2$$

và sử dụng bất đẳng thức (1.8), ta có

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 \leqslant \frac{3}{4}\sigma_1^2 \Leftrightarrow \sigma_1^2 - 4\sigma_1 + 4 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma_1 - 2)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 2 \Rightarrow \sigma_2 = 1.$$

Trong trường hợp này ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm nguyên duy nhất là $x = y = 1$. Như vậy, nghiệm của phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{Z}, \\ y = -1 - x. \end{cases}$$

Ví dụ 1.8. Chứng minh rằng, nếu các số u, v, x, y thoả mãn các hệ thức $u + v = x + y,\quad u^2 + v^2 = x^2 + y^2$ thì với mọi số tự nhiên n ta có $u^n + v^n = x^n + y^n$.

Lời giải. Đặt

$$\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy,$$

$$\alpha_1 = u + v, \quad \alpha_2 = uv.$$

Khi đó

$$\begin{cases} x + y = u + v, \\ x^2 + y^2 = u^2 + v^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = & u + v, \\ (x + y)^2 - 2xy = & (u + v)^2 - 2uv; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = & \alpha_1, \\ \sigma_2 = & \alpha_2. \end{cases}$$

Theo Định lí cơ bản thì mỗi đa thức đối xứng đều biểu diễn duy nhất qua đa thức của các biến là các đa thức đối xứng cơ sở. Giả sử $x^n + y^n = \varphi(\sigma_1, \sigma_2)$. Thế thì ta có $u^n + v^n = \varphi(\alpha_1, \alpha_2)$. Do $\alpha_1 = \sigma_1, \alpha_2 = \sigma_2$, nên ta có $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\alpha_1, \alpha_2)$. Từ đó suy ra $x^n + y^n = u^n + v^n$.

Bài tập

Giải các hệ phương trình :

1. $\begin{cases} 4(x+y) &= 3xy, \\ x+y+x^2+y^2 &= 26. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+xy &= 7, \\ x^2+y^2+xy &= 13. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3-y^3 &= 19(x-y), \\ x^3+y^3 &= 7(x+y). \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2 &= 5, \\ x^3+y^3 &= 9. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4 &= 133, \\ x^2-xy+y^2 &= 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+x^2y^2+y^2 &= 49, \\ x^4+y^4-x^2-y^2 &= 84. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) &= 16, \\ (x+y)(x^2+y^2) &= 40. \end{cases}$

8. $\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) &= 15xy, \\ (x^2+y^2)(x^4+y^4) &= 85x^2y^2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y &= 1, \\ x^5+y^5 &= 31. \end{cases}$

10. $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) &= 10, \\ (x+y)(xy-1) &= 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y &= 10, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}} &= \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} &= \dfrac{5}{6}\sqrt{xy}. \\ x+y &= 13. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy} &= 7, \\ x^2+y^2+xy &= 133. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+xy+y &= 12, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y} &= 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y &= 20, \\ 7\sqrt[3]{xy}-3.\sqrt{xy} &= 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+y &= 10, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} &= \dfrac{5}{2}\sqrt[6]{xy}. \end{cases}$

Giải các phương trình:

17. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}.$

18. $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{629-x}=8.$

19. $x\sqrt[3]{35-x^3}(x+\sqrt[3]{35-x^3})=30,$

20. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

21. $(x-a)^5+(b-x)^5=(b-a)^5.$

22. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $x+y=x^2-xy+y^2.$

1.5 Một số bài toán về phương trình bậc hai và ứng dụng

Nhiều bài toán về phương trình bậc hai được giải một cách dễ dàng nhờ áp dụng đa thức đối xứng. Để minh hoạ, xét một số ví dụ sau.

Ví dụ 1.9. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Với n là số nguyên, đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$.

a) Chứng minh rằng

$$aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0. \tag{1.10}$$

b) Áp dụng: Không khai triển, hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = (1+\sqrt{2})^5 + (1-\sqrt{2})^5.$$

Lời giải

a) Ta có

$$x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) - (x_1^n + x_2^n)x_1x_2.$$

Do đó

$$S_{n+2} = S_{n+1}(x_1 + x_2) - S_n x_1 x_2.$$

Trong biểu thức trên thay $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ *và* $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ *ta được*

$$S_{n+2} = -\frac{b}{a}S_{n+1} - \frac{c}{a}S_n,$$

hay

$$aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0.$$

b) Đặt $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ *thì* x_1, x_2 *là nghiệm của phương trình*

$$[x-(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})]=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0.$$

Với phương trình trên hệ thức trong câu a) trở thành

$$S_{n+2}=2S_{n+1}+S_n (S_n=x_1^n+x_2^n).$$

Trong đẳng thức trên lần lượt cho $n=0,1,2,3,4$ ta tính được

$$S_2=2S_1+S_0=2.2+2=6, \quad S_3=2S_2+S_1=2.6+2=14,$$

$$S_4=2S_3+S_2=2.14+6=34, \quad S_5=2S_4+S_3=2.34+14=82.$$

Vậy

$$A=(1+\sqrt{2})^5+(1-\sqrt{2})^5=82.$$

Ví dụ 1.10. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$. Thành lập phương trình bậc hai có các nghiệm là x_1^2 và x_2^2.

Lời giải. *Đặt $\sigma_1=x_1+x_2$, $\sigma_2=x_1x_2$, $s_2=x_1^2+x_2^2$, $s=y_1+y_2$, $p=y_1y_2$. Ta có $s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$. Theo Định lí Viète ta có:*

$$\sigma_1=x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad \sigma_2=x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Do đó

$$s=s_2=x_1^2+x_2^2=(-\frac{b}{a})^2-2\frac{c}{a}, \quad p=\sigma_2^2=x_1^2x_2^2=(\frac{c}{a})^2.$$

Vậy phương trình bậc hai cần lập sẽ là:

$$y^2-sy+p=0,$$

hay là

$$a^2y^2-(b^2-2ac)y+c^2=0.$$

Ví dụ 1.11. Thành lập phương trình bậc hai $z^2 + pz + q = 0$ có các nghiệm

$$z_1 = x_1^6 - 2x_2^2, \quad z_2 = x_2^6 - 2x_1^2,$$

trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình: $x^2 - x - 3 = 0$.

Lời giải. *Theo Định lí Viète ta có*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = 1, \quad \sigma_2 = x_1 x_2 = -3.$$

Mặt khác, ta có

$$-p = z_1 + z_2 = (x_1^6 - 2x_2^2) + (x_2^6 - 2x_1^2) = (x_1^6 + x_2^6) - 2(x_1^2 + x_2^2) = s_6 - 2s_2 =$$

$$= (\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3) - 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = 140.$$

$$q = z_1 z_2 = (x_1^6 - 2x_2^2)(x_2^6 - 2x_1^2) = x_1^6 x_2^6 - 2(x_1^8 + x_2^8) + 4x_1^2 x_2^2 = .$$

$$= \sigma_2^6 - 2s_8 + 4\sigma_2^2 = -833.$$

Do đó phương trình cần lập sẽ là

$$z^2 + pz + q = z^2 - 140z - 833 = 0.$$

Ví dụ 1.12. Cho x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$, trong đó p, q là các số nguyên. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, tổng $s_n = x_1^n + x_2^n$ là một số nguyên.

Lời giải. *Theo Định lí Viète ta có*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = -p, \quad \sigma_2 = x_2 x_2 = q.$$

Từ đó suy ra $\sigma_1 \in Z$, $\sigma_2 \in Z$. *Với* $n \geq 3$ *theo* (1.10), *ta có hệ thức:*

$$s_n + ps_{n-1} + qs_{n-2} = 0 \quad (n \geq 3). \tag{1.11}$$

Vì

$$s_1 = \sigma_1 = -p \in Z, \quad s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \in Z,$$

nên từ công thức (1.11) *suy ra* $s_3 \in Z$. *Giả sử* $s_1, s_2, ..., s_{n-1}, s_{n-2}$ *là các số nguyên. Khi đó, theo công thức* (1.11) *ta có* $s_n \in Z$. *Do đó, theo nguyên lí quy nạp,* $s_n \in Z$ *với mọi số tự nhiên* n.

Ví dụ 1.13. Cho dãy số $\{u_n\}_{n=0}^{n=+\infty}$ được xác định như sau:

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 6, \quad u_{n+1} = 6u_n + 2u_{n-1} \quad (n \geq 1). \tag{1.12}$$

a) Tìm số hạng tổng quát u_n.

b) Chứng minh rằng u_{2k} chia hết cho 2^{k+1} với mọi $k \in N$.

c) Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$ thì u_{2k-1} chia hết cho 2^k và không chia hết cho 2^{k+1}.

Lời giải

a) Xét phương trình $x^2 - 6x - 2 = 0$. *Các nghiệm của phương trình này là* $x_1 = 3 - \sqrt{11}$, $x_2 = 3 + \sqrt{11}$. *Đặt* $s_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in N$. *Theo công thức* (1.10) *ta có*

$$s_{n+1} = 6s_n + 2s_{n-1}. \tag{1.13}$$

Vì $u_0 = 2 = s_0$, $u_1 = 6 = s_1$, *nên từ* (1.12) *và* (1.13) *suy ra*

$$u_n = s_n = (3 - \sqrt{11})^n + (3 + \sqrt{11})^n.$$

b) Ta có

$$u_{2k} = (3 - \sqrt{11})^{2k} + (3 + \sqrt{11})^{2k} = (20 - 6\sqrt{11})^k + (20 + 6\sqrt{11})^k = 2^k v_k,$$

trong đó $v_k = (10 - 3\sqrt{11})^k + (10 + 3\sqrt{11})^k$.

Ta cần chứng minh v_n *là một số chẵn. Thật vậy, vì* $10 - 3\sqrt{11}$ *và* $10 + 3\sqrt{11}$ *là hai nghiệm của phương trình*

$$x^2 - 20x + 1 = 0,$$

nên theo công thức (1.10) *ta có*

$$v_{k+1} = 20v_k - v_{k-1}, \quad v_0 = 2, \quad v_1 = 20.$$

Từ công thức trên suy ra v_k *là số chẵn với mọi* $k \in N$.

c) Chúng ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Với $k = 1$ *khẳng định là đúng. Giả sử, khẳng định đúng cho đến* $k = m, (m \geq 1)$. *Ta sẽ chứng minh khẳng định cũng đúng với* $k = m + 1$. *Thật vậy ta có*

$$u_{2m+1} = 6u_{2m} + 2u_{2m-1}.$$

Theo phần b) thì $u_{2m} = 2^m b$, *với* b *là số lẻ. Cũng theo phần b) thì* $u_{2m} = 2^{m+1}a$, *với* $a \in N$. *Do đó, ta có* $u_{2m+1} = 2^{m+1}(6a + b)$. *Nhưng* $6a + b$ *là số lẻ, nên* u_{2m+1} *chia hết cho* 2^{m+1} *và không chia hết cho* 2^{m+2}.

Ví dụ 1.14. Kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của số thực x. Cho m là số nguyên dương. Chứng minh rằng $\left[(1+\sqrt{3})^{2m+1}\right]$ chia hết cho 2^{m+1} và không chia hết cho 2^{m+2}.

Lời giải. *Xét phương trình bậc hai* $x^2 - 2x - 2 = 0$. *Các nghiệm của phương trình này là* $x_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

Đặt $s_k = x_1^k + s_2^k, \quad k \in N$. *Ta có* $s_0 = 2, \quad s_1 = 2, \quad s_2 = 8$. *Theo công thức* (1.10), *ta có*

$$s_k = 2s_{k-1} + 2s_{k-2}.$$

Từ đó suy ra s_k *là số nguyên dương chẵn. Ta có*

$$s_{2m+1} = (1+\sqrt{3})^{2m+1} + (1-\sqrt{3})^{2m+1} = (1+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})^m +$$

$$+(1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^m = 2^m\left[(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^m + (1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^m\right]$$

$$= 2^m\left[(2+\sqrt{3})^{m+1} + (2-\sqrt{3})^{m+1}\right] - 2^m\left[(2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m\right] =$$

$$= 2^m(w_{m+1} - w_m),$$

trong đó

$$w_m = (2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m.$$

Vì $2+\sqrt{3}$ *và* $2-\sqrt{3}$ *là các nghiệm của phương trình*

$$x^2 - 4x + 1 = 0,$$

nên theo (1.10) *ta có*

$$w_m = 4w_{m-1} - w_{m-2}, \quad w_0 = 2, \quad w_1 = 4.$$

Từ đó suy ra w_m *là số chẵn với mọi* m. *Vậy* s_{2m+1} *chia hết cho* 2^{m+1}. *Tiếp theo ta có*

$$0 < (\sqrt{3}-1)^{2m+1} < 1, \quad (1+\sqrt{3})^{2m+1} - (\sqrt{3}-1)^{2m+1} =$$

$$= (1+\sqrt{3})^{2m+1} + (1-\sqrt{3})^{2m+1} = s_{2m+1}.$$

Do đó

$$\left[(1+\sqrt{3})^{2m+1}\right] = s_{2m+1}.$$

Vậy, $\left[(1+\sqrt{3})^{2m+1}\right]$ *chia hết cho* 2^{m+1}. *Tương tự như trong phần c) của Ví dụ 1.11 ta có* $\left[(1+\sqrt{3})^{2m+1}\right]$ *không chia hết cho* 2^{m+2}.

Bài tập

1. *Giả sử* x_1, x_2 *là các nghiệm của phương trình* $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$. *Hãy thành lập một phương trình bậc hai có các nghiệm là* x_1^4 *và* x_2^4.

2. *Thành lập một phương trình bậc hai có các nghiệm là* x_2 *và* x_2, *biết rằng*

$$x_1^5 + x_2^5 = 31, \qquad x_1 + x_2 = 1.$$

3. *Chứng minh rằng nếu* x_1, x_2 *là nghiệm của phương trình bậc hai* $x^2 - 6x + 1 = 0$ *thì* $x_1^n + x_2^n$ *với mọi số tự nhiên* n *là một số nguyên và không chia hết cho 5.*

4. *Giả sử phương trình* $x^2 + px + q = 0$ *có các nghiệm là các số dương* α, β. *Hãy biểu diễn* $\sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ *theo* p *và* q.

5. *(Anh 1967, HSG Lớp 9 Việt nam 1993). Chứng minh rằng nếu a_1, a_2 là các nghiệm của phương trình $x^2+px+1=0$ và b_1, b_2 là các nghiệm của phương trình $x^2+qx+1=0$ thì*

$$(a_1-b_1)(a_2-b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_2)=q^2-p^2.$$

6. *Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$ và x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^2+cx+d=0$. Chứng minh rằng*

$$2(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)=2(b-d)^2-(a^2-c^2)(b-d)+(a+c)^2(b+d).$$

7. *(Bungari 1980). Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình*

$$x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0 \quad (p\in\mathbb{R},\ \ p\neq 0).$$

Chứng minh rằng

$$x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}.$$

8. *(Olympic Balan 1964). Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2+px-1=0$ với p là số nguyên lẻ. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $x_1^n+x_2^n$ và $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ là các số nguyên tố cùng nhau.*

9. *Cho x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2-43x-156=0$. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, thì $x_1^n+x_2^n$ là một số nguyên không chia hết cho 2005.*

10. *Cho dãy số $\{u_n\}_{n=0}^{+\infty}$ được xác định theo công thức*

$$u_0=1,\quad u_1=5,\quad u_{n+1}=6u_n-u_{n-1}.$$

kí hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của số thực x . Hãy tìm

$$\lim_{n\to+\infty}u_n\{\sqrt{2}u_n\}.$$

1.6 Phương trình đối xứng và phương trình hồi quy

Đa thức đối xứng là công cụ hữu hiệu để giải các phương trình đại số bậc cao, đặc biệt là phương trình hệ số đối xứng và phương trình hồi quy.

Định nghĩa 1.9. *Đa thức*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n (a_0 \neq 0)$$

được gọi là đa thức đối xứng, nếu các hệ số cách đều hai đầu bằng nhau, nghĩa là

$$a_0 = a_n, \quad a_1 = a_{n-1}, \quad a_2 = a_{n-2}, \dots$$

Phương trình của đa thức đối xứng được gọi là phương trình đối xứng.

Chẳng hạn, các đa thức sau đây là đa thức hệ số đối xứng :

$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 3z + 1$,

$2z^8 + z^7 - 6z^6 + 4z^5 + 3z^4 + 4z^3 - 6z^2 + z + 2$.

Định lý 1.6. *Đa thức $f(z)$ bậc n là đa thức đối xứng khi và chỉ khi*

$$z^n f\Big(\frac{1}{z}\Big) = f(z), \quad z \neq 0. \tag{1.14}$$

Chứng minh. *Giả sử $f(z)$ có dạng*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \tag{1.15}$$

Với $z \neq 0$, trong (1.15) thay z bởi $\frac{1}{z}$, ta được

$$z^n f(\frac{1}{z}) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0. \tag{1.16}$$

So sánh (1.15)và (1.16) ta thấy hệ thức (1.14) xảy ra khi và chỉ khi

$$a_0 = a_n, \; a_1 = a_{n-1}, \; \dots, \; a_k = a_{n-k},$$

nghĩa là $f(z)$ là đa thức đối xứng. Định lí được chứng minh.

Định nghĩa 1.10. *Các đa thức*

$$a_0 z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + \dots + a_{n-1} z^{n+1} + a_n z^n + \lambda a_{n-1} z^{n-1} + \dots + \lambda^{n-1} a_1 z +$$

$$+\lambda^n a_0,$$

$$a_0 z^{2n+1} + a_1 z^{2n} + \dots + a_{n-1} z^{n+2} + a_n z^{n+1} + \lambda a_n z^n + \lambda^2 a_{n-1} z^{n-1} + \dots +$$
$$+\lambda^{2n-1} a_1 z + \lambda^{2n+1} a_0,$$

trong đó $a_0 \neq 0$, và $\lambda \neq 0$ được gọi là các đa thức hồi quy. Phương trình của đa thức hồi quy được gọi là phương trình hồi quy.

Khi $\lambda = 1$ thì đa thức hồi quy trở thành đa thức hệ số đối xứng. Ví dụ, phương trình

$$2x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 48x - 64 = 0$$

là phương trình hồi quy ($\lambda = -2$), còn phương trình

$$4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 45x + 108 = 0$$

là phương trình hồi quy ($\lambda = 3$).

Định lý 1.7. *Mọi đa thức hồi quy bậc chẵn $2k$*

$$f(z) = a_0 z^{2k} + a_1 z^{2k-1} + \dots + a_{k-1} z^{k+1} + a_k z^k + \lambda a_{k-1} z^{k-1} + \dots + \lambda^{k-1} a_1 z + \lambda^k a_0,$$

đều biểu diễn được ở dạng $f(z) = z^k h(\sigma)$, trong đó $\sigma = z + \dfrac{\lambda}{z}$, $h(\sigma)$ là một đa thức nào đó theo biến σ và có bậc bằng k.
Mọi đa thức hồi quy bậc lẻ $f(z)$ đều có dạng $f(z) = (z+\lambda)g(z)$, trong đó $g(z)$ là đa thức hồi quy bậc chẵn.

Chứng minh. *Trước hết xét đa thức hệ số đối xứng $f(z)$ có bậc $2k$. Với $z \neq 0$ ta biến đổi $f(z)$ như sau :*

$$f(z) = z^k \Big[a_0\big(z^k + \frac{\lambda^k}{z^k}\big) + a_1\big(z^{k-1} + \frac{\lambda^{k-1}}{z^{k-1}}\big) + \dots + a_{k-1}\big(z + \frac{\lambda}{z}\big) + a_k\Big].$$

Đặt $\sigma = z + \dfrac{\lambda}{z}$, $\quad s_k = z^k + \dfrac{\lambda^k}{z^k}$. Ta sẽ chứng tỏ rằng s_k là các đa thức bậc k theo σ. Thật vậy, nếu đặt $x = z, y = \dfrac{\lambda}{z}$ thì ta có $\sigma = x + y = \sigma_1, \lambda = xy = \sigma_2,\ s_k = x^k + y^k$.

Do đó theo Định lí 1.1, các tổng luỹ thừa s_k là các đa thức bậc k theo các biến σ_1, σ_2, hay là theo các biến σ và λ, nghĩa là chỉ theo biến σ. Phần thứ nhất của định lí đã được chứng minh.

Xét đa thức đối xứng bậc lẻ $2k+1$:

$$f(z) = a_0 z^{2k+1} + a_1 z^{2k} + ... + a_{k-1} z^{k+2} + a_k z^{k+1} + \lambda a_k z^k + \lambda^3 a_{k-1} z^{k-1} + ...+$$
$$+\lambda^{2k-1} a_1 z + \lambda^{2k+1} a_0.$$

Với $z \neq 0$ ta biến đổi $f(z)$ như sau:

$$f(z) = a_0(z^{2k+1} + \lambda^{2k+1}) + a_1 z(z^{2k-1} + \lambda^{2k-1}) + a_2 z^2(z^{2k-3} + \lambda^{2k-3}) + ...+$$
$$+a_k z^k (z + \lambda).$$

Sử dụng hằng đẳng thức

$$z^{2m+1} + \lambda^{2m+1} = (z+\lambda)(z^{2m} - z^{2m-1}\lambda + z^{2m-2}\lambda^2 - ... + z^2\lambda^{2m-2} - z\lambda^{2m-1}+$$
$$+\lambda^{2m}),$$

ta có

$$a_0(z^{2k+1} + \lambda^{2k+1}) = a_0(z+\lambda)(z^{2k} - z^{2k-1}\lambda + z^{2k-2}\lambda^2 - ... + z^2\lambda^{2k-2} - z\lambda^{2k-1}+$$
$$+\lambda^{2k})$$

$$a_1 z(z^{2k-1} + \lambda^{2k-1}) = a_1(z+\lambda)(z^{2k-1} - z^{2k-2}\lambda + ... - z^2\lambda^{2k-3} + z\lambda^{2k-2}),$$

. . . .

$$a_k z^k (z+\lambda) = a_k(z+\lambda) z^k.$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên và đưa ra ngoài dấu ngoặc nhân tử chung $(z+\lambda)$, ta được

$$f(z) = (z+\lambda) g(z),$$

trong đó $g(z)$ là tổng của các đa thức

$$a_0(z^{2k} - z^{2k-1}\lambda + z^{2k-2}\lambda^2 - ... + z^2\lambda^{2k-2} - z\lambda^{2k-1} + \lambda^{2k}),$$

$$a_1(z^{2k-1} - z^{2k-2}\lambda + ... - z^2\lambda^{2k-3} + z\lambda^{2k-2}),$$

. . . .

$$a_k z^k.$$

Dễ dàng thấy rằng $g(z)$ là đa hồi quy bậc $2k$. Như vậy mệnh đề thứ hai của định lí đã được chứng minh. Định lí 1.7 được chứng minh.

Ví dụ 1.15. Giải phương trình

$$4z^{11} + 4z^{10} - 21z^9 - 21z^8 + 17z^7 + 17z^6 + 17z^5 + 17z^4 - 21z^3 - 21z^2 + 4z + 4 = 0.$$

Lời giải. *Đây là phương trình đối xứng. Theo Định lí 1.7. phương trình đã cho tương đương với phương trình :*

$$(z + 1)(4z^{10} - 21z^8 + 17z^6 + 17z^4 - 21z^2 + 4) = 0.$$

Như vậy. phương trình đã cho được phân rã thành hai phương trình

$$z + 1 = 0,$$

$$4z^{10} - 21z^8 + 17z^6 + 17z^4 - 21z^2 + 4 = 0.$$

Phương trình thứ nhất cho nghiệm $z_1 = -1$. Phương trình thứ hai là phương trình đối xứng bậc 10. Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho z^5 và biến đổi phương trình này về dạng

$$4(z^5 + \frac{1}{z^5}) - 21(z^3 + \frac{1}{z^3}) + 17(z + \frac{1}{z}) = 0.$$

Sử dụng các công thức

$$z + \frac{1}{z} = \sigma, \quad z^3 + \frac{1}{z^3} = \sigma^3 - 3\sigma, \quad z^5 + \frac{1}{z^5} = \sigma^5 - 5\sigma^3 + 5\sigma$$

ta đưa phương trình trên đây về dạng

$$\sigma(4\sigma^4 - 41\sigma^2 + 100) = 0.$$

Nghiệm của phương trình này là

$$\sigma = 0, \quad \sigma = \pm 2, \quad \sigma = \pm\frac{5}{2}.$$

Do đó, để tìm nghiệm của phương trình đã cho, ta có các phương trình

$$z + \frac{1}{z} = 0, \quad z + \frac{1}{z} = \pm 2, \quad z + \frac{1}{z} = \pm\frac{5}{2}.$$

Từ các phương trình trên ta tìm được các giá trị của x là nghiệm của phương trình đã cho là:

$$z = \pm 1, \quad z = \pm 2, \quad z = -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 1.16. Giải phương trình

$$2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 66x^3 + 80x^2 - 72x + 32 = 0.$$

Lời giải. *Đây là phương trình bậc tám truy hồi với $\lambda = 2$ vì có thể viết lại ở dạng*

$$2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 33.2x^3 + 20.2^2x^2 - 9.2^3x + 2.2^4 = 0.$$

Rõ ràng là $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Chia hai vế của phương trình cho x^4 và biến đổi về dạng

$$2(x^4 + \frac{16}{x^4}) - 9(x^3 + \frac{8}{x^3}) + 20(x^2 + \frac{4}{x^2}) - 33(x + \frac{2}{x}) + 46 = 0.$$

Đặt $\sigma = x + \dfrac{\lambda}{x} = x + \dfrac{2}{x}$. Khi đó

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = \sigma^2 - 4, \quad x^3 + \frac{8}{x^3} = \sigma^3 - 6\sigma, \quad x^4 + \frac{16}{x^4} = \sigma^4 - 8\sigma^2 + 8.$$

nên phương trình cuối cùng có dạng

$$2\sigma^4 - 9\sigma^3 + 4\sigma^2 + 21\sigma - 18 = 0.$$

Dễ dàng tìm được các nghiệm của phương trình này là

$$\sigma = 1, \quad \sigma = 2, \quad \sigma = 3, \quad \sigma = -\frac{3}{2}.$$

Như vậy, phương trình đã cho tương đương với tổ hợp các phương trình:

$$x + \frac{2}{x} = 1, \quad x + \frac{2}{x} = 2, \quad x + \frac{2}{x} = 3, \quad x + \frac{2}{x} = -\frac{3}{2}.$$

Giải các phương trình trên ta tìm được các nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$.

Ví dụ 1.17. Biết rằng phương trình

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0$$

có nghiệm. Chứng minh rằng

$$b^2 + (c-2)^2 \geq \frac{16}{5}.$$

Lời giải. *Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình đã cho. Khi đó $x_0 \neq 0$ và phương trình đã cho tương đương với*

$$x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + b(x_0 + \frac{1}{x_0}) + c = 0. \tag{1.17}$$

Đặt $t_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$. Khi đó, ta có $|t_0| \geq 2$ và $x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = t_0^2 - 2$. Phương trình (1.17) trở thành

$$t_0^2 + bt_0 + c - 2 = 0.$$

Từ đẳng thức cuối cùng suy ra

$$t_0^4 = (bt_0 + c - 2)^2.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski ta có

$$t_0^4 = (bt_0 + c - 2)^2 \leqslant [b^2 + (c-2)^2](t_0^2 + 1).$$

Suy ra

$$b^2 + (c-2)^2 \geq \frac{t_0^4}{t_0^2+1}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng, với $|t_0| \geq 2$ *thì*

$$\frac{t_0^4}{t_0^2+1} \geq \frac{16}{5}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$5(t_0^2-4)(t_0^2+\frac{4}{5}) \geq 0, \forall t_0^2 \geq 4.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh của bài toán.

Ví dụ 1.18 (*IMO, 1982, Hungari đề nghị*). Hãy xác định tất cả của tham số a, sao cho phương trình

$$16x^4 - ax^3 + (2a+17)x^2 - ax + 16 = 0$$

có bốn nghiệm thực lập thành một cấp số nhân.

Lời giải. *Dễ thấy rằng* $x = 0$ *không phải là nghiệm của phương trình đa cho. Với* $x \neq 0$, *phương trình đã cho tương đương với*

$$16(x^2+\frac{1}{x^2}) - a(x+\frac{1}{x}) + 2a + 17 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. *Khi đó* $|t| \geq 2$ *và phương trình trên trở thành*

$$16t^2 - at + 2a + 15 = 0.$$

Trước hết ta tìm điều kiện cần của tham số a. Giả sử phương trình đã cho có 4 nghiệm thực lập thành một cấp số nhân. Khi đó phương trình cuối cùng phải có hai nghiệm t_1, t_2, *trong đó* t_1 *cho hai nghiệm* $x_1, \frac{1}{x_1}$, *còn* t_2 *cho hai nghiệm* $x_2, \frac{1}{x_2}$. *Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử* $|x_1| > 1, |x_2| > 1$. *Khi đó ta có cấp số nhân* $x_1,\ x_2,\ \frac{1}{x_2},\ \frac{1}{x_1}$. *Theo tính chất của cấp số nhân ta có*

$$\frac{x_1}{x_2} = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2^3 \Rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2^3 + \frac{1}{x_2^3} \Rightarrow t_1 = t_2^3 - 3t_2.$$

Mặt khác, theo Định lí Viète ta có

$$t_1 + t_2 = \frac{a}{16}, \quad t_1 t_2 = \frac{2a+15}{16}.$$

Từ đó ta tìm được $a = 170$. *Với* $a = 170$ *phương trình đã cho trở thành*

$$16x^4 - 170x^3 + 357x^2 - 170x + 16 = 0.$$

Phương trình này có bốn nghiệm lập thành một cấp số nhân : $8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$.
Vậy giá trị của tham số a là $a = 170$.

Bài tập

Giải các phương trình hệ số đối xứng :

1. $x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$.

2. $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

3. $9z^6 - 18z^5 - 73z^4 + 164z^3 - 73z^2 - 18z + 9 = 0$.

5. $z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1 = 0$.

Giải các phương trình hồi quy :

6. $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$.

7. $2x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 48x - 64 = 0$.

8. $4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 45x + 108 = 0$.

9. *Chứng minh rằng đa thức* $f(z)$ *bậc n là đa thức hệ số đối xứng khi và chỉ khi*

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z), \qquad \forall z \neq 0.$$

Từ đó suy ra, nếu $f(z)$ *và* $g(z)$ *là hai đa thức hệ số đối xứng và* $f(z)$ *chia hết cho* $g(z)$ *thì* $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ *cũng là đa thức hệ số đối xứng.*

10. *Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình*

$$az^5 + bz^4 + cz^3 + cz^2 + bz + a = 0 (a \neq 0).$$

có thể tìm được bằng bốn phép tính số học và khai căn bậc hai.

1.7 Phân tích thành nhân tử và áp dụng

Trong mục này trình bày hai phương pháp phân tích đa thức đối xứng thành nhân tử. Phương pháp thứ nhất thể hiện ở chỗ biểu diễn đa thức đã cho theo các đa thức đối xứng cơ sở σ_1, σ_2. Phương pháp thứ hai là phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ 1.19. Phân tích đa thức sau thàng nhân tử

$$f(x,y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^2 + 10y^4.$$

Lời giải. *Ta có*

$$f(x,y) = 10(x^4 + y^4) - 27xy(x^2 + y^2) - 110x^2y^2 = 10s_4 - 27\sigma_2 s_2 - 110\sigma_2^2.$$

Thay

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

vào biểu thức trên ta được

$$f(x,y) = 10\sigma_1^4 - 67\sigma_1^2\sigma_2 - 36\sigma_2^2.$$

Đa thức trên có bậc bằng 2 đối với σ_2 và có các nghiệm : $\sigma_2 = -2\sigma_1^2, \sigma_2 = \dfrac{5}{36}\sigma_1^2$, do đó

$$f(x,y) = -36(\sigma_2 + 2\sigma_1^2)(\sigma_2 - \frac{5}{36}\sigma_1^2) = (2\sigma_1^2 + \sigma_2)(5\sigma_1^2 - 36\sigma_2).$$

Thay $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$, ta có

$$f(x,y) = [2(x+y)^2 + xy][5(x+y)^2 - 36xy] =$$

$$= (2x^2 + 5xy + 2y^2)(5x^2 - 26xy + 5y^2).$$

Mỗi biểu thức trong ngoặc là một tam thức bậc hai và có thể được phân tích thành nhân tử. Thí dụ, $2x^2 + 5xy + 2y^2$, xem như một tam thức bậc hai đối với x, có các nghiệm là $x = -2y, x = -\dfrac{1}{2}y$, nên do đó

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2(x + \frac{1}{2}y)(x + 2y) = (2x + y)(x + 2y).$$

Tương tự ta có

$$5x^2 - 26xy + 5y^2 = (x - 5y)(5x - y).$$

Như vậy, cuối cùng ta có

$$f(x,y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^2 + 10y^4 =$$

$$= (2x + y)(x + 2y)(x - 5y)(5x - y).$$

Ví dụ 1.20. Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$f(x,y) = 2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4.$$

Lời giải. *Biểu diễn của đa thức theo các đơn thức đối xứng cơ sở có dạng*

$$f(x,y) = 2\sigma_1^4 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_2^2.$$

Đây là một đa thức bậc hai theo σ_2 và không có nghiệm (nghiệm thực). Vì vậy chúng ta vận dụng phương pháp hệ số bất định, nghĩa là thử biểu diễn đa thức đã cho ở dạng

$$2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 =$$

$$= (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2). \tag{1.18}$$

Ta sẽ tìm các hệ số A, B, C với nhận xét rằng đẳng thức (1.18) *thoả mãn với mọi x, y. Với $x = y = 1$,ta có*

$$16 = (A + B + C)^2,$$

suy ra

$$A + B + C = \pm 4.$$

Nhận xét rằng các hệ số A, B, C được xác định chính xác đến dấu của chúng, vì nếu thay đổi dấu của tất cả các số này thành ngược lại thì (1.18) *vẫn không thay đổi. Vì vậy, không mất tổng quát, ta có*

$$A + B + C = 4.$$

Tiếp theo, với $x = 1, y = -1$, ta có

$$4 = (A - B + C)^2,$$

suy ra

$$A - B + C = \pm 2.$$

Cuối cùng, cho $x = 0, y = 1$, ta có $AC = 2$.

Như vậy, để xác định các hệ số A, B, C ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} A + B + C &= 4, \\ A - B + C &= \pm 2, \\ AC &= 2. \end{cases}$$

Nếu vế phải của phương trình thứ hai của hệ lấy dấu(+) thì dễ dàng tìm được nghiệm của hệ là $A = 1, B = 1, C = 2$. Nếu như vế phải của hệ lấy dấu $(-)$ thì hệ vô nghiệm (nghiệm thực). Chúng ta có kết quả

$$2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4 = (x^2 + xy + 2y^2)(2x^2 + xy + y^2).$$

Ví dụ 1.21. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x, y) = (x + y)^3 - x^3 - y^3$;

b) $g(x, y) = (x + y)^5 - x^5 - y^5$;

c) $h(x, y) = (x + y)^7 - x^7 - y^7$.

Lời giải

a) Ta có

$$f = (x + y)^3 - (x^3 + y^3) = \sigma_1^3 - s_s = \sigma_1^3 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = 3\sigma_1\sigma_2 = 3(x + y)xy.$$

b) $g = (x + y)^5 - (x^5 + y^5) = \sigma_1^5 - s_5 = \sigma_1^5 - (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) = 5\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2)$

$$= 5(x + y)xy(x^2 + xy + y^2).$$

c) $h = (x + y)^7 - (x^7 + y^7) = \sigma_1^7 - s_7 = \sigma_1^7 - (\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3)$

$$= 7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2) = 7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2)^2 = 7(x + y)xy(x^2 + xy + y^2)^2.$$

Ví dụ 1.22. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{(x+y)^7 - x^7 - y^7}{(x+y)^4 + x^4 + y^4}.$$

Lời giải. *Đặt* $\sigma_1 = x + y, \quad \sigma_2 = xy$. *Theo công thức Waring ta có*

$$(x+y)^4 + x^4 + y^4 = \sigma_1^4 + (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) = 2\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

$$= 2(\sigma_1^2 - \sigma_2)^2 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

$$(x+y)^7 - (x^7 + y^7) = \sigma_1^7 - s_7 = \sigma_1^7 - (\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3)$$

$$= 7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2) = 7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2)^2 = 7(x+y)xy(x^2 + xy + y^2)^2.$$

Do đó ta có

$$A = \frac{7}{2}(x+y)xy.$$

Ví dụ 1.23. Rút gọn biểu thức

$$B = \frac{1}{(a+b)^3}\Big(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\Big) + \frac{3}{(a+b)^4}\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\Big) + \frac{6}{(a+b)^5}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big).$$

Lời giải. *Trước hết biến đổi biểu thức đã cho về dạng*

$$B = \frac{a^3 + b^3}{a^3b^3(a+b)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{a^2b^2(a+b)^4} + \frac{6}{ab(a+b)^4}.$$

Đặt $\sigma_1 = a + b, \quad \sigma_2 = ab$. *Theo công thức Waring ta có*

$$B = \frac{s_3}{\sigma_1^3\sigma_2^3} + \frac{3s_2}{\sigma_1^4\sigma_2^2} + \frac{6}{\sigma_1^4\sigma_2} = \frac{\sigma_1 s_3 + 3\sigma_2 s_2 + 6\sigma_2^2}{\sigma_1^4\sigma_2^3},$$

$$\frac{\sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + 3\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 6\sigma_2^2}{\sigma_1^4\sigma_2^3} = \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{1}{a^2b^2}.$$

Bài tập

Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử :

1. $(x+y)^4+x^4+y^4$.

2. $2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4$.

3. $3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4$.

4. $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$.

5. $x^6+x^5y+x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6$.

6. $x+\dfrac{1}{x}+x^5+\dfrac{1}{x^5}$.

Rút gọn các biểu thức

7. $\dfrac{(a+b)^5-a^5-b^5}{(a+b)^3-a^3-b^3}+\dfrac{(a+b)^7-a^7-b^7}{(a+b)^5-a^5-b^5}$.

8. $\dfrac{1}{(a+b)^3}\Big(\dfrac{1}{a^4}+\dfrac{1}{b^4}\Big)+\dfrac{4}{(a+b)^4}\Big(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\Big)+\dfrac{10}{(a+b)^5}\Big(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\Big)-\dfrac{20}{ab(a+b)^5}$.

9. *Chứng minh đồng nhất thức :*

$$p^3+q^3\Big(\frac{q^3-2p^3}{p^3+q^3}\Big)^3=q^3+p^3\Big(\frac{p^3-2q^3}{p^3+q^3}\Big)^3.$$

10. *Cho* $a-\dfrac{1}{a}=1$. *Chứng minh rằng với mọi* $n\in\mathbb{N}$ *ta có*

$$a^{2n}+\frac{1}{a^{2n}}=\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n}+\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{2n}.$$

1.8 Chia đa thức đối xứng

Trong mục này chúng ta sẽ xét một số bài toán về chia hết của các đa thức đối xứng.

Ví dụ 1.24. Chứng minh rằng $x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$ chia hết cho x^2+xy+y^2 khi và chỉ khi m không phải là bội của 3.

Lời giải. *Sử dụng các công thức*

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),$$

$$x^k-y^k=(x-y)(x^{k-1}+x^{k-2}y+...+xy^{k-2}+y^{k-1})$$

dễ dàng thấy rằng $x^{3k}-y^{3k}$ *chia hết cho* x^2+xy+y^2. *Xét các trường hợp sau*

1) $n=3k$. *Ta có*

$$x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}=x^{6k}+x^{3k}y^{3k}+y^{6k}=(x^{6k}-y^{6k})+(x^{3k}-y^{3k})+3y^{6k}.$$

Từ đó suy ra $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ *không chia hết cho* $x^2 + xy + y^2$.

2) $n = 3k + 1$. *Ta có*

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = x^{6k+2} + x^{3k+1}y^{3k+1} + y^{6k+2} =$$

$$= x^2(x^{6k} - y^{6k}) + xy^{3k+1}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^2 + xy + y^2).$$

Suy ra trong trường hợp này $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ *chia hết cho* $x^2 + xy + y^2$.

3) $n = 3k + 2$. *Ta có*

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = x^{6k+4} + x^{3k+2}y^{3k+2} + y^{6k+4} = x^4(x^{6k} - y^{6k}) +$$

$$+ x^2y^{3k+2}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^4 + x^2y^2 + y^4) =$$

$$= x^4(x^{6k} - y^{6k}) + x^2y^{3k+2}(x^{3k} - y^{3k}) + y^{6k}(x^2 + x^2y^2y^4)(x^2 - xy + y^2).$$

Suy ra $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ *chia hết cho* $x^2 + xy + y^2$. *Vậy điều kiện cần và đủ để* $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ *chia hết cho* $x^2 + xy + y^2$ *là* n *không phải là bội của 3.*

Ví dụ 1.25. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, đa thức $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ không chia hết cho $x^2 + xy + y^2$.

Lời giải. *Giả sử* $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ *chia hết cho* $x^2 + xy + y^2$, *tức là*

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(x, y),$$

trong đó $q(x, y)$ *là đa thức đối xứng với hệ số nguyên (do hệ số chính của đa thức chia bằng 1, còn các hệ số của đa thức bị chia và đa thức chia là các số nguyên). Trong đẳng thức trên cho* $x = y = 1$, *ta được* $1 = 3q(1, 1)$, *vô lí vì* $q(1, 1)$ *là một số nguyên. Điều này chứng tỏ đa thức* $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ *không chia hết cho* $x^2 + xy + y^2$.

Ví dụ 1.26. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ nào thì $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$?

Lời giải. *Giả sử*

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 - xy + y^2)q(x, y), \tag{1.19}$$

trong đó $q(x, y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên.

Ta xét hai trường hợp:

1) n là số lẻ. Trong đẳng thức (1.19) thay x bởi $-x$ ta được

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Ví dụ 1.25 đẳng thức này không thể xảy ra.

2) n là số chẵn. Trong (1.19) thay x bởi $-x$, ta được

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo ví dụ 1.24 thì đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi $n = 3m + 1$ hoặc $n = 3m + 2$.

Nếu $n = 3m + 1$, thì do n là số chẵn, nên m phải là số lẻ, hay $m = 2k + 1$, do đó $n = 6k + 4$.

Nếu $n = 3k + 2$, thì do n là số chẵn, nên m phải là số chẵn, hay $m = 2k$, do đó $n = 6k + 2$.

Vậy $x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$ khi và chỉ khi $n = 6k + 2$ hoặc $n = 6k + 4$, với $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Ví dụ 1.27. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ nào thì $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ chia hết cho $x^2 - xy + y^2$?

Lời giải. *Giả sử*

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 - xy + y^2)q(x, y), \tag{1.20}$$

trong đó $q(x, y)$ là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Xét hai trường hợp của n.

1) n là số chẵn. Trong (1.20) thay x bởi $-x$, ta được

$$x^{2n} - x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Ví dụ 1. 25, đẳng thức này không thể xảy ra.

2) n là số lẻ. Trong (1.20) *thay* x *bởi* $-x$, *ta được*

$$x^{2n} + x^n y^n + y^{2n} = (x^2 + xy + y^2)q(-x, y).$$

Theo Ví dụ 1. 24, đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi $n = 3m + 1$ *hoặc* $n = 3m + 2$.

Nếu $n = 3m + 1$, *thì do* n *là số lẻ, nên* m *phải là số chẵn, tức là* $m = 2k$ *và khi đó* $n = 6k + 1$.

Nếu $n = 3m + 2$, *thì do* n *là số lẻ, nên* m *phải là số lẻ, tức là* $m = 2k - 1$. *Khi đó* $n = 6k - 1$.

Vậy $x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}$ *chia hết cho* $x^2 - xy + y^2$ *khi và chỉ khi* $n = 6k \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Ví dụ 1.28. Xác định n để $(x + y)^n + x^n + y^n$ chia hết cho $x^2 + xy + y^2$

Lời giải. *Giả sử* $(x + y)^n + x^n + y^n$ *chia hết cho* $x^2 + xy + y^2$. *Khi đó ta có*

$$(x + y)^n + x^n + y^n = (x^2 + xy + y^2)q(x, y), \tag{1.21}$$

trong đó $q(x, y)$ *là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Trong* (1.21) *thay* x, y *tương ứng bởi* x^2, y^2, *ta có* $(x^2 + y^2)^n + x^{2n} + y^{2n} = (x^4 + x^2y^2 + y^4)q(x^2, y^2)$,

$$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)q(x^2, y^2). \tag{1.22}$$

Dẳng thức (1.22) chứng tỏ $(x^2 + y^2)^n + x^{2n} + y^{2n}$ *phải chia hết cho* $x^2 - xy + y^2$. *Ta có*

$$(x^2 + y^2)^n - (xy)^n = (x^2 + y^2 - xy)[(x^2 + y^2)^{n-1} + (x^2 + y^2)^{n-2} + \ldots$$

$$+(x^2 + y^2)(xy)^{n-2} + (xy)^{n-1}]. \tag{1.23}$$

Tiếp theo ta có

$$(x^2 + y^2)^n + x^{2n} + y^{2n} = [(x^2 + y^2)^n - (xy)^n] + (x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}). \tag{1.24}$$

Từ (1.23) và (1.24) suy ra $(x^2+y^2)^n+x^{2n}+y^{2n}$ *chia hết cho* x^2-xy+y^2 *khi và chỉ khi* $x^{2n}+x^ny^n+y^{2n}$ *chia hết cho* x^2-xy+y^2*. Theo Ví dụ 1.26 điều này có được khi và chỉ khi* $n=6k+2$ *hoặc* $n=6k+4$ *với* $k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}^+$.

Ngược lại, giả thiết rằng $n=2m$*, với* $m=3k+1$ *hoặc* $m=3k+2$*. Thế thì*

$$(x+y)^n+x^n+y^n=(x+y)^{2m}+x^{2m}+y^{2m}=[(x+y)^{2m}-(xy)^m]+$$

$$+(x^{2m}+x^my^m+y^{2m}).$$

Để ý rằng

$$(x+y)^{2m}-(xy)^m=[((x+y)^2]^m-(xy)^m]=[(x+y)^2-xy]p(x,y)=$$

$$=(x^2+xy+y^2)p(x,y),$$

trong đó $p(x,y)$ *là đa thức đối xứng với hệ số nguyên. Do đó* $(x+y)^{2m}-(xy)^m$ *chia hết cho* x^2+xy+y^2.

Mặt khác, vì $m=3k+1$, $m=3k+2$ *nên theo Ví dụ 1.24, đa thức* $x^{2m}+x^my^m+y^{2m}$ *chia hết cho* x^2+xy+y^2.

Kết luận : Đa thức $(x+y)^n+x^n+y^n$ *chia hết cho* x^2+xy+y^2 *khi và chỉ khi* $n=6k+2$ *hoặc* $n=6k+4$*, với* $k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}^+$.

Bài tập

1. *Chứng minh rằng* $(x+y)^n - x^n - y^n$ *chia hết cho* x^2+xy+y^2 *khi và chỉ khi* $n = 6k \pm 1,\quad k \in Z/n \in \mathbb{Z}^+$.

2. *Chứng minh rằng* $(x+y)^{2n+1} + x^{n+2}y^{n+2}$ *chia hết cho* x^2+xy+y^2 *với mọi* $n \in \mathbb{Z}^+$.

3. *Chứng minh rằng nếu* $f(z)$ *và* $g(z)$ *là hai đa thức hồi quy và* $f(z)$ *chia hết cho* $g(z)$ *thì* $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ *cũng là đa thức hồi quy.*

4. *Chứng minh rằng một đa thức đối xứng thuần nhất theo các biến* x, y : $P(x,y) = p(\sigma_1, \sigma_2)$ *chia hết cho* x^2+xy+y^2 *khi và chỉ khi tổng các hệ số của đa thức* $p(\sigma_1,\sigma_2)$ *bằng không.*

1.9 Chứng minh bất đẳng thức

Với hai số thực x, y, *ta đặt* $\sigma_1 = x+y,\quad \sigma_2 = xy$. *Khi đó ta có*

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \Leftrightarrow \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0.$$

Vậy ta có kết quả

Mệnh đề 1.1. *Cho* $x, y \in R$. *Đặt* $\sigma_1 = x+y,\quad \sigma_2 = xy$. *Khi đó*

$$\sigma_1^2 \geq 4\sigma_2. \tag{1.25}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Giả sử cần chứng minh bất đẳng thức $f(x,y) \geq 0$ *(với mọi* $x \geq 0, y \geq 0$ *hoặc* $x+y \geq a$, *tuỳ thuộc vào bài toán), trong đó* $f(x,y)$ *là đa thức đối xứng. Để chứng minh, trước hết cần phải biểu biễn* $f(x,y)$ *theo* σ_1 *và* σ_2. *Sau đó trong đa thức vừa nhận được thay* σ_2 *bởi* σ_1. *Chú ý bất đẳng thức* (1.25), *ta đặt* $\sigma_2 = \dfrac{1}{4}(\sigma_1^2 - z)$ *với* $z \geq 0$. *Đôi khi lại cần biểu diễn* σ_1^2 *qua* σ_2 *theo công thức* $\sigma_1^2 = z + 4\sigma_2$.

Mệnh đề 1.2. *Nếu* $\sigma_1 \geq 0$, *thì với mọi* n *nguyên dương có bất đẳng thức*

$$s_n \geq \frac{\sigma_1^n}{2^{n-1}}, \tag{1.26}$$

trong đó s_n, σ_1 tương ứng là tổng lũy thừa và đa thức đối xứng cơ sở bậc một.

Chứng minh. *Chúng ta sẽ chứng minh (1.26) bằng quy nạp. Dễ thấy rằng với $n = 1$, bất đẳng thức (1.26) trở thành đẳng thức. Giả sử (1.26) đúng cho đến $n = k$. Xét $n = k + 1$. Theo công thức truy hồi (1.1), bất đẳng thức (1.25) và giả thiết quy nạp, ta có*

$$s_{k+1} = \sigma_1 s_n - \sigma_2 s_{n-1} \geq \sigma_1 \frac{\sigma_1^k}{2^{k-1}} - \frac{\sigma_1^2}{4} \cdot \frac{\sigma_1^{k-1}}{2^{k-2}} = \frac{\sigma_1^{k+1}}{2^k}.$$

Vậy (1.26) được chứng minh.

Mệnh đề 1.3. *Với các kí hiệu và điều kiện như trong mệnh đề 2 ta có*

$$2s_{m+n} \geq s_m s_n. \tag{1.27}$$

Chứng minh. *Theo giả thiết ta có*

$$x + y = \sigma_1 \geq 0.$$

Điều kiện này cho thấy trong hai số x, y có ít nhất một số không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq 0$. Xét hai trường hợp.

Nếu $x, y \geq 0$, thì với mọi $m, n \in N$, ta có

$$(x^m - y^m)(x^n - y^n) \geq 0 \Leftrightarrow x^{m+n} + y^{m+n} \geq x^m y^n + x^n y^m$$

Từ đó suy ra

$$2(x^{m+n} + y^{m+n}) \geq x^m y^n + x^n y^m + x^{m+n} + y^{m+n} = (x^m + y^m)(x^n + y^n), \tag{1.28}$$

tức là $2s_{m+n} \geq s_m s_n$.

Nếu $x \geq 0, y < 0$, thì $x \geq -b = |b| > 0$. Do đó với $m \in N$, ta có

$$x^m - y^m \geq x^m - |y|^m \geq 0.$$

Lập luận tương tự như phần trên ta có bất đẳng thức (1.28). Mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề 1.4. *Cho đa thức đối xứng với hệ số dương $f(X_1, X_2)$. Khi đó, nếu x_1, x_2, y_1, y_2 là các số dương thoả mãn các điều kiện*

$x_1x_2 \leqslant y_1y_2$, $x_1^n + x_2^n \leqslant y_1^n + y_2^n$, $\forall n \in N$, *thì* $f(x_1, x_2) \leqslant f(y_1, y_2)$.

Chứng minh. *Ta có*

$$f(X_1, X_2) = \sum a_{ij}X_1^iX_2^j = \sum_{i<j}(a_{ij}X_1^iX_2^j + a_{ji}X_1^jX_2^i) + \sum a_{ii}X_1^iX_2^i,$$

trong đó $a_{ij} > 0$. Vì f là đa thức đối xứng, nên $a_{ij} = a_{ji}$, do đó

$$f(X_1, X_2) = \sum_{i<j} a_{ij}(X_1^iX_2^j + X_1^jX_2^i) + \sum a_{ii}X_1^iX_2^i,$$

$$= \sum_{i<j} a_{ij}X_1^iX_2^i(X_1^{j-i} + X_2^{j-i}) + \sum a_{ii}X_1^iX_2^i.$$

Từ đó dễ thấy rằng nếu (x_1, x_2) và (y_1, y_2) thoả mãn các điều kiện đã nêu, thì $f(x_1, x_2) \leqslant f(y_1, y_2)$. Mệnh đề được chứng minh.

Xét một ví dụ minh hoạ ứng dụng đa thức đối xứng trong chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 1.29. Chứng minh rằng, nếu a, b và c là ba số thực thoả mãn điều kiện $a + b \geq c \geq 0$, thì

$$a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}, \quad a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{8}, \quad a^8 + b^8 \geq \frac{c^8}{128}.$$

Lời giải. *Đặt $\sigma_1 = a + b$, $\sigma_2 = ab$. Ta có*

$$s_2 = a^2 + b^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2.\frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}z.$$

Vì $z \geq 0$, còn theo giả thiết thì $\sigma_1 \geq c \geq 0$, nên $s_2 \geq \frac{1}{2}c^2$, nghĩa là

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}c^2.$$

Vận dụng bất đẳng thức trên, ta có

$$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c^2\right)^2 = \frac{1}{8}c^4.$$

Tương tự ta có

$$a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}c^8.$$

Ví dụ 1.30. Cho hai số dương a, b thoả mãn hệ thức $a + b = 1$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^n + \left(b + \frac{1}{b}\right)^n \geq \frac{5^n}{2^{n-1}}.$$

Lời giải. *Đặt*

$$x = a + \frac{1}{a}, \quad y = b + \frac{1}{b}, \quad \sigma_1 = x + y, \quad \sigma_1 = xy, \quad s_n = x^n + y^n.$$

Theo giả thiết và bất đẳng thức (1.26), *ta có*

$$\sigma_1 = (a+b)\left(1 + \frac{1}{ab}\right) \geq (a+b)\left(1 + \frac{4}{a+b}\right) = 5.$$

Do đó, theo bất đẳng thức (1.26) ta có

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^n + \left(b + \frac{1}{b}\right)^n \geq \frac{5^n}{2^{n-1}}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.31. Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 0$, thì

$$(a+b)(a^3+b^3)(a^5+b^5) \leqslant 4(a^9+b^9).$$

Lời giải. *Theo bất đẳng thức (1.27) trong Mệnh đề 1.3, ta có*

$$(a^3+b^3)(a^5+b^5) \leqslant 2(a^8+b^8).$$

Do $a + b \geq 0$, nên nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $a + b$ sau đó áp dụng bất đẳng thức (1.27), ta được

$$(a+b)(a^3+b^3)(a^5+b^5) \leqslant 2(a+b)(a^8+b^8) \leqslant 2.2(a^9+b^9) = 4(a^9+b^9).$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.32. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh rằng

$$2(a^7 + b^7) \geq ab(a^5 + a^3b^2 + a^2b^3 + b^5).$$

Lời giải. *Bất đẳng thức đã cho tương đương với*

$$4(a^7 + b^7) \geq (a^7 + a^6b + ab^6 + b^7) + (a^7 + a^4b^3 + a^3b^4 + b^7)$$

$$\Leftrightarrow 4(a^7 + b^7) \geq (a + b)(a^6 + b^6) + (a^3 + b^3)(a^4 + b^4).$$

Áp dụng bất đẳng thức (1.25), ta có

$$2(a^7 + b^7) \geq (a + b)(a^6 + b^6), \quad 2(a^7 + b^7) \geq (a^3 + b^3)(a^4 + b^4).$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.33. Các số thực x_1, x_2, y_1, y_2 thoả mãn các điều kiện $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, $1 \leqslant y_1 \leqslant y_2$. Chứng minh rằng, với mọi số tự nhiên n, ta có

$$\frac{x_1^{ny_1} + x_2^{ny_2}}{x_1^{ny_2} + x_2^{ny_1}} + \frac{y_1^{nx_1} + y_2^{nx_2}}{y_1^{nx_2} + y_2^{nx_1}} \geq \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{y_2 - y_1} + \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{x_2 - x_1}.$$

Lời giải. *Với các số thực x_1, x_2, y_1, y_2 thoả mãn các điều kiện $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, $1 \leqslant y_1 \leqslant y_2$ và số tự nhiên n, ta có các bất đẳng thức sau*

$$x_1^{y_2 - y_1} \leqslant x_2^{y_2 - y_1}, \; x_1^{ny_1}\left[x_1^{n(y_2 - y_1)} - 1\right] \leqslant x_2^{ny_1}\left[x_2^{n(y_2 - y_1)} - 1\right],$$

$$y_1^{x_2 - x_1} \leqslant y_2^{x_2 - x_1}, \; y_1^{nx_1}\left[y_1^{n(x_2 - x_1)} - 1\right] \leqslant y_2^{nx_1}\left[y_2^{n(x_2 - x_1)} - 1\right].$$

Từ đó suy ra

$$x_1^{y_2}x_2^{y_1} \leqslant x_1^{y_1}x_2^{y_2}, \; x_1^{ny_2} + x_2^{ny_1} \leqslant x_1^{ny_1} + x_2^{ny_2}, \tag{1.29}$$

$$y_1^{x_2}y_2^{x_1} \leqslant y_1^{x_1}y_2^{x_2}, \; y_1^{nx_2} + y_2^{nx_1} \leqslant y_1^{nx_1} + y_2^{nx_2}. \tag{1.30}$$

Nhân theo từng vế các bất đẳng thức trong (1.29), ta được

$$x_1^{y_2}x_2^{y_1}(x_1^{ny_2} + x_2^{ny_1}) \leqslant x_1^{y_1}x_2^{y_2}(x_1^{ny_1} + x_2^{ny_2}) \Leftrightarrow \frac{x_1^{ny_1} + x_2^{ny_2}}{x_1^{ny_2} + x_2^{ny_1}} \geq \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{y_2 - y_1}.$$

Làm tương tự đối với các bất đẳng thức trong (1.30), ta được

$$\frac{y_1^{nx_1}+y_2^{nx_2}}{y_1^{nx_2}+y_2^{nx_1}} \geq \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{x_2-x_1}.$$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên đây ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.34. Các số thực x_1, x_2, y_1, y_2 thoả mãn các điều kiện $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$. Chứng minh rằng

$$x_1^{y_2} + x_2^{y_1} \leqslant x_1^{y_1} + x_2^{y_2}.$$

Lời giải. *Đặt $t_1 = x_1^{y_2}$, $t_2 = x_2^{y_1}$, $\tau_1 = x_1^{y_1}$, $\tau_2 = x_2^{y_2}$ và xét đa thức đối xứng $f(x,y) = x + y$. Theo công thức (1.26), giả thiết của Mệnh đề 4 được thoả mãn. Do đó, $f(t_1, t_2) \leqslant f(\tau_1, \tau_2)$, suy ra điều phải chứng minh.*

Ví dụ 1.35. Hai số không âm x, y thay đổi và thoả mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f = x(x^3 + x^2 + x + y) + y(y^3 + y^2 + y + x).$$

Lời giải. *Ta viết lại biểu thức trên ở dạng*

$$f = (x^4 + y^4) + (x^3 + y^3) + (x^2 + y^2) + 2xy.$$

Đặt $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy, s_k = x^k + y^k$. Sử dụng công thức Waring, ta có

$$f = s_4 + s_3 + s_2 + 2\sigma_2 = (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^3\sigma_2 + 2\sigma_2^2) + (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 2\sigma_2.$$

Theo giả thiết, ta có $\sigma_1 = 1$. Mặt khác, từ bất đẳng thức $\sigma_1^2 \geq 4\sigma_2$, suy ra $\sigma_2 \leqslant \frac{1}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$. Như vậy, ta có

$$f = 2\sigma_2^2 - 7\sigma_2 + 3, \quad 0 \leqslant \sigma_2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Vì tam thức $f(\sigma_2) = 2\sigma_2^2 - 7\sigma_2 + 3$ nghịch biến trên đoạn $[0, \frac{1}{4}]$, nên

$$\max_{[0,\frac{1}{4}]} f(\sigma_2) = f(0) = 3, \ \min_{[0,\frac{1}{4}]} f(\sigma_2) = f(1/4) = \frac{11}{8}.$$

Như vậy, ta có kết quả

$$\max f = 3 \Leftrightarrow (x=0, y=1),\ (x=1, y=0),$$

$$\min f = \frac{11}{8} \Leftrightarrow x = y = 1/2.$$

Ví dụ 1.36. x, y là hai số dương thay đổi và thoả mãn điều kiện $x + y = 1$, còn a là một số dương cho trước. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{a}{xy}.$$

Lời giải. *Đặt* $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$. *Khi đó ta có*

$$x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 - 2\sigma_2,\ \sigma_1^2 \geq 4\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

$$f = \frac{1}{1-2\sigma_2} + \frac{a}{\sigma_2}, \qquad 0 < \sigma_2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

a) Trước hết xét trường hợp $a \geq \frac{1}{2}$. *Trong trường hợp này, ta có*

$$f = \Big(\frac{1}{1-2\sigma_2} + \frac{1}{2\sigma_2}\Big) + \frac{a - \frac{1}{2}}{\sigma_2} \geq 4 + 4(a - \frac{1}{2}) = 2 + 4a.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sigma_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. *Vậy, nếu* $a \geq \frac{1}{2}$, *thì*

$$\min f = 2 + 4a \quad \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

b) Xét trường hợp $a < \frac{1}{2}$. *Đặt* $t = \frac{1}{1-2\sigma_2}$. *Ta có* $1 < t \leqslant 2$ *và*

$$f = t + \frac{2at}{t-1} = (t - 1 + \frac{2a}{t-1}) + 2a + 1 \geq 2\sqrt{2a} + 2a + 1 = (1 + \sqrt{2a})^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$t - 1 = \frac{2a}{t-1} \Leftrightarrow t = 1 + \sqrt{2a}.$$

Từ đó suy ra

$$\sigma_2 = \frac{t-1}{2t} = \frac{\sqrt{2a}}{2(1+\sqrt{2a})}.$$

Vậy, nếu $a < \frac{1}{2}$, *thì*

$$\min f = (1 + \sqrt{2a})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ xy = \dfrac{\sqrt{2a}}{2(1 + \sqrt{2a})}. \end{cases}$$

Ví dụ 1.37. x, y là các số dương thay đổi, thoả mãn điều kiện $x + y \leqslant 1, a$ và b là các số thực cho trước, sao cho $a \geq \frac{1}{2} + \frac{b}{16}, b \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{a}{xy} + bxy.$$

Lời giải. *Đặt* $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. *Theo giả thiết, ta có* $0 < \sigma_1 \leqslant 1$ *và từ bất đẳng thức* $\sigma_1^2 \geq 4\sigma_2$, *suy ra* $0 < \sigma_2 \leqslant \frac{1}{4}$. *Khi đó biểu thức đã cho có dạng*

$$f = \frac{1}{\sigma_1^2 - 2\sigma_2} + \frac{a}{\sigma_2} + b\sigma_2.$$

Chúng ta biến đổi biểu thức này như sau

$$f = \Big(\frac{1}{\sigma_1^2 - 2\sigma_2} + \frac{1}{2\sigma_2}\Big) + b\Big(\sigma_2 + \frac{1}{16\sigma_2}\Big) + \frac{a - \frac{1}{2} - \frac{b}{16}}{\sigma_2}$$

Áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân và các hệ quả, ta có

$$f \geq \frac{4}{\sigma_1^2} + \frac{b}{2} + \frac{4(a - \frac{1}{2} - \frac{b}{16})}{\sigma_1^2} \geq 4 + \frac{b}{2} + 4a - 2 - \frac{b}{4} = 2 + 4a + \frac{b}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = 4\sigma_2, \\ \sigma_2 = \dfrac{1}{16\sigma_2}, \\ \sigma_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy ta có $\min f = 2 + 4a + \frac{b}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.38. x, y là hai số dương thay đổi, thoả mãn đẳng thức $xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f = \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} + \frac{x^2}{x^6 + y^2} + \frac{y^2}{y^6 + x^2}.$$

Lời giải. *Sử dụng điều kiện $xy = 1$, ta biến đổi biểu thức đã cho như sau*

$$f = \frac{xy}{x^3(xy) + y^3} + \frac{xy}{y^3(yx) + x^3} + \frac{x^2y^2}{x^4(x^2y^2) + y^4} + \frac{x^2y^2}{y^4(y^2x^2) + x^4} =$$

$$= \frac{2}{x^3 + y^3} + \frac{2}{x^4 + y^4}.$$

Đặt $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Theo giả thiết, ta có $\sigma_2 = 1$, và từ bất đẳng thức $\sigma_1^2 \geq 4\sigma_2$, suy ra $\sigma_1 \geq 2$.

Sử dụng công thức Waring và chú ý $\sigma_2 = 1$, ta có

$$f = \frac{2}{\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2} + \frac{2}{\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2} = \frac{2}{\sigma_1^3 - 3\sigma_1} + \frac{2}{\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 2}, \quad \sigma_1 \geq 2.$$

Dễ thấy rằng, các hàm số $f_1(\sigma_1) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1$, $f_2(\sigma_1) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 + 2$ đồng biến trong khoảng $[2, \infty)$, do đó

$$\min_{[2,\infty)} f_1(\sigma_1) = f_1(2) = 2, \quad \min_{[2,\infty)} f_2(\sigma_1) = f_2(2) = 2.$$

Từ đó suy ra

$$\max f = \frac{2}{\min_{[2,+\infty)} f_1(\sigma_1)} + \frac{2}{\min_{[2,+\infty)} f_2(\sigma_1)} = 2$$

khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y = 2, \\ \sigma_2 = xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Bài tập

1. *Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng*

a) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.

b) $a^6 + b^6 \geq a^5b + ab^5$.

c) $32(a^6 + b^6) \geq (a + b)^6$.

2. *Chứng minh rằng với mọi a, b không âm có các bất đẳng thức sau*

a) $a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geq 6a^2b^2$.

b) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a + b)^2$.

c) $\sqrt{\dfrac{a^2}{b}} + \sqrt{\dfrac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$

3. *Cho $x, y > 0, x + y = 1$. Chứng minh rằng*

$$8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geq 5.$$

4. *Cho $x, y > 0, x + y \leqslant 1$. Chứng minh rằng* $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{x^2 + y^2} \geq 6.$

5. *Cho hai số dương x, y với $x + y = 1$. Chứng minh rằng*

$$16(x^5 + y^5) + \frac{1}{x^3y^3} \geq 65.$$

6. *Cho $a + b = \sqrt{10}$. Chứng minh rằng* $(1 + a^4)(1 + b^4) \geq 45$. **7.** *Cho hai số dương a, b với $a + b \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có*

$$\left(a + \frac{a}{b}\right)^n + \left(a + \frac{b}{a}\right)^n + \left(b + \frac{a}{b}\right)^n + \left(b + \frac{b}{a}\right)^n \geq \frac{3^n}{2^{n-2}}.$$

8. *Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \geq \frac{2}{1 + ab}.$$

9. *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có*

a) $\dfrac{|a + b|}{1 + |a + b|} \geq \dfrac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|}.$

b) $\dfrac{|a + b|}{|a + b| + 2} \leqslant \dfrac{|a|}{|a| + 2} + \dfrac{|b|}{|b| + 2}.$

10. *Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có*

$$a^2 + b^2 + ab + 1 \geq \sqrt{3}(a + b).$$

11. *Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 2$, thì với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có*

$$a^n + b^n \leqslant a^{n+1} + b^{n+1}.$$

12. *Các số thực x_1, x_2, y_1, y_2 thoả mãn các điều kiện $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, $1 \leqslant y_1 \leqslant y_2$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{x_1^{y_2} + x_2^{y_1}}{x_1^{y_1} + x_2^{y_2}} \leqslant \frac{y_1^{x_1} + y_2^{x_2}}{y_1^{x_2} + y_2^{x_1}}.$$

13. *Các số thực* $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ *thoả mãn các điều kiện* $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$. *Chứng minh rằng*

$$x_1^{y_2} + x_1^{y_3} + x_2^{y_1} + x_2^{y_3} + x_3^{y_1} + x_3^{y_2} \leqslant 2(x_1^{y_1} + x_2^{y_2} + x_3^{y_3}).$$

14. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $xy(x-y)^2$ *với điều kiện* $x + y = a$, *trong đó* a *là số thực cho trước.*

15. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f = x^4 + y^4 + ax^2y^2,$$

trong đó $x, y \geq 0, x + y = 1$, *còn* a *một số thực cho trước.*

16. x, y *là hai số dương thay đổi, thoả mãn điều kiện* $x + y = 1$, $a > 0$ *là số cố định cho trước. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f = \frac{a}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy}.$$

17. *Cho các số dương* x, y *thoả mãn hệ thức* $xy = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

18. *Cho các số dương* x, y *thoả mãn điều kiện* $x + y = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)\left[1 + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)\right].$$

19. *Cho* x, y *là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f = \frac{(1 + x)^4 + (1 + y)^4}{x^2 + y^2}.$$

20. *Cho* $x, y \geq 0, x^2 + y^2 = xy + 1$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $x^2y^2(x^2 + y^2)$.

21. *(Nga, 1995). Với các số* $x, y > 0$, *chứng minh rằng*

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

22. *Cho x, y thỏa mãn điều kiện $xy = 1$. Chứng minh rằng $x + y \leqslant x^2 + y^2$.*

23. *Các số $x, y \geq 0$ với điều kiện $x + y = 1$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 \geq \frac{1}{4}$.*

24. *Chứng minh bất đẳng thức $(x + y)^4 \geq 8xy(x^2 + y^2)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.*

25. *Cho các số không âm a, b. Chứng minh rằng*

$$(a^3 + 1)(b^3 + 1) \geq (a^2b + 1)(b^2a + 1).$$

26. *Giả sử rằng x, y là các số dương thay đổi và thoả mãn điều kiện $x + y \leqslant 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f = x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

27. *Cho x, y là hai số dương bất kì. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{4xy}{(x + y)^2} \geq 3.$$

28. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f = \dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{1}{1 + y} + \dfrac{1}{1 + xy}$, trong đó x, y là các số dương thay đổi thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 \leqslant 2$.*

29. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f = \dfrac{x^2}{y - 1} + \dfrac{y^2}{x - 1}$, trong đó x, y là các số thực lớn hơn 1.*