

I. Định nghĩa

Phương trình nghiệm nguyên là phương trình mà các nghiệm của nó là các số nguyên.

Ví dụ: Phương trình $x + 2y = 3$ với $x, y \in \mathbb{Z}$ là phương trình nghiệm nguyên.
Phương trình này có nghiệm $(1; 1), (-1; 2), \dots$

II. Nhận xét

1. Về sự cần thiết của các phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên: Do đặc điểm của các phương trình nghiệm nguyên nên khi giải các phương trình này đòi hỏi chúng ta phải vận dụng linh hoạt các phương pháp giải phương trình đại số đã có, kết hợp với các phương pháp giải riêng biệt của phương trình nghiệm nguyên. Bởi vậy, việc nắm vững các phương pháp cơ bản để giải các phương trình nghiệm nguyên có vai trò đặc biệt quan trọng trong việc giải các bài toán số học nói chung và phương trình nghiệm nguyên nói riêng.

2. Về các ví dụ và bài tập nêu ra: Các VD và bài tập nêu ra minh họa các phương pháp nói chung khá đơn giản. Có những ví dụ, bài tập là những khó khăn mới, những dạng phương trình mới cùng được giải bằng một phương pháp đã nêu nhưng đòi hỏi HS phải có sự tư duy nhất định.

3. Về phương pháp dạy chuyên đề: “các phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên” cho HSG:

+ Trong chuyên đề này, các kiến thức nêu ra mang tính chất cơ sở phù hợp với đối tượng HS và có sự hạn chế về số lượng các ví dụ. GV nên dựa trên cơ sở các phương pháp đó để ra thêm bài tập nhằm rèn luyện thêm kĩ năng cho HS.

+ GV nên để HS gặp các khó khăn khi tiếp cận với các VD sau nếu chỉ vận dụng máy móc cách giải của các VD trước. Sau đó GV hướng dẫn HS tìm khó khăn của VD mình gặp phải, xác định rõ nguyên nhân dẫn đến khó khăn đó, từ đó định hướng cách khắc phục trên cơ sở cách giải các VD có trước (nếu không thể được thì lúc đó GV nêu cách khắc phục của mình để HS tham khảo và ghi nhớ).

III. Các phương pháp cơ bản giải phương trình nghiệm nguyên

1. Phương pháp tách phần nguyên

Cơ sở của PP này là tách các biểu thức phân thức thành phần nguyên và phần phân. Sau đó đánh giá phần phân để tìm ra các nghiệm của phương trình.

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

Hướng dẫn (HD): Ta có: $y = 2 + 1/(x+1)$. Từ $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1/(x+1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1$ là ước của 1 $\Rightarrow x+1 = 1$ hoặc $x+1 = -1 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$.

Thay lại PT ta được nghiệm: $(x; y) = (0; 3), (-2; 1)$.

Nhận xét:

Trong VD trên, phần nguyên của phân thức $(2x+3)/(x+1)$ là 2 và phần phân là $1/(x+1)$. Việc tách để được phần nguyên như thế gọi là tách phần nguyên.

Ví dụ 2: Giải phương trình nghiệm nguyên sau: $y = \frac{x+3}{2x+5}$.

HD: Ta có $2y = (2x+6)/(2x+5) = 1 + 1/(2x+5)$. Từ $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1/(2x+5) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x+5$ là ước của 1 $\Rightarrow 2x+5 = 1$ hoặc $2x+5 = -1 \Rightarrow x = -2$ hoặc $x = -3$.

Thay lại $x = -2$ và $x = -3$ ta được các nghiệm của phương trình trên là:

$$(x; y) = (-2; 1), (-3; 0).$$

Bài tập vận dụng: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $y = \frac{x+1004}{2x+5}$.

b) $xy - 2x - 3y + 1 = 0$.

c) $y\sqrt{x} = 1 - x$.

d) $xy + y = x^2 + x + 1$.

e) $xy - 2x = y^2 - 2y + 3$.

f) $yx^2 + y = x^3 - x^2 + 2x + 7$.

Chú ý:

1) Sau khi học xong phương pháp này, GV nên kết luận cho HS các dạng PT có thể giải quyết được:

a) PT dạng: $y = f(x)$ (1) với $f(x)$ là các phân thức hữu tỉ có mẫu bậc nhất.

b) PT dạng: $g(x) = 0$ (2) với $g(x)$ là đa thức hai biến bậc hai mà số mũ của y (hoặc x) chỉ là bậc nhất,...

2) Cần lưu ý cho HS: Nếu khi áp dụng cách giải các PT có dạng trên gặp khó khăn, thì phải căn cứ vào chính khó khăn đó để tìm nguyên nhân khắc phục, hoặc có thể phải áp dụng một phương pháp giải khác.

3) Với PT (1) - khi mẫu là các đa thức bậc hai và PT (2) - khi số mũ của x, y đều bằng 2, thì rõ ràng phương pháp trên không đủ để giải quyết các bài toán dạng (1) và (2) (từ đây thấy rõ hạn chế của phương pháp tách phần nguyên); khi đó ta cần một phương pháp mới kết hợp với phương pháp tách phần nguyên để giải các PT dạng này.

2. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức để hạn chế miền nghiệm

Cơ sở của phương pháp này là sử dụng các bất đẳng thức để hạn chế miền nghiệm, sau đó xác định các giá trị nguyên và thử các giá trị đó vào phương trình.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $y = \frac{x+1}{x^2+1}$.

HD: Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $x^2 + 1 \geq 2x$. Vậy:

$0 < y \leq (x+1)/2x \leq 1$. Vậy $y = 1$.

Khi $y = 1$ thay lại phương trình ta được: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) và $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương là $(x; y) = (1; 1)$.

Ví dụ 2: Tìm $x \in \mathbb{R}^+$ để $y = \frac{x}{x^3 - 2x + 2}$ là số nguyên.

HD: Áp dụng BĐT Côsi ta được: $x^3 + 2 = x^3 + 1 + 1 \geq 3x$ nên: $x^3 - 2x + 2 \geq x$

- + Với $x = 0$ ta được: $y = 0$.
- + Với $x > 0$: $0 < y \leq 1 \Rightarrow y = 1$. Với $y = 1$ ta được: $x^3 - 3x + 2 = 0$. Phương trình này có nghiệm nguyên $x = -2$ và $x = 1$. Vậy $x = 0$, $x = -2$, $x = 1$ là các giá trị cần tìm của x .

Chú ý:

- + Với phương pháp như trên GV có thể tạo ra các bài tập cho HS bằng cách dựa vào các BĐT quen biết.
- + Phương pháp BĐT còn được sử dụng trong lớp bài toán sau:

Ví dụ 3: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

- $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y = -17$ (1).
- $-5x^2 - 2xy - 2y^2 + 14x + 10y \geq 16$ (2).
- $10x^2 + 20y^2 + 24xy + 8x - 24y + 51 \leq 0$ (3).
- $x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6xz + 4xy \leq 2$ (4).

HD: Áp dụng các phép biến đổi đẳng thức theo các hằng đẳng thức đáng nhớ ta có:

a) (1) $\Leftrightarrow (x - y + 1)^2 + (y - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \text{ và } y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x; y) = (3; 4).$$

b) (2) $\Leftrightarrow 25x^2 + 10xy + 10y^2 - 70x - 50y - 80 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (5x + y - 7)^2 + (3y - 6)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (5x + y - 7)^2 + (3y - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y - 6 = 0 \text{ và } 5x + y - 7 = 0 \text{ hay } y = 2 \text{ và } x = 1.$$

c) (3) $\Leftrightarrow 25x^2 + 50y^2 + 60xy + 20x - 60y + 127,5 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (5x + 6y + 2)^2 + 14(y - 3)^2 \leq 2,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 3 = 0 \text{ và } 5x + 6y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ và } x = -4. \text{ Thử lại thấy đúng.}$$

d) (4) $\Leftrightarrow (x - 2y + 3z)^2 + 2(y + z)^2 + 3z^2 \leq 2$

$$\Rightarrow 3z^2 \leq 2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x - 2y = 0 \text{ và } y = 0 \Rightarrow x = y = z = 0. \text{ Thử lại thấy đúng.}$$

Nhận xét: Có thể nói mọi dạng PT, BPT dạng bậc hai với x và y , có hệ số của x^2 và y^2 cùng dấu, đều có thể giải dựa trên phương pháp này.

Ví dụ 4: Giải phương trình nghiệm nguyên sau sau: $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = 3$.

HD: Điều kiện $x.y.z \neq 0$.

Vì các biểu thức: xy/z , xz/y , yz/x cùng dấu nên ta có:

$$3 = |xy/z + yz/x + zx/y| = |xy/z| + |yz/x| + |zx/y| \geq 3 \sqrt[3]{|xyz|} \geq 3.$$

$$\text{Vậy: } |xy/z| + |yz/x| + |zx/y| = 3 \Leftrightarrow |xy/z| = |yz/x| = |zx/y| = |xyz| = 1 \Leftrightarrow$$

$|x| = |y| = |z| = 1$. Thử lại phương trình trên ta được các nghiệm của phương trình là: $(x; y; z) = (1; 1; 1), (1; -1; -1), (-1; -1; 1), (-1; 1; -1)$.

Chú ý: Phương pháp này hay được áp dụng trong các phương pháp khác và nhiều PT nghiệm nguyên không mẫu mực. GV có thể dựa trên các BĐT để tạo ra các PT, BPT sử dụng phương pháp này nhằm củng cố cho HS các kiến thức về bất đẳng thức.

Bài tập áp dụng: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

1) $x^2 + 3y^2 + 4xy + 2x + 4y - 9 = 0$.

2) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2zx - 2x - 2y - 8z + 6 = 0$.

3) $x^4y + 3y = 8x + 1$ ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

4) $y(x^2 + x + 1) = 3x^2 - x + 1$ ($y \in \mathbb{Z}$).

5) $(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2) \leq 16$.

6) $x^3 - y^3 = 2xy + 8$.

Nhận xét:

+ Các phương trình nghiệm nguyên dạng $y = (ax^2 + bx + c)/(dx^2 + ex + f)$ có thể sử dụng phương pháp miền giá trị.

+ Cách giải các phương trình dạng $P(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ cho ta phương pháp giải các bài toán về tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các biểu thức dạng $P(x, y)$.

3. Phương pháp khử ẩn bằng bất đẳng thức lũy thừa

Phương pháp khử ẩn bằng bất đẳng thức lũy thừa có cơ sở lí thuyết là các nhận xét sau:

Với $n, a \in \mathbb{N}$; $a, n > 1$ và x, y nguyên. Ta có:

+) Nếu: $x^n < y^n < (x+a)^n$ thì: $y^n = (x+i)^n$ với $i = 1, 2, \dots, a-1$.

+) Nếu: $x(x+1)\dots(x+n) < y(y+1)\dots(y+n) < (x+a)(x+a+1)\dots(x+a+n)$ thì

$y(y+1)\dots(y+n) = (x+i)(x+i+1)\dots(x+i+n)$ với $i = 1, 2, \dots, a-1$.

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$ (1).

HD: Dễ thấy: $x^2 + x + 1 > 0$ nên $x^3 < y^3$ (a).

Mặt khác: $5x^2 + 11x + 7 > 0 \Rightarrow y^3 < 1 + x + x^2 + x^3 + (5x^2 + 11x + 7) = (x+2)^3$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra: $x^3 < y^3 < (x+2)^3 \Rightarrow y^3 = (x+1)^3 \Rightarrow y = x+1$. Thay lại phương trình ta được: $(x+1)^3 = 1+x+x^2+x^3 \Leftrightarrow x = 0$ và $x = -1$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm là: $(x; y) = (0; 1), (-1; 0)$.

Ví dụ 2: Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0 \quad (2).$$

HD: $(2) \Leftrightarrow y^4 = x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 \quad (2').$

Vì $3x^2 + 4z^2 + 1 > 0$ và $x^2 + 3 > 0$ nên:

$$\begin{aligned} x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 - (3x^2 + 4z^2 + 1) &< x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 \\ &< (x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1) + (x^2 + 3) \Rightarrow (x^2 + z^2)^2 < (y^2)^2 < (x^2 + z^2 + 2)^2. \end{aligned}$$

Vậy: $y^2 = x^2 + z^2 + 1.$

Kết hợp với $(2')$ ta được: $x^2 + 2z^2 = 0 \Rightarrow z = x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$

Vậy (2) có hai nghiệm: $(x; y; z) = (0; 1; 0), (0; -1; 0).$

Ví dụ 3: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0 \quad (3).$

HD: $(3) \Leftrightarrow x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1.$

Vì $y^2 \geq 0$ và $5y^2 + 2 > 0$ nên ta có:

$$(y^3 + 2y^2 + 3y + 1) - (5y^2 + 2) < y^3 + 2y^2 + 3y + 1 \leq (y^3 + 2y^2 + 3y + 1) + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3 \Rightarrow x^3 = y^3 \text{ hoặc } x^3 = (y+1)^3 \Rightarrow x = y \text{ hoặc } x = y+1.$$

+ Với $x = y$, thay lại (3) ta được: $2y^2 + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = -1$.

+ Với $x = y+1$, thay lại (3) ta được: $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1$.

Vậy (3) có hai nghiệm là: $(x; y) = (-1; -1), (1; 0)$.

Ví dụ 4: Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^4 + x^2 - y^2 + y + 10 = 0$ (4).

HD: (4) $\Leftrightarrow y(y - 1) = x^4 + x^2 + 10$.

Vì $x^2(x^2 + 1) < x^4 + x^2 + 10 < (x^4 + x^2 + 10) + (6x^2 + 2) = (x^2 + 3)(x^2 + 4)$ nên:

$$x^2(x^2 + 1) < y(y - 1) < (x^2 + 3)(x^2 + 4) \Rightarrow y(y - 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2) \text{ hoặc}$$

$y(y - 1) = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$. Thay lại (4) ta được $x^2 = 4$ hoặc $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ hoặc $x = \pm 2$.

Với $x = \pm 1$ ta được $y = 3$ hoặc $y = -2$. Với $x = \pm 2$ ta được $y = 6$ hoặc $y = -5$.

Vậy (4) có các nghiệm là: $(x; y) = (1; 3), (1; -2), (-1; 3), (-1; -2), (2; 6), (2; -5), (-2; 6)$ và $(-2; -5)$.

Ví dụ 5: Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm p biết tổng các ước dương của lũy thừa bậc 4 của p là một số chính phương.

HD: Vì p là số nguyên tố nên p^4 có các ước dương là: $p^4, p^3, p^2, p, 1$. Theo bài ra thì phương trình sau phải có nghiệm nguyên: $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = y^2$ (5) với p nguyên tố lẻ, y là số tự nhiên.

Ta có: (5) $\Leftrightarrow (2y)^2 = 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4$ (5').

Vì $(2p^2 + p)^2 < 4p^4 + 4p^3 + 4p^2 + 4p + 4 < (2p^2 + p + 2)^2$ nên (5') suy ra:

$(2y)^2 = (2p^2 + p + 1)^2$. Thay lại (5') ta được: $p^2 = 2p + 3 \Leftrightarrow p = 3$ ($p = -1$ loại).

Bài tập áp dụng: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

1) $y^3 - x^3 = 3x$.

2) $(x - 2)^4 - x^4 = y^3$.

3) $y^3 = x^3 + 2x + 1$.

4) $x^6 - 4x^4 - 4y^3 = 2 + 3y + 6y^2$.

4. Phương pháp sử dụng tính chia hết để hạn chế miền nghiệm

Nội dung chính của phương pháp là dựa vào tính chia hết để hạn chế miền nghiệm, từ đó xác định giá trị các ẩn rồi thử lại phương trình.

Ví dụ 1: Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$3x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 2y = 0 \quad (1).$$

HD: Biến đổi $(1) \Leftrightarrow (2x + y - 1)^2 - (x + 2)^2 = -3 \Leftrightarrow (x + y - 3)(3x + y + 1) = -3$.

Có các trường hợp sau xảy ra:

+) $x + y - 3 = 1$ và $3x + y + 1 = -3 \Leftrightarrow x = -4, y = 8$.

+) $x + y - 3 = -1$ và $3x + y + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 0, y = 2$.

+) $x + y - 3 = -3$ và $3x + y + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$.

+) $x + y - 3 = 3$ và $3x + y + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -4, y = 10$.

Vậy phương trình (1) có các nghiệm $(x; y) = (-4; 8), (0; 2), (0; 0), (-4; 10)$.

Ví dụ 2: Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 3y^2 + 2xy + 2x - 4y - 7 = 0 \quad (2)$.

HD: Biến đổi $(2) \Leftrightarrow (x + y + 1)^2 - (2y+1)^2 = 7 \Leftrightarrow (x + 3y + 2)(x - y) = 7$.

Có các trường hợp sau xảy ra:

+) $x + 3y + 2 = 7$ và $x - y = 1 \Leftrightarrow x = 2, y = 1$.

+) $x + 3y + 2 = 1$ và $x - y = 7 \Leftrightarrow x = 5, y = -2$.

+) $x + 3y + 2 = -1$ và $x - y = -7 \Leftrightarrow x = -6, y = 1$.

+) $x + 3y + 2 = -7$ và $x - y = -1 \Leftrightarrow x = -3, y = -2$.

Vậy phương trình (2) có các nghiệm là $(x; y) = (2; 1), (5; -2), (-6; 1), (-3; -2)$.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$xy - 2x - 3y + 1 = 0 \quad (3).$$

HD: Ta có: $xy - 3y = 2x - 1 \Rightarrow y(x - 3) = 2x - 1$.

+) $x = 3$ không là nghiệm (3).

+) $Với x \neq 3$ thì: $y = (2x - 1)/(x - 3) = 2 + 5/(x - 3)$.

$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5/(x-3)$ là số nguyên. Có các trường hợp sau xảy ra:

- Với $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4, y = 7$.

- Với $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2, y = -3$.

- Với $x-3 = 5 \Rightarrow x = 8, y = 3$.
- Với $x-3 = -5 \Rightarrow x = -2, y = 1$.

Vậy (3) có các nghiệm là: $(x; y) = (8; 3), (-2; 1), (4; 7), (2; -3)$.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2 - y^2 = 1999$ (4)

HD:

Ta có: $(4) \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 1999$.

Vì 1999 là số nguyên tố nên ước số nguyên của 1999 chỉ có thể là $\pm 1; \pm 1999$.
 Từ đó suy ra nghiệm nguyên dương của (4) là : $(x; y) = (1000; 999)$.

Ví dụ 5: Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ (5).

(trong đó p là số nguyên tố)

HD: $(5) \Leftrightarrow xy = px + py \Rightarrow (x - p)(y - p) = p^2$.

Vì p là số nguyên tố nên ước số nguyên của p^2 chỉ có thể là: $\pm 1; \pm p; \pm p^2$.

Thử lần lượt với các ước trên ta được các nghiệm của (5) là:

$$(x; y) = (p + 1; p + p^2), (2p; 2p), (p + p^2; p + 1).$$

Bài tập vận dụng: Giải các phương trình nghiệm nguyên sau:

1) $x^2 - 3y^2 + 2xy - 4x - 16y - 12 = 0$.

2) $(x^2 + y^2 + 1)^2 - 5x^2 - 4y^2 - 5 = 0$.

3) $1/p = 1/x^2 + 1/y^2$ với p là số nguyên tố, x, y là các số nguyên dương.

4) $(x^2 + 4y^2 + 28)^2 = 17(x^4 + y^4 + 14y^2 + 49)$ với x, y nguyên không âm.

5) $2^x + 2^y + 2^z = 2336$ với x, y, z là các số nguyên dương.

6) Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó bằng 1,5 lần tích các giai thừa của ba chữ số của nó.

Nhận xét: *Khi sử dụng phương pháp này người ta thường biến đổi một vế về dạng tích, vế còn lại là một số có thể phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố đơn giản.*

5. Hạn chế tập hợp chứa nghiệm dựa vào điều kiện của các ẩn

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50} \quad (1).$$

HD:

Thấy ngay $0 \leq x, y \leq 50$. Từ $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x}$ ta có:

$$y = 50 + x - 2\sqrt{50x} = 50 + x - 10\sqrt{2x}$$

Vì y nguyên nên: $2x = m^2 \Rightarrow 2|m^2 \Rightarrow 2|m \Rightarrow m = 2k \Rightarrow 2x = 4k^2 \Rightarrow x = 2k^2$ với $k \in \mathbb{Z}$. Với $2k^2 \leq 50 \Rightarrow k^2 \leq 25 \Rightarrow k$ chỉ có thể nhận giá trị: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Lựa chọn k trong các số trên để thỏa mãn phương trình ta được các nghiệm $(x; y)$ của (1) là: (0; 50), (2; 32), (8; 18), (18; 8), (32; 2), (50; 0).

Ví dụ 2: Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z \quad (2).$

HD: Biến đổi (2) thành: $xyz = x + y$. Nhận thấy rằng vai trò của x, y trong phương trình là bình đẳng nên ta có thể giả sử $x \leq y$.

Với $x \leq y$ ta có: $xyz = x + y < y + y = 2y \Rightarrow xz < 2$.

Ta lựa chọn nghiệm trong các trường hợp sau:

$$x = 1, z = 1; x = 2, z = 1; x = 1, z = 2$$

Từ đó suy ra nghiệm của (2) là: $(x; y; z) = (2; 2; 1), (1; 1; 2)$.

Nhận xét: Trong phương pháp này có một cách để hạn chế miền nghiệm khá hiệu quả là dựa vào cách sắp thứ tự các biến đối xứng. Nhờ có sự sắp thứ tự, số lượng các trường hợp phải xét giảm đi rất nhiều, do đó chỉ cần xét rất ít trường hợp. Tính sắp thứ tự chỉ có được khi vai trò của các biến là như nhau.

Ví dụ 3: Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ (3).

HD: Do x, y, z có vai trò như nhau nên có thể giả thiết: $1 \leq x \leq y \leq z$. Ta thử các trường hợp sau:

+ Với $x = 1$ thì $1/y + 1/z = 0$: (3) Vô nghiệm.

+) Với $x = 2$ thì $1/y + 1/z = 1/2 \Rightarrow (y - 2)(z - 2) = 4$.

Vì $0 \leq y - 2 \leq z - 2$ và ước của 4 là 1, 2, 4 nên suy ra nghiệm $(x; y; z)$ là $(2; 4; 4)$.

+) Với $x = 3$ thì $1/y + 1/z = 2/3$:

- Nếu $y = 3$ thì $z = 3$.

- Nếu $y \geq 4$ thì $1/y + 1/z \leq 1/4 + 1/4 < 2/3$: (3) Vô nghiệm.

+) Với $x = 4$ thì $1/x + 1/y + 1/z \leq 1/4 + 1/4 + 1/4 < 1$: (3) Vô nghiệm.

Vậy ta được các nghiệm $(x; y; z)$ là: $(2; 3; 6)$, $(2; 4; 4)$, $(3; 3; 3)$, $(4; 2; 4)$, $(4; 4; 2)$, $(2; 6; 3)$, $(3; 2; 6)$, $(3; 6; 2)$, $(6; 2; 3)$, $(6; 3; 2)$.

Ví dụ 4: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20 \quad (4).$$

HD: Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên có thể giả sử $1 \leq x \leq y \leq z$. Từ đó:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz > 3x^2 + x^2 = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 \leq 20 \Rightarrow x^2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 2.$$

Xét 2 trường hợp sau:

a) Với $x = 1$ thì: $y^2 + z^2 + yz = 19 \Rightarrow y^2 + y^2 + y^2 \leq 19 \Rightarrow y^2 = 19/3 \Rightarrow y \leq 2$.

+ Nếu $y = 1 \Rightarrow z^2 + z = 18 \Rightarrow z(z + 1) = 18$: (4) Vô nghiệm.

+ Nếu $y = 2 \Rightarrow z^2 + 2y - 15 = 0 \Rightarrow z = 3$: (4) Có nghiệm là (1; 2; 3).

b) Với $x = 2$ thì: $4 + y^2 + z^2 + 2yz = 20 \Rightarrow y^2 + z^2 + 2yz = 16 \Rightarrow y^2 + y^2 + 2y^2 \leq 16 \Rightarrow 4y^2 \leq 16 \Rightarrow y \leq 2$. Với $y = 2$ ta có: $z^2 + 4z = 12 \Rightarrow z = 2$. Phương trình (4) có nghiệm là (2; 2; 2).

Hoán đổi vai trò của x, y, z ta có các nghiệm (x, y, z) là:

(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 2; 1), (3; 1; 2), (2; 2; 2).

Bài tập 3, p đông: Giải phương trình sau:

$$(x + y + z + t)^2 = n^2 \cdot xyzt \text{ với } n = 2, 3, 4.$$

6. Phương pháp giản ước cho ước số chung

Phương pháp này sử dụng cho các phương trình có dạng đồng bậc (bậc của các số hạng bằng nhau).

Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2 + y^2 = 3z^2$ (1) với x, y, z là các số tự nhiên.

HD: Trước hết ta thấy $3|(x^2 + y^2)$.

Để chứng minh rằng: $3|(x^2 + y^2)$ khi và chỉ khi $3|x$ và $3|y$. Suy ra: $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ với x_1, y_1 là các số tự nhiên. Thay lại (1) ta được: $3[(x_1)^2 + (y_1)^2] = z^2$ (1')
 $\Rightarrow 3|z^2 \Rightarrow 3|z \Rightarrow z = 3z_1$ với z_1 là số tự nhiên. Thay vào (1') ta được: $(x_1)^2 + (y_1)^2 = 3(z_1)^2$ (2). Như vậy nếu $(x; y; z)$ là nghiệm của (1) thì $(x/3^n; y/3^n; z/3^n)$ cũng là nghiệm của (1). Vậy $x = 0, y = 0, z = 0$.

Kết luận: (1) có nghiệm duy nhất là $(0; 0; 0)$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4t^4)$ (2) với x, y, z, t là các số nguyên dương.

HD: Giả sử $(x; y; z; t)$ là một nghiệm của (2) và $d = \text{ƯCLN}(x, y, z, t)$. Khi đó:

$x = d.x_1; y = d.y_1; z = d.z_1; t = d.t_1$. Thay lại (2) ta được:

$(x_1)^4 + 4(y_1)^4 = 2[(z_1)^4 + 4(t_1)^4]$ (2') $\Rightarrow (x_1)^4 + 4(y_1)^4$ chẵn $\Rightarrow (x_1)^4$ chẵn $\Rightarrow x_1$ chẵn $\Rightarrow x_1 = 2x_2$ thay lại (2') ta được: $2[4(x_2)^4 + (y_1)^4] = (z_1)^4 + 4(t_1)^4$. Lập luận tương tự trên ta được: $z_1 = 2z_2, y_1 = 2y_2, t_1 = 2t_2 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1) \neq 1$. Trái với giả thiết d là ước chung lớn nhất của x, y, z, t .

Bài tập vận dụng: Giải phương trình $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 2008xyzt$ với x, y, z, t là các số tự nhiên.

Nhận xét:

+ Đây là một phương pháp hay và khó. Tùy theo trình độ của HS mà giáo viên có thể lựa chọn dạy phương pháp này hay không.

+ Xét về bậc của các biểu thức, thì các biểu thức trong phương trình nêu ra đều phải có bậc bằng nhau, bởi khi đó ta mới có thể giản ước cho ước chung dễ dàng và phương trình còn “nguyên dạng” cũ. Đó là cơ sở để các GV có thể sáng tạo thêm bài tập dạng này.

7. Phương pháp đưa về trường hợp riêng

Ví dụ 1: Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}} = y$$

(trong đó ở vế phải có n dấu căn, $n > 0$)

HD:

Ta thấy ngay $(x; y)$ bằng $(0; 0)$ là nghiệm của phương trình trên.

a) Nếu $n = 1$ thì $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 (y \in \mathbb{N})$. Vậy nghiệm $(x; y)$ là $(t^2; t)$, $t \in \mathbb{N}$

b) Nếu $n = 2$ thì $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x} = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = y^2 - x \Rightarrow \sqrt{x}$ là số tự nhiên.

và khi đó $t(t + 1) = y^2$. Nhưng $t^2 < t(t + 1) < (t + 1)^2$ nên $t^2 < y^2 < (t + 1)^2$ với

$\sqrt{x} = t$, $t \in \mathbb{N}$. Điều này không xảy ra với $t > 0$ và phương trình chỉ có một nghiệm là $(0; 0)$.

c) Với $n \geq 3$ ta có: $\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}} = y^2 - x$ trong đó vế trái có $n - 1$ dấu căn.

Đặt $y^2 - x = y_1$ là số nguyên dương. Tiếp tục làm như thế $n - 2$ lần dẫn đến phương trình $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y_{n-2}^2 - x$. Như vậy ta lại trở về trường hợp b) và chỉ có nghiệm là $(0; 0)$.

Bài tập áp dụng: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$1 + 2 + 3 + \dots + x! = y^2.$$

Kết luận

Trên đây là một số phương pháp giải các phương trình nghiệm nguyên thường gặp. Để thấy được các ứng dụng của nó ta xét một số dạng phương trình hay gặp trong các kì thi chọn HSG cấp THCS: dạng toán về cấu trúc số, về phương trình phân nguyên và bài toán về hệ phương trình đồng dư như một minh họa cho các phương pháp nêu trên. Các dạng bài toán này được mở rộng để sử dụng trong kì thi giải toán trên máy tính casio trong những năm qua.

Phần 2

Một số dạng của phương trình nghiệm nguyên

I. Cách tìm các chữ số của một số

1. Loại 1: *Lần lượt tính từng chữ số bằng cách xét chữ số tận cùng của một tích có chứa chữ số cần tìm.*

Ví dụ 1: Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng: $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 4574$

HD: Viết giả thiết trong dạng: $1000a + 200b + 30c + 4d = 4574$ (1).

Xét hàng đơn vị thấy tích $4d$ có tận cùng là 4, suy ra d bằng 1 hoặc 6.

- Nếu $d = 1$ thay vào (1) ta được: $100a + 20b + 3c = 457$.

Xét hàng đơn vị thấy $3c$ có tận cùng là 7, suy ra $c = 9$. Thay vào đẳng thức trên ta được: $10a + 2b = 43$. Vế trái chẵn còn vế phải lẻ nên phương trình này vô nghiệm.

- Nếu $d = 6$ thay vào (1) ta được: $100a + 20b + 3c = 455$ (2).

Tích $3c$ có tận cùng là 5 nên $c = 5$. Thay vào (2) ta được: $10a + 2b = 44$ (3).

Tích $2b$ có tận cùng là 4 suy ra b bằng 2 hoặc 7. Thay vào đẳng thức (3) được hai nghiệm $\overline{abcd}$ là 4256 và 3756.

Ví dụ 2: Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng: $\overline{abc} \cdot c = \overline{dac}$

HD: Từ giả thiết có: $100ac + 10bc + c^2 = 100d + 10a + c$ (1).

Vì c^2 có tận cùng là c (khác 0) nên c chỉ có thể là 1, 5, 6.

- Nếu $c = 1$ thì $\overline{abc} = \overline{dac} \Rightarrow$ vô nghiệm vì a, b, d khác nhau.
- Nếu $c = 5$ thay vào (1) ta được: $50a + 5b + 2 = 10d + 2$ (2).

suy ra $a = 1$. Thay vào (2) ta được: $50 + 5b + 1 = 10d$.

Lúc đó tích $5b$ có tận cùng là 9 $\Rightarrow$ vô nghiệm.

- Nếu $c = 6$ thay vào (1) được: $60a + 6b + 3 = 10d + a$.

suy ra $a = 1$. Lúc đó tích $6b$ (< 30) có tận cùng là 8 $\Rightarrow b$ chỉ có thể là 3.

Vậy $\overline{abcd} = 1386$.

Chú ý: để xét chữ số tận cùng được thuận lợi, ta luôn tách ra các số chẵn chục. Chẳng hạn ở (2) của lời giải ví dụ 2, nếu viết $49a + 5b + 2 = 10d$ sẽ khó tìm hướng giải hơn.

2. Loại 2: Sử dụng tính chất chia hết.

Ví dụ 3: Tìm các chữ số a, b, c sao cho: $\overline{abbc} = \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot 7$

HD: Từ giả thiết viết được:

$$\begin{aligned} 100 \cdot \overline{ab} + \overline{bc} &= \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot 7 \\ \Leftrightarrow \overline{bc} &= \overline{ab} (7 \cdot \overline{ac} - 100) \quad (1) \end{aligned}$$

Từ (1) ta thấy $\overline{bc}$ chia hết $\overline{ab}$ và thương $k = 7 \cdot \overline{ac} - 100 \leq 9$. Suy ra $a = 1$.

Ta có: $7c = 30 + k \leq 39$ nên $c = 5$, $k = 5$. Thay vào (1) được:

$$10b + 5 = (10 + b) \cdot 5 \Rightarrow 5b = 45 \Rightarrow b = 9.$$

Vậy $1995 = 19 \cdot 15 \cdot 7$.

Ví dụ 4: Tìm các chữ số a, b, c sao cho: $\frac{1}{\overline{ab \cdot bc}} + \frac{1}{\overline{bc \cdot ca}} + \frac{1}{\overline{ca \cdot ac}} = \frac{11}{3321}$

HD: Quy đồng mẫu số được:

$$81 \cdot 41 (\overline{ca} + \overline{ab} + \overline{bc}) = 11 \cdot \overline{ca} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{bc} \quad (1)$$

Do 41 là số nguyên tố và là ước của vế phải (1) nên 41 phải là ước của một trong ba số $\overline{ca}, \overline{ab}, \overline{bc}$, chẳng hạn $\overline{ca} : 41$. Xét 2 trường hợp:

- $\overline{ca} = 41$ hay $c = 4, a = 1$. Thay vào (1) được: $81(41 + \overline{1b} + \overline{b4}) = 11.\overline{1b}.\overline{b4}$ (2)

Ta thấy 81 là ước số của $\overline{1b}.\overline{b4}$ mà $\overline{1b}$ không thể chia hết cho 27 nên $\overline{b4}$

phải chia hết cho 9, suy ra $b = 5$. Thay vào (2) thỏa mãn. Lập luận tương tự khi $\overline{ab} : 41$ hoặc $\overline{bc} : 41$

- $\overline{ca} = 82$ hay $c = 8, a = 2$. Thay vào (1) được: $81(82 + \overline{2b} + \overline{b8}) = 22.\overline{2b}.\overline{b8}$ (3)

Vế phải của (3) chẵn nên ở vế trái b phải chẵn. Từ 81 là ước số của $\overline{2b}.\overline{b8}$

mà $\overline{2b}$ không thể chia hết cho 81 nên $\overline{b8}$ phải chia hết cho 3. Vì b chẵn nên chỉ có thể $b = 4$, nhưng khi đó 24.48 không chia hết cho 81.

Bài toán có nghiệm (a, b, c) là $(1; 5; 4), (5; 4; 1), (4; 1; 5)$.

3. Loại 3: Ước lượng giá trị của biểu thức nào đó chứa các chữ số để giảm bớt các trường hợp cần xét.

Ví dụ 5: Tìm số $\overline{abcd}$ sao cho: $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4321$

HD: Từ giả thiết viết được: $1111a + 111b + 11c + d = 4321$ (1).

Vì b, c, d đều nhỏ hơn 10 nên $3091 < 1111a < 4321 \Rightarrow a = 3$. Thay vào (1) ta được: $111b + 11c + d = 988$ (2).

Lập luận tương tự có: $868 < 111b < 988 \Rightarrow b = 8$. Thay vào (2) ta được:

$$11c + d = 100 \text{ mà } 90 < 11c < 100 \Rightarrow c = 9 \text{ và } d = 1.$$

Vậy $\overline{abcd} = 3891$

Ví dụ 6: Tìm các chữ số x, y, z biết rằng:

$$\overline{x \dots y} - \overline{y \dots y} = \overline{z \dots z}^2$$

Trong đó các số $\overline{x \dots y}$, $\overline{y \dots y}$, $\overline{z \dots z}$ được viết bởi 2n chữ số x, n chữ số y, n chữ số z.

HD: Đặt $t = \overline{1\dots 1} = (10^n - 1)/9$ được viết bởi n chữ số 1. Từ giả thiết ta có:

$$x.t.10^n + x.t - y.t = z^2.t^2$$

$$\Rightarrow x.10^n + x - y = z^2.t$$

$$\Rightarrow 9x.10^n + 9x - 9y = z^2 (10^n - 1)$$

$$\Rightarrow 9(2x - y) = (10^n - 1)(z^2 - 9x) \quad (1).$$

Do $9 \mid 2x - y \mid < 180$ nên số ở vế phải có ít hơn 4 chữ số, suy ra $n \leq 2$.

- Nếu $n = 1$, từ (1) có: $2x - y = z^2 - 9x \Leftrightarrow 11x = z^2 + y$ (2).

Cho z bằng 1, 2, ..., 9 thay vào (2) được các nghiệm $(x; y; z)$ là (1; 7; 2), (1; 2; 3), (2; 6; 4), (3; 8; 5), (4; 8; 6), (5; 6; 7), (6; 2; 8), (8; 7; 9).

- Nếu $n = 2$, từ (1) có $2x - y = 11(z^2 - 9x) \Leftrightarrow 101x = 11z^2 + y$ (3).

Cho z bằng 1, 2, ..., 9 thay vào (3) được các nghiệm $(x; y; z)$ là (1; 2; 3), (4; 8; 6). Thử lại thấy đúng. Bài toán có 10 nghiệm như trên.

4. Loại 4: Giải phương trình bậc hai nếu giả thiết có biểu thức chứa bình phương của các chữ số.

Ví dụ 7: Tìm số $\overline{abc}$ biết rằng: $\overline{abc} = 11(a^2 + b^2 + c^2)$

HD: Biến đổi điều kiện đề bài thành:

$$99a + 11b + (a + c - b) = 11(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1).$$

Từ đó phải có $a + b - c$ chia hết cho 11. Do $-8 < a + c - b < 18$ nên xét hai trường hợp:

• Nếu $a + c - b = 0$ hay $b = a + c$. Thay vào (1) được:

$$10a + c = 2a^2 + 2c^2 + 2ac \quad (2).$$

Ta thấy c phải chẵn, $c = 2d \leq 8$. Thay vào (2) được:

$$5a + d = a^2 + 4d^2 + 2ad \quad (3) \Leftrightarrow 4a + d = a(a - 1) + 4d^2 + 2ad.$$

Từ đó ta thấy, d phải chẵn mà $d \leq 4$. Thay d lần lượt bằng 0, 2, 4 vào (3) và giải phương trình bậc hai ẩn a ta được chỉ một nghiệm nguyên ứng với $d = c = 0$; $a = 5$; $b = 5$.

- Nếu $a + c - b = 11$ hay $b = a + c - 11$. Thay vào (1) ta được:

$$2a^2 + 2ac - 32a + 2c^2 = 23c - 131 \quad (4)$$

Từ (4) ta thấy c phải lẻ, $c = 2n + 1 \leq 9$. Thay vào (4) được:

$$a^2 - 15a + 2an + 4n^2 - 19n + 55 = 0 \quad (5)$$

Thay n lần lượt bằng 0, 1, 2, 3, 4 vào (5) và giải phương trình ẩn a ta được chỉ một nghiệm ứng với $n = 1$, $c = 3$, $a = 8$, $b = 0$.

Bài toán có hai nghiệm là 550 và 803.

Bài tập vận dụng: Tìm các số x, y thỏa mãn phương trình sau:

a) $\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$.

b) $\overline{xx^y} = \overline{xyyx}$.

c) $\overline{abcdef} = a.(1000.\overline{cc}^2 - \overline{cc})$.

d) $2.\overline{xyz} = 3$.

II. Một số phương pháp giải phương trình có chứa phần nguyên

1. Phương pháp 1: Dùng định nghĩa để khử dấu phần nguyên

$$[x] = n \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z} \text{ và } n \leq x < n + 1 \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq x - n < 1.$$

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\left[\frac{3x+1}{5} \right] = 2x-1 \quad (1)$

HD: $(1) \Leftrightarrow 2x-1 \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq (3x+1)/5 - 2x + 1 < 1$

$$\Leftrightarrow 2x-1 \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq (-7x+6)/5 < 1 \Leftrightarrow 2x-1 \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 \leq -7x+6 < 5$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 \in \mathbb{Z} \text{ và } 6/7 \geq x > 1/7 \Leftrightarrow x = 1/2.$$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] = 17 \quad (2)$

HD: Ta có $0 \leq x/2 - [x/2] < 1$ và $0 \leq x/3 - [x/3] < 1$

$$\Rightarrow 0 \leq x/2 + x/3 - ([x/2] + [x/3]) < 2 \Rightarrow 0 \leq 5x/6 - 17 < 2 \Rightarrow 102 \leq 5x < 114$$

$$\Rightarrow 102/5 \leq x < 114/5. \text{ Kết hợp với } x \in \mathbb{Z}, \text{ ta được } x = 21; x = 22.$$

Thử lại: $x = 21$ thỏa mãn. Vậy nghiệm nguyên của (2) là $x = 21$.

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ để khử dấu phân nguyên.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\left[\frac{7x-5}{3} \right] = \frac{16x+3}{5} \quad (3)$

HD: Đặt $(16x + 3)/5 = y$ ($y \in \mathbb{Z}$).

Ta có: $x = (5y - 3)/16 \Rightarrow (7x - 5)/3 = (35y - 101)/48$.

Do đó: $[(35y - 101)/48] = y \Leftrightarrow 0 \leq [(35y - 101)/48] - y < 1$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -13y - 101 < 48 \Leftrightarrow -101/13 \geq y > 149/13$$

$$\Leftrightarrow y = -8; -9; -10; -11 \text{ (do } y \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

- Với $y = -8$ thì $(16x + 3)/5 = -8 \Leftrightarrow x = -43/16$
- Với $y = -9$ thì $(16x + 3)/5 = -9 \Leftrightarrow x = -3$
- Với $y = -10$ thì $(16x + 3)/5 = -10 \Leftrightarrow x = -53/16$
- Với $y = -11$ thì $(16x + 3)/5 = -11 \Leftrightarrow x = -58/16$.

Vậy tập nghiệm của (3) là: $\left\{ -\frac{58}{16}; -\frac{53}{16}; -\frac{43}{16}; -3 \right\}$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $x^2 - 6[x] + 5 = 0$ (4)

HD: Đặt $[x] = y$ ($y \in \mathbb{Z}$) thì từ (5) ta có: $6y = x^2 + 5$. Suy ra $y > 0$.

Lại có $y \leq x < y + 1$ nên $y^2 + 5 \leq x^2 + 5 < y^2 + 2y + 6 \Leftrightarrow y^2 + 5 \leq 6y < y^2 + 2y + 6$

$$\begin{cases} y^2 - 6y + 5 \leq 0 \\ y^2 - 4y + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$$

Do $y \in \mathbb{Z}$ và $1 \leq y \leq 5$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

- Với $y = 1$ thì $[x] = 1$ và $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$
- Với $y = 2$ thì $[x] = 2$ và $x^2 = 7 \Leftrightarrow 2 \leq x < 3$ và $x = \pm \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \sqrt{7}$
- Với $y = 3$ thì $[x] = 3$ và $x^2 = 13 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$ và $x = \pm \sqrt{13} \Leftrightarrow x = \sqrt{13}$
- Với $y = 4$ thì $[x] = 4$ và $x^2 = 19 \Leftrightarrow 4 \leq x < 5$ và $x = \pm \sqrt{19} \Leftrightarrow x = \sqrt{19}$
- Với $y = 5$ thì $[x] = 5$ và $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$

Vậy tập nghiệm của (4) là: $\{1; \sqrt{7}; \sqrt{13}; \sqrt{19}; 5\}$

Bài tập về đồng: Giải các phương trình phức tạp sau:

$$1) \left[\frac{2 - 5x}{4} \right] = -x;$$

$$2) \left[\frac{2x - 1}{3} \right] = \left[\frac{x + 1}{2} \right];$$

$$3) \left[1 - \frac{x}{2} \right] + \left[\frac{1 - x}{2} \right] = \frac{1 - 3x}{8};$$

$$4) 1 - [x + 1] = \frac{[x] - x}{[x - 1]};$$

$$5) x^4 = 2x^2 + [x];$$

$$6) x^4 - 3x^2 - [x] = 0.$$

$$7) x^2 - 2007[x] + 2008 = 0.$$

III. Sơ lược về phương trình và hệ phương trình đồng dư bậc nhất một ẩn

1. Phương trình đồng dư bậc nhất một ẩn

a) Dạng phương trình: $ax \equiv b(\text{mod } m) \quad (1), a \neq 0.$

b) Điều kiện có nghiệm và số nghiệm:

+ Nếu $(a, m) = 1$ thì (1) có đúng một nghiệm.

+ Nếu $(a, m) = d$ thì (1) có nghiệm khi và chỉ khi $d \mid b$ và khi đó (1) có đúng d nghiệm.

c) Tìm nghiệm: Xét (1) khi $(a, m) = 1$. Nếu x_0 là một số thoả mãn (1) thì các nghiệm của (1) là $x \equiv x_0(\text{mod } m)$.

Chú ý: Việc tìm x_0 có thể nhờ máy tính cầm tay để xác định, và do đó bài toán này rất có ý nghĩa khi sử dụng máy tính Casio.

Ví dụ: Giải phương trình: a) $9x \equiv 6 \pmod{15} \quad (1); \quad 2) 208x \equiv 1826 \pmod{1999} \quad (2)$

HD:

1) $(1) \Leftrightarrow 3x \equiv 2 \pmod{5} \quad (1')$

Vì $(3, 5) = 1$ nên $(1')$ có nghiệm duy nhất.

Ta thấy $x_0 = 4$ thoả mãn $(1')$.

Vậy $(1')$ có nghiệm là: $x \equiv 4 \pmod{5}$.

Suy ra (1) có các nghiệm là: $x \equiv 4 \pmod{15}$, $x \equiv 9 \pmod{15}$, $x \equiv 14 \pmod{15}$.

1) Vì $(208, 1999) = 1$ nên (2) có nghiệm duy nhất.

Thử ta được $x_0 = 28$ thoả mãn (2) .

Vậy (2) có nghiệm là: $x \equiv 28 \pmod{1999}$.

Bài tập áp dụng: Giải các phương trình đồng dư sau:

a) $6x \equiv 27 \pmod{33}$.

b) $9x \equiv 42 \pmod{52}$.

c) $91x \equiv 84 \pmod{143}$.

d) $22x \equiv 219 \pmod{2003}$.

2. Hệ phương trình đồng dư bậc nhất có hệ số bậc nhất bằng 1

a) Dạng của hệ phương trình:

$$((x \equiv b_1 \pmod{m_1}, x \equiv b_2 \pmod{m_2}, \dots, x \equiv b_n \pmod{m_n})).$$

b) Tính chất nghiệm: Nếu x_0 là một số thoả mãn các phương trình trên thì $x \equiv x_0 \pmod{m_1.m_2...m_n}$ cũng thoả mãn các phương trình trên.

c) Điều kiện nghiệm: Hệ trên có nghiệm khi và chỉ khi $(m_i, m_j) | (b_i - b_j)$ với mọi $i \neq j$ và $i, j = 1, 2, \dots, n$.

d) Tìm nghiệm: Xét hệ trên với $(m_i, m_j) = 1$ với mọi $i \neq j$ và $i, j = 1, 2, \dots, n$. Khi đó, nếu x_0 thoả mãn hệ thì nghiệm của hệ là $x \equiv x_0 \pmod{m_1.m_2...m_n}$.

Ví dụ 1: (khi các đồng dư m_i khá nhỏ). Giải các hệ phương trình:

a) ($x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 4 \pmod{7}$)-Bài toán Hàn Tín điểm binh.

b) Tìm số nguyên dương $x > 2008$ nhỏ nhất có tính chất: x chia 2 dư 1, x chia 3 dư 2, x chia 5 dư 4, x chia 7 dư 6.

HD:

a) Từ phương trình $x \equiv 4 \pmod{7}$ ta được: $x = 7t + 4$.

Tìm x_0 bằng cách nhập hàm $A = 7X + 4$ với $X = 1, 2, 3, \dots$ kiểm tra: $(A - 2) \div 3$; $(A - 3) \div 5$. Đến khi tìm được số A thoả mãn: $3|(A - 2)$, $5|(A - 3)$ thì $x_0 = A$ là giá trị cần tìm.

Ta tìm được: $x_0 = A = 53$. Vậy hệ có nghiệm $x \equiv 53 \pmod{105}$.

b) Số x cần tìm thoả mãn hệ: $(x \equiv 1 \pmod{2}, x \equiv 2 \pmod{3}, x \equiv 4 \pmod{5}, x \equiv 6 \pmod{7})$.

Từ $x \equiv 6 \pmod{7}$ ta được: $x = 7t + 6$.

Tìm x_0 bằng nhập hàm $A = 7X + 6$ với $X = 1, 2, 3, \dots$ Và kiểm tra $(A - 1) \div 2$, $(A - 2) \div 3$, $(A - 4) \div 5$ đến khi $2|(A - 1)$, $3|(A - 2)$, $5|(A - 4)$.

Ta tìm được: $x_0 = A = 104$. Vậy $x \equiv 104 \pmod{210} \Rightarrow x = 104 + 210t, t \in \mathbb{N}$.
 $x > 2008 \Leftrightarrow 104 + 210t > 2008 \Leftrightarrow t > 9$. Vậy t nhỏ nhất bằng 10 và x nhỏ nhất bằng 2204.

Ví dụ 2: (Khi các đồng dư m_i có giá trị lớn). Giải hệ phương trình:

$$(x \equiv 65 \pmod{99}, x \equiv 5 \pmod{98}, x \equiv 51 \pmod{97}, x \equiv 10 \pmod{95})$$

HD: Trường hợp này ta phải dùng kết quả của định lí đồng dư Trung Quốc:

Xét hệ $x \equiv b_1 \pmod{m_1}$ (1), $x \equiv b_2 \pmod{m_2}$ (2) ,..., $x \equiv b_n \pmod{m_n}$ (n) với $m_1, m_2, \dots, m_n$ nguyên tố cùng nhau đôi một:

+ Bước 1: Đặt $M_k = (m_1.m_2...m_n)/m_k$.

+ Bước 2: Tìm y_k thoả mãn: $M_k.y_k \equiv 1 \pmod{m_k}$.

+ Lập tổng $x_0 = b_1.M_1.y_1 + b_2.M_2.y_2 + \dots + b_n.M_n.y_n$ thì x_0 là một giá trị thoả mãn hệ phương trình.

Áp dụng vào bài toán ta được: $M_1 = 903070, y_1 = 37; M_2 = 912285, y_2 = 33;$
 $M_3 = 921690, y_3 = 24; M_4 = 941094, y_4 = 4 \Rightarrow x_0 = 3488202695$. Vậy nghiệm của hệ là: $x \equiv 1449425 \pmod{89403930}$.

Bài tập ứng dụng: Giải các hệ phương trình đồng dư sau:

1) $(x \equiv 1(\text{mod } 99), x \equiv 2(\text{mod } 98), x \equiv 3(\text{mod } 97), x \equiv 4(\text{mod } 95)).$

2) $x \equiv 2(\text{mod } 11), x \equiv 3(\text{mod } 12), x \equiv 4(\text{mod } 13), x \equiv 5(\text{mod } 17), x \equiv 6(\text{mod } 19)).$

3) $x \equiv 7(\text{mod } 9), x \equiv 2(\text{mod } 10), x \equiv 3(\text{mod } 12), x \equiv 6(\text{mod } 15)).$

4) $x \equiv 1(\text{mod } 17), x \equiv 2(\text{mod } 23), x \equiv 3(\text{mod } 97), x \equiv 4(\text{mod } 307)).$