PHƯƠNG TRÌNH HÀM
FUNTIONAL EQUATION

§ 1. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG f(A) = B

Đặt A = t ;
Suy ra x theo t ;
Rồi thay vào A, B

*** Ví dụ 1:** Tìm hàm số f(x) nếu biết, với mọi $x \neq 0$ $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}$.

Giải:

Đặt: $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}$ thay vào hàm số đề bài

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1 + t^2}}{|t|}.$$

Từ đó : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t} & \text{nếu } t > 0 \\ \dfrac{1 - \sqrt{1 + t^2}}{t} & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$

*** Ví dụ 2:**

Tìm: $f(\frac{x+1}{x})$ nếu biết, với $x \neq 0$ $\quad f(\frac{2}{x+1}) = x^2 - 1$.

Giải:

Đặt: $t = \frac{2}{x+1} \Rightarrow x = \frac{2-t}{t}$. Từ đó: $f(t) = \frac{4 - 4t}{t^2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{4 - 4x}{x^2}$. Suy ra : $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{-4x}{x^2 + 2x + 1}$

*** Ví dụ 3:** Tìm tất cả hàm số $f : [0 , 1] \to [0 , 1]$ thoả mãn:

1. $f(x) \neq f(y)$ với mọi $x \neq y$;
2. $2x - f(x) \in [0 , 1]$ với mọi $x \in [0 , 1]$;
3. $f(2x - f(x)) = x$, với mọi $x \in [0 , 1]$.

Giải:

Thay x bởi f(x), thì thu được $\forall x \in [0, 1]$ $f(2f(x) - f(f(x))) = f(x)$.
Vì f đơn ánh, nên: $2f(x) - f(f(x)) = x$.
Thay x bởi $f^n(x)$, thì có: $2f^{n+1}(x) - f^{n+2}(x) = f^n(x)$
$\Rightarrow f^{n+2}(x) - f^{n+1}(nx) = f^{n+1}(x) - f^n(x) = \ldots = f(x) - x$.
Từ đó: $f^n(x) = n(f(x) - x) + x$. Sau đó, lấy x cố định.
Nếu $f(x) > x$ thì với n đủ lớn, thì $f^n(x) > 1$: vô lý.
Nếu $f(x) < x$ thì với n đủ lớn, thì $f^n(x) < 0$: vô lý.
Vậy: $f(x) = x$.

*** Ví dụ 4:** Cho hàm số $f : (0, +\infty) \to R$ thoả điều kiện:

$$f(tg2x) = tg^4x + \frac{1}{tg^4x}, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{4}).$$

Chứng minh rằng: $f(\sin x) + f(\cos x) \geq 196$, $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Giải :

Đặt $t = tg2x$, thì: $t = \frac{2tgx}{1 - tg^2x} \Rightarrow \frac{2}{t} = \frac{1}{tgx} - tgx \Rightarrow \frac{4}{t^2} = \frac{1}{tg^2x} + tg^2x - 2$.

Suy ra : $(\frac{4}{t^2} + 2)^2 = (\frac{1}{tg^2x} + tg^2x)^2 = \frac{1}{tg^4x} + tg^4x + 2$.

Từ đó: $\frac{16}{t^4} + \frac{16}{t^2} + 2 = \frac{1}{tg^4x} + tg^4x$.

Do đó, hàm số trở thành : $f(t) = \frac{16}{t^4} + \frac{16}{t^2} + 2$, với $t > 0$.

Như vậy: $f(\sin x) + f(\cos x) = \frac{16}{\sin^4 x} + \frac{16}{\cos^4 x} + \frac{16}{\sin^2 x} + \frac{16}{\cos^2 x} + 4$

$$= 16(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}) + 16(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}) + 4$$

$$\geq 16.\frac{2}{\sin^2 x\cos^2 x} + 16\frac{2}{\sin x\cos x} + 4$$

$$= 16 . \frac{8}{\sin^2 2x} + 16\frac{4}{\sin 2x} + 4 \geq 16.8 + 16.4 + 4 = 196.$$

Dấu " = " xảy ra khi $x = \frac{\pi}{4}$.

*** Ví dụ 5:**

Có tồn tại chăng một hàm số $f : R \to R$ thoả điều kiện:
$f(f(x)) = x^2 - a$, $\forall x \in R$ với $a > 1$ là số thực cho trước.

Giải:

Gọi $g(x) = x^2 - a$, thì ta có: $g(g(x)) = x \Leftrightarrow (x^2 - a)^2 - a - x = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - a)(x^2 + x - a + 1) = 0$ (1)

Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $x^2 - x - a = 0$;

Gọi p, q là hai nghiệm của $x^2 + x - q + 1 = 0$.

Giả định có hàm số f sao cho $f(f(x)) = g(x)$.

Nếu $f(m) = k$ thì $f(k) = f(f(m)) = g(m) = m$.

Suy ra: $g(k) = f(f(k)) = f(m) = k$.

Do đó: $k = m$ hay $k = n$.

Nếu $f(p) = r \Rightarrow f(r) = f(f(p)) = g(p) = q$.

Nếu $f(q) = s \Rightarrow f(s) = f(f(q)) = g(q) = p$.

Ta có: $g(r) = f(f(r)) = f(q) = s$ và $g(s) = r$.

Giả định: $r = q$ thì: $g(r) = g(q) = f(f(q)) = f(s) r = p$.

Do đó: $p = q$: vô lý. Cho nên: $r \neq s$ và $r \neq p$.

Như thế, (1) có 5 nghiệm : vô lý vì nó là phương trình bậc bốn.

Vậy, hàm số thoả điều kiện đề bài không tồn tại.

*** Ví dụ 6:**

Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \dfrac{1}{2 + tg^2 x} & \text{nếu } x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$, với $k \in Z$.

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) + f(ax)$ là tuần hoàn khi và chỉ khi $a \in Q$.

Giải:

Nếu: $a = \dfrac{p}{q}$ với $p \in Z$ và $q \in N^\star$,

ta có: $\forall x,\ g(x + q\pi) = f(x + q\pi) + f(ax + p\pi) = g(x)$.

$\Rightarrow$ g là hàm số tuần hoàn, chu kỳ $q\pi$.

Bây giờ cho a là số vô tỉ. Để ý rằng $g(0) = f(0) + f(0) = 1$.

Nếu $g(t) = 1$ với $t \neq 0$ nào đó thì $tg^2 t = 0$ và $tg^2 at = 0$,

nghĩa là $t = \pi k$ và $at = \pi h$.

Nhưng, $t \neq 0$, nghĩa là $a = \dfrac{1}{k}$: vô lý, vì a vô tỉ.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm $f(x)$ biết rằng: $f(\sqrt{1+x}) = \sqrt{1+x^2}$, $\forall x \geq -1$.

2. Tìm $f(x)$ biết rằng: $f(1 + \frac{1}{x}) = x^2 - 1$, $\forall x \neq 0$.

3. Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng: $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ với $x \neq 0$.

4. Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng: $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$ với $x \neq -2$; $x \neq 1$.

5. Tìm hàm số $f(x)$, biết rằng: $f\left(\frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{x^4+1}{x^2}$.

*

* *

§2. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA HAI BIỂU THỨC f(A) ; f(B)

* Từ phương trình đã cho, thay giá trị thích hợp để thu được thêm một phương trình khác.
* Từ hai phương trình đã cho suy ra f(A) hoặc f(B) ta trở lại dạng trên.

*** Ví dụ 1:** Tìm $f(x)$ nếu biết, với mọi $x \neq 0$, $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x$.

Giải:

Thay x bởi $\frac{1}{x}$, ta được : $f(\frac{1}{x}) + 2f(x) = \frac{1}{x}$.

Như thế ta được hệ: $\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2 - x^2}{3x}$.

*** Ví dụ 2:** Tìm $f(x)$ nếu biết, với mọi $x \neq 0$, $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x + 1 - \frac{1}{x}$.

Giải:

Thay $\frac{1}{1-x}$ bởi x ta được: $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x(x-1)}$.

Lấy phương trình đã cho trừ phương trình này thì được :

$$f(\frac{1}{1-x}) - f(\frac{x-1}{x}) = x - \frac{1}{x-1}.$$

Trong phương trình này thay $\frac{1}{1-x}$ bởi x thì thu được:

$$f(x) - f(\frac{1}{1-x}) = \frac{-x^2 + x - 1}{x} = -x + 1 - \frac{1}{x}.$$

Rồi từ phương trình đề bài và phương trình này suy ra: $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

*** Ví dụ 3:**

Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ lấy giá trị nguyên và xác định trên tập hợp các số nguyên sao cho $3f(x) - 2f(f(x)) = x$ với mọi số nguyên x.

Giải:

Hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.
Cho $f(x)$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện đề bài. Cho $g(x) = f(x) - x$.
Điều kiện có thể được viết lại như sau: $2f(f(x)) - 2f(x) = f(x) - x$,
Nó tương đương với: $g(x) = 2g(f(x))$.
Từ đó ta được: $g(x) = 2g(f(x)) = 2^2g(f(f(x))) = 2^3g(f(f(f(x)))) = \dots$
Vì : các số $g(f(f(\dots f(x)\dots)$ là các số nguyên, nên: $g(x)$ chia hết cho 2^n với mọi số nguyên x và mọi số tự nhiên n. Điều này chỉ có thể xảy ra nếu $g(x) = 0$.
Vậy: $f(x) = x$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

*** Ví dụ 4:** Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả $f(x) = x^2 + f(-x), \forall x \in R$.

Giải:

Không tồn tại vì : $x^2 = f(x) - f(-x)$. VT là hàm số chẵn, VP là hàm số lẻ.

*** Ví dụ 5:** Tìm hàm số $f : R \to R$ thoả, với a, b, c là các hằng số cho trước mà: $b^2 \neq 1$, $\forall x \in R$, $f(x) = a - bf(c - x)$.

Giải:

Từ điều kiện đề bài, ta có với mọi x.

$$f(c - x) = a - bf(x) \Leftrightarrow f(x) = a - b(a - bf(x)) \Rightarrow f(x) = \frac{a}{b+1}.$$

*** Ví dụ 6:**

Tìm hàm số f: $R \to R$ thoả : $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \sin(x^2 + \frac{a}{x^2}), \forall x \in R \setminus \{0\}$.

Giải :

Từ giả thiết, ta có với mọi $x \neq 0$: $\sin(x^2 + \frac{a}{x^2}) = \sin(a^2x^2 + \frac{1}{x^2})$.

Nếu $a \neq 1$: không tồn tại hàm số thoả điều kiện đề bài.

Nếu $a = 1$: điều kiện đề bài trở thành: $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \sin(x^2 + \frac{1}{x^2})$.

$$\text{Từ đó, ta có: } f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{nếu } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}\sin 2 & \text{nếu } |x| = 1, \\ \sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \varphi(x) & \text{nếu } |x| < 1 \end{cases} \qquad (\star),$$

trong đó $\varphi : (-1, 1) \to R$ là hàm số tuỳ ý. Đảo lại, nếu $f(x)$, $\varphi(x)$ thoả $(\star)$, thì dễ dàng kiểm chứng rằng $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \sin(x^2 + \frac{1}{x^2})$.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

* Từ một trong hai phương trình, thay giá trị thích hợp để được một phương trình khác.
* Từ hai phương trình này thu được f(A) hoặc g(A) .
* Trở lại dạng 1.

*** Ví dụ 1:** Tìm $f(x)$; $g(x)$ nếu biết, với mọi $x, y \in R$

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{x+2}{2} \\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right) + g(x+5) = x+4 \end{cases}$$

Giải :

Trong phương trình thứ hai, thay x bởi: $2x + 10$ thì hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} f(x+6) + 2g(2x+15) = \dfrac{x+2}{2} \\ f(x+6) + g(2x+15) = 2x+14 \end{cases} \Rightarrow g(2x+15) = \frac{-3x-26}{2}$$

và: $f(x+6) = \dfrac{7x+54}{2} \Rightarrow f(x) = \dfrac{7x+12}{2}$

và: $g(x) = \dfrac{-3x-7}{4}$.

*** Ví dụ 2:** Tìm: $f(x)$; $g(x)$ nếu biết với mọi $x, y \in R$

$$\begin{cases} f(x+1) + xg(x+1) = 2x \\ f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + g\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = x-1 \end{cases}$$

Giải:

Thay $x + 1$ bởi x trong phương trình đầu ;

thay $\dfrac{x+1}{x-1}$ bởi x trong phương trình thứ hai thì thu được hệ:

$$\begin{cases} f(x) + (x-1)g(x) = 2(x-1) \\ f(x) + g(x) = \dfrac{2}{x-1} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -2 ; \; g(x) = \frac{2x}{x-1}.$$

*** Ví dụ 3:**

Các hàm số: $f, g : R \to R$ không phải là những hàm hằng thoả mãn hai đồng nhất thức sau:

$$f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y),$$

$$g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y) \qquad \text{với: } x, y \in R.$$

Tìm tất cả các giá trị có thể có của $f(0)$ và $g(0)$.

Giải:

Cho $x = y = 0$, được: $f(0) = 2f(0)g(0)$ (1)

và: $g(0) = (g(0)^2 - f(0)^2)$ (2)

Để ý rằng $g(0) \neq \frac{1}{2}$, nên (1) $\Rightarrow f(0) = 0$.(2) $\Rightarrow g(0) = 1$

hay: $g(0) = 0$ (loại). Vậy: $f(0) = 0$; $g(0) = 1$.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm $f(x)$; $g(x)$ nếu biết: $\begin{cases} f(2x-1) + g(1-x) = x+1 \\ f\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + 2g\left(\dfrac{1}{2x+2}\right) = 3 \end{cases}$.

2. Tìm $f(x)$; $g(x)$ nếu biết:

$$\begin{cases} f(3x-1) + g(6x-1) = 3x \\ f(x+1) + x^2 g(2x+3) = 2x^2 + x \end{cases}.$$

3. Tìm các hàm số $f(x)$; $g(x)$ nếu biết :

$$\begin{cases} xf(x-2) + 2g(2x+1) = 2x^2 - 8x + 2 \\ f(2x+1) + g(4x+7) = -3 \end{cases}.$$

* * *

§4. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

> Khi hàm số cần xác định trên N hoặc Z, nói chung thường sử dụng quy nạp;
> Nhiều bài toán cũng phải xác định từng bước $N \to Z \to Q \to R$. Riêng bước từ $Q \to R$ cần thêm tính liên tục của hàm số.

*** Ví dụ 1:** Cho hàm số f xác định với mọi $x \in R$ và:

$$\begin{cases} \forall x, y \quad f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \\ \qquad f(1) = 2 \end{cases}$$

Hãy xác định $f(m)$; $f(\frac{m}{n})$ với $m \in Z$; $n \in Z^*$.

Giải:

Trước hết: $f(0) = f(1)\,f(0) - f(1+0) + 1 \Rightarrow f(0) = 1$.
Giả định: $f(m) = m + 1$. Thế thì : $f(m.1) = f(m)f(1) - f(m+1) + 1$
$\Rightarrow f(m+1) = f(m) + 1 = m + 2$.
Vậy: với mọi $m \in N$: $f(m) = m + 1$.
Bây giờ: $f(0) = f(1-1) = f(-1).f(1) - f(-1) + 1 \Rightarrow f(-1) = 0$.
Ta lấy $-m \in N$: $f(m) = f[(-1)(-m)] = f(0).f(-m) - f(-1-m) + 1 = 0 + m + 1$.
Nên, với $m \in Z$, $f(m) = m + 1$.
Sau đó với $m \in Z$, $n \in Z^*$, $x \in R$ bất kỳ
$f(x+1) = f(1)f(x) - f(1.x) + 1 = f(x) + 1$.
Từ đó với mọi m qui nạp ta được : $f(x+m) = f(x) + m$,

$$f(m) = f(n\frac{m}{n}) = nf(\frac{m}{n}) - f(n-1) = m + 1 \Rightarrow f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} + 1 .$$

*** Ví dụ 2:** Cho hàm số f không đồng nhất không, xác định trên R bởi:

$$\forall x, y \in R , \ 2f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

a. Chứng minh rằng $f(x) \geq -1$ với mọi x .
b. Cho $f(3) = 0$. Tính $f(1992)$; $f(1995)$; $f(1998)$.

Giải:

a. Lấy $y = 0$ thì ta có : $f(x)[f(0) - 1] = 0$ với mọi x.
Vì f không đồng nhất 0 nên suy ra $f(0) = 1$.
Lại lấy x và y đều bằng $\frac{x}{2}$ thế thì: $2[f(\frac{x}{2})]^2 = f(x) + 1 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq -1$.

b. Ta có $f(x+y) = 2f(x)f(y) - f(x-y)$.

Nên: $f(6) = f(3+3) = 2f(3)f(3) - f(3-3) = -1$

$f(9) = f(6+3) = 2f(6)f(3) - f(6-3) = 0$

$f(12) = f(9+3) = 2f(9)f(3) - f(6) = 1$

Giả định $f[3(2k+1)] = 0$, thế thì :

$f[3(2k+3)] = f[3(2k+1)+6] = 2f[3(2k+1)]f(6) - f[3(2k-1)] = 0$.

Giả định $f(3.4k) = 1$, thế thì :

$f[3(4k+4)] = f[3.4k+3.4] = 2f(3.4k)f(3.4) - f[3.4(k-1)] = 2-1 = 1$.

Giả định $f[3(4k+2)] = -1$; thế thì :

$f[3(4k+6) = f[3(4k+2)+12] =$

$= 2f[3(4k+2)]f(12) - f[3(4k-2)] = 2(-1).1 - (-1) = -1$.

Mà: $1992 = 3.4(166) \Rightarrow f(1992) = 1$,

$1995 = 3(4.166+1) \Rightarrow f(1995) = 0$,

$1998 = 3(4.166+2) \Rightarrow f(1998) = -1$.

*** Ví dụ 3:** Cho $f(x)$ là hàm số xác định trên R và thoả mãn điều kiện:

$$\forall u, v \in R : f(u+v) = f(u) + f(v)$$

a. Chứng minh rằng $\forall x \in R$, $\forall r \in Q$ ta có: $f(rx) = rf(x)$.

b. Nếu giả định thêm $f(x)$ liên tục tại $x = 0$, hãy xác định $f(x)$.

Giải :

a. Trước hết, bằng qui nạp ta thu được: $\forall x \in R, \forall n \in N$, $f(nx) = nf(x)$.

Rồi với m, n nguyên dương và x bất kỳ:

$$mf\left(\frac{n}{m}x\right) = f\left(m.\frac{n}{m}x\right) = f(nx) = nf(x) \Rightarrow f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x).$$

tức là với r hữu tỷ dương bất kỳ ta có : $f(rx) = rf(x), \forall x$.

Sau đó : $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

và: $0 = f(0) = f(x-x) = f[x+(-x)] = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

Như vậy rốt cục ta thu được: $\forall r \in Q$; $\forall x \in R$: $f(rx) = rf(x)$.

b. Bây giờ, theo giả thiết $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Ta chọn x_0 cố định thì:

$$\lim_{x \to x_0} f(x - x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x_0). = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0)$$

và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x - x_0) = \lim\limits_{x - x_0 \to 0} f(x - x_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 \Rightarrow$ hàm số liên tục trên R .

Sau đó ta lấy x bất kỳ thì tồn tại dãy các số hữu tỷ (r_n) sao cho $x = \lim\limits_{n \to \infty} r_n$ thì:

$$f(x) = f(x.1) = f\left[\left(\lim_{n \to \infty} r_n\right).1\right] = \lim_{n \to \infty} r_n .f(1) = x.f(1) .$$

Gọi $a = f(1)$, thế là ta được $f(x) = ax$.

*** Ví dụ 4:** Cho f(x) là hàm số xác định trên R^+ và thoả mãn điều kiện:

$\forall u, v \in R^+ \quad f(uv) = f(u) + f(v)$.

a. Chứng minh rằng với mọi $x \in R^+$ và mọi $\forall r \in Q$ ta có $f(x^r) = rf(x)$.

b. Nếu giả định thêm: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$, hãy xác định f(x) .

Giải:

a. Nếu f(x) đồng nhất 0 thì bài toán được giải xong.

Ta giả định f(x) không đồng nhất 0 .

Từ giả thiết, ta có với mọi x: $f(x) = f(1.x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0$.

Bằng qui nạp ta chứng minh được: $\forall x > 0$; $\forall n \in N \quad f(x^n) = nf(x)$

Hơn nữa với mọi $n \in N$, $0 = f(1) = f(x^n . x^{-n}) = f(xn) + f(x^{-n}) = nf(x) + f(x^{-n})$.

Nên ta cũng có với mọi $n \in Z$: $f(x^n) = nf(x)$.

Sau đó với mọi m nguyên và n nguyên dương :

$$mf(x) = f(x^m) = f\left[\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n\right] = nf\left(x^{\frac{m}{n}}\right) .$$

Như thế ta thu được: $\forall x > 0$; $\forall r \in Q$: $\quad f(x^r) = rf(x)$.

b. Lấy x_0 bất kỳ, với $x > 0$, theo giả thiết $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(\dfrac{x}{x_0}\right) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f\left(x_0 \frac{x}{x_0}\right) = \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + f\left(\frac{x}{x_0}\right)\right] =$$

$$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} f\left(\frac{x}{x_0}\right) = f(x_0) \Rightarrow \text{hàm số liên tục trên R.}$$

Sau đó, từ đẳng thức $f(x^r) = rf(x)$ đã chứng minh ta có:

$$f(2^r) = rf(2) = Ar \ ; \text{ với } A = f(2) .$$

Rồi vì $x > 0$ có thể được viết thành dạng: $x = 2^{\log_2 x}$.

Gọi (r_n) là dãy các số hữu tỷ có giới hạn $\log_2 x$ thế thì : $2^{r_n} \to x = 2^{\log_2 x}$.

Nên: $\lim\limits_{n \to \infty} f(2^{r_n}) = f(x)$. Ta lại có: $f(2^{r_n}) = Ar_n \to A\log_2 x$

$\Rightarrow f(x) = A\log_2 x$ với $x > 0$.

Vì $f(x)$ không đồng nhất 0 , nên $A \neq 0$.

Gọi $a = 2^{\frac{1}{A}}$. Thế là $a > 0$; $a \neq 1$ và $f(x) = \log_a x$

*** Ví dụ 5:** Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : R \to R$ thoả:

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(x.y) = f(x) . f(y) \end{cases}, \forall x, y \in R .$$

Giải:

Với $y = 0 \Rightarrow f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Lấy $y = 1$ cho $f(x) = f(x) . f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ hay $f(1) = 1$.

+ Nếu $f(1) \neq 1$: $f(x) = 0, \forall x \in R$.

+ Nếu $f(1) = 1$: ta có với mọi $x \in R$, $f(x + 1) = f(x) + 1$.

Bằng qui nạp, dễ dàng suy ra: $f(n) = n$ với mọi $n \in Z$.

Sau đó : $f(\frac{n+1}{n}) = f(n + 1).f(\frac{1}{n}) = (n + 1)f\frac{1}{n})$

$$= f(1 + \frac{1}{n}) = f(1) + f(\frac{1}{n}) = 1 + f(\frac{1}{n}) \Rightarrow nf(\frac{1}{n}) = 1 .$$

Từ đó : $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}, \forall n \neq 0$. Và, rồi với mọi $p \in Z$, $n \in N^*$:

$$f(\frac{p}{n}) = f(p).f(\frac{1}{n}) = p. \frac{1}{n} = \frac{p}{n} .$$

Như thế : $\forall x \in Q : f(x) = x$.

Sau cùng với tính liên tục ta được $\forall x \in R : f(x) = x$.

Vậy, có hai hàm số thoả điều kiện đề bài: $f(x) = 0$; $f(x) = x$. $\forall x \in R$.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số f(x) xác định trên N bởi :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \ ; \ f(1) = 3 \\ \forall n > 1 \quad f(n+1) = 3f(n) - 2f(n-1) \end{cases}$$

Chứng minh rằng $f(n) = 2^n + 1$.

2. Cho hàm số f(x) xác đinh trên N* bởi :

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ \forall n > 1 \quad f(n) = 3f(n-1) + 1 \end{cases}$$

Hãy tính tổng: $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$.

3. Cho hàm số f(x) xác đinh trên N* thoả mãn:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ \forall n > 1 \quad f(n) = f(n-1) + a^{n-1} \end{cases}$$

với a là số thực dương cho trước. Hãy tìm f(n) .

4. Tìm tất cả hàm số $f : Z^+ \to R$ thoả mãn đồng nhất thức

$$f(n+m) + f(n-m) = f(3n) \ ; \ n, m \in Z^+ \ ; \ n \geq m .$$

5. Cho hàm số $f : Z \to R$ thoả mãn điều kiện :

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{nếu } n > 100 \\ f(f(n+11)) & \text{nếu } n \leq 100 \end{cases} \text{, với } n \in Z .$$

Chứng minh rằng với mọi giá trị $n \leq 100$ ta có $f(n) = 91$.

*

* *

§5. PHƯƠNG PHÁP CHỌN GIÁ TRỊ ĐẶC BIỆT

> * Phát hiện một số giá trị đặc biệt làm cơ sở ban đầu cho phép ta tìm được hàm số.

*** Ví dụ 1:** Hàm số $f: R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức:

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y} \quad x, y \in R \ ; \ x + y \neq 0 .$$

Có tồn tại giá trị $x \in R$ sao cho $f(x) \neq 0$?

Giải:

Lấy $y = 1$, ta được : $f(x) = \dfrac{f(x) + f(1)}{x + 1}$ $(x \neq 1) \Rightarrow xf(x) = f(1)$.

Lấy $x = 0$ thì thu được $f(1) = 0 \Rightarrow \forall x \neq -1, 0: f(x) = 0.$

Hơn nữa thay vào hệ thức ban đầu $x = 2$; $y = 0$ thì thu được:

$$f(0) = \frac{f(2) + f(0)}{2} \Rightarrow f(0) = f(2) = 0 .$$

Sau cùng, thay $y = 0$; $x = -1$ thì được:

$$f(0) = -f(-1) - f(0) \Rightarrow f(-1) = -2f(0) = 0$$

Như vậy $f(x)$ là hàm số đồng nhất không.

*** Ví dụ 2:** Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức:

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y) \ ; \ x, y \in R .$$

Giải:

Trong hệ thức đã cho, lấy $x = y = 1$ thì được:

$$2f(1) = 2(f(1))^2 \Rightarrow f(1) = 0 \text{ hay } f(1) = 1.$$

Ta xét từng trường hợp:

a. Nếu $f(1) = 0$ thì lấy trong hệ thức $y = 1$, thì có $f(x) = 0$.

b. Nếu $f(1) = 1$, lại lấy $y = 1$ thì có:

$$f(x) + x = (x + 1)f(x) \Rightarrow x(f(x) - 1) = 0 .$$

Từ đó, với $x \neq 0$ ta có $f(x) = 1$.

Như vậy:

hoặc $f(x) = 0$, hoặc $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x \neq 0 \\ a & \text{với } x = 0 \end{cases}$ $a \in R$.

*** Ví dụ 3:** Chứng minh rằng mọi hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn một trong hai đẳng thức sau thì nó cũng thoả mãn đẳng thức còn lại:

$f(x + y) = f(x) + f(y)$; $x, y \in R$

$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$ $x, y \in R$

Giải:

Nếu $f(x)$ thoả mãn hệ thức thứ nhất, thì:

$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$ $x, y \in R$

$\Rightarrow$ $f(x)$ thoả hệ thức thứ hai.

Bây giờ cho $f(x)$ thoả mãn hệ thức thứ hai, đặt: $y = u + v + uv$, thì được:

$f(x + u + v + xu + xv + uv + xuv) = f(x) + f(u + v + uv) + f(xu + xv + xuv)$

$\Leftrightarrow f(x+ u+ v+ xu+ xv+ uv+ xuv)= f(x)+ f(u)+ f(v) + f(uv) + f(xu + xv + xuv)$ (1)

Hoán đổi vị trí của biến số x và u trong biểu thức (1)

$f(x+ u+ v + xu + xv + uv + xuv) = f(x)+ f(u) + f(v) + f(xv) + f(xu + uv + xuv)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $f(uv) + f(xu + xv + xuv) = f(xv) + f(xu + uv + xuv)$ (3)

Trong (3) lấy $x = 1$ thì được: $f(uv) + f(u + v + uv) = f(v) + f(u + 2uv)$

$\Leftrightarrow$ $f(uv) + f(u) + f(v) + f(uv) = f(v) + f(u + 2uv)$

$\Leftrightarrow$ $f(u) + 2f(uv) = f(u + 2uv)$ (4)

Trong (4) lấy $u = 0$ thì được: $f(0) = 3f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ (5)

Trong (4) lấy $v = -1$, thì được: $f(-u) = f(u) + 2f(-u) \Rightarrow f(-u) = -f(u)$ (6)

Trong (4) lấy $v = -\frac{1}{2}$ thì được: $f(0) = f(u) + 2f(-\frac{u}{2})$

Sử dụng (5) và (6) ta có: $f(u) = 2f(\frac{u}{2})$ hay $f(2u) = 2f(u)$ (7)

Từ (7) và (4) ta có: $f(u + 2uv) = f(u) + f(2uv)$,

trong này lại lấy: $2v = t$ thì có : $f(u + ut) = f(u) + f(ut)$ (8)

Như vậy ta thu được đồng nhất thức: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Vì thế, khi $x = 0$ thì đồng nhất thức này trở thành (5) ,

mà với $x \neq 0$ thì ta có từ đồng nhất thức (8)

$f(x + y) = f(x + x.\frac{y}{x}) = f(x) + f(x\frac{y}{x}) = f(x) + f(y)$

*** Ví dụ 4:** Cho hàm số f có tính chất :

(i) $\forall x, y \in R$; $\exists a$ $f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(y)f(a - x)$,

(ii) $f(0) = \frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng f là hàm số hằng.

Giải:

Cho $x = y = 0$ thì: $f(0) = f(0).f(a) + f(0)f(a) \Rightarrow f(a) = \frac{1}{2}$.

Cho $y = 0$ thì: $f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a - x) \Rightarrow f(x) = f(a - x)$, (1)

và: $f(x + y) = 2f(x)f(y)$ (2)

Lấy $y = a$ thì $f(x + a) = f(x)$;

lấy $x = - x$ trong (1) thì được : $f(x) = f(a + x) = f(x)$.

Lấy $y = - y$ trong hệ thức đề bài thì :

$f(x - y) = f(x)f(a + y) + f(-y)f(a - x) = 2f(x) f(y)$

$\Rightarrow f(x + y) = f(x - y)$ với mọi x , y .

Sau cùng, lấy $x = y = \frac{x}{2}$ thì thu được kết quả: $f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$.

*** Ví dụ 5:**

Cho $A = \{1 , 2 , . . . , m + n \}$, trong đó m và n là các số nguyên dương và cho hàm số $f : A \rightarrow A$ được xác định bởi các phương trình: $f(i) = i + 1$,

với : $i = 1 , 2 , . . . , m - 1 , m + 1 , . . . , m + n - 1$

$f(m) = 1$ và $f(m + n) = m + 1$.

a. Chứng minh rằng nếu m và n lẻ thì tồn tại một hàm số $g: A \rightarrow A$, sao cho: $g(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$.

b. Chứng minh rằng nếu m chẵn, thì $m = n$ nếu và chỉ nếu tồn tại một hàm số $g: A \rightarrow A$ sao cho: $g(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$.

Giải:

a. Cho $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$ và

$g(i) = p + i + 1$ với $i = 1 , 2 , . . . , p$;

$g(i) = q + i + 1$ với $i = m + 1 , m + 2 , . . . , m + q$;

$g(2p + 1) = p + 1$; $g(p + 1) = 1$;

$g(m + 2q + 1) = m + q + 1$; $g(m + q + 1) = m + 1$.

Dễ dàng kiểm tra được $g(g(a)) = f(a)$ với mọi $a \in A$.

b. Cho $m = n$ và: $g(i) = m + i$ với $i = 1 , 2 , . . . , m$;

$g(m + i) = i + 1$ với $i = 1 , 2 , . . . , m - 1$;

$g(2m) = 1$.

Đảo lại cho: $M = \{1, 2, . . . , m \}$.

Suy ra theo định nghĩa của f rằng các phần tử của M vẫn thuộc M qua liên tiếp nhiều f . Hơn nữa, ảnh lấy hết M. Điều tương tự cũng đúng với tập hợp $A \setminus M$. Các hàm số f là song ánh trong A và nếu tồn tại g thỏa điều kiện, thì g cũng là song ánh.

Ta sẽ chứng minh rằng: $g(M) \cap M = \varnothing$.

Suy ra từ mệnh đề đảo rằng tồn tại một $i \in M$ sao cho $g(i) \in M$.
Xét dãy i, $g(i)$, $g^2(i)$, . . . và dãy con i, $f(i)$, $f^2(i)$, . . .
Dễ thấy rằng: $g(M) = M$.
Ta suy ra rằng tồn tại một hoán vị $a_1, a_2, \ldots, a_m$ các phần tử của M sao cho:
$g(a_i) = a_{i+1}$ với $i = 1, 2, \ldots, m - 1$; $g(a_m) = a_1$ và $f(a_{2i-1}) = a_{2i+1}$ với $i = 1, 2, \ldots, s - 1$; $f(a_{s-1}) = a_1$, trong đó: $m = 2s$.
Điều này trái với tính chất của f đã nêu trên.
Vậy: $g(M) \cap M = \varnothing$.
Tương tự: $g(A \setminus M) = A \setminus M$, nếu: $g(i) \in A \setminus M$ với $i \in A \setminus M$. Sau cùng ta hãy để ý rằng khi bắt đầu từ một phần tử của M và lấy ảnh qua g thì vào $A \setminus M$ nhưng khi lấy ảnh qua g lần thứ hai thì trở lại M. Điều tương tự cũng đúng với tập hợp $A \setminus M$. Từ đó và vì g song ánh suy ra rằng M và $A \setminus M$ có cùng số phần tử, nghĩa là $n = m$.

*** Ví dụ 6:** Tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ thoả:
$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y)$ với mọi x, y.

Giải:

Ta muốn tìm tất cả các hàm số lấy giá trị thực và miền xác định thực thoả:
$f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y)$ (1) với mọi x, y thực.
Thay $y = 1$ vào (1) cho ta: $f(x)^2 = xf(x)f(1)$. (2)
Nếu $f(1) = 0$, thì $f(x) = 0$ với mọi x.
Điều này thoả (1), cho ta đó là một nghiệm.
Giả định, sau đó, rằng $f(1) = C \neq 0$.
Phương trình (2) suy ra rằng $f(0) = 0$.
Bây giờ gọi G là một tập hợp các điểm x sao cho: $f(x) \neq 0$.
Theo (2): $f(x) = xf(1)$ với mọi $x \in G$.
Như thế (1) có thể chỉ được thoả bởi các hàm số nghiệm đúng:

$$f(x) = \begin{cases} Cx & \text{nếu } x \in G \\ 0 & \text{nếu } x \notin G \end{cases} \qquad (3)$$

Ta phải xác định cấu trúc của G sao cho hàm số định bởi (3) thoả (1) với mọi số thực x, y. Dễ dàng kiểm chứng rằng nếu $x \neq y$ và cả x và y đều là các phần tử của G, thì hàm số định bởi (3) thoả (1) nếu và chỉ nếu $xy \in G$. Nếu cả x và y không phải là phần tử của G thì (1) được thoả. Do tính đối xứng, trường hợp duy nhất khác ta cần phải xét đến là: $x \in G$, $y \notin G$.
Trong trường hợp này, (1) dẫn đến rằng: $f(xy)f(x) = 0$,
chính điều này lại suy ra rằng: $f(xy) = 0$.
Như thế, nếu: $x \in G$, $y \notin G$, thì $xy \notin G$. (4)
Điều này cho ta các đặc trưng của G là:

a. Nếu $x \in G$, thì $1/x \in G$. Điều này đúng, vì nếu trái lại, (4) sẽ cho ta $1 \notin G$, đây là điều không thể xảy ra (nhắc lại rằng ta đã giả định $f(1) \neq 0$, nên $1 \in G$).
b. Nếu $x, y \in G$, thì $xy \in G$. Do (a) ở trên, $1/x \in G$, nên nếu $xy \notin G$, thì từ (4) ta được $y = (xy)(1/x) \notin G$, vô lý.
c. Nếu $x, y \in G$, thì $x/y \in G$. Điều này được suy từ (a) và (b) một cách dễ dàng.
Như vậy: G là một tập hợp chứa 1, không chứa 0, và khép kín đối với phép nhân và chia. Dễ dàng kiểm chứng rằng mọi tập hợp như thế sẽ thoả (a) ở trên.
(vì: $1 \in G$) và (4) : Nếu G khép kín dưới phép nhân và phép chia và $x \in G$, $y \notin G$, thế thì: $xy \notin G$, vì nếu ngược lại ta có: $y - (xy)/x \notin G$, vô lý .
Do đó, tính khép kín dưới phép nhân và phép chia đủ đặc trưng hoàn toàn G , và ta có thể có lời giải đầy đủ của bài toán :

$$f(x) = \begin{cases} Cx & \text{nếu } x \in G \\ 0 & \text{nếu } x \notin G \end{cases}$$

Trong đó: C là một số thực cố định bất kỳ, và G là một tập hợp con của R khép kín dưới phép nhân và phép chia (nghĩa là nhóm con các số thực khác zero dưới phép nhân). Lưu ý rằng $C = 0$ là nghiệm "tầm thường" đã rút ra được từ trên.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên R thoả mãn:
$\forall x, y \in R \quad f(xy) = f(x)f(y) + f(x) + f(y) - f(x+y)$.
Chứng minh rằng $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = x$.
2. Cho hàm số f xác định với mọi $x \in Q$ và thoả:
(i) $\forall x, y \in Q \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$,
(ii) $f(2000) = 200100$. Tính: $f\left(\dfrac{1998}{1999}\right)$
3. Hãy tìm hàm số f, biết: $f(xy) + f(x-y) + f(x+y+1) = xy + 2x + 1$
4. Cho hàm số $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$.
Chứng minh rằng hai mệnh đề sau tương đương:
(i) $\forall x, y > 0 \quad f(xf(y)) = yf(x)$,
(ii) $\begin{cases} \forall x, y > 0 & f(xy) = f(x)f(y) \\ \forall x > 0 & f(f(x)) = x \end{cases}$
5. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ có tính chất: $\forall x, y \in R$
$xf(y) - yf(x) = (x - y)f(x)f(y)$.

*
* *

§6. PHƯƠNG PHÁP HÀM LIÊN TỤC

* Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ mọi dãy (r_n) có giới hạn x_0 thì dãy tương ứng $(f(r_n))$ có giới hạn $f(x_0)$

$f\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$, với $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$.

$f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(x) \neq 0\ \forall x\in[a,b]$ thì $f(x)>0$ hoặc $f(x)<0\ \forall x\in[a,b]$.

$f(x)$ liên tục và đơn ánh trên $[a,b]$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $[a,b]$.

*** Ví dụ 1:**

Tìm hàm số liên tục $f(x)$ thoả mãn: $f(x^2).f(x) = 1$ với mọi: $x \in R$

Giải:

Từ giả thiết, ta có : $f(x) \neq 0, \forall x \in R$; $f(0) = \pm 1$ và $f(1) = \pm 1$.

Ta lại có: $f(x^2)f(x) = 1 = f(x^2)f(-x)$, $\forall x \in R \Rightarrow f(-x) = f(x)$, $\forall x \in R$

Do đó ta chỉ cần xét trên R^+.

★ Xét $0 \le x < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{f(x^2)} = f(x^4) = f(x^{4^4}) = \dots = \lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(0) = \pm 1.$$

★ Tương tự với $x \ge 1$:

$$f(x) = \frac{1}{f\left(x^{\frac{1}{2}}\right)} = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \dots = \lim_{n\to\infty} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = f(1) = \pm 1$$

Vậy : $\left[\begin{array}{l} f(x) = 1\ \forall x \\ f(x) = -1\ \forall x \end{array}\right.$

*** Ví dụ 2:**

Cho $\alpha \in R$, $\alpha \neq \pm 1$. Tìm tất cả hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R^+ thoả mãn điều kiện: $f(x^\alpha) = f(x)$ với mọi $x \in R^+$.

Giải:

★ Nếu $|\alpha| < 1$ thì theo giả thiết ta có:

$$f(x) = f(x^{\alpha}) = \ldots = f(x^{\alpha^n}), \quad \forall x \in 3^+ ; \forall n \in \mathbf{N}.$$

Suy ra: $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x^{\alpha^n}) = f(1), \quad \forall x \in \mathbf{R}^+$.

★ Nếu $|\alpha| > 1$, ta cũng thu được :

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{\alpha}}) = \ldots = f(x^{(\frac{1}{\alpha})^n}), \ \forall x \in R^+ ; \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Suy ra: $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x^{(\frac{1}{\alpha})^n}) = f(1) \quad \forall x \in \mathbf{R}^+$.

Vậy: $f(x) = c \in \mathbf{R}$ tuỳ ý.

*** Ví dụ 3:**

Tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R và thoả mãn điều kiện:

(i). $f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$,

(ii). $f(0) = 1$, $\exists x_0 \in \mathbf{R} : |f(x_0)| < 1$.

Giải:

Vì: $f(0) = 1$ và $f(x)$ liên tục trên R.

Nên : $\exists \varepsilon > 0$ sao cho $f(x) > 0, \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (1)

Khi đó theo (1) với $n_0 \in N$ đủ lớn thì : $f\left(\dfrac{x_0}{2^{n_0}}\right) > 0$.

Để ý rằng: $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) < 1$, $\forall n \in N$.

Thật vậy, nếu: $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) \geq 1$ với n nguyên dương nào đó, thì theo đề bài ta có :

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right]^2 - 1 \geq 1,$$

$$f\left(\frac{x_0}{2^{n-2}}\right) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2^{n-1}}\right)\right]^2 - 1 \geq 1,$$

$$f(x_0) = 2\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right]^2 - 1 \geq 1,$$

trái với giả thiết: $|f(x_0)| < 1$.

Vậy tồn tại $x_1 \neq 0$ sao cho: $0 < f(x_1) < 1$ và $f(x) > 0$, $\forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$

(chỉ cần chọn $x_1 = \dfrac{x_0}{2^{n_0}}$). Đặt : $f(x_1) = \cos\alpha$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Từ giả thiết suy ra: $f(2x_1) = 2[f(x_1)]^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$.

Giả định: $f(kx_1) = \cos k\alpha$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n \in N^+$.

Khi đó: $f((n+1)x_1) = f(nx_1 + x_1) = 2\, f(nx_1)\, f(x_1) - f((n-1)x_1)$

$= 2\cos n\alpha \cos\alpha - \cos(n-1)\alpha = \cos(n+1)\alpha$.

Từ đó suy ra: $f(mx_1) = \cos m\alpha$, $\forall m \in N^+$.

Mặt khác, đổi vai trò của x và y trong hệ thức đề bài, ta có:

$f(x - y) = f(y - x)$, $\forall x, y \in R$.

Do đó f(x) là hàm số chẵn trên R và như vậy: $f(mx_1) = \cos m\alpha$, $\forall m \in Z$ (2)

Cho $x = y = \dfrac{x_1}{2}$,

ta được: $\left[f\left(\dfrac{x_1}{2}\right)\right]^2 = \dfrac{1 + f(x_1)}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

Do vậy: $f\left(\dfrac{x_1}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Giả định: $f\left(\dfrac{x_1}{2^k}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2^k}$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n \in N^*$.

Khi đó cho: $x = y = \dfrac{x_1}{2^{k+1}}$, và ta thu được:

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} + f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = \frac{1 + \cos\dfrac{\alpha}{2^n}}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}} .$$

Như thế : $f\left(\dfrac{x_1}{2^n}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2^n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ (3)

(2) và (3) cho: $f\left(\dfrac{mx_1}{2^n}\right) = \cos\dfrac{m\alpha}{2^n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^+$, $\forall m \in \mathbf{Z}$ (4)

Vì f(x) và cosx là các hàm số liên tục trên **R**

Nên: (4) $\Leftrightarrow$ $f(x_1 t) = \cos\alpha t \Leftrightarrow f(x) = \cos ax$, với $a = \dfrac{\alpha}{x_1}$, $\forall x$

Thử lại ta thấy $f(x) = \cos ax$ $(a \neq 0)$ thoả mãn các điều kiện đã nêu của bài toán.

Vậy: $f(x) = \cos ax$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

*** Ví dụ 4:** Tìm tất cả hàm số f(x) xác định trong tập hợp các số thực và sao cho:

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), \text{ với mọi số thực x.}$$

Giải :

Cho f(x) là một hàm số thoả mãn điều kiện của bài toán. Hiển nhiên f(x) là một hàm số chẵn. Cho: $x_0 \geq 0$. Có hai trường hợp:

(I). $0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$. Xét dãy : (1) $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$

định bởi các đẳng thức: $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4}$.

Dễ thấy bằng qui nạp rằng $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ với mọi n.

Hơn nữa: $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n + \frac{1}{4} = (x_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0$,

dẫn đến rằng (1) là một dãy tăng đơn điệu.
Vì nó bị chặn, nên là một dãy hội tụ.

Gọi: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Thế thì $\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4} = 0$, cho $\alpha = \frac{1}{2}$.

Mặt khác, vì f(x) là một hàm số liên tục, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\frac{1}{2})$.

Nhưng : $f(x_{n+1}) = f(x_n^2 + \frac{1}{4}) = f(x_n)$ với mọi n.

Vậy $f(x_0) = f(x_1) = \ldots$ điều đó có nghĩa là $f(x_0)$

$$= f(\frac{1}{2}) \text{ với mọi } x_0 \in [0, \frac{1}{2}].$$

(II). $x_0 > \frac{1}{2}$. Xét dãy sau : (2) $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$

định bởi: $x_{n+1} = \sqrt{x_n - \frac{1}{4}}$.

Như trường hợp trên, ta chứng tỏ rằng (2) là dãy hội tụ

và: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$. Lại nữa: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\frac{1}{2})$

và vì : $f(x_{n+1}) = f(x_{n+1}^2 + \frac{1}{4}) = f(x_n)$

Với mọi n ta có: $f(x_0) = f(\frac{1}{2})$.

Vì thế $f(x)$ là một hàm hằng trong khoảng $[0, +\infty)$, và vì nó là hàm chẵn, nên nó cũng là hàm hằng với mọi x.
Ngược lại, mọi hàm hằng thoả điều kiện của bài toán.

*** Ví dụ 5:**
Cho a là số thực mà $0 < a < 1$ và hàm số f liên tục trên $[0, 1]$ thoả $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$, với mọi $x, y \in [0, 1]$ và $x \le y$.

Hãy xác định $f(\frac{1}{7})$.

Giải:

Trước hết để ý rằng chỉ có một f thoả mãn điều kiện đề bài.

Thật vậy, các giá trị của f được cố định tại $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$

nghĩa là tại mọi $\frac{k}{2^n}$. Vì f liên tục, nên nó phải là duy nhất trên cả $[0, 1]$.

Cũng thế $f(x) = f(y)$ chỉ với $x = y$ vì nếu $f(x) = f(y)$ với $x < y$ sẽ dẫn đến $f(z) = f(x)$ với mọi $z \in [x, y]$ và rốt cục là với mọi $z \in [0, 1]$.

Gọi : $g(x) = \dfrac{f\left(\frac{1}{8} + \frac{x}{8}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} \equiv Af(Bx + C) + D$.

Ta thấy rằng $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ và :

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = Af\left(B\frac{x+y}{2} + C\right) + D = Af\left(\frac{Bx+C}{2} + \frac{By+C}{2}\right) + D$$

$= (1-a)Af(Bx + C) + (1-a)D + aAf(By + C) + aD = (1-a)g(x) + ag(y)$.

Điều đó có nghĩa là $g = f$.

Cho nên: $f(\frac{1}{7}) = g(\frac{1}{7}) = \dfrac{f\left(\frac{1}{7}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{\frac{1}{4} - f\left(\frac{1}{8}\right)}$; Hay: $f(\frac{1}{7}) = \dfrac{f\left(\frac{1}{8}\right)}{1 - \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{8}\right)}$.

Để ý rằng: $f(\frac{1}{2}) = a$, $f(\frac{1}{4}) = a^2$, $f(\frac{1}{8}) = a^3$. Nên: $f(\frac{1}{7}) = \dfrac{a^3}{1 - a^2 + a^3}$.

*** Ví dụ 6:**

Cho f là hàm số từ R vào R sao cho: $f(1) = 1$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$ với mọi a, b và: $f(x)f(\frac{1}{x}) = 1$ với mọi $x \neq 0$. Chứng minh rằng: $f(x) = x$, $\forall x \in R$.

Giải:

Dễ thấy rằng $f(0) = 0$ và $f(-x) = -f(x)$ với mọi x.

Bằng qui nạp theo n có $f(nx) = nf(x)$ với mọi n nguyên dương và mọi x.

Nên $f(n) = nf(1) = n$ với mọi nguyên.

$\Rightarrow f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n}$ với mọi n nguyên $\neq 0$.

Từ đó: $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}$ với mọi số hữu tỉ $\frac{m}{n}$.

Rõ ràng: $f(x) \neq 0$ nếu $x \neq 0$. Nên: $f(a) = f(b)$ cho $f(a - b) = 0$, nên $a = b$.

Do đó nếu: $a^2 \neq a$ thì: $\frac{1}{f(a) - f(a^2)} = \frac{1}{f(a(1-a))} = f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right)$

$$= \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{1 - f(a)} = \frac{1}{f(a) - (f(a))^2}.$$

Vậy $f(a^2) = f(a)^2$ với mọi $a \in R$.

Nếu $a < b$ thì $b - a = x^2$ với $x \in R$.

Do đó $f(b) - f(a) = f(x^2) = f(x)^2 \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Sau cùng, với $x \in R$ thì tồn tại các dãy (a_n), (b_n) các số hữu tỷ sao cho x là số duy nhất thoả $a_n < x < b_n$ với mọi n nguyên dương.

Vậy là: $\forall n \in N^*$ $a_n = f(a_n) < f(x) < f(b_n) = b_n \Rightarrow f(x) = x$ $\forall x \in R$.

*** Ví dụ 7:**

Tìm hàm số liên tục $f : R \to R$ thoả: $\forall x, y \in R$ $f(xy) = f(x)f(y)$

Giải:

- Nếu f là hàm hằng thì $f(x) = 0$ hay $f(x) = 1$.
- Nếu f không phải là hàm hằng.

  $f(x) = f(x).f(1)$ $\forall x \Rightarrow f(1) = 1$;

  $f(0) = f(x).f(0)$ $\forall x \Rightarrow f(0) = 0$;

  $f(1) = (f(-1))^2 = 1$.

- Trường hợp 1 : $f(-1) = 1 \Rightarrow f(-x) = f(x)$, $\forall x$.

Ta có, với: $x > 0$, nếu $f(x) < 0$, $f(1) > 0$, do f liên tục,

nên có: $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \in (x, 1) \Rightarrow f(\varepsilon) = 0$.

Từ đó: $f(1) = f(\varepsilon).f(\frac{1}{\varepsilon}) = 0$: vô lý . Do đó: $f(x) > 0$ với mọi $x > 0$

$\Rightarrow f(x) > 0$ với mọi $x \neq 0$.

Do f không hằng, nên có: $t > 0$, $f(t) \neq 1$, $f(t) > 0$. $f(t^n) = (f(t))^n$, $\forall n \in N$.

Rồi: $f(t^p) = (f(t^{\frac{p}{q}}))q = (f(t))^p \Rightarrow f(t^{\frac{p}{q}}) = (f(t))^{\frac{p}{q}}$.

Như thế: $\forall s \in Q$, $f(t^s) = (f(t))^s$.

Bây giờ, với $m > 0$, thế thì tồn tại một dãy các số hữu tỷ (s_n)

Mà: $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \log_t m$.

Ta có: $f(m) = \lim\limits_{n \to \infty} f(t^{s_n}) = \lim\limits_{n \to \infty} (f(t))^{s_n} = (f(t))^{\log_t m} = m^{\log_t f(t)} = m^\alpha$.

Do đó: $f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{nếu } x > 0; \\ 0 & \text{nếu } x = 0 ; \\ |x|^\alpha & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Thử lại, ta thấy hàm số trên thoả điều kiện đề bài.

- Trường hợp 2 : $f(-1) = -1 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$, $\forall x \neq 0$.

Chứng minh như trên ta có: $f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{nếu } x > 0; \\ 0 & \text{nếu } x = 0 ; \\ -|x|^\alpha & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của bài toán là:

- $f(x) = 0$ hay $f(x) = 1$ $\forall x$;
- $f(x) = |x|^\alpha$ $\forall x \neq 0$ và $f(0) = 0$;
- $f(x) = (\text{sgn}x).|x|^\alpha$ $\forall x \neq 0$ và $f(0) = 0$.

*** Ví dụ 8:**

Tìm tất cả các hàm số thoả mãn đồng thời các điều kiện:

a. $f(x)$ xác định và liên tục trên R .

b. Với mỗi bộ số gồm: $2n + 1$ giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$

mà: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+1}$ thì ta luôn có:

$f(x_{2n+3}) \geq \frac{1}{2n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) + f(x_{n+2}) + f(x_{n+3}) + \ldots + f(x_{2n+1}))$;

c. $f(x) > 0$ với mọi $x \in Z$ và $f(2002) = \log_{2003}2002$.

Giải:

Cho $u < v$ là hai số thực bất kỳ, xét bộ các số: $u = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+1} = v$.
Cho $x_n \to u$ và $x_{n+1} \to v$, vì f là hàm số liên tục nên chuyển qua giới hạn, ta có: $f(v) \geq \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) \Rightarrow f(v) \geq f(u)$.

Nhưng, nếu cho: $x_{n+1} \to v$ và $x_{n+2} \to v$

thì được: $f(u) \geq \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.

Như thế $f(u) = f(v) \Rightarrow f(x)$ là hàm hằng. Do điều kiện (c), thì $f(x) = \log_{2003}2002$.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm hàm số liên tục $f(x)$ thoả mãn: $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$.

2. Tìm hàm số liên tục $f(x)$ thoả mãn: $f(x^2) + f(x) = x^2 + x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

3. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi số thực x và thoả mãn điều kiện: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y, và ngoài ra biết rằng tồn tại một số M sao cho: $f(x) \leq M$ khi $0 \leq x \leq 1$. Chứng minh rằng: $f(x) = Cx$, với C là hằng số.

4. Tìm tất cả hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R thoả mãn điều kiện:

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{với mọi} \quad x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

5. Tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R và thoả mãn điều kiện:

a) $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$;

b) $f(0) = 1$, $\exists x_0 \in R: f(x_0) > 1$.

6. Tìm các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên R và thoả mãn điều kiện :

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

7. Tìm các cặp hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên **R** và thoả mãn các điều kiện, $\forall x, y \in R$

a) $f(x = y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$,

b) $g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$.

8. Có tồn tại chăng hàm số liên tục $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thoả các điều kiện:

a) $f(1995) < f(1996)$;

b) $f(f(x)) = 1995^{-x}$, $\forall x \in R$.

*

* *

§7. PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM

> * Tất nhiên ở đây không xét đến phương trình vi phân.
> Các bài toán ở đây mang tính sơ cấp hơn.

*** Ví dụ 1:**

Tìm hàm số $f(x)$ khả vi thoả mãn với mọi $x \neq 0$

$3x^2 f'(x) + x^3 f''(x) = -1$; $f(1) = 1$; $f(-2) = -1$

Giải:

Vế trái chính là: $[x^3 f'(x)]'$; cho nên, từ giả thiết:

$$[x^3 f'(x)]' = -1 \Rightarrow x^3 f'(x) = -x + C_1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{C_1}{x^3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{C_1}{2x^2} + C_2 .$$

Cho $x = 1$; $x = -1$, thì được: $\begin{cases} C_2 - \dfrac{C_1}{2} = 0 \\ C_2 - \dfrac{C_1}{8} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{-4}{3} \text{ và } C_2 = \frac{-2}{3} . \text{ Như vậy: } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{2}{3} .$$

*** Ví dụ 2:** Tìm tất cả các hàm số khả vi $f : R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} , \quad x, y \in R , \ x \neq y .$$

Giải:

Lần lượt lấy đạo hàm hai vế của biểu thức đã cho theo x và y ta có:

$$\frac{1}{2} f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f'(x)}{2} \quad \forall x \in R$$

$$\frac{1}{2} f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f'(y)}{2} \quad \forall y \in R$$

Suy ra: $f'(x) = f'(y) \ \forall x, y \in R \Rightarrow f'(x) = C$ (hằng số).

Như vậy: $f(x) = ax + b$.

*** Ví dụ 3 :** Tìm hàm số $f: R \to R$ xác định và khả đạo thoả mãn điều kiện:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in R$$

Giải :

Để ý rằng $f(x) = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Ta xét trường hợp $f(x) \neq 0$. Khi đó tồn tại $x_0 \in R$ để $f(x_0) \neq 0$

Theo giả thiết : $f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = f(x)f(x_0 - x) \neq 0$, $\forall x \in R$.

Suy ra: $f(x) \neq 0$, $\forall x \in R$.

Mặt khác, từ giả thiết ta có: $f(x) = (f(\frac{x}{2}))^2 \geq 0$, $\forall x \in R$.

Lần lượt lấy đạo hàm hai vế của hệ thức đề bài thì được:

$f'(x+y) = f'(x)f(y)$, $\forall x, y \in R$.

$f'(x+y) = f(x)f'(y)$, $\forall x, y \in R$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{f'(y)}{f(y)}$, $\forall x, y \in R \Leftrightarrow (\ln f(x))' = a \Leftrightarrow f(x) = e^{ax+b}$.

Vậy: $f(x) = 0$ hay $f(x) = e^{ax+b}$.

*** Ví dụ 4:** Hàm số $f(x)$ xác định và khả vi trên R và thoả mãn: $\forall x, y \in R$

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2) .$$

Hãy xác định hàm số ấy.

Giải:

Từ đề bài suy ra , $\forall x \neq y$: $\dfrac{f(x+y)}{x+y} - \dfrac{f(x-y)}{x-y} = 4xy$ (1)

Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, thì : (1) $\Leftrightarrow$ $g(x+y) - g(x-y) = 4xy$. (2)

Sau đó, đặt: $x = a + \frac{h}{2}$, $y = \frac{h}{2}$, thì (2) trở thành:

$g(a+h) - g(a) = 4(a + \frac{h}{2})\frac{h}{2} \Rightarrow \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} = 2a + h$.

Cho $h \to 0$, thì được $g'(a) = 2a$.

Như thế: $g(x) = x^2 + C$, với C là hằng số. Vậy: $f(x) = x^3 + Cx$.

Ví dụ 5:

Tìm các hàm số $f(x) \geq 0$ xác định và khả vi trên R^+ và thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\sqrt{\frac{x^n + y^n}{2}}\right) = \sqrt{\frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}} \quad \forall x, y \in R .$$

Giải:

Đạo hàm hai vế đẳng thức đã cho theo x , rồi theo y :

$$f'\left(\sqrt{\frac{x^n+y^n}{2}}\right)\frac{nx^{n-1}}{4\sqrt{\frac{x^n+y^n}{2}}} = \frac{f(x)f'(x)}{2\sqrt{\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2}}},$$

và : $$f'\left(\sqrt{\frac{x^n+y^n}{2}}\right)\frac{ny^{n-1}}{4\sqrt{\frac{x^n+y^n}{2}}} = \frac{f(y)f'(y)}{2\sqrt{\frac{f^2(x)+f^2(y)}{2}}}$$

Suy ra : $\dfrac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = \dfrac{f(x)f'(y)}{y^{n-1}}$, $\forall x, y > 0$.

Từ đó: $\dfrac{f(x)f'(x)}{x^{n-1}} = C$ (hằng số) $\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{2}{n}\sqrt{ax^n}$. Thử lại, nghiệm đúng.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm hàm số f(x) khả vi thoả mãn:

(i) $f(x)f'(x) = \dfrac{1-2x}{f(x)}$ với mọi x.

(ii) $f(0) = 1$.

2. Tìm tất cả các hàm số khả vi vô hạn lần $f : R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad \text{với } x, y \in R.$$

3. Tìm tất cả các hàm số khả vi $f : R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức:

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad x, y \in R,\ x \neq y.$$

4. Tìm các hàm số f(x) xác định và khả vi trên R và thoả mãn điều kiện:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in R.$$

5. Tìm các hàm số f(x) xác định và khả vi trên R^+ và thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\sqrt{xy}\right) = \sqrt{f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in R.$$

* * *

§8. PHƯƠNG PHÁP QUY VỀ HÀM CƠ BẢN

Nếu biết được một số hàm cơ bản, thì khi có thể dẫn bài toán về một tình huống đơn giản hơn nhiều, chẳng hạn:
* Hàm liên tục thoả $f(x + y) = f(x) + f(y)$ là hàm số có dạng: $f(x) = Cx$. (xem §4 ví dụ 3)
* Hàm liên tục thoả $f(x + y) = f(x) . f(y)$ là hàm số có dạng $f(x) = a^x$. (xem §7 ví dụ 3)
* Hàm liên tục thoả $f(xy) = f(x) + f(y)$ là hàm số có dạng: $f(x) = \log_a x$. (xem § 4 ví dụ 4)
* Hàm liên tục thoả $f(xy) = f(x)f(y)$ là hàm số có dạng $f(x) = x^\alpha$. (xem § x ví dụ y)
. . .

*** Ví dụ 1:** Xác định hàm số $f(x)$ liên tục trên R thoả mãn điều kiện:

(i) $f(x - y) = \dfrac{f(x)}{f(y)} \quad \forall x, y \in R$

(ii) $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in R$.

Giải:

Đặt $x - y = z$ thì $x = z + y$ và hệ thức đề bài

$\Leftrightarrow \; f(z) = \dfrac{f(z + y)}{f(y)} \quad \forall z, y \in R$.

Từ đó: $\begin{cases} f(z + y) = f(z)f(y) \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \quad \forall x, y, z \in R$.

Theo kết quả bài toán §7. 3 ta có, vì $f(x) \neq 0$, $f(x) = a^x$, $a > 0$.

*** Ví dụ 2:** Xác định hàm số $f(x)$ liên tục trên R^+ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad \forall x, y \in R^+ .$$

Giải:

Đặt: $\dfrac{x}{y} = t \Rightarrow x = ty$ và hệ thức đề bài trở thành:

$f(t) = f(ty) - f(y) \Leftrightarrow f(ty) = f(t) + f(y)$; $\forall x, y \in R$.

Theo §4.4 thì ta được $f(x) = b\ln x$, $\forall x \in R^+$, $\forall b \in R$.

*** Ví dụ 5:** Cho hàm số $f: R \longrightarrow R$, và số thực $a > 0, a \neq 1$.
Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương:

(i) $\forall x \in R,\ f(x) = f(ax)$;

$$\text{(ii) } f(x) = \begin{cases} g(\{\log_a x\}) & \text{nếu } x > 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \\ h(\{\log_a(-x)\}) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

trong đó m là hằng số và $g, h: [0, 1) \longrightarrow R$ là hàm số bất kỳ.

Giải:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Trước hết để ý rằng, nếu $f(0) = m$ bất kỳ, đều thoả mãn.
Bây giờ, từ giả thiết, ta có:
$f(a^t) = f(a^{t+1})$ và $f(-a^t) = f(-a^{t+1})$, $\forall t \in R$.
Sau đó, $\forall x \neq 0$, tồn tại t để $x = \pm a^t$. Nên $\forall t \in R$
$f(a^t) = f(a^{t+1})$; $f(-a^t) = f(-a^{t+1})$.

Gọi $p(x) = f(a^x)$; $q(x) = f(-a^x)$, thì: $f(x) = \begin{cases} p(\log_a x) & \text{nếu } x > 0 \\ q(\log_a(-x)) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Để ý rằng $p, q: R \to R$ là các hàm số tuần hoàn có chu kỳ 1.
Nên tồn tại $g, h: [0, 1) \to R$ sao cho:
$\forall x \in R$, $p(x) = g(\{x\})$; $q(x) = h(\{x\})$.

$$\text{Vậy: } f(x) = \begin{cases} g(\{\log_a x\}) & \text{nếu } x > 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \\ h(\{\log_a(-x)\}) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Hiển nhiên có $f(x) = f(ax)$.

*** Ví dụ 6:** Tìm hàm số $f: R \longrightarrow R$, thoả mãn điều kiện:

$$\forall x \in R,\ f(x) = 2f(2x) + 1.$$

Giải:

Từ giả thiết, ta có, $\forall x \in R$, $f(x) + 1 = 2[f(2x) + 1]$.
Với $x = 0$ thì $f(0) = -1$.
Với $x \neq 0$: $2^{[\log_2 |x|]}(f(x) + 1) = 2^{[\log_2 |2x|]}(f(2x) + 1)$.
Đặt: $g(x) = 2^{[\log_2 |x|]}(f(x) + 1)$, với $x \neq 0$.
Thì có hai hàm số $h, k: [0, 1) \to R$ để :

$$g(x) = \begin{cases} h(\{\log_2 x\}) & \text{nếu } x > 0 \\ k(\{\log_2(-x)\}) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy}: f(x) = \begin{cases} 2^{-[\log_2|x|]} h(\{\log_2 x\}) - 1 & \text{nếu } x > 0 \\ -1 & \text{nếu } x = 0 \\ 2^{-[\log_2|x|]} k(\{\log_2(-x)\}) - 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

*** Ví dụ 7:** Tìm hàm số $f: R \to R$, thoả mãn điều kiện:

$\forall x \in R$, $f(3x) = -f(x)$.

Giải:

Nếu: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Nếu: $x \neq 0$, ta có: $(-1)^{[\log_3|3x|]} f(3x) = (-1)^{[\log_3|x|]}$

Nên, đặt $g(x) = (-1)^{[\log_3|x|]} f(x)$.

Thì: $\forall x \neq 0$, $g(3x) = g(x)$.

$$\text{Do đó: } f(x) = \begin{cases} (-1)^{[\log_3|x|]} h(\{\log_3 x\}) & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ (-1)^{[\log_3|x|]} k(\{\log_3 |x|\}) & \text{nếu } x > 0 \end{cases},$$

Trong đó: h, k : $[0, 1) \to R$ bất kỳ.

*** Ví dụ 8:** Cho hàm số $f: R \to R$ và số thức $a > 0$, $a \neq 1$.

Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương:

(i). $x \in R$, $f(x) = f(-ax)$;

(ii). $f(x) = \begin{vmatrix} f(a^2x) & \text{nếu } x > 0 \\ f(-a^2x) & \text{nếu } x < 0 \end{vmatrix}$;

(iii). $f(x) = \begin{vmatrix} g\left(\left\{\frac{1}{2}\log_a x\right\}\right) & \text{nếu } x > 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \\ g\left(\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a|x|\right\}\right) & \text{nếu } x < 0 \end{vmatrix}$,

trong đó $g: (0, 1) \to R$ là hàm số và m là hằng số bất kỳ.

Giải:

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Hiển nhiên.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\forall x \in R$, $f((a^2)^x) = f(a^2.(a^2)^x) = f((a^2)^{x+1})$.

Đặt: $g(x) = f(a^{2x}) \Leftrightarrow f(x) = g(\log_{a^2} x) = g(\frac{1}{2}\log_a x)$.

Thế thì: Với $x > 0$: $f(x) = f(a^2x) \Rightarrow g(x + 1) = g(x)$.

Do đó có hàm số $h : [0 , 1) \rightarrow R$ sao cho $g(x) = h(\{x\})$

$\Rightarrow f(x) = h(\{\frac{1}{2}\log_a x\})$. Với $x < 0$: $f(x) = f(-ax)$

$\Rightarrow f(x) = h(\{\frac{1}{2}\log_a(-ax)\}) = h(\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a|x|)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Hiển nhiên.

*** Ví dụ 9:** Tìm hàm số $f : R \longrightarrow R$, thoả mãn điều kiện:

$\forall x \in R$, $f(2 - 3x) = f(x)$.

Giải:

Gọi: $f(x + a) = f(2 - 3(x + a)) = f(-3x + a + 2 - 4a)$

$\Rightarrow 2 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Thế thì: $\forall x \in R$, $f(x + \frac{1}{2}) = f(-3x + \frac{1}{2})$.

Đặt: $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow f(x) = g(x - \frac{1}{2})$,

và ta được: $\forall x \in R$ $g(x) = g(-3x)$.

Do đó có hàm số $h : [0 , 1) \rightarrow R$ và hằng số m sao cho:

$$g(x) = \begin{cases} h\left(\left\{\frac{1}{2}\log_3 x\right\}\right) \text{ nếu } x > 0 ; \\ m \quad \text{nếu } x = 0 \\ h\left(\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_3 |x|\right\}\right) \text{ nếu } x < 0 \end{cases} .$$

$$\text{Vậy: } f(x) = \begin{cases} h\left(\left\{\log_9\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\}\right) \text{ nếu } x > \frac{1}{2} ; \\ m \quad \text{nếu } x = \frac{1}{2} \\ h\left(\left\{\frac{1}{2} + \log_9\left|x - \frac{1}{2}\right|\right\}\right) \text{ nếu } x > \frac{1}{2} \end{cases} .$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tìm hàm số f(x) xác định và liên tục trên R^+ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\sqrt{xy}\right) = \sqrt{\frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}} \quad \forall x, y \in R^+ .$$

2. Xác định tất cả các hàm số f: $R \setminus \{-1\} \to R$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{4x-2}{x+1}\right) = 2f(x) , \forall x \neq -1 .$$

3. Tìm hàm số f(x) xác định và liên tục trong $R \setminus \{0\}$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}\right) = \sqrt{\frac{[f(x)]^2 + [f(y)]^2}{2}} , \quad \forall x, y \ ; \ x + y \neq 0.$$

4. Tìm hàm số f(x) xác định và liên tục trên **R** thoả mãn điều kiện:

$$xf(y) + yf(x) = f(x).f(y)(x + y) \quad , \quad \forall x, y \ ; \ x + y \neq 0.$$

5. Tìm hàm số f(x) xác định và liên tục trên R thoả điều kiện:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in R .$$

6. Tìm hàm số f(x) xác định và liên tục trong $R \setminus \{0\}$ và thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}\right) = \frac{2}{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}} \quad ; \ \forall x, y ; \ x + y \neq 0.$$

7. Tìm hàm số $f : R \to R$,thoả mãn điều kiện:

$$\forall x \in R , \quad f(2 - 2x) = - f(x + 1) .$$

*

* *

§9. HÀM SỐ CHẴN - LẺ

* $f(x)$ là hàm số chẵn trên (a, b)

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in (a, b) \quad \begin{cases} -x \in (a,b) \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

* $f(x)$ là hàm số lẻ trên (a, b)

$\Leftrightarrow \quad \forall x \in (a, b) \quad \begin{cases} -x \in (a,b) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

*** Ví dụ 1:** Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ thoả mãn với mọi x, y

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \\ g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y) \end{cases},$$

trong đó $f(x)$ là hàm số lẻ, $f(0) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với $x \neq 0$. Chứng minh rằng:

a. $g(x)$ là một hàm chẵn và $g(0) = 1$.

b. $f^2(x) + g^2(x) = 1$;

$f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x)$;

$g(3x) = 4g^3(x) - 3g(x)$ với mọi x.

Giải:

a. Với $x \neq 0$ bất kỳ, lấy $y = 0$ trong hệ thức thứ nhất

$f(x) = f(x + 0)) = f(x)g(0) + f(0)g(x) = f(x)g(0)$

vì $f(x) \neq 0$ nên ta có $g(0) = 1$. Mặt khác, với $x \neq 0$

$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x)g(-x) + f(-x)g(x)$

$= f(x)g(-x) - f(x)g(x) \Rightarrow g(x) = g(-x)$

nên $g(x)$ là hàm số chẵn.

b. Từ hệ thức thứ hai, ta có với mọi x

$0 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x)g(-x) - f(x)f(-x) = g^2(x) + f^2(x)$

và : $f(2x) = f(x + x) = 2f(x)g(x)$

$g(2x) = g^2(x) - f^2(x)$.

Từ dó suy ra điều phải chứng minh .

*** Ví dụ 2:** Có chăng một hàm số lẻ thoả mãn điều kiện:

$$f(x - 1) + 3f\left(\frac{1 - x}{1 - 2x}\right) = 1 - 2x, \text{ với: } x \neq \pm \frac{1}{2} ?$$

Giải:

Để ý rằng với : $x = 1$, ta được: $f(0) + 3f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{4}$

Mà một hàm số lẻ thì phải có $f(0) = 0$.

*** Ví dụ 3:** Cho hàm số $f : R \to R$.

Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương.

(i) $\forall x \in R$, $f(x) = f(-x)$;

(ii) $\forall x \in R$ $f(x) = g(x) + g(-x)$, với $g : R \to R$ là hàm số bất kỳ,

(iii) $\forall x \in R$ $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$, với $g: [0, +\infty) \to R$ là hàm số bất kỳ.

Giải:

(i) $\Rightarrow$ (ii) : $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Lấy $g(x)$ là cái thu hẹp của $f(x)$ trên $(0, +\infty)$,

thì : $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : $\forall x \geq 0 : f(-x) = g(-(-x)) = g(x) = f(x)$;

$\forall x < 0 : f(x) = g(-x) = f(-x)$.

Vậy $\forall x \in R : f(x) = f(-x)$.

*** Ví dụ 4:** Tìm hàm số $f : R \to R$ định bởi: $\forall x \in R$, $f(x) = x + f(-x)$.

Giải:

Ta viết lại hệ thức đề bài : $f(x) - \frac{x}{2} = f(-x) + \frac{x}{2}$. (1)

Gọi: $g(x) = f(x) - \frac{x}{2} \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \frac{x}{2}$.

Thế thì (1) cho $g(x)$ là hàm số chẵn.

Do đó theo ví dụ 3, $g(x)$ có thể viết thành:

$g(x) = h(x) + h(-x)$, với $h(x)$ là hàm số bất kỳ nào đó.

Vậy hàm số phải tìm là: $f(x) = \frac{x}{2} + h(x) + h(-x)$, trong đó $h(x)$ là hàm số bất kỳ (chẳng hạn $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$) .

*** Ví dụ 5:** Cho hàm số $\varphi: R \to R$. Tìm hàm số $f: R \to R$ thoả:

$\forall x \in R$, $f(x) = \varphi(x) + f(-x)$.

Giải:

Từ giả thiết ta có: $f(x) - f(-x) = \varphi(x)$, đó là hàm số lẻ.

Do đó : Nếu φ không phải là hàm số lẻ: vô nghiệm.

Nếu φ là hàm số lẻ : ta có $\varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(-x)$.

Thế thì từ giả thiết ta được, theo ví dụ 3 , $\forall x \in R$

$$f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = f(-x) - \frac{1}{2}\varphi(-x)$$

$$\Leftrightarrow fx) - \frac{1}{2}\varphi(x) = g(x) + g(-x),$$

Vậy $f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + g(x) + g(-x)$, trong đó φ là hàm số bất kỳ.

*** Ví dụ 6:**

Tìm hàm số $f: R \to R$ thoả: $\forall x \in R$, $f(x) = f(2003 - x)$.

Giải:

Với x thực bất kỳ, ta có: $f(\frac{2003}{2} + x) = f(\frac{2003}{2} - x)$.

Gọi $g(x) = f(\frac{2003}{2} + x) \Leftrightarrow f(x) = g(x - \frac{2003}{2})$,

thì $g(x)$ là hàm số lẻ trên R và từ đó $\forall x \in R$, $g(x) = h(x) + h(-x)$.

Suy ra: $f(x) = h(x - \frac{2003}{2}) + h(-\frac{2003}{2} - x)$, với $h: R \to R$ là hàm số bất kỳ.

*** Ví dụ 7:**

Tìm hàm số $f: R \to R$ thoả: $\forall x \in R$, $f(x) = f(2 - x) + x - 1$.

Giải:

Ta có, từ điều kiện đề bài :

$$f(x+1) = f(-x+1) + x \Leftrightarrow f(x+1) - \frac{x}{2} = f(-x+1) + \frac{x}{2} .$$

$$\text{Gọi } g(x) = f(x+1) - \frac{x}{2} \Leftrightarrow f(x) = g(x-1) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} .$$

Thế thì, g là hàm số lẻ, nên theo ví dụ 3, $g(x) = h(x) + h(-x)$

Vậy, với $h: R \to R$ là hàm số bất kỳ, $f(x) = h(x-1) + h(1-x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

*** Ví dụ 8:** Cho hàm số $f: R \to R$.

Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương:

(i). $\forall x \in R \; f(x) = -f(-x)$.

(ii). $\forall x \in R \; f(x) = g(x) - g(-x)$, với $g: R \to R \; f(x) = -f(-x)$ là hàm số bất kỳ.

(iii). $\forall x \in R \; f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ g(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$, với $g: [0, +\infty) \to R$ là hàm số bất kỳ.

Giải:

Tương tự ví dụ 3.

*** Ví dụ 9 :**

Tìm hàm số $f: R \to R$ thoả: $\forall x \in R$, $f(x) = 2 - f(-x)$.

Giải:

Ta có, với bất kỳ $x \in R$, từ giả thiết: $f(x) - 1 = -[f(-x) - 1]$.

Gọi $g(x) = f(x) - 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + 1$.

Thì ta có $\forall x \in R$, $g(x) = -g(-x)$.

Nên theo ví dụ 8: $g(x) = h(x) - h(-x)$, $\forall x \in R$.

Vậy, với h là hàm số $R \to R$ bất kỳ $f(x) = 1 + h(x) - h(-x)$.

*** Ví dụ 10:** Với hàm số φ cho trước, hãy tìm hàm số $f: R \to R$ thoả: $\forall x \in R$, $f(x) = \varphi(x) - f(-x)$.

Giải:

Từ điều kiện đề bài, ta có với mọi $x \in R$: $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$ là hàm số chẵn. Cho nên: Nếu $\varphi(x)$ không phải là hàm số chẵn: vô nghiệm.

Nếu $\varphi(x)$ là hàm số chẵn, ta viết:

$$f(x) + f(-x) = \varphi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(-x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x) = -\left[f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x)\right].$$

Do đó, theo ví dụ 8, trong đó $h: R \to R$ bất kỳ: $f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + h(x) - h(-x)$.

*** Ví dụ 11:** Tìm hàm số $f: R \to R$ thoả: $\forall x \in R$, $f(x) = a - f(b - x)$.

Giải:

Từ hệ thức đề bài, ta có, $\forall x \in R$,

$$f(\frac{b}{2} + x) = a - f(-x + \frac{b}{2}) \Leftrightarrow f(x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2} = -[f(-x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2}].$$

Gọi $g(x) = f(x + \frac{b}{2}) - \frac{a}{2}$, thì g là hàm số lẻ.

Nên, theo ví dụ 8, ta có với $h: R \to R$ là hàm số bất kỳ: $g(x) = h(x) - h(-x)$.

Suy ra: $f(x) = \frac{a}{2} + h(x - \frac{b}{2}) - h(-x + \frac{b}{2})$.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số f xác định trên $I = (-\ell, \ell)$, với $\ell > 0$.
Chứng minh rằng hàm số định trên I bởi:

$f(x) - f(-x)$ là hàm số lẻ ;

$f(x) + f(-x)$ là hàm số chẵn .

2. Cho $a \in R$. Hãy xác định tất cả hàm số $f(x)$ sao cho:

$f(a - x) = f(x)$, $\forall x \in R$.

3. Cho $a, b \in R$. Hãy xác định tất cả hàm số $f(x)$ sao cho:

$f(a - x) + f(x) = b$, $\forall x \in R$.

4. Tìm hàm số $f: R \to R$ định bởi: $f(x) = f(-x) + \cos x$.

5. Có tồn tại một hàm số $f: R \to R$ thoả với mọi số thực x

$f(x) = f(-x) + 2002$?

6. Tìm hàm số $f: R \to R$ định bởi : $f(x) = 2f(-x)$.

7. Tìm hàm số $f: R \to R$ định bởi : $f(x) = 2f(1 - x) + 1$.

8. Tìm hàm số $f: R \to R$ định bởi: $f(x) = 2x - f(-x)$.

9. Tìm hàm số $f: R \to R$ định bởi : $f(x) = -f(1 - x)$.

10. Cho các hàm số $\varphi: R \to R$, $\psi: R \to R$ và c là hằng số thoả:

$\psi(x)\psi(c - x) \neq 1$, $\forall x \in R$. Tìm hàm số $f: R \to R$ sao cho:

$\forall x \in R$ $f(x) = \varphi(x) - \psi(x) f(c - x)$.

*

* *

§10. HÀM SỐ TUẦN HOÀN

* Hàm số f(x) xác định trên (a, b) được gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại số t sao cho:
$\forall x \in (a, b) \quad f(x + t) = f(x)$
Số $t > 0$ bé nhất thoả mãn điều kiện đó được gọi là chu kỳ hàm số.

*** Ví dụ 1:** Tìm hàm số f(x) xác định trên R , biết rằng:

$f(x) + f(x + 1) = 1$ và với $0 \le x < 1$ thì $f(x) = x$.

Giải:

Thay x bởi $x + 1$, ta có:
$f(x + 1) + f(x + 2) = 1 \Leftrightarrow f(x + 2) = 1 - f(x + 1) = f(x)$.
Vậy f(x) là hàm số tuần hoàn , ta chỉ cần xét trên khoảng $[0 , 2)$
Với: $0 \le x < 1$ thì $f(x) = x$
nên: $f(x + 1) = 1 - f(x) = 1 - x$.
Đặt: $t = x + 1 \Rightarrow 1 \le t < 2$; ta có $f(t) = 2 - t$.

Vậy: $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{khi } 1 \le x < 2 \end{cases}$.

*** Ví dụ 2:**
Hàm số f(x) được xác định với mọi giá trị thực của x lấy giá trị thực và thoả mãn điều kiện: $f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$ trong đó a là một số dương không phụ thuộc vào x. Chứng minh rằng f(x) là một hàm số tuần hoàn. Tìm ví dụ về hàm f(x) với các tính chất đã nêu khi $a = 1$; và f(x) không phải là hàm hằng.

Giải:

a. $\forall x \in R$, vì $f(x + a) > \frac{1}{2}$ cho nên: $\left(f(x + a) - \frac{1}{2}\right)^2 = f(x) - (f(x))^2$

$\Leftrightarrow (f(x + a))^2 - f(x + a) = f(x) - (f(x))^2 - \frac{1}{4}$

Thế thì : $f(x + 2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x + a) - (f(x + a))^2}$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{(f(x))^2 - f(x) + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = f(x).$$

b. Các ví dụ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{nếu } 2n \leq x < 2n+1 \\ 1 & \text{nếu } 2n+1 \leq x < 2n+2 \end{cases}$$

$$\text{(ii) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - n & \text{nếu } 2n \leq x < 2n+1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x}{2} - n - (\frac{x}{2} - n)^2} & \text{nếu } 2n+1 \leq x < 2n+2 \end{cases}$$

*** Ví dụ 3:** Chứng minh rằng hàm số f(x) xác định trên R và thoả mãn:

$\forall x \in R \quad f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} f(x)$ là hàm số tuần hoàn. Xác định chu kỳ của nó.

Giải:

Ta có với mọi x:

$$f(x+2) + f(x) = \sqrt{2} f(x+1) = \sqrt{2}(\sqrt{2} f(x) - f(x-1))$$
$$= 2f(x) - \sqrt{2} f(x-1)$$

$$\Rightarrow f(x+2) = f(x) - \sqrt{2} f(x-1)$$

Suy ra với mọi x: $f(x+4) = f(x+2) - \sqrt{2} f(x+1)$

$$= f(x) - \sqrt{2}[f(x-1) + f(x+1)] = -f(x)$$

Từ đó, với mọi x: $f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$

Để ý rằng, chẳng hạn, hàm số: $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$ thoả mãn điều kiện đề bài.

*** Ví dụ 4:**

Cho hàm số $f: R \to R$. Cho các mệnh đề:

(i). $\forall x \in R \quad f(x+1) = f(x)$;

(ii). $\forall x \in R \quad f(x) = g(\{x\})$;

(iii). $\forall x \in R \quad f(x+a) = f(x)$;

(iv). $\forall x \in R \quad f(x) = g(\{\frac{x}{a}\})$;

Trong đó: $a \neq 0$ là số thực cho trước, $g: [0, 1) \to R$ là hàm số bất kỳ.

Chứng minh rằng :

a. (i) tương đương với (ii) ; b. (iii) tương đương (iv).

Giải:

a. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Bằng qui nạp, dễ dàng suy từ điều kiện đề bài,
rằng: $\forall x \in R$, $\forall n \in Z$: $f(x+n) = f(x)$.
Từ đó, với mọi x thực: $f(x) = f(\{x\} + [x]) = f(\{x\})$.
Gọi $g : [0,1) \to R$ là cái thu hẹp của f vào $[0, 1)$.
Thì : $\forall x \in R$, $f(x) = g(\{x\})$. (ii) $\Rightarrow$ (i) : Hiển nhiên.
b. Ta có, $\forall x \in R$ $f(x+a) = f(x) \Leftrightarrow f(ax+a) = f(ax)$. (★)

Đặt: $g(x) = f(ax) \Leftrightarrow f(x) = g(\frac{x}{a})$. Thế thì: (★) $\Leftrightarrow g(x) = g(x+1)$.

Áp dụng kết quả câu a thì được điều phải chứng minh.

*** Ví dụ 5:**

Tìm hàm số $f : R \to R$ định bởi : $\forall x \in R$, $f(x+2) = 1 + f(x)$.

Giải:

Từ điều kiện đề bài ta thu được, $\forall x \in R$

$$f(x+2) - \frac{1}{2}(x+2) = f(x) - \frac{1}{2}x. \qquad (\star)$$

Đặt: $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$. Thế thì, theo ví dụ 4, $\forall x \in R$

$$g(x+2) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = h(\{\frac{x}{2}\}).$$

Vậy, với $h : [0, 1) \to R$ là hàm số bất kỳ, $f(x) = \frac{1}{2}x + h(\{\frac{x}{2}\})$.

*** Ví dụ 6:**

Tìm hàm số $f : R \to R$ định bởi $\forall x \in R$, $f(x+2) = 1 + 2f(x)$.

Giải:

Từ điều kiện đề bài ta thu được, $\forall x \in R$, $f(x+2) + 1 = 2[f(x) + 1]$.

Đặt: $g(x) = 2^{-\frac{1}{2}(x+2)}[f(x+2)+1] = 2^{-\frac{1}{2}x}[f(x)+1]$. (★)

Thế thì: (★) $\Leftrightarrow g(x+2) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = h(\{\frac{x}{2}\})$.

Vậy, với $h : [0, 1) \to R$ là hàm số bất kỳ, $f(x) = 2^{\frac{1}{2}x} h(\{\frac{x}{2}\}) - 1$.

*** Ví dụ 7:**

Tìm hàm số $f : R \to R$ định bởi : $\forall x \in R$, $f(x+2) = 1 + 2x + f(x)$.

Giải:

Từ điều kiện đề bài ta có, $\forall x \in R$

$f(x+2) + a(x+2) + b = 2[f(x) + ax + b] + (2 - a)x + (1 + 2a - b)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - a = 0 \\ 1 + 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Như thế: $f(x+2) + 2(x+2) + 5 = 2[f(x) + 2x + 5]$

$$\Leftrightarrow 2^{-\frac{1}{2}(x+2)}[f(x+2) + 2(x+2) + 5] = 2^{-\frac{1}{2}x}[f(x) + 2x + 5].$$

Đặt: $g(x) = 2^{-\frac{1}{2}x}[f(x) + 2x + 5]$.

Thì, với $h: [0, 1) \to R$ là hàm số bất kỳ: $f(x) = 2^{-\frac{1}{2}x} h(\{\frac{x}{2}\}) - 2x - 5$.

*** Ví dụ 8:**

Tìm hàm số $f : R \to R$ định bởi : $\forall x \in R$, $f(x+1) = - f(x)$.

Giải:

Từ điều kiện đề bài ta thu được, $\forall x \in R$, $(-1)^{[x+1]} f(x+1) = (-1)^{[x]} f(x)$.

Đặt: $g(x) = (-1)^{[x]} f(x)$. Thế thì: $g(x+1) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = h(\{x\})$.

Vậy, với $h : [0, 1) \to R$ là hàm số bất kỳ: $f(x) = (-1)^{[x]} h(\{x\})$.

*** Ví dụ 9:**

Cho f là một hàm số từ tập hợp các số thực R vào chính nó sao cho với mọi $x \in R$, ta có: $|f(x)| \leq 1$ và: $f(x + \frac{13}{42}) + f(x) = f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7})$.

Chứng minh rằng f là một hàm số tuần hoàn.

Giải:

Đặt $a = 1/6$, $b = 1/7$ thì $a + b = 13/42$.

Thay x bởi $x + a$, $x + 2a$, ..., $x + 5a$ lần lượt rồi lấy tổng tất cả các phương trình này thì thu được: $f(x + 1 + b) + f(x) = f(x + 1) + f(x + b)$.

Bây giờ, thay x bởi $x + b$, $x + 2b$, ..., $x + 6b$ lần lượt và lấy tổng thì được: $f(x + 2) + f(x) = 2f(x + 1)$.

Viết lại : $f(x+2) - f(x+1) = f(x + 1) - f(x)$.

Nếu ta đặt $f(x+1) - f(x) = c$ thì dễ dàng qui nạp theo n,
ta được: $f(x+n) - f(x+n-1) = c$.
Điều đó suy ra : $f(x+n) - f(x) = nc$
Điều đó chứng tỏ rằng nếu $c \neq 0$ thì $f(x+n)$ không giới nội, trái với điều kiện $|f(x)| \leq 1$ với mọi x.
Vì thế : $c = 0$ và: $f(x+1) = f(x)$, chứng tỏ tính tuần hoàn của $f(x)$.
Chú giảng : Nếu $f : R \to R$ là hàm số giới nội và a, b là các số thực khác zero sao cho a/b hữu tỉ và:
$f(x+a+b) + f(x) = f(x+a) + f(x+b)$, $\forall x \in R$, thì f tuần hoàn.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên R và thoả mãn:

$\forall x, y \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

a. Chứng minh rằng hoặc $|f(x)| \leq 1$ hoặc $|f(x)| \geq 1$ với mọi x.
b. Chứng minh rằng f(x) tuần hoàn, nếu một trong các điều kiện sau được thoả:

(i) tồn tại một số a sao cho $f(a) = 0$.
(ii) tồn tại số $b \neq 0$ sao cho $|f(b)| = 1$.
(iii) tồn tại hai số c, d với $|c| \neq |d|$ sao cho $|f(c)| = |f(d)|$.

2. Một hàm số f(x) có tính chất sau: tồn tại một số $a \neq 0$ sao cho:

$$f(x+a) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$$

tại tất cả những điểm x sao cho $f(x)$ và $f(x+a)$ được xác định.
Chứng minh rằng f(x) là hàm số tuần hoàn và nêu ra một ví dụ về hàm số f(x) với tính chất nêu trên.

3. Tìm hàm số f(x) xác định trên R, biết:

$f(x+1) = 2f(x) - f(x-1)$,
$f(x) = 1$ với $0 \leq x < 1$.

4. Tìm hàm số $f : R \to R$ biết rằng: $\forall x \in R \quad f(x+1) = -2f(x)$.

5. Tìm hàm số $f : R \to R$ biết rằng: $\forall x \in R \quad f(x+2) = -2f(x)$.

6. Tìm hàm số $f : R \to R$ biết rằng : $\forall x \in R \quad f(x+2) = -3f(x) + 1$.

*
* *

§11. DÃY CÁC HÀM (f_n)

*** Ví dụ 1:** Cho dãy các hàm số $(f_n(x))$ thoả mãn điều kiện:

(i) $f_1(x) = x$,

(ii) $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$.

Hãy tính $f_{1999}(1999)$.

Giải:

Ta có : $f_1(n) = n$; $f_2(n) = \dfrac{1}{1-n}$;

$f_3(n) = \dfrac{n-1}{n}n$; $f_4(n) = n$.

Và chứng minh dễ dàng rằng: $f_{3k+1}(n) = n$, với $k \in N$.
Mặt khác: $1999 = 666.3 + 1$. Nên: $f_{1999}(1999) = 1999$.

*** Ví dụ 2:** Cho M là tập hợp các hàm số $f : Z \to R$ thoả mãn điều kiện:
$f(0) \neq 0$ và đồng nhất thức: $f(n)\,f(m) = f(n + m) + f(n - m)$ $n, m \in Z$.

Tìm: a. Tất cả hàm số $f(n) \in M$ sao cho $f(1) = \dfrac{5}{2}$.

b. Tất cả hàm số $f(n) \in M$ sao cho $f(1) = \sqrt{3}$.

Giải:

Trong đồng nhất thức ban đầu ta thay $n = m = 0$,
thì thu được : $(f(0))^2 = 2f(0)$. Nhưng: $f(0) \neq 0$, nên $f(0) = 2$.
Vả lại, khi thay $m = 1$, thì được: $f(n)f(1) = f(n + 1) + f(n - 1)$, $n \in Z$.
Nếu giá trị của hàm số $f(n)$ tại $n = 0$ và $n = 1$ đã cho trước, thì nó xác định một cách duy nhất các giá trị $f(2)$ và $f(-1)$ từ đồng nhất thức đã cho, rồi thì xác định được $f(3)$ và $f(-2)$, ... tức là tất cả các giá trị của $f(n)$ với $n \in Z$. Như vậy hàm số $f(n)$ xác định một cách duy nhất từ điều kiện của bài toán, như thế :

$f(0) = 2$ và $f(1) = \dfrac{5}{2}$ hay $f(1) = \sqrt{3}$.

Ta cuối cùng chỉ cần kiểm chứng các hàm số:

$f(n) = 2^n + 2^{-n}$ và $f(n) = 2\cos\dfrac{\pi n}{6}$, thoả mãn các điều kiện đề bài .

*** Ví dụ 3:**

Gọi $n > 1$ là một số nguyên cố định. Cho các hàm số $f_0(x) = 0$, $f_1(x) = 1 - \cos x$ và với $k > 0$, $f_{k+1}(x) = 2f_k(x)\cos x - f_{k-1}(x)$.

Nếu : $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, hãy chứng minh rằng:

$$0 < F(x) < 1 \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{n+1},$$

và : $$F(x) > 1 \text{ với } \frac{\pi}{n+1} < x < \frac{\pi}{n}.$$

Giải:

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân là:

$$f_k(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{n}.$$

Các giá trị của f_0, f_1 cho ta: $f_k(x) = \dfrac{f_1(x)\sin kx}{\sin x}$.

Từ đẳng thức: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2(1-\cos x)}$

Ta được: $$F_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{x}{2} + nx\right)}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

Vì : $\cos(\frac{x}{2} + nx) + \cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2} > 0$

Khi: $0 < x < \pi/(n+1)$, ta có $F_n(x) < 1$, điều này chứng minh câu (i).

Khi: $\pi/(n+1) < x < \pi/n$ ta có $nx/2 < \pi/2 < (n+1)x/2$

và vì thế: $\cos(\frac{x}{2} + nx) + \cos\frac{x}{2} < 0$, và câu (ii) được chứng minh.

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hai hàm số h, g xác định trên $\{-1, 1\}$:

$$g(1) = h(-1) = 1 \text{ và } g(-1) = h(1) = -1$$

Giả định $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_7$ là các hàm số trong đó một số bằng g , số còn lại bằng h , thoả mãn các điều kiện:

$f_1(1) = -1$; $f_6(1) = f_7(1) = 1$.

$f_3(f_2(1)) = -1$.

$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1$.

Hỏi trong các hàm số f_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$) có bao nhiêu hàm số bằng g ?

2. Gọi $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ với $x \neq 0$. Ta xác định $f^{0}(x) = x$

và $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$ với mọi số nguyên dương n và $x \neq 0$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên không âm n và $x \neq -1$; 0 hay 1 thì ta có:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left[\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2n}\right]} .$$

*

* *

§12. HÀM NHIỀU BIẾN

*** Ví dụ 1:**

Xét hàm số không phải là hàm hằng f(n,m) xác định trên tập hợp các cặp số nguyên, nhận giá trị nguyên và thoả mãn đồng nhất thức:

$$f(n, m) = \frac{1}{4}[f(n-1, m) + f(n+1, m) + f(n, m-1) + f(n, m+1)] \quad n, m \in Z.$$

Chứng minh rằng:

a. Hàm số như thế tồn tại.

b. Với mọi $k \in Z$ mỗi hàm như thế nhận cả giá trị k lớn cũng như k bé.

Giải :

a. Chẳng hạn hàm số: $f(n, m) = n \quad (n, m \in Z)$

thoả mãn tất cả các điều kiện đã nêu.

b. Cho khẳng định không đúng, tức là với số $k \in Z$ nào đó thì tất cả giá trị cuả một số hàm f(n,m) thoả mãn điều kiện bài toán, chẳng hạn, không vượt quá k. Khi đó trong các giá trị f(n, m) ; $n, m \in Z$; ta tìm được số lớn nhất $\ell = f(n_0, m_0)$.

Vì thế giá trị này bằng tất cả số $f(n_0 \pm 1, m_0)$, $f(n_0, m_0 \pm 1)$,

vì nếu ngược lại thì :

$$f(n_0, m_0) = \frac{1}{4}[f(n_0 - 1, m_0) + f(n_0 + 1, m_0) + f(n_0, m_0 - 1) + f(n_0, m_0 + 1)] < \ell.$$

Lập luận tương tự có thể thu được đẳng thức :

$$\begin{aligned}\ell &= f(n_0, m_0) = f(n_0 \pm 1, m_0) = f(n_0 \pm 2, m_0) = \dots \\ &= f(n_0 \pm n, m_0) = f(n_0 \pm n, m_0 \pm 1) \\ &= f(n_0 \pm n, m_0 \pm 2) = \dots = f(n_0 \pm n, m_0 \pm m) \text{ với mọi giá trị } n, m \in N.\end{aligned}$$

Như vậy: $f(n, m) = \ell$: trái giả thiết bài toán.

*** Ví dụ 2:**

Với tập hợp con S của tập hợp các cặp số nguyên, ta gọi hàm số $f : S \to S$ là phổ quát, nếu nó khả đảo và với mọi cặp $(n, m) \in S$ điều kiện sau được thoả mãn:

$$f(n, m) \in \{(n-1, m) ; (n+1, m) ; (n, m-1) ; (n, m+1)\}.$$

Chứng minh rằng nếu tồn tại một hàm số phổ quát, thì tồn tại hàm phổ quát f(n,m) thoả điều kiện : $f(f(n, m)) = (n, m)$, $(n, m) \in S$.

Giải:

Ta gọi cặp $(n, m) \in S$ là chẵn hay lẻ tuỳ theo tổn n + m là chẵn hay lẻ.

Cho rằng tồn tại hàm phổ quát g(n, m) , khi đó hàm: $g^{-1}(n, m)$ cũng phổ quát.

Ta xét hàm xác định như sau:

$$f(n, m) = \begin{cases} g(n,m) & \text{nếu điểm } (n,m) \text{ chẵn} \\ g^{-1}(n,m) & \text{nếu điểm } (n,m) \text{ lẻ} \end{cases} \quad \text{với: } (n, m) \in S.$$

Điểm $g(n, m)$ và $g^{-1}(n, m)$ có tính chẵn lẻ trái ngược với điểm (n, m).
Vì thế với điểm $(n, m) \in S$ bất kỳ ta thu được:

$$f^2(n,m) = \begin{cases} g^{-1}(g(n,m)) = (n,m) & \text{nếu điểm } (n,m) \text{ chẵn} \\ g(g^{-1}(n,m)) = (n,m) & \text{nếu điểm } (n,m) \text{ lẻ} \end{cases}.$$

Như vậy ta đã chứng minh được: $f^2(n, m) = (n, m)$ với: $(n, m) \in S$
Từ đó suy ra tính khả đảo của hàm $f(n, m)$, và để chứng minh tính phổ quát của hàm số này chỉ cần để ý rằng các hàm số $g(n, m)$ và: $g^{-1}(n, m)$ đều phổ quát.

*** Ví dụ 3:**

Gọi T là tập hợp tất cả các bộ ba thứ tự (p, q, r) các số nguyên không âm.
Tìm tất cả các hàm số $f : T \to R$ sao cho:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } pqr = 0 \\ 1 + \frac{1}{6}\{f(p+1,q-1,r) + f(p-1,q+1,r) + \\ \quad + f(p-1,q,r+1) + f(p+1,q,r-1) + \\ \quad + f(p,1,r-1) + f(p,q-1,r+1)\} & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Giải:

Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng tồn tại quá lắm một hàm số thoả mãn các điều kiện đã nêu. Giả định rằng: f_1 và f_2 là hai hàm số như thế.

Ta xét hàm số: $h = f_1 - f_2$. Thế thì $h : T \to R$ thoả:

$$h(p, q, r) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } pqr = 0 \\ 1 + \frac{1}{6}\{h(p+1,q-1,r) + h(p-1,q+1,r) + h(p-1,q,r+1) \\ \quad + h(p+1,q,r-1) + h(p,1,r-1) + h(p,q-1,r+1)\} & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

Để ý rằng điều kiện thứ hai có nghĩa là $h(p, q, r)$ bằng trung bình cộng của các giá trị của h tại sáu điểm $(p + 1, q - 1, r)$, v.v....
Chúng là các đỉnh của một lục giác đều có tâm tại (p, q, r) nằm trong mặt phẳng: $x + y + z = p + q + r$. Chỉ cần chứng minh rằng $h = 0$ tại mọi điểm trong T.
Gọi n là một số nguyên dương.
Xét tập con H của mặt phẳng $x + y + z = n$ mà nó nằm trong góc phần tám "không âm" $\{(x, y, z) : x, y, z \geq 0\}$.
Giả định h đạt giá trị lớn nhất trên $H \cap T$ tại (p, q, r).

Nếu: $pqr = 0$ thì giá trị lớn nhất của h trên $H \cap T$ là 0.

Nếu: $pqr \neq 0$, thì tính chất trung bình của h dẫn đến rằng giá trị của h tại sáu điểm $(p+1, q-1, r)$, v. v ... . bằng $h(p, q, r)$. (Cả sáu điểm đều ở trong H).

Nói riêng, h cũng đạt giá trị lớn nhất tại $(p+1, q-1, r)$.

Lập lại lý luận trên (nếu cần) bằng cách dùng $(p+1, q-1, r)$ là tâm điểm, ta thấy rằng: $h(p, q, r) = h(p+1, q-1, r) = h(p+2, q-2, r)$.

Tiếp tục quá trình này, ta kết luận rằng: $h(p, q, r) = h(p+q, 0, r) = 0$.

Như thế giá trị lớn nhất của h trên $H \cap T$ là 0. Bằng cách áp dụng lập luận trên vào hàm số $h = f_2 - f_1$, ta thấy rằng giá trị bé nhất mà h đạt đọc trên $H \cap T$ cũng bằng 0.

Do đó: $h = 0$ tại mọi điểm trong $H \cap T$. Bằng cách thay đổi giá trị n, ta kết luận rằng $h = 0$ tại mọi điểm trong T.

Ta sẽ hoàn tất lời giải bằng cách chú ý rằng $f : T \to R$ định bởi:

$$f(p, q, r) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad pqr = 0 \\ \dfrac{3pqr}{p+q+r} & \text{nếu trái lại} \end{cases},$$

thoả mãn cả hai điều kiện của bài toán, và là nghiệm duy nhất.

*** Ví dụ 4:**

Với mỗi điểm (x, y) trên mặt phẳng toạ độ, cho tương ứng với một số thực $f(x, y)$. Biết rằng:

(i). $f(x, 0) = ax$ với a là hằng số khác zero ;

(ii). Nếu (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là hai điểm khác nhau trên mặt phẳng toạ độ sao cho $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ thì $f(x, y)$ có giá trị không đổi tại mọi điểm (x, y) của đường thẳng đi qua hai điểm ấy.

Chứng minh rằng:

a. Với mọi số thực m, tập hợp các điểm (x, y) thoả $f(x, y) = \alpha$ là một đường thẳng (d_m) và tất cả các đường thẳng (d_m) ứng với những giá trị khác nhau của m đều song song với nhau.

b. Với mọi x, y ta có $f(x, y) = ax + by$, trong đó b là hằng số.

Giải:

a. Kí hiệu $f(x, y) = f(M)$, trong đó M là điểm có toạ độ (x, y).

Nếu: A, B, C là ba điểm phân biệt sao cho:

$f(A) = f(B) = f(C) = m$, thì: A, B, C thẳng hàng.

Thật vậy, nếu A, B, C không thẳng hàng, thì từ giả thiết, ta có:

$f(M) = m$ khi M ở trên các đường thẳng AB, BC, CA

nên: $f(M) = m$, với M bất kỳ $\Rightarrow$ $f(x, y)$ là hàm hằng : vô lý.

Bây giờ, gọi $I(0, 1)$. Giả định $f(I) = b$.

Thế thì với điểm $J(\frac{b}{a}, 0)$, ta có: $f(J) = b$.

Lại gọi (d) là đường thẳng IJ. Xét trường hợp $a \neq b$.

Với: $A(\frac{m}{a}, 0) \Rightarrow f(A) = m$. Do đó $A \notin (d)$.

Gọi: (d') là đường thẳng qua A và song song với (d) và P là điểm bất kỳ trên (d').

Nếu: $f(P) = n \neq m$ thì đường thẳng PB với $B(\frac{n}{a}, 0)$ cắt (d) tại K.

Thế là: $f(K) = f(B) = f(P) = n$. Do: $K \in (d) \Rightarrow f(K) = b \Rightarrow b = n$.

Từ đó: $b = n \Rightarrow P \in (d)$: vô lý, vì $P \in (d')$. Vậy $f(P) = m$.

Do đó, với mọi số thực m, tập hợp (d_m) là đường thẳng song song với (d).

Nếu $m \neq n$ thì $(d_m) \neq (d_n)$

$\Rightarrow (d_m)$ và (d_n) là hai đường thẳng song song với nhau.

b. Xét điểm $M(x, y)$ bất kỳ.

Gọi $m = f(M) \Rightarrow$ đường thẳng MA, trong đó $A(\frac{m}{a}, 0)$ song song với (d).

Rồi xét điểm: $X(x, 0)$, ta có hai tam giác AXM và JOI đồng dạng.

$$\Rightarrow \frac{HA}{HM} = \frac{OJ}{OI} \Leftrightarrow \frac{x - \frac{m}{a}}{y} = \frac{-\frac{b}{a}}{1} \Rightarrow m = ax + by.$$

Vậy: $f(x, y) = ax + by$.

*** Ví dụ 5:**

Tìm tất cả các cặp số nguyên khác zero $m \leq n$, thoả mãn bất đẳng thức $m + n \neq 0$ và đồng nhất thức: $f_m(x, y)f_n(x, y) = f_{m+n}(x, y) \quad x, y \in R \quad xy(x + y) \neq 0$,

trong đó ký hiệu : $f_k(x, y) = (x^k + y^k + \frac{(-1)^k(x + y)^k}{k})$.

Giải:

Nếu có cặp số nguyên (m, n) khác (2, 3) và (2, 5) thoả điều kiện đề bài.

Với: $y = y_0 \neq 0$ cố định ta có:

Nếu: $k < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} x^k = \lim\limits_{x \to \infty} (x + y_0)^k = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f_k(x, y_0) = \frac{y_0^k}{k}$.

Nếu $k \in N$ và chẵn thì: $f_k(x_1, y) = \frac{1}{k}(2x^k + 2y^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i y^{k-i})$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f^k(x,y_0)}{x^k} = \frac{2}{k}.f_1(x, y) = 0 \; ; \; k \in N \text{ và } k \text{ lẻ} \neq 1$$

$$\Rightarrow f_k(x, y) = -\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i x^i y^{k-i} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f^k(x,y_0)}{x^{k-1}} = -\frac{y_0}{k} C_k^{k-1} = -y_0.$$

Ta xét các trường hợp :

1. <u>m, n $\in$ N và chẵn</u> :

Ta có: $\frac{2}{m+n} = \lim_{x\to\infty} \frac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{m+n}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f_m(x,y_0)}{x^m} \lim_{x\to\infty} \frac{f_n(x,y_0)}{x^n} = \frac{4}{mn}$$

$$\Rightarrow \frac{m+n}{2} = \frac{m.n}{4} \Rightarrow m = n = 4 : \text{vô lý .}$$

Vì : $f_4(1, 1) f_4 (1, 1) = \frac{81}{4} \neq \frac{129}{4} = f_8(1, 1).$

2. <u>m , n $\in$ N và lẻ</u> :

Thế thì: $\lim_{x\to\infty} \frac{f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^{m+n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \frac{f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^{m-1}.x^{n-1}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{m+n}} = \frac{2}{m+n}$$: vô lý, vì trái giả thiết .

3. <u>m, n $\in$ N và m chẵn ; n lẻ</u> :

Thế thì: $n > 1$, nếu không $\Rightarrow f_n(1, 1) = 0$

$$\Rightarrow f_{m+n}(1, 1) = \frac{2 - 2^{m+n}}{m+n} = 0 : \text{ vô lý , vì } m + n > 1 .$$

Do đó: $\lim_{x\to\infty} \frac{f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^{m+n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^m.x^{n-1}} = -\frac{2y_0}{m}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{m+n-1}} = -y_0.$$ Suy ra: $m = 2$.

Thế rồi ta được: $\dfrac{3(2-2^n)}{n} = f_2(1,1)\,f_n(1,1) = f_{2+n}(1,1) = \dfrac{2-2^{2+n}}{2+n}$

$\Rightarrow 3(2+n)(1-2^{n-1}) = n(1-2^{n+1}) \Rightarrow 3+n = (6-n)2^{n-2}$.

Từ đó: $n < 6$ và vì n lẻ và > 1 nên $n = 3$ hay $n = 5$: trái giả thiết .

4. $m < 0$, $n \in N$ và chẵn :

Vì: $n > m+n$, nên ta có: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^n} = 0$.

Thế thì: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} f_m(x,y_0)\dfrac{f_n(x,y_0)}{x^n} = \dfrac{2y_0^m}{m} \neq 0$.

5. $m < 0$, $n \in N$ và lẻ :

Nếu: $n = 1$ thì: $f_n(1,1) = 0$

Cho: $f_{m+n}(1,1) = \dfrac{2+(-1)^{m+n}2^{m+n}}{m+n} = 0$, vô lý vì: $m+n < 0$.

Nên: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_m(x,y_0)f_n(x,y_0)}{x^{n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} f_m(x,y_0)\dfrac{f_n(x,y_0)}{x^{n-1}} = -\dfrac{y_0^{m+1}}{m} \neq 0$.

Mặt khác, nếu $m < -1 \Rightarrow n-1 > m+n$,

và ta có : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{n-1}} = 0$: không xảy ra .

Như thế: $m = -1 \Rightarrow m+n$ chẵn và: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f_{m+n}(x,y_0)}{x^{n-1}} = \dfrac{2}{n-1}$.

Như thế với mỗi $y_0 \neq 0$ ta được: $\dfrac{1}{y_0} = \dfrac{2}{n-1}$: vô lý .

6. $m, n < 0$:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty} f_m(x,y_0)\,.\,f_n(x,y_0) = \dfrac{y^{m+n}}{mn}$, và: $\lim\limits_{x\to\infty} f_{m+n}(x,y_0) = \dfrac{y^{m+n}}{m+n}$.

Nhưng đẳng thức: $\dfrac{y^{m+n}}{mn} = \dfrac{y^{m+n}}{m+n}$ không xảy ra.

Vì: $m.n > 0$, còn: $m+n < 0$.

Do đó, điều kiện bài toán chỉ thoả với hai cặp (2, 3) và (2, 5).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Chứng minh rằng nếu hàm số f(x, y) xác định trên tập hợp tất cả các cặp số hữu tỷ và chỉ nhận giá trị dương, thoả mãn ba đồng nhất thức:

$$f(xy, z) = f(x, z)f(y, z) ;$$
$$f(z, xy) = f(z, x)f(z, y) ;$$
$$f(x, 1 - x) = 1 \qquad x, y, z \in Q.$$

Thì các đồng nhất thức sau cũng đúng :

$$f(x, x) = 1 \; ; f(x, -x) = 1 \; ;$$
$$f(x, y)\, f(y, x) = 1 \qquad x, y \in Q .$$

2. Cho n là số tự nhiên không lớn hơn 44. Chứng minh rằng với hàm số bất kỳ xác định trên N^2 và lấy giá trị trong tập $\{1, 2, ..., n\}$,
thì có bốn cặp thứ tự: (i, j) ; (i, k) ; (l, j) và (l , k)
sao cho: $f(i, j) = f(i, k) = f(l, j) = f(l, k)$,
trong đó i , j , k , l là các số sao cho tồn tại các số tự nhiên m, p thoả:

$$1989m \le i < l < 1989 + 1989m$$
$$1989p \le j < k < 1989 + 1989p .$$

*

* *

§13. SỬ DỤNG LÝ THUYẾT SỐ

> * Các hàm số trên N, Z thường được sử dụng các kết quả của lý thuyết số như lý thuyết đồng dư, phân tích số thành thừa số nguyên tố.

*** Ví dụ 1:**

Cho Q^+ là tập hợp các số hữu tỷ dương.

Dựng hàm số $f: Q^+ \to Q^+$ sao cho: $f(x\, f(y)) = \dfrac{f(x)}{y} \quad \forall x, y \in Q^+$.

Giải:

Nếu $f(y_1) = f(y_2)$, từ phương trình hàm suy ra $y_1 = y_2$.

Lấy $y = 1$ thì được $f(1) = 1$.

Lấy $x = 1$ thì được $f(f(y)) = \dfrac{1}{y}$ với mọi $y \in Q^+$.

Tác dụng f vào nó thì được $f(\dfrac{1}{y}) = \dfrac{1}{f(y)}$ với mọi $y \in Q^+$.

Sau cùng cho $y = f(\dfrac{1}{t})$, thì thu được: $f(xt) = f(x)f(t)$ với mọi $x, t \in Q^+$.

Ngược lại dễ thấy rằng với f bất kỳ thoả: $f(xt) = f(x)f(t)$; $f(f(x)) = \dfrac{1}{x}$,

với mọi $x, t \in Q^+$ là nghiệm của phương trình hàm đã cho.

Một hàm số $f: Q^+ \to Q^+$ thoả (a) có thể được dựng bằng cách xác định tuỳ ý trên các số nguyên tố và mở rộng như sau:

$$f(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}) = f((p_1))^{n_1} f((p_2))^{n_2} \dots f((p_k))^{n_k}.$$

trong đó p_j kí hiệu số nguyên tố thứ j và $n_j \in Z$.

Một hàm số như thế sẽ thoả (b) nếu và chỉ nếu nó thỏa (b) với mỗi số nguyên tố.

Một cách dựng khả dĩ là như sau: $f(p_j) = \begin{cases} p_{j+1} & \text{nếu } j \text{ lẻ} \\ \dfrac{1}{p_{j-1}} & \text{nếu } j \text{ chẵn} \end{cases}$.

Mở rộng nó như trên thì được một hàm số $f: Q^+ \to Q^+$.

Rõ ràng là $f(f(p)) = \dfrac{1}{p}$ với mỗi số nguyên tố p như thế f thoả mãn phương trình hàm đã nêu.

*** Ví dụ 2:**

Cho $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Hãy xác định xem có tồn tại chăng một hàm số đồng biến chặt chẽ $f: N \to N$ sao cho hai tính chất sau được thoả :

$f(1) = 2$; $f(f(n)) = f(n) + n \quad \forall n \in N$.

Giải:

Gọi: $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$. Vì $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

thì hàm số : $g(x) = \alpha x$ thoả với mọi $n \in N$: $g(g(n)) - g(n) - n = 0$.

Gọi $[x]$ là phần nguyên của x , nghĩa là số nguyên k sao cho:

$k - 1 < x \le k$ đúng . Ta sẽ chứng minh rằng hàm số:

$f(n) = [g(n) + \frac{1}{2}]$ thoả các đòi hỏi. Ta nhận thấy rằng:

1. f đồng biến chặt chẽ, vì $\alpha > 1$ thì $g(n + 1) > g(n) + 1$ đúng.
2. Vì $2 < \alpha < 1/2 + 3$ đúng , nên $f(1) = 2$.
3. Theo định nghĩa của f và g: $|f(n) - g(n)| < 1/2$ đúng với mọi $n \in N$.

Bây giờ tính đúng đắn của (2) suy từ sự kiện: $f(f(n)) - f(n) - n$ là một số nguyên và ta ước lượng:

$$|f(f(n)) - f(n) - n| = |g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n)|$$

$$= |g(g(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)|$$

$$= |g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)|$$

$$= |(\alpha - 1)(g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(n))|$$

$$\le |(\alpha - 1)(g(n) - f(n))| + |g(f(n)) - f(f(n))| \le \frac{1}{2}(\alpha - 1) + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2} < 1 .$$

*** Ví dụ 3:**

Kí hiệu $\mathbf{N}_0$ là tập hợp các số nguyên không âm. Tìm tất cả các hàm số f từ $\mathbf{N}_0$ vào chính nó sao cho: $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$, $\forall m, n \in \mathbf{N}_0$.

Giải:

Đặt: $m = n = 0$ ta được: $f(0) = 0$ và do đó: $f(f(n)) = f(n)$ với mọi $n \in \mathbf{N}_0$.

Như thế phương trình hàm đã cho tương đương với :

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n) , \quad f(0) = 0 .$$

Ta cũng để ý rằng nếu f(x) không phải là hàm zero thì f có các điểm cố định khác zero. Gọi a là điểm cố định khác zero bé nhất của f .

Nếu: $a = 1$ thì dễ thấy rằng: $f(2) = 2$

Và theo qui nạp: $f(n) = n$, với mọi $n \in \mathbf{N}_0$.

Giả định $a > 1$. Cũng theo qui nạp $f(ka) = ka$ với mọi $k \ge 1$.

Ta sẽ chứng minh rằng các điểm cố định của f đều có dạng ka với $k \ge 1$.

Trước tiên để ý rằng tổng hai điểm cố định của f lại là một điểm cố định.
Cho b là một điểm cố định bất kỳ của f.
Chọn các số nguyên không âm q, r sao cho: $b = aq + r$, $0 \le r < a$.
Thế thì ta có: $b = f(b) = f(aq + r) = f(r + f(aq)) = f(r) + f(aq) = f(r) + aq$.
Suy ra rằng: $f(r) = r$ và vì $r < a$ ta phải có: $r = 0$.
Điều đó chứng tỏ rằng các điểm cố định đều có dạng ka.
Vì tập hợp $\{f(n) : n \in N_0\}$ là một tập hợp các điểm cố định của f nên nói riêng $f(i) = an_i$ với mỗi $i < a$, với $n_0 = 0$ và $n_i \in \angle_0$.
Lấy số nguyên dương n bất kỳ và viết: $n = ka + i$, trong đó: $0 \le i < a$.
Sử dụng phương trình hàm ta có:
$f(n) = f(i + ka) = f(i + f(ka)) = f(i) + ka = n_i a + ka = (n_i + k)a$.
Ta kiểm chứng rằng hàm f như thế thỏa phương trình hàm đã cho:
Lấy: $m = ka + i$, $n = \ell a + j$, $0, i, j < a$.
Thế thì : $f(m + f(n)) = f(ka + i + f(\ell a + j))$
$= f((k + \ell + n_j)a + i) = (k + \ell + n_j + n_i)a = f(m) + f(n)$.
Như thế nếu f không đồng nhất zero, thì f có dạng như sau:
Cho $a \in N$ và $n_1, n_2, \ldots, n_a \in N$ được chọn bất kỳ ;
thế thì: $f(n) = \left(\left[\dfrac{n}{a}\right] + n_i\right)a$.

*** Ví dụ 4:**
Xác định giá trị bé nhất của $f(1998)$, trong đó f là một hàm số từ tập hợp **N** các số nguyên dương vào chính nó sao cho:
Với mọi: $m, n \in \mathbf{N}$, $f(n^2 f(m)) = m[f(n)]^2$.

Giải:

Gọi S là tập hợp các hàm số được xét.
Lấy f là hàm số bất kỳ trong đó, và đặt $f(1) = a$.
Cho $n = 1$ và $m = 1$ thì được :
$f(f(m)) = a^2m$, $f(an^2) = [f(n)]^2$ với mọi $m, n \in \mathbf{N}$.
Các kết quả này cùng với phương trình ban đầu cho ta:
$[f(m) f(n)]^2 = [f(m)]^2 f(an^2) = f(m^2 f(f(an^2))) = f(m^2a^2an^2)$
$= f(a(amn)^2) = [f(amn)]^2$.
Suy ra rằng: $f(amn) = f(m)f(n)$ với mọi m, n ;
nói riêng: $f(am) = af(m)$, và vì thế :
$af(mn) = f(m) f(n)$ với mọi: $m, n \in \mathbf{N}$. (1)
Bây giờ ta chứng minh rằng $f(n)$ chia hết cho a với mỗi $n \in \mathbf{N}$.

Với số nguyên tố p cho trước, kí hiệu p^{α} và p^{β} lần lượt là lũy thừa cao nhất của p mà chia hết cho a và f(n).

Suy ra bằng phép qui nạp tiêu chuẩn và (1), rằng:

$[f(n)]^k = a^{k-1}f(nk)$ với mọi $k \in \mathbf{N}$.

Lũy thừa cao nhất của p chia hết $[f(n)]^k$ là $p^{k\beta}$;

Lũy thừa cao nhất của p chia hết a^{k-1} là $p^{(k-1)\alpha}$.

Cho nên: $k\beta \geq (k-1)\alpha$ với mọi $k \in \mathbf{N}$, điều này chỉ xảy ra nếu: $\beta \geq \alpha$.

Kết luận đúng với số nguyên tố p bất kỳ, và vì thế, a chia hết f(n).

Như vậy ta có thể đặt: $g(n) = f(n)/a$.

Như thế được một hàm số mới g từ **N** vào chính nó.

Các kết quả đã chứng minh trên đối với f được diễn thành:

$g(a) = a$, $g(mn) = g(m)g(n)$, $g(g(m)) = m$ (2) với mọi: $m, n \in \mathbf{N}$.

Thật vậy: $g(mn) = g(m)g(n)$ tương đương với (1),

còn: $g(g(m)) = m$ suy từ:

$$ag(g(m)) = g(a)g(g(m)) = g(ag(m)) = g(f(m)) = \frac{f(f(m))}{a} = \frac{a^2m}{a} = am.$$

Dễ dàng suy từ (2) rằng:

$g(n^2g(m)) = g(n^2)g(g(m)) = m[g(n)]^2$ với mọi $m, n \in \mathbf{N}$.

Nên, g cũng là một hàm số trong S, và các giá trị của nó không vượt quá các giá trị tương ứng của f. Vậy thì ta có thể thu hẹp chú ý vào các hàm số g thỏa mãn (2). Điều chủ yếu cần đến là mỗi hàm số kiểu này lấy gía trị nguyên tố tại số nguyên tố.

Thật vây, gọi p là một số nguyên tố, và gọi $g(p) = uv$ với số nguyên dương u, v nào đó. Thế là: do (2), $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$

Vì thế: một trong các số g(u) và g(v) bằng 1.

Tức là, nếu: $g(u) = 1$, thì $u = g(g(u)) = g(1) = 1$

Điều đó có nghĩa là g(p) là số nguyên tố.

Để xác định giá trị bé nhất cần thiết, lấy một hàm số g bất kỳ thỏa mãn (2).

Nó là một đơn ánh (g(m) = g(n), dẫn đến:

$m = g(g(m) = g(g(n) = n)$, và thế là nó lấy các gía trị nguyên tố phân biệt tại các số nguyên tố phân biệt.

Vậy, một chặn dưới cho: $g(1998) = g(2 . 3^3 . 37) = g(2)[g(3)]^3g(37)$,

có được khi: g(2), g(3), g(37) là ba số nguyên tố bé nhất 2, 3, 5, với $g(3) = 2$.

Vậy: $g(1998) \geq 3.2^3.5 = 120$ với mỗi $g \in S$. Có, tuy nhiên, một hàm số $g \in S$ với $g(1998) = 120$, điều này chứng tỏ rằng số bé nhất trong bài toán là 120.

Đặt $g(1) = 1$, và xác định g trên các số nguyên tố như sau:

$g(2) = 2$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$ và $g(p) = p$

với mỗi số nguyên tố: $p \neq 2, 3, 5, 37$.

Định nghĩa như thế, được mở rộng tới số bất kỳ: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} \in \mathbf{N}$,

bằng cách đặt: $g(n) = g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2} \ldots g(p_k)^{\alpha_k}$.

Điều kiện trong (2) được thỏa mãn (với $a = 1$), nên $g \in S$.
Rõ ràng: $g(1998) = 120$, điều này hoàn tất chứng minh.

*** Ví dụ 5:**
Hàm số F được xác định trên tập hợp các số nguyên không âm và lấy giá trị nguyên không âm các điều kiện sau: với mọi $n \geq 0$

(i) $F(4n) = F(2n) + F(n)$,
(ii) $F(4n + 2) = F(4n) + 1$,
(iii) $F(2n + 1) = F(2n) + 1$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m, số các số nguyên n,
với: $0 \leq n < 2^m$ và $F(4n) = F(3n)$ bằng $F(2^{m+1})$.

Giải:

Ta có $F(0) = 0$ do (1) và thấy rằng F được xác định duy nhất với các giá trị đầu:

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
F(n) =	0	1	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	5	6	6	7	5	6	...

Các số Fibonacci f_n định bởi $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$ xuất hiện như là giá trị của $n = 2^r$;

$F(2^r) = f_r + 1$ $(r \geq 0)$, suy ra từ (1) bằng qui nạp.
Tổng quát nếu n có biểu diễn nhị phân:

$n = \varepsilon_k 2^k + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1} + \ldots + \varepsilon_2 + \varepsilon_0$, với $\varepsilon_i = 0$ hay 1,

thế thì: $F(n) = \varepsilon_k f_{k+1} + \varepsilon_{k-1} f_k + \ldots + \varepsilon_1 f_2 + \varepsilon_0 f_1$. (I)

Ta kiểm chứng trực tiếp rằng chúng thực sự thỏa điều kiện đã nêu.
Ta để ý rằng: *Nếu trong biểu diễn nhị phân của n không có hai số 1 nào xuất hiện ở vị trí kề nhau (mà ta gọi là "1 bị cô lập"),* thì: $F(3n) = F(4n)$.
Vì khi nhân số n ấy với 3 (viết ở nhị phân là 11) mỗi số 01 (và số 1 đầu) được thay bởi 11, không xảy ra việc "nhớ", một cách tương ứng để có F(3n) mỗi f_{i+1} trong (I) được thay bởi: $f_{i+1} + f_{i+2} = f_{i+3}$, dẫn đến giá trị F(4n).
Hệ thức đúng trong trường hợp $n = 0$ là dễ thấy rồi sau đó để thuận tiện ta sẽ coi số 1 bị cô lập như là 0.

Ta sẽ chứng minh ngược lại rằng: *Với $n \geq 0$, $F(3n) \leq F(4n)$ và nếu đẳng thức đúng thì các số 1 trong n đều cô lập.*

Ta chứng minh bằng qui nạp theo $m \geq 1$ rằng điều đó đúng với mọi n thoả: $0 \leq n < 2m$. Với các giá trị đầu của m, điều đó thấy được trong bảng trên.
Giả định nó đúng với m nào đó.
Bấy giờ cho: $2^m \leq n < 2^{m+1}$

và đặt: $n = 2^m + p$, $0 \le p < 2^m$, cho nên, do (I)

$F(4n) = F(2^{m+2} + 4p) = f_{m+3} + F(4p)$.

Có ba trường hợp :

(a) Nếu $0 \le p < 2m/3$ thế thì $3p < 2m$ nên biểu diễn nhị phân của 3p không nhớ sang 3.2m . Rồi thì suy ra được từ (I) và giả thiết qui nạp rằng:

$F(3n) = F(3 . 2^m) + F(3p) = f_{m+3} + F(3p) \le f_{m+3} + F(4p) = F(4n)$.

Đẳng thức đúng nếu: $FL(3p) = D(4p)$,

nghĩa là nếu p có số 1 cô lập (lại theo giả thiết qui nạp).

(b) Nếu $2^m/3 < p < 2^{m+1}/3$ thế thì biểu diễn nhị phân của 3p sẽ nhớ 1 sang 3.2m và ta có: $F(3n) = f_{m+3} + (F(3p) - f_{m+1})$

$= f_{m+2} + F(3p) < f_{m+3} + F(4p) = F(4n)$.

(c) Nếu $2^{m+1}/3 < p < 2^m$ thì biểu diễn nhị phân của 3p nhớ 10 sang $3. 2^m$ và ta thấy rằng: $F(3n) = f_{m+3} + f_{m+1} + (F(3p) - f_{m+2})$

$= 2f_{m+1} + F(3p) < f_{m+3} + F(4p) = F(4n)$.

Như vậy $F(3n) \le F(4n)$ trong mọi trường hợp.

Đẳng thức $F(3n) = F(4n)$ xảy ra nếu và chỉ nếu $0 \le p < 2^m/3$ và p đã cô lập các số 1.

Rồi thì chữ số nhị phân thứ hai của n là 0 , vì thế n cũng đã cô lập các số 1. Điều đó hoàn tất phép qui nạp .

Kết cục, chỉ còn phải chứng minh rằng có $f_{m+2} = F(2^{m+1})$ số nguyên với các số 1 bị cô lập trong cách biểu diễn nhị phân của chúng trong $[0 , 2^m]$, $m \le 1$.

Thật vậy, kí hiệu số lượng của chúng bằng u_m .

Trong các số này có u_{m-1} số bé hơn 2^{m-1} .

Số còn lại có số 1 ở m - 1 vị trí đầu, và nó theo sau bởi một số nhị phân cùng một kiểu bé hơn 2^{m-2}, có đến u_{m-2} số như thế .

Như vậy : $u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$ với $m \ge 3$;

cũng có $u_1 = 2 = f_3$, $u_2 = 3 = f_4$, và thu được kết quả .

*** Ví dụ 6:**

Tìm tất cả hàm số $f : Z \to Z$ sao cho: $f(1995) = 1996$

$\forall m \in Z$, nếu $f(m) = n$ thì: $f(m) = n$ và $f(n + 3) = m - 3$.

Giải:

Từ điều kiện đề bài suy ra: $\forall n \in Z$ $f(f(n)) = n$ và $f(f(n) + 3) = n - 3$.

Từ đó: $f(n - 3) = f(f(f(n) + 3)) = f(n) + 3$, $\forall n \in Z$.

Suy ra: $f(n) = \begin{cases} f(0) - 3k & \text{nếu } n = 3k \\ f(1) - 3k & \text{nếu } n = 3k + 1 \\ f(2) - 3k & \text{nếu } n = 3k + 2 \end{cases}$, với $k \in Z$.

Vì $1995 \vdots 3$ nên, từ $f(1995) = 1996 \Rightarrow f(0) - 1995 = 1996$

$\Rightarrow f(0) = 3991 \quad (1) \quad \Rightarrow 0 = f(3991)$.

Mà: $3991 = 3 . 1330 + 1$ nên $0 = f(1) - 3990 \Rightarrow f(1) = 3990$.

Nếu: $f(2) = 3t, t \in Z$, thì:

$2 = f(3t) = f(0) - 3t = 2991 - 3t \Rightarrow 3989 = 3t \Rightarrow 3989 \vdots 3$.

Đó là điều vô lý, nên $f(2) \neq 3t, t \in Z$.

Nếu $f(2) = 3t + 1$ thì $2 = f(3t + 1) = f(1) - 3t = 3990 - 3t \Rightarrow 3988 = 3t$

$\Rightarrow 3988 \vdots 3$: vô lý.

Do đó $f(2) \neq 3t + 1$. Như vậy $f(2) = 3t + 2$.

Tóm lại, ta được: $f(n) = \begin{cases} 3991 - n & \text{nếu } n \neq 3k+2 \\ 3t - n + 4 & \text{nếu } n = 3k+2 \end{cases}$,

với t nguyên bất kỳ và k nguyên. Thử lại, ta được hàm số trên là nghiệm bài toán.

*** Ví dụ 7:**

Hãy xác định tất cả hàm số $f : N^* \rightarrow N^*$ sao cho:

$$f(n) + f(n + 1) = f(n + 2)f(n + 3) - 1996 \quad \forall n \in N^*.$$

Giải:

Từ giả thiết, ta có $\forall n \in N^*$

$$f(n + 1) + f(n + 2) = f(n + 3)f(n + 4) - 1996. \qquad (1)$$

$$f(n) + f(n + 1) = f(n + 2)f(n + 3) - 1996. \qquad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $f(n + 2) - f(n) = f(n + 3)[f(n + 4) - f(n + 2)]$.

Từ đó, qui nạp theo n, dễ dàng chứng minh được:

$f(3) - f(1) = f(4) . f(6) . . . f(2n + 2)[f(2n + 3) - f(2n + 1)]$; (3)

và: $f(4) - f(2) = f(5) . f(7) . . . f(2n + 3).[f(2n + 4) - f(2n + 2)]$. (4)

Từ đó, ta có: $f(3) \geq f(1)$.

Vì nếu, ngược lại: $f(3) < f(1)$, thì từ (3) suy ra $f(2n - 1) > f(2n + 1)$.

Do đó sẽ có vô số số nguyên dương ở trong khoảng $[1, f(1)]$: vô lý.

Xét hai trường hợp : $f(3) = f(1)$: Từ (3) ta có, $\forall n \in N^*$

$f(2n + 3) - f(2n + 1) = f(3) - f(1) = 0 \Rightarrow f(2n - 1) = f(1)$. (5)

Do (4), ta được: $f(4) - f(2) = [f(1)]^n . [f(2n + 4) - f(2n + 2)]$ (6)

* *Nếu f(1) = 1:* thì từ (6) suy ra $f(2), f(4), ..., f(2n), ...$ là cấp số cộng.

Thay $n = 1$ vào (1) thì được: $f(4) = f(2) = 1997$ và điều này cho thấy 1997 là công sai của cấp số cộng nói trên. Từ đó ta được:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ a + \left(\frac{n}{2} - 1\right).1997 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases},$$ trong đó $a \in N^*$ bất kỳ.

* *Nếu $f(1) > 1$:* thì từ (6) ta có , $\forall n \in N^*$

$$f(4) - f(2) = f(2n+4) - f(2n+2) = 0 \Rightarrow f(2n) = f(2). \quad (7)$$

Thay vào (2), thu được:

$$f(1) + f(2) = f(1).f(2) - 1996 \Leftrightarrow [f(1) - 1].[f(2) - 2] = 1997. \quad (8)$$

Vì 1997 là một số nguyên tố nên : (8) $\Leftrightarrow \{f(1), f(2)\} = \{1, 1997\}$.

Do đó, ta được các hàm số:

$$f(n) = \begin{cases} 2 \text{ nếu n lẻ} \\ 1998 \text{ nếu n chẵn} \end{cases} \quad \text{hay} \quad f(n) = \begin{cases} 1998 \text{ nếu n lẻ} \\ 2 \text{ nếu n chẵn} \end{cases}.$$

$f(3) > f(1)$: từ (3) suy ra , $\forall n \in N^*$ $\quad f(2n-1) < f(2n+1)$.

Và, do (4) ta được:

$$f(4) - f(2) = f(2n+4) - f(2n+2) = 0 \Rightarrow f(2n) = f(2) \quad (9)$$

và: $\quad f(3) - f(1) = [f(2)]^n . [f(2n+3) - f(2n+1)] \Rightarrow f(2) = f(1)$.

Do đó, dãy $f(1), f(3), \ldots, f(2n+1)$ là cấp số cộng.

Thay $n = 1$ vào (2), thì thu được: $f(3) - f(1) = 1997$.

$\Rightarrow$ cấp số cộng trên có công sai là 1997. Do đó ta được các hàm số :

$$f(n) = \begin{cases} 1 \quad \text{nếu n chẵn} \\ a + \dfrac{n-1}{2}.1997 \text{ nếu n lẻ} \end{cases}, \quad \text{trong đó } a \in N^* \text{ bất kỳ}.$$

*** Ví dụ 8:**

Với số nguyên dương k có trước ta kí hiệu bình phương của tổng các chữ số của nó bởi $f_1(k)$ và gọi: $f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$. Hãy xác định giá trị của $f_{1991}(2^{1990})$.

Giải:

Trước hết để ý rằng với k đủ lớn thì giá trị $f_1(k)$ bé hơn k nhiều.

Vì f_1 không đơn điệu, nên ta phát biểu điều này dưới dạng:

nếu $A \le B$ thì rõ ràng: $f_1(A) < 81(1 + \log B)^2 < (4\log_2 16B)^2$.

Sử dụng bất đẳng thức này hai lần thì thu được một ước lượng khá hợp lý cho $f_2(2^{1990})$: $\quad f_1(2^{1990}) < 2^4(1994)^2 < 2^{26}$; $\quad f_2(2^{1990}) < (4.30)^2 = 14\,400$.

Bây giờ tổng các chữ số của $f_2(2^{1990})$ không quá 36 và vì thế:

$f_3(2^{1990}) \le 36^2 = 1296$; $\quad f_4(2^{1990}) < (9+9+9)^2 = 729$; $\quad f_5(2^{1990}) < 25^2$.

Bây giờ, xét giá trị của f_n theo modulo.

Vì: $f_1(k) = k^2 \pmod 9$ ta có chuỗi sau :

$$1 \rightarrow 1 \leftarrow -1 \;;\; 2 \rightarrow 4 \quad -2 \leftarrow -4 \;; \quad 3 \rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{0} \leftarrow -3$$

Đến đây $2^{1990} \equiv -2 \pmod 9$ và do đó ta lọt vào chu trình 4 nếu n lẻ :
$-2.f_n(21990) \equiv 4 \pmod 9$, cho nên: $f_5(2^{1990}) \equiv 4 \pmod 9$ và $f_5(2^{1990}) \leq 24^2$.
Nếu $x^2 \equiv 4 \pmod 9$ và $x \leq 24$, thì rõ ràng là $x^2 \in H$,
trong đó: $H = \{4 , 49 , 121 , 256 , 400 \}$.
Đơn giản thì được $f_3(h) = 169$ với mỗi $h \in H$.
Từ đây ta ở vào chu trình 169 256 suy ra rằng với $n \geq 8$

$$f_n(2^{1990}) = \begin{cases} 169 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 256 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases} .$$

Trong trường hợp đã nêu $f_{1991}(2^{1990})$ là 256 .

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Dựng hàm số xác định với mọi giá trị thực, sao cho với x bất kỳ $f(f(x) = - x$ và f(x) nhận giá trị nguyên khi x nguyên.

2. Cho a là số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm số $f : N \to N$ thoả:
$f(n + 1) > f(n)$ với mọi n nguyên dương ;
$f(f(n)) = n + a$ với mọi n nguyên dương.

3. Cho a, b là các số tự nhiên với $1 \leq a \leq b$ và $M = \left[\dfrac{a+b}{2}\right]$.

Xác định hàm số: $f : Z \to Z$ bởi: $f(n) = \begin{cases} n + a & \text{nếu } n < M \\ n - b & \text{nếu } n \geq M \end{cases}$.

Gọi: $f^1(n) = f(n)$; $f^{i+1}(n) = f(f^i(n))$, $i = 1 , 2 , \ldots$
Hãy tìm số tự nhiên k bé nhất sao cho: $f^k(0) = 0$.

*
* *

§14. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

*** Ví dụ 1:**

Tìm tất cả hàm số liên tục f: $[0, 1] \to R$ thoả mãn: $f(x) \geq 2xf(x^2)$ $\forall x \in [0, 1]$.

Giải:

Từ giả thiết, thay $x = 0$ và $x = 1$ thì thu được:

$f(0) \geq 0$, $f(1) \leq 0$, với: $0 < x < \frac{1}{2}$. (1)

Rồi, bằng qui nạp, ta được với mọi $n \geq 1$

$f(x) \geq 2xf(x^2) \geq (2x)^n . x^{2^n - n - 1} f(x^{2^n})$. (2)

Vì: $0 < 2x < 1$, nên: $\lim\limits_{n \to \infty} [(2x)^n . x^{2^n - n - 1} f(x^{2^n})] = 0$.

Do đó, từ (1) và (2) suy ra: $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [0 , \frac{1}{2})$. (3)

Mặt khác, với $0 < x < 1$, thì :

$f(\sqrt{x}) \geq 2\sqrt{x} f(x) \Rightarrow f(x) \leq \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \leq \frac{f(x^{\frac{1}{2n}})}{2^n . x^{1 - \frac{1}{2n}}}$. (4)

Vì: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x^{\frac{1}{2n}})}{2^n . x^{1 - \frac{1}{2n}}} = 0$, nên từ (4) suy ra: $f(x) \leq 0$ $\forall x \in (0 , 1)$. (5)

Với mỗi $x \in [\frac{1}{2} , 1)$, tồn tại $n \in N$ để: $x^{2^n} < \frac{1}{2}$ (chẳng hạn $n > \log2(\log_{\frac{1}{2}} 2)$).

Từ (2), ta có : $f(x) \geq 2^n . x^{2^n - 1} f(x^{2^n}) = 0$.

Vậy là, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1)$. Do (5), thì được: $f(x) = 0$, $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1)$.

Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in [0, 1)$.

Vì f liên tục nên $f(x) = 0$, với mọi $x \in [0, 1]$.

*** Ví dụ 2:** Cho hàm số $f : R \to R$ thoả mãn :

a. $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ $\forall x \neq y$;

b. $f(f(f(1992^{19^5}))) = 1992^{19^5}$.

Giải:

Điều kiện đề bài tương đương với: $|f(x) - f(y) \leq |x - y|$.
Dấu " = " xảy ra khi $x = y$.

Đặt: $f(1992^{19^5}) = u$; $f(u) = v$.

Ta có : $f(v) = 1992^{19^5} \Rightarrow |u - 1992^{19^5}| \geq |f(u) - f(1992^{19^5})| = |v - u|$
$\geq |f(v) - f(u)| = |1992^{19^5} - v| \geq |f(1992^{19^5}) - f(v)| = |u - 1992^{19^5}|$.
Suy ra, ở tất cả các dấu bất đẳng thức đều xảy ra dấu " = ".

Điều đó xảy ra khi: $u = 1992^{19^5} = v$.

Vậy: $f(1992^{19^5}) = 1992^{19^5}$.

*** Ví dụ 3:**
Cho R^+ là tập hợp tất cả số thực dương. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số f :
$R^+ \rightarrow R^+$ sao cho: $(f(x))^2 \geq f(x + y)(f(x) + y)$ với mọi số thực dương x và y.

Giải:

Giả định tồn tại một hàm số như thế thoả điều kiện đã nêu.

Ta viết đẳng thức ban đầu dưới dạng: $f(x) - f(x + y) \geq \dfrac{f(x)y}{f(x) + y}$.

Trước hết ta chứng minh rằng: $f(x) - f(x + 1) \geq \dfrac{1}{2}$ với $x > 0$.

Hiển nhiên f là một hàm số đơn diệu không đồng biến.
Cố định $x > 0$ và chọn một số tự nhiên n sao cho:
$n.f(x + 1) \geq 1$. Khi $k = 1, 2, \ldots, n - 1$,

Ta có được: $f(x + \dfrac{k}{n}) - f(x + \dfrac{k+1}{n}) \geq \dfrac{f\left(x + \frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}}{f\left(x + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}} \geq \dfrac{1}{2n}$.

Cộng các bất đẳng thức trên thì được: $f(x) - f(x + 1) \geq \dfrac{1}{2}$.

Do đó: $f(x) - f(x + m) = \sum\limits_{i=0}^{m-1}\big(f(x + i) - f(x + i + 1)\big) \geq \dfrac{m}{2} \geq f(x)$.

Và thế là: $f(x + m) \leq 0$.
Nhưng điều này trái với giả thiết rằng f dương hẳn.

*** Ví dụ 4:**

Cho hàm số $f : R \to R$ thoả mãn: $\begin{cases} f(x+3) \le f(x)+3 \\ f(x+2) \ge f(x)+2 \end{cases}$, $\forall x \in R$.

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) - x$ tuần hoàn.

Giải:

Từ giả thiết, ta có $\forall x \in R$

$g(x+6) = f(x+6) - x - 6 \le f(x+3) - x - 3 \le f(x) - x = g(x)$,

và: $g(x+6) = f(x+6) - x - 6 \ge f(x+4) - x - 4 \ge f(x+2) - x - 2 \ge f(x) - x = g(x)$.

Suy ra: $g(x+6) = g(x)$, $\forall x$: đpcm .

*** Ví dụ 5:**

Tìm tất cả hàm số $f : R \to R$ thoả mãn: $\begin{cases} f(x) \ge e^x \\ f(x+y) \ge f(x)f(y) \end{cases}$, $\forall x, y \in R$.

Giải:

Đặt: $f(x) = e^x g(x)$, ta có với mọi x, y :

(i) $g(x) \ge 1$;

(ii) $g(x+y) \ge g(x)\,g(y)$.

Thay $x = y = 0$, thì thu được:

$$g(0) \ge 1 \text{ và } g(0) \ge [g(0)]^2 \Rightarrow g(0) \ge 1 \text{ và } g(0) \le 1 .$$

Do đó : $g(0) = 1$. Suy ra: $1 = g(0) = g(x - x) \ge g(x)\,g(-x)$.

Vì: $g(-x) \ge 1$ nên $g(x) \le 1 \Rightarrow g(x) = 1$. Do đó $f(x) = e^x$.

Thử lại thấy nghiệm đúng. Vậy nghiệm của bài toán: $f(x) = e^x$.

*** Ví dụ 6:**

Xác định tất cả các hàm số $f : (1, +\infty) \to (1, +\infty)$ thoả điều kiện:

$f(x^m y^n) \le f(x)^{\frac{1}{4m}}.f(y)^{\frac{1}{4n}}$ với mọi số thực $x, y > 1$ và các số $m, n > 0$.

Giải:

Lấy $x = y > 1$ và $m = n = \dfrac{s}{2}$, với $s > 0$:

Ta có: $f(x^s) \le f(x)^{\frac{1}{s}}$. Thay s bởi $\dfrac{1}{s}$ thì có : $f(y) \le f(y^s)^s$ (1)

Vì (1) đúng với mọi $y > 1$, nên với mọi $x > 1$

Ta có: $f(x) \le f(x^s)^s \Rightarrow f(x)^{\frac{1}{s}} \le f(x^s)$. (2)

Từ (2) suy ra: $f(x^s) = f(x)^{\frac{1}{s}}$ với mọi $x > 1$, $s < 0$.
Đặt $x = e$, $s =$ lớn nhất thì thu được:

$$f(t) = f(e)^{\frac{1}{\ln t}} \Rightarrow f(t) = C^{\frac{1}{\ln t}} \text{, với } C = f(e) > 1 .$$

Đảo lại, hàm số $f(t) = C^{\frac{1}{\ln t}}$, với C là hằng số bất kỳ lớn hơn 1, thoả điều kiện đề bài. Ta có, với $x, y > 1$ và $m, n > 0$:

$$f(x^m x^n) = C^{\frac{1}{\ln(x^m y^n)}} = C^{\frac{1}{m\ln x + n\ln y}} \le C^{\frac{1}{4m\ln x} + \frac{1}{4n\ln y}} = f(x)^{\frac{1}{4m}} . f(y)^{\frac{1}{4n}} .$$

* * *

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho m, n, p, q là các số nguyên thoả các điều kiện:

$$n \neq 0 , q \neq 0 \quad \text{và} \quad \frac{m}{n} \le \frac{p}{q} .$$

Gọi $f : R \to R$ là hàm số thoả mãn, với mọi $x \in R$: $\begin{cases} f(x+n) \le f(x) + q \\ f(x+m) \ge f(x) + p \end{cases}$.

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) - \frac{q}{n}x$ là hàm số tuần hoàn.

2. Tồn tại chăng hàm số khác hằng, $f : R \to R$ thoả mãn bất phương trình :

$$(f(x) - f(y))^2 \le |x - y|^3 , \quad \forall x, y \in R ?$$

*

* *

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài toán 01:

Tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ thoả mãn đồng nhất thức :

$f(x + y) = f(x) + f(y) + f(axy)$, $\forall x, y \in R$, $a \neq 0$ là hằng số thực cho trước.

Giải:

Thay: x bởi $\frac{x}{a}$ và y bởi $\frac{y}{a}$, ta được: $f(\frac{x}{a} + \frac{y}{a}) = f(\frac{x}{a}) + f(\frac{y}{a}) + f(\frac{xy}{a})$,

và: $f'(x + y) = f'(x) + f'(y) + f'(xy)$.

với: $f'(x) = f(\frac{x}{a})$. Cho $y = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$, rồi cho $y = 1$

$\Rightarrow f'(x + 1) = + f'(1)$.

Suy ra : $f'(x) + f'(1) = 2^n[f'(x - n) + f'(1)]$, $\forall n \in N$. (1)

Cho $y = - 1$, thì được $f'(x - 1) = f'(x) + f'(- x) + f'(- 1)$

$\Rightarrow f'(x - n - 1) = f'(x - n) + f'(n - x) + f'(- 1)$.

Từ (1), ta có : $\frac{1}{2^{n+1}}[f'(x) + f'(1)] - f'(1)$

$= \frac{1}{2^n}[f'(x) + f'(1)] - f'(1) + 2n[f'(- x) + f'(1)] - f'(1) + f'(- 1)$.

$\Leftrightarrow 2^n[f'(- x) + f'(1)] = f'(1) - f'(- 1) - \frac{1}{2^{n+1}}[f'(x) + f'(1)]$

$\Leftrightarrow 2^{2n+1}[f'(- x) + f'(1)] = 2^{n+1}[f'(1) - f'(- 1)] - [f'(x) + f'(1)]$

$\Leftrightarrow 2^{2n+1}f'(- x) + f'(x) = (2^{n+1} - 2^{2n+1} - 1)f'(1) - 2^{n+1}f'(- 1)$.

Suy ra : $2^{2n+1}f'(x) + f'(- x) = (2^{n+1} - 2^{2n+1} - 1)f'(1) - 2^{n+1}f'(- 1)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow (2^{n+1} - 2^{2n+1} - 1)f'(1) - 2^{n+1}f'(- 1) = 0$, $\forall n \in N$.

$\Rightarrow f'(- 1) = f'(1) = 0$.

Do đó: $2^{2n+1}f'(- x) + f'(x) = 0$ và $2^{2n+1}f'(x) + f'(- x) = 0$

$\Rightarrow f'(x) = f'(- x) = 0$.

Vậy $f'(x) = 0$, $\forall x$. Suy ra: $f(x) = 0$, $\forall x$.

Bài toán 02:

Tìm tất cả hàm số liên tục $f : [0 , 1] \to R$

sao cho: $f(x) = \frac{1}{2}[f(\frac{x}{2}) + f(\frac{1 + x}{2})]$, $\forall x \in [0 ,1]$.

Giải:

Gọi $f(x)$ là hàm số thoả mãn điều kiện đề bài .

Khi đó: $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1)$. Ta chứng minh rằng: $f(x) = f(0)\ \forall x \in (0, 1)$.

Thật vậy, giả định tồn tại $x_0 \in (0 , 1)$ sao cho: $f(x_0) \neq f(0)$.

- Trường hợp $f(x_0) > f(0)$:

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0 ,1]$ nên tồn tại $x_1 \in (0 , 1)$ sao cho: $f(x_1) \geq f(x)\ \forall x \in [0 , 1]$ $(f(x_1) = \max\limits_{x \in [0,1]} f(x))$.

Đặt: $M = f(x_1)$, ta có $M > f(0)$.

Gọi: $P = \{x \in (0, 1) / f(x) = M\}$. Vì $x_1 \in P$ nên $P \neq \varnothing$.

Hơn nữa P bị chặn. Do đó có $d = \sup P$.

Hiển nhiên $d \leq 1$ và $d > 0$.

- Nếu $d < 1$: Khi đó tồn tại dãy số (x_n) sao cho:

  $x_n \in P,\ \forall n \in N^*$ và $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = d$.

Vì: $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ nên $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(d)$

Vì: $x_n \in P\ \forall n \in N^* \Rightarrow f(x_n) = M, \forall n \in N^* \Rightarrow f(d) = M$.

Mặt khác: vì $d \in (0 , 1)$, nên:

$$f(d) = \frac{1}{2}[f(\frac{d}{2}) + f(\frac{1+d}{2})] \Rightarrow f(\frac{d}{2}) = M \text{ và } f(\frac{1+d}{2}) = M$$

(vì: $f(\frac{d}{2}) \geq M$ và $f(\frac{1+d}{2}) \leq M$).

Do: $0 < \frac{1+d}{2} < 1$ và $f(\frac{1+d}{2}) = M$ nên $\frac{1+d}{2} \in P$.

Mặt khác: $\frac{1+d}{2} > d$: trái với định nghĩa của d .

- Nếu $d = 1$ thì $M = f(1) = f(0)$: vô lý .

- Trường hợp $f(x_0) < f(0)$ cũng được xét tương tự .

Vậy, $f(x) = f(0)\ \forall x \in (0 , 1) \Rightarrow f(x) = f(0)\ \forall x \in [0 , 1]$.

Do đó $f(x) = a$ (hằng số). Thử lại, ta kết luận hàm số phải tìm là: $f(x) = a$.

Bài toán 03:

Tìm tất cả hàm số $f : R \to R$ sao cho:

$f((x+1)f(y)) = y(f(x) + 1)\ \forall x, y \in R$.

Giải:

Thay $x = -1$ vào hệ thức đề bài:

$f(0) = y(f(-1) + 1)\ \forall y \in R \Rightarrow f(0) = 0$ và $f(-1) = -1$.

Từ đó , thay $x = 0$ trong hệ thức đề bài: $f(f(y)) = y$, $\forall y \in R$ (1)

Trong hệ thức đề bài, lấy $x = -2$, $y = -1$:

$f(1) = -(f(-2) + 1) \Rightarrow f(1) = -1$ hay $f(1) = 1$.

Nếu $f(1) = -1$: $1 = f(f(1)) = f(-1) = -1$: vô lý.

Do đó $f(1) = 1$. Như thế, trong hệ thức đề bài thay $y = 1$:

$f(x + 1) = f(x) + 1$, $\forall x \in R$

$\Rightarrow f(xy) = f(x \,.\, f(f(y))) = f(y)(f(x) - 1) + 1) = f(y)f(x)\ \forall x, y \in R$.

Từ đó, $\forall x \geq 0$ thì $f(x) = [f(\sqrt{x})]^2 \geq 0$ và : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (2)

Lại có với $y \neq 0$: $f(x + y) = f((\frac{x}{y} + 1)y) = f((\frac{x}{y} + 1)f(f(y)))$

$$= f(y)(f(\frac{x}{y}) + 1) = f(y)\, f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(x) + f(y) .$$

Như thế, cùng với $f(0) = 0$, ta được: $f(x + y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in R$.

Sau đó, ta có: $\forall x , y \in R ; x > y$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = f(x - y) = [f(\sqrt{x - y})]^2 > 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến trên R .

Như thế :

- Nếu có $x_0 \in R$ mà $f(x_0) > x_0$ thì $x_0 = f(f(x_0) > f(x_0)$: vô lý .
- Nếu có $x_0 \in R$ mà $f(x_0) < x_0$ thì $x_0 = f(f(x_0) < f(x_0)$: vô lý .

Do đó: $f(x) = x, \forall x$. Thử lại, hàm số trên nghiệm đúng .

Bài toán 04:

Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$, $g : R \to R$ sao cho:

$f(x + g(y)) = x\, f(y) - y\, f(x) + g(x)$ với mọi $x, y \in R$.

Giải:

Trước hết ta tìm các hàm số f và g bằng cách giả định rằng g lấy giá trị 0, và rồi chứng minh rằng thực sự g lấy giá trị này.

Thế là, lấy α là số sao cho $g(\alpha) = 0$.

Đặt : $y = \alpha$ trong phương trình đã cho ;

điều này cho ta: $f(x) = xf(\alpha) - \alpha f(x) + g(x)$,

nên: $g(x) = (\alpha + 1)f(x) - f(\alpha)x$. (1)

Rồi thì phương trình đã cho trở thành:

$f(x + g(y)) = (\alpha + 1 - y)f(x) + (f(y) - f(\alpha))x$ (2)

Bây giờ, đặt $y = \alpha + 1$ trong (2). Ta được: $f(x + n) = mx$

Trong đó: $n = g(\alpha + 1)$, $m = f(\alpha + 1) - f(\alpha)$.

Do đó $f(x)$ là một hàm số tuyến tính.

Bây giờ (1) suy ra rằng $g(x)$ cũng là một hàm số tuyến tính .

Cho: $f(x) = tx + r$, $g(x) = px + q$.

Thay các biểu thức này vào phương trình đã cho và so sánh với các hệ số của hai vế thì thu được : $t = p + r$, $tq + r = q$, $tp = - r$.

Suy ra rằng $p \neq -1$, và ta có thể biểu thị t, r, q như sau:

$$t = \frac{p}{p+1} \;;\quad r = -\frac{p^2}{p+1} \;;\quad q = -p^2 .$$

Như thế : $f(x) = \dfrac{p}{p+1}x - \dfrac{p^2}{p+1}$, $g(x) = px - p^2$; $p \in R \setminus \{-1\}$.

Bây giờ ta chứng minh rằng $g(\alpha) = 0$ với α nào đó .

Nếu: $f(0) = 0$, thì bằng cách đặt $y = 0$ trong phương trình đã cho ta được:

$f(x + g(0)) = g(x)$ với mọi x, cho nên: $g(-g(0)) = f(0) = 0$, như đòi hỏi.

Từ đây ta giả định rằng: $f(0) = b \neq 0$.

Chọn: $x = 0$ và kí hiệu $g(0)$ là a , ta được: $f(g(y)) = a - by$. (3)

Do $b \neq 0$, (3) dẫn đến rằng g là đơn ánh và f là toàn ánh.

Kế đến, thay x bởi $g(x)$ trong phương trình đã cho thì được:

$f(gx) + g(y)) = g(x)f(y) - yf(g(x) + g(g(x))$ (4)

Do tính đối xứng: $f(g(y) + g(x)) = g(y)f(x) - xf(g(y)) + g(g(y))$ (5)

Cho vế phải của (4) và (5) bằng nhau và sử dụng (3), ắt thu được:

$g(x)f(y) - ay + g(g(x)) = g(y)f(x) - ax + g(g(y))$ (6)

Vì: f là toàn ánh , nên tồn tại một số c sao cho $f(c) = 0$;

Đặt: $y = c$ trong (6) . Thế thì: $g(g(x)) = kf(x) - ax + d$.

Trong đó: $k = g(c)$, $d = g(g(c)) + ac$.

Bấy giờ (6) trở thành: $g(x)f(y) + kf(x) = g(y)f(x) + kf(y)$.

Với: $y = 0$ ta có: $g(x)b + kf(x) = af(x) + kb$,

Từ đó : $g(x) = \dfrac{a-k}{b} f(x) + k$.

Để ý rằng: $a - k \neq 0$ vì: $a = g(0)$; $k = g9c)$,

trong khi g là đơn ánh, và $c \neq 0$ $(f(c) = 0 \neq f(0))$.

Và vì f là toàn ánh, ta thấy rằng g cũng là toàn ánh.

Và như vậy nó phải lấy giá trị 0.

Bài toán 05:

Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thỏa:

$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ với mọi $x, y \in R$.

Giải:

Gọi A là miền giá trị của hàm số và $c = f(0)$.

Đặt $x = y = 0$ thì được: $f(-c) = f(c) + c - 1$, nên $c \neq 0$.

Dễ dàng tìm được cái thu hẹp $f|A$: lấy $x = f(y)$ sẽ có:

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \quad \text{với mọi } x \text{ thuộc } A. \qquad (1)$$

Bước chủ yếu là chứng minh rằng: $A - A = R$.

Thật vậy, với $y = 0$ ta được:

$\{ f(x - c) - f(x) \mid x \in R \} = \{cx + f(c) - 1 \mid x \in R\} = R$

vì c không bằng zero.

Bây giờ ta có thể có được giá trị của $f(x)$ với x bất kỳ: nếu chọn $y_1, y_2 \in A$ sao cho: $x = y_1 - y_2$ và sử dụng (1) thì :

$$f(x) = f(y_1 - y_2) = f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 \qquad (2)$$

$$= \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1$$

$$= c - \frac{(y_1 - y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}.$$

So sánh (1) và (2) thì được $c = 1$ và thế là: $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \in R$.

Bài toán 06:

(a) Có tồn tại các hàm số $f : R \to R$ và $g : R \to R$ sao cho:

$f(g(x)) = x^2$ và $g(f(x)) = x^3$ với mọi $x \in R$?

(b) Có tồn tại các hàm số $f : R \to R$ và $g : R \to R$ sao cho:

$f(g(x)) = x^2$ và: $g(f(x)) = x^4$ với mọi $x \in R$?

Giải:

(a) Giả định rằng f và g là những hàm như thế.

Suy từ phương trình thứ hai ra rằng: $f(x_1) \neq f(x_2)$ khi $x_1 \neq x_2$ ...

Đặc biệt: $f(0)$, $f(1)$ và $f(-1)$ là ba số phân biệt.

Mặt khác, cả hai phương trình kết hợp cùng suy ra:

$(f(x))^2 = f(g(f(x))) = f(x^3)$. Lấy: $x = 0$, $x = 1$ và $x = -1$

ta suy ra rằng mỗi một trong ba số $f(0)$, $f(1)$ và $f(-1)$ bằng với bình phương của nó, và như thế phải bằng 0 hay bằng 1. Mâu thuẫn ấy chứng tỏ rằng không có hàm nào thỏa điều kiện đề bài cả.

(b) Các cặp hàm thỏa các phương trình của (b) là tồn tại.

Một tiếp cận khả thi để xây dựng một ví dụ là như sau.

Bắt đầu, ta chú ý đến khoảng $(1, \infty)$

và thử tìm hàm $F, G : (1,\infty) \to (1, \infty)$ thỏa các phương trình:

$$F(G(x)) = x^2 \quad \text{và} \quad G(F(x)) = x^4 \quad \text{với} \quad x > 1 \qquad (1)$$

ý đồ là biến đổi những hàm này thành những hàm loga. Loga sẽ biến các phép toán bình phương thành nhân đôi và nhân đôi (hay nhân với một hằng số tuỳ ý) thành dịch chuyển một hằng số. [Vì ta có ý định áp dụng biến đổi loga hai lần, nên giá trị của biến số phải lớn hơn 1 ; đó là lý do mà ta phải xét trước hết các hàm xác định trên $(1, \infty)$. Để mở rộng nó lên tòan bộ đường thẳng thực, là vấn đề hòan toàn tiêu chuẩn, nó sẽ được thực hiện ở bước cuối cùng của bài giải]

Và thế là, giả định rằng các hàm $F, G: (1, \infty) \to (1, \infty)$ thỏa điều kiện (1).

Ta xác định một cặp hàm mới $\varphi, \psi : R \to R$ bởi các công thức:

$$\varphi(x) = \log\log F(2^{2^x}) \quad \text{và:} \quad \psi(x) = \log\log G(2^{2^x}) \quad \text{với: } x \in R.$$

Từ đây về sau, loga đều lấy theo cơ số 2.

Những hàm này thỏa các phương trình:

$$\varphi(\psi(x)) = x + 1 \quad \text{và} \quad \psi(\varphi(x)) = x + 2 \quad \text{với} \quad x \in R \qquad (2)$$

Và ngược lại, nếu $\varphi, \psi : R \to R$ là các hàm bất kỳ thỏa (2),

thì ta có thể xác định các hàm $F, G : (1,\infty) \to (1, \infty)$ bằng cách đặt :

$$F(x) = 2^{2^{\varphi(\log\log x)}} \quad \text{và} \quad G(x) = 2^{2^{\psi(\log\log x)}} \qquad (3)$$

và những hàm này thỏa hệ (1).

Các ví dụ về hàm φ, ψ thỏa các phương trình (2) có thể tìm thấy ngay trong lớp hàm đơn giản nhất đó là lớp các hàm tuyến tính. Tạm gọi $\varphi(x) = ax + b$ và $\psi(x) = cx + d$, và nhét những biểu thức này vào các phương trình (2), ta sẽ tìm thấy rằng các phương trình ấy thỏa mãn nếu và chỉ nếu:

$$a = \frac{1}{2}, \ c = 2 \ \text{và} \ 2b + d = 2.$$

Lấy, chẳng hạn: $b = 1$ và $d = 0$ ta thu được theo các công thức của (3) cặp:

$$F(x) = 2^{2^{1 + \frac{1}{2}\log\log x}} \qquad \text{và} \qquad G(x) = 2^{2^{2\log\log x}}.$$

Chúng xác định trên khoảng $(1, \infty)$ và thỏa mãn các phương trình (1) đó. Cần phải lưu ý rằng các công thức xác định nó có thể đơn giản thành:

$$F(x) = 2^{2\sqrt{\log x}} \text{ và } G(x) = 2^{(\log x)^2} \text{ với } x > 1 \qquad (4)$$

Việc còn lại là mở rộng miền xác định của nó lên cả R .

Điều này có thể thực hiện như sau, ta định nghĩa:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{với } x \in (1, \infty) \\ \dfrac{1}{F(1/x)} & \text{với } x \in (0,1) \\ 1 & \text{với } x = 1 \end{cases} ;$$

$$\tilde{G}(x) = \begin{cases} G(x) & \text{với } x \in (1, \infty) \\ \dfrac{1}{G(1/x)} & \text{với } x \in (0,1) \\ 1 & \text{với } x = 1 \end{cases}$$

và rồi: $f(x) = \tilde{F}(|x|)$, $g(x) = \tilde{G}(|x|)$

với: $x \in R \setminus \{0\}$; $f(0) = g(0) = 0$.

Dễ thấy rằng những hàm này thoả các điều kiện đòi hỏi.

Bài toán 07:

Có tồn tại chăng một hàm số $f : R \to R$ thoả mãn đồng thời ba điều kiện sau ?:

(a) Có một số dương M sao cho: $-M \leq f(x) \leq M$ với mọi x .

(b) $f(1) = 1$.

(c) Nếu $x \neq 0$ thì: $f\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^2$.

Giải:

Một f thoả mãn đồng thời ba điều kiện đã nêu là không tồn tại.

Giả định ngược lại rằng $f : R \to R$ thoả điều kiện đề bài .

Gọi c là cận trên bé nhất của $\{f(x) : x \in R\}$.

Ta có $c \geq 2$ vì: $f(2) = f(1 + \dfrac{1}{1^2}) = f(1) + [f(1)]^2 = 2$.

Cũng thế, vì c là cận trên bé nhất, nên có một dãy: x_k , $k = 1, 2, \ldots$ các số thực sao cho $f(x_k) \geq c - \dfrac{1}{k}$ với mọi k .

Thế thì: $c \geq f\left(x_k + \dfrac{1}{x_k^2}\right) = f(x_k) + \left[f\left(\dfrac{1}{x_k^2}\right)\right]^2 \geq c - \dfrac{1}{k} + \left[f\left(\dfrac{1}{x_k^2}\right)\right]^2$.

Như vậy: $\left[f\left(\frac{1}{x_k^2}\right)\right]^2 \le \frac{1}{k}$ cho nên: $f(\frac{1}{x_k}) \ge -\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Và cũng có: $c \ge f\left(\frac{1}{x_k + x_k^2}\right) = f(\frac{1}{x_k}) + [f(x_k)]^2 \ge -\frac{1}{\sqrt{k}} + \left(\frac{c-1}{k}\right)^2$.

Suy ra rằng: $\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k^2} \ge c\frac{c-k-2}{k} \ge c\frac{k-2}{k}$,

hay: $\frac{k\sqrt{k}-1}{k(k-2)} \ge c \ge 2$.

Điều này không còn đúng nữa nếu k đủ lớn.

Bài toán 08:

Cho f và g là hai hàm số có giá trị nguyên xác định trên tập hợp tất cả các số nguyên sao cho: $f(m + f(f(n))) = -f(f(m+1)) - n \quad \forall m, n \in Z$;

g là một hàm đa thức với hệ số nguyên và $g(n) = g(f(n)) \quad \forall n \in Z$.

Hãy xác định g(1991) và dạng tổng quát nhất của g.

Giải:

Gọi $f^2(n)$ thay cho $f(f(n))$. Từ (a), thay m bởi $f^2(m)$ thì được:

$$f(f^2(m) + f^2(n)) = -f^2(f^2(m) + 1) - n .$$

Thay đổi vai trò giữa m và n thì: $f(f^2(n) + f^2(m)) = -f^2(f^2(n) + 1) - m$.

Từ hai hệ thức này ta được: $f^2(f^2(m) + 1) - f^2(f^2(n) + 1) = m - n$.

Lại theo (a) : $f^2(f^2(m) + 1) = f(f^2(f^2(m) + 1)) = f(-m - f^2(2))$

Và tương tự, ta có: $f^2(f^2(n) + 1) = f(-n - f^2(2))$ ...

Đặt $f^2(2) = k$, thì được: $f(-m-k) - f(-n-k) = m - n$,

với mọi số nguyên m và n . Thay m bởi $-m-k$ và n bởi $-k$,

ta được: $f(m) - f(0) = -m - k + k = -m$.

Do đó: $f(m) = -m + f(0)$ với mọi $m \in Z$.

Cho nên: $f(f(m)) = -f(m) + f(0) = m - f(0) + f(0) = m$.

Như thế $f^2(m) = m$ với mọi số nguyên m.

Sử dụng kết quả này vào (a) thì được $f(m + n) = -m - 1 - n$ với mọi số nguyên m và n . Lấy $m = 0$ thì được $f(n) = -n - 1$ với mọi số nguyên n.

Như thế: $f(1991) = -1992$.

Từ (b) ta được $g(n) = g(-n-1)$, với mọi số nguyên n .

Vì g là một đa thức trên tập các số nguyên, mở rộng hàm tới các số thực cho một đa thức $g(x)$ thoả $g(x) = g(-x-1)$ với mọi số thực x.

Một đa thức theo x cũng có thể biểu diễn được thành đa thức theo: $x + \lambda$ với mọi số thức λ. Lấy, đặc biệt: $\lambda = 1/2$ thì được $g(x) = P(x + 1/2)$.

Thay x bởi $-x-1$, ta được $g(-x-1) = P(-x-1/2)$.

Như vậy $P(x + 1/2) = P(-x-1/2)$.

Do đó g là một đa thức theo $(x + 1/2)^2 = x^2 + x + 1/4$ và vì thế là đa thức theo $x^2 + x$. Dạng tổng quát nhất của g sẽ là:

$g(n) = a_0 + a_1n(n+1) - a_2n^2(n+1)^2 + \ldots + a_pn^p(n+1)^p$,

trong đó các a_i là những số nguyên.

Bài toán 09:

Cho n là số nguyên dương, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ và k là số nguyên dương sao cho $\frac{n}{2} \leq k \leq n$. Xác định số tất cả các hàm số $f: X \to X$ sao cho các điều kiện sau được thoả :

(i). $f^2 = f$,

(ii). Số phần tử của miền giá trị của f là k.

(iii). Với mỗi y thuộc miền giá trị của f, số tất cả các điểm x thuộc X sao cho: $f(x) = y$ là không quá 2.

Giải:

Với $f: X \to X$, $f^2 = f \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x)$ với mọi $x \in X$, như thế thì :

$f^2 = f \Leftrightarrow f(y) = y$ với mọi $y \in E_f$, E_f dùng để chỉ miền giá trị của f.

Số tất cả tập con Y của X sao cho:

$|Y| = k$ bằng C_n^k, trong đó $|Y|$ kí hiệu số phần tử của Y.

Cho $Y \subset X$ với $|Y| = k$. Thế là với $f: X \to X$ mà $E_f = Y$ và $f(y) = y$ với mọi $y \in Y$, ta có f thoả (iii) nếu và chỉ nếu với $x, x' \in X \setminus Y$, $x \neq x'$ dẫn đến $f(x) \neq f(x')$ trong Y. Do đó số tất cả các $f: X \to X$ sao cho $E_f = Y$, $f(y) = y$ với mọi $y \in Y$ và f thoả (iii) bằng $k(k-1)\ldots(k-(n-k-1))$.

Vì thế số tất cả $f: X \to X$ thoả (i), (ii) và (iii) bằng với:

$$C_n^k k(k-1)(k-2) \ldots (k-(n-k-1)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} k(k-1)(k-2) \ldots (2k-n+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}.$$

Bài toán 10:

Cho hàm số $f : N \to N$ sao cho:

(i). f đồng biến chặt chẽ ;

(ii). $f(mn) = f(m)f(n)$ $\forall m, n \in N$;

(iii). Nếu $m \neq n$ và $mn = nm$ thì $f(m) = n$ hay $f(n) = m$.

Hãy xác định $f(30)$.

Giải:

Để ý rằng với $m \neq n$, có một cặp duy nhất $\{2 , 4\}$ thoả $m^n = n^m$.

Vì thế $f(4) = 2$ hay $f(2) = 4$.

Nhưng $f(4) = 2$ là không được vì f đồng biến chặt chẽ .

Vì: $f(30) = f(2)f(3)f(5)$ nên ta phải tìm $f(3)$ và $f(5)$.

Trước hết ta sẽ tìm $f(3)$.

Theo (i) : $4 = f(2) < f(3) < f(4) = f(2^2) = (f(2))^2 = 16$.

Gọi $f(3) = k$, trong đó: $5 \leq k \leq 8$,

Thế thì : $f(9) = f(3)f(3) = k^2 \leq 64$, nhưng: $f(8) = f(2^3) = (f(2))^3 = 64$

thì trái với điều kiện (i), cho nên trường hợp này không xảy ra được.

Nếu $f(3) = 10$, thì $f(3^5) = f(243) = 100000$.

Nhưng $f(2^8) = f(256) = 4^8 = 65\,536$ là điều không thể được,

vậy là $f(3) = 9$. Kế đó, ta tìm $f(5)$.

Theo (i) : $16 = f(4) < f(5) < f(6) = f(2)f(3) = 36$.

Nếu $17 \leq f(5) \leq 24$ thì $289 \leq f(25) \leq 576$.

Nhưng $f(24) = f(3)f(8) = 576$ là điều không thể được.

Nếu: $27 \leq f(5) \leq 35$ thì $729 \leq f(25) \leq 1\,225$.

Nhưng $f(27) = f(3^3) = 729$ là không được.

Như vậy ta phải có $f(5) = 25$ hay 26.

Nếu: $f(5) = 26$ thì $f(125) = f(5^3) = 26^3 = 17\,576$.

Nhưng: $f(128) = f(2^7) = 4^7 = 16\,384$ là vô lý .

Do đó: $f(5) = 25$. Vậy $f(30) = 4 \times 9 \times 25 = 900$.

*

* *

CÁC ĐỊNH NGHĨA BỔ SUNG

* Cận trên, cận dưới : Cho $E \subset R$, $E \neq \varnothing$.

1. α là cận trên đúng của $E \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \alpha \quad \forall x \in E \\ \forall \delta > 0 , \exists x \in E : \alpha - \delta < x \end{cases}$.

2. β là cận dưới đúng của $E \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \beta \quad \forall x \in E \\ \forall \delta > 0 , \exists x \in E : \beta + \delta > x \end{cases}$.

   Kí hiệu: $\alpha = \sup E$; $\beta = \inf E$.

*

* *

CÁC ĐỊNH LÝ BỔ SUNG

* Cận trên, cận dưới :

1) Cho $E \subset R$, $E \neq \varnothing$.
   Nếu E bị chặn trên (*dưới*) thì tồn tại cận trên (*dưới*) đúng của E .

2) Cho $E \subset R$, $E \neq \varnothing$.
   Nếu E có $\alpha = \sup E$ ($\beta = \inf E$) thì tồn tại dãy số (x_n) sao cho:
   $x_n \in E$, $\forall n \in N^{\star}$ và: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \alpha$ ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \beta$) .

*

* *

HƯỚNG DẪN GIẢI

1.1. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}$.

1.2. $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$.

1.3. $f(x) = x^2 - 2$.

1.4. $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x - 2}$.

1.5. $f(x) = \dfrac{1 - 2x^2}{x^2}$.

2.1. $f(x) = \dfrac{9x^2 - 3x + 2}{1 - 9x}$. Thay x bởi $-x$.

2.2. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Thay x bởi $\dfrac{1}{x}$.

2.3. Gọi phương trình đề bài là (1) .

Thay x bởi $\dfrac{1}{1-x}$, thì được: $f(\dfrac{1}{1-x}) + f(\dfrac{x-1}{x}) = \dfrac{1}{1-x}$ (2) .

Lấy (1) trừ (2) cho: $f(x) - f(\dfrac{x-1}{x}) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ (3) .

Thay x bởi $\dfrac{x-1}{x}$ trong (3) sẽ có: $f(\dfrac{1}{1-x}) - f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$ (4).

Rốt cục (1) và (4) cho $f(x) = \dfrac{x-1}{2x}$.

2.4. Thay x bởi $\dfrac{3x-2}{x-3}$ thì phương trình đề bài trở thành:

$$3f(\frac{x}{x-1}) + 2f(\frac{3x-2}{2x+1}) = \frac{-5x^2 + 17x - 6}{3x^2 - 2x}.$$

Từ đó suy ra: $f(\dfrac{x}{x-1}) = \dfrac{x-1}{x}$. Vậy: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.5. Thay x bởi $\dfrac{a^2}{a-x}$ trong phương trình đề bài (1) , thì được: $f(\frac{a^2}{a-x}) + f(\frac{ax-a^2}{x}) = \frac{a^2}{a-x}$ (2).

Thay x bởi $\frac{a^2}{a-x}$ trong (2) thì được:

$f(\frac{ax-a^2}{x}) + f(x) = \frac{ax-a^2}{x}$ (3).

(1) + (2) - (3) cho: $f(x) = \frac{x^3 - a^2x + a^3}{2x(x-a)}$.

2.6. $f(x) = \frac{(x-3)\sin x}{x^2+3}$.

2.7. Thay $t = \frac{1}{x}$, rồi thay $x = \frac{t-2}{t+1}$.

2.8. Thay $t = \frac{1}{x-1}$.

2.9. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ m & x = 0 \end{cases}$

2.10. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 \frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ m & x = 0 \end{cases}$.

3.1. Thay $\frac{x}{x+1}$ bởi 2x - 1, thì phương trình thứ hai trở thành:
$f(2x-1) + 2g(1-x) = 3$. Ta được $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$.

3.2. Thay 3x - 1 bởi x + 1, thì phương trình thứ nhất trở thành:
$f(x+1) + g(2x+3) = x + 2$. Suy ra $g(x) = 2$, $f(x) = x - 1$.

3.3. Thay 2x + 1 bởi x - 2. Ta được $f(x) = 2x$, $g(x) = 2 - x$.

4.1. $f(n+1) = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 2^{n+1} + 1$.

4.2. $f(n) = 3^{n-1}f(1) + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \ldots + 3 + 1 = 3^{n-1}f(1) + \frac{3^{n-1}-1}{3-1}$.

4.3. $f(n) = \frac{a^n - 1}{a-1}$.

4.4. $f(3n) + f(n) = f(6n)$; $f(5n) + f(n) = f(9n)$
$\Rightarrow f(n) + f(3n) = f(5n) + f(15n) - f(4n)$

$= f(5n) + f(15n) - f(9n) + f(2n) = f(5n) + f(n) + f(2n)$
$= f(9n) + f(2n) \Rightarrow f(3n) = f(2n)$.
$\Rightarrow f(2n) + f(10n) = f(18n) = f(12n) = f(2n) + f(6n)$
$\Rightarrow f(6n) = f(10n)$; $f(6n) = f(9n) \Rightarrow f(9n) = f(15n)$.
Suy ra $f(15n) - f(9n) = f(n) = 0$.
4.5. $f^k(f(91)) = f^k(f(f(102))) = f^k(f(92)) = \ldots = f^k(f(100))$
$= f^k(f(f(111))) = f^k(f(91))$.
Lại để ý rằng với $n \leq 100$ thì $n + 11 \leq 111$.
Nên các quá trình lặp lại tuần hoàn.
5. 1. $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, và $y = 1$
$\Rightarrow f(x+1) + f(x) = f(x)+f(1) + f(x)f(1) \Rightarrow f(x+1) = f(1)[f(x) + 1]$.
$x = -1 \Rightarrow f(0) = f(1)[f(-1) + 1] = 0$
♦ $f(-1) \neq -1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.
♦ $f(-1) = -1$: $f(-2) = -f(-1) - 1$; $f(2) = f(1)[f(1) + 1]$.
$f(-2) = f[(-2).1] = \ldots = -(1 + f(1))$
$\Rightarrow f(1) = 1$ hay $f(1) = -1$.
❖ $f(1) = -1 \Rightarrow f(x + 1) = -(f(x) + 1) \Rightarrow f(x + 2) = \ldots = f(x)$.
$f(2) = f(0) = 0$; $f(x + 2) + f(2x) = f(x) + f(2) + f(x)f(2) = f(2x) = 0$
$\Rightarrow f(1) = 0$: vô lý.
❖ $f(1) = 1 \Rightarrow f(x + 1) = f(x) + 1$;
$f(x(y + 1)) + f(x(y + 1)) = \ldots = f(x) + f(y) + 1 + f(x)f(y) + f(x)$
$\Rightarrow f(x + y) + 1 + f(xy + x) = f(x + y) + f(xy) + 1 + f(x)$
$\Rightarrow f(xy + x) = f(x) + f(xy)$.
Đặt $u = xy$; $v = x \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)$ và $f(x)f(y) = f(xy) \Rightarrow f(x) = x$.
5.4. Nếu $f(xy) = f(x) f(y)$ và $f(f(x)) = x$, thì $f(x.f(y) = f(x).f(f(y)) = f(x) y$.
Đảo lại, $f(1. f(y) = yf(1)$, $\forall y$; $f(x f(1) = f(x)$, $\forall x$
$\Rightarrow f(f(f(x))) = f(x) \Rightarrow f(x) . f(1) = f(x)$. Do đó: $f(x) \neq 0 \Rightarrow f(1) = 1$.
$\forall y$, $f(f(y)) = y$ và $f(x)f(y) = f(xf(f(y))) = f(xy)$.
Từ đó: $f(xf(y)) = yf(x)$.
5.5. Lấy $y = 1 \Rightarrow xf(1) - f(x) = (x - 1)f(x) \Rightarrow f(x) = 1$.

$$\text{Vậy, } f(x) = \begin{cases} a & \forall x \neq 0 \\ b & x = 0 \end{cases} .$$

6.8. $f(x) = f(y) \Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) \Rightarrow 1995^{-x} = 1995^{-y}$
$\Rightarrow x = y$. Do đó f đơn ánh.
Do (i) $\Rightarrow$ f đồng biến , mà $y = 1995^{-x}$ là nghịch biến .
7.2. Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Từ giả thiết $\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(x+y) - f(x)}{y}$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{f(y) + 2xy}{y} = 2x + \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = 2x + f'(0)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + f'(0)x .$$

Vậy hàm số phải tìm : $f(x) = x^2 + ax$, với a là hằng số bất kỳ .

8.2. $\dfrac{4x-2}{x+1} = x \Rightarrow x = 1$ hay $x = 2 \Rightarrow f(1) = f(2) = 0$.

Đặt $x = \dfrac{2t-1}{t-1} = 2 + \dfrac{1}{t-1} \Rightarrow \dfrac{4x-2}{x+1} = 2 + \dfrac{1}{\frac{3t}{2} - 1}$.

Phương trình $\Leftrightarrow f(2 + \dfrac{1}{\frac{3t}{2}-1}) = 2f(2 + \dfrac{1}{t-1}) \Leftrightarrow g(\dfrac{3t}{2}) = 2g(t)$ $\quad(\star)$

với $g(t) = |t|^{\log_{3/2} 2} h(t)$ với $t \neq 0$ và $g(0) = 0$.

$(\star) \Rightarrow h(\dfrac{3}{2}t) = h(t)$, $t \neq 0$.

Vậy: $f(t) = g(\dfrac{x-1}{x-2})$ khi $x \neq 1$, $x \neq 2$ và $f(1) = f(2) = 0$.

trong đó $g(t) = |t|^{\log_{3/2} 2} h(t)$ với $t \neq 0$ và $g(0) = 0$.

8.8. Từ hệ thức đề bài, ta có:

$f(x + a) = - f(2 - 2(x + a - 1)) = - f(- 2x + a + 4 - 3a)$.

Lấy $a = \dfrac{4}{3}$, thì được: $f(x + \dfrac{4}{3}) = - f(- 2x + \dfrac{4}{3})$

$$= \begin{cases} (-1)^{|\log_2 |x||} f\left(x + \frac{4}{3}\right) & \text{nếu } x \neq \frac{4}{3} \\ 0 & \text{nếu } \quad x = \frac{4}{3} \end{cases} = \begin{cases} (-1)^{|\log_2 |-2x||} f\left(-2x + \frac{4}{3}\right) & \text{nếu } x \neq \frac{4}{3} \\ 0 & \text{nếu } \quad x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Đặt $g(x) = (-1)^{|\log_2 |x||} f(x + \dfrac{4}{3}) \Leftrightarrow f(x) = (-1)^{|\log_2 |x - \frac{4}{3}||} g(x - \dfrac{4}{3})$.

Thế thì: $g(x) = g(- 2x)$ với $x \neq 0$.

9.2. $f(x) = h(x - \dfrac{a}{2}) + h(- \dfrac{a}{2} - x)$, với h bất kỳ.

9.6. $f(x) = 0$.

9.7. $f(x) = -1$.

9.8. Không tồn tại, tính chẵn lẻ khác nhau.

9.9. $f(x) = h(x - \frac{1}{2}) - h(-x + \frac{1}{2})$, với h là hàm số bất kỳ.

Để ý rằng: $f(\frac{1}{2} + x) = -f(\frac{1}{2} - x)$.

13. 1 . Kí hiệu $I_n = (n , n + 1]$ với $n \in N^*$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \in I_n \text{ khi n chẵn} \\ -x + 1 & \text{nếu } x \in I_n \text{ khi n lẻ} \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$

13.2. (i) $\Rightarrow f(n + 1) \geq f(n) + 1$

$\Rightarrow n + a = f(f(n + 1)) \geq f(f(n) + 1) \geq f(f(n)) + 1 = n + a$

$\Rightarrow f(n + 1) = f(n) + 1$

Từ đó $f(n) = f(1) + n - 1 \Rightarrow f(n) - n = f(1) - 1$

$\Rightarrow f(f(1)) - 1 = f(1) - 1$. Nên, $a - f(1) = f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = (a + 1)/2$.

Vậy: $f(n) = n + (a - 1)/2$.

13.3. Chỉ cần xét trường hợp $(a, b) = 1$.

Gọi S là tập hợp các số nguyên n sao cho $M - b \leq n \leq M + a - 1$.

Thế thì $f(S) \subset S$, và $0 \in S$. Giả định $k \geq 1$ và $f^k(0) = 0$.

Vì $f(m) = m + a$ hay $f(m) = m - b$, k có thể được viết thành:

$k = r + s$ và $ra - sb = 0$. Do $(a, b) = 1 \Rightarrow k \geq a + n$.

Mặt khác lại có : $f^{a+b}(0) = ra - sb$, trong đó $r + s = a + b$.

$\Rightarrow f^{a+b}(0) = ra - sb = (A + b)(a - s)$. Vì $f^{a+b}(0) = \in S$,

và chỉ bội của $a + b$ thuộc S là $0 \Rightarrow f^{a+b}(0) = 0$.

Suy ra số tự nhiên bé nhất k sao cho $f^k(0) = 0$ là $k = a + b$.

Trong trường hợp tổng quát, k bé nhất là $(a + b)/(a,b)$.

14.2 .Từ giả thiết $\Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq |x - y|^{1/2} \to 0$ khi $x \to y$.

Nên chỉ có hàm số hằng thoả điều kiện đã nêu.

*

* *

BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{N}$ bởi :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \; ; \; f(1) = 1 \\ \forall n > 1 \quad f(n+1) = 3f(n) - 2f(n-1) \end{cases}.$$

Chứng minh rằng $f(n) = 2^n - 1$.

2. Chứng minh rằng tồn tại một hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thoả mãn đồng nhất thức :

$$f(f(n)) = n^2 \; , \; n \in \mathbb{N}.$$

3. Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả điều kiện:

$$\forall x \neq 0 \quad f(1 - x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right) + 1.$$

4. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho: $f(g(x)) = g(f(x))$, $\forall x$.

Chứng minh rằng nếu phương trình: $f(x) = g(x)$ vô nghiệm thì phương trình: $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng vô nghiệm .

5. Có tồn tại chăng một hàm số liên tục f trên $\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(f(x)) = -x \; , \; \forall x \; ?$$

6. Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trong $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thoả mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}\right) = \frac{2}{\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)}} \quad \forall x, y \; ; \; x + y \neq 0.$$

*

* *

MỤC LỤC

*

*   *