Giáo viên: Nguyễn Tấn Đạt

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Tài liệu giảng dạy lớp 10 Toán 2011-2012

I. Định nghĩa

Phương trình hàm là phương trình mà ẩn là các hàm số, giải phương trình hàm tức là tìm các hàm số chưa biết đó.
Cấu trúc cơ bản của một phương trình hàm gồm ba phần chính:

* Miền xác định và miền giá trị.
* Phương trình hoặc hệ phương trình hàm.
* Một số điều kiện bổ sung (tăng, giảm, đơn điệu, bị chặn, liên tục, khả vi,…).

Người ta phân loại phương trình hàm theo hai yếu tố chính: miền giá trị và số biến tự do.

II. Phân loại và phương pháp giải phương trình hàm

1) Phân loại

Có thể chia thành các loại phương trình hàm như sau:

* Phương trình hàm trên $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\ldots$
* Phương trình hàm một biến tự do, hai biến tự do,...
* Phương trình hàm trên lớp hàm đơn điệu, lớp hàm liên tục, lớp hàm đa thức,...

2) Phương pháp

Trong các trường hợp đơn giản, phương trình hàm có thể giải bằng phép thế để thu được thông tin hoặc phương trình bổ sung.
Với các phương trình hàm xác định trên $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, ta cần hiểu rõ cấu trúc của các tập này để tìm cách tiếp cận. Đầu tiên, ta tính các giá trị đặc biệt như $f(0), f(1)$, sau đó dùng qui nạp tính $f(n), n\in\mathbb{N}$, và tiếp theo là $f\left(\frac{1}{n}\right)$. Sau đó dùng cấu trúc của $\mathbb{Q}$ để tìm $f(x)$ nếu cần.

Ví dụ 1. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa $f(x)f(y)-xy=f(x)+f(y)-1, \forall x,y$

Giải

Giả sử tồn tại các hàm số $f(x)$ thỏa phương trình đã cho. Đặt $y=x$, ta được:

$$[f(x)]^2-2f(x)+1-x^2=0 \Leftrightarrow [f(x)-1]^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1+x \\ f(x)=1-x \end{array}\right.$$

Thử lại thấy cả hai hàm số trên đều thỏa.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa

$f(2)=2$

$f(mn)=f(m).f(n), \forall m,n\in\mathbb{N}^*$

$f(m)<f(n), \forall m<n$

Giải

Một trong những công cụ quan trọng ta thường sử dụng khi giải các bài toán trên $\mathbb{N}^*$ là nguyên lí qui nạp.

$f(1)=f(1.1)=f(1).f(1)\Rightarrow f(1)=1$

$f(4)=f(2.2)=f(2).f(2)=2.2=4$. Ta có $2=f(2)<f(3)<f(4)=4$. Do $f(3)$ là số nguyên dương nên $f(3)=3$

Tương tự $f(6) = 6$ suy ra $f(5) = 5$.

Ta chứng minh $f(n) = n$ bằng qui nạp. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k : f(k) = k$. Xét $n = k + 1$. Nếu n chẵn thì $f(k+1) = f(2).f\left(\frac{k+1}{2}\right) = 2.\left(\frac{k+1}{2}\right) = k + 1$. Nếu n lẻ thì $n + 1$ chẵn và $f(k+2) = f(2)f\left(\frac{k+2}{2}\right) = 2\left(\frac{k+2}{2}\right) = k + 2$.

Mà $k = f(k) \le f(k+1) \le f(k+2) = k + 2 \Rightarrow f(k+1) = k + 1$

Theo nguyên lí qui nạp ta có $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Trong lời giải trên ta sử dụng hai tính chất quan trọng là thứ tự trên $\mathbb{N}^*$ và phương pháp qui nạp toán học. Tính chất $k - 1 < f(k) < k + 1 \Rightarrow f(k) = k$ là một tính chất rất quan trọng đã được sử dụng.

II. Một số phương pháp giải các phương trình hàm

1. Phương pháp đặt ẩn phụ

Xét phương trình hàm số dạng: f(φ(x)) = g(x), trong đó φ(x), g(x) là những hàm số biến số thực đã biết.

Trong một số trường hợp nếu đặt φ(x) = t, ta có thể giải ra x = ψ(t). Khi đó thế vào phương trình đã cho ta có ta có f(t) = g(ψ(t)), từ đó ta có hàm số f(x) = g(ψ(x)).

Tuy nhiên nhiều khi vấn đề không hoàn toàn đơn giản. Trong trường hợp đó cần sử dụng các phép biến đổi thích hợp , cố gắng đưa phương trình đã cho về dạng: f(φ(x)) = h(φ(x)). Khi đó hàm số cần tìm sẽ có dạng: f(x) = h(x).

Hàm f(x) sau khi tìm được ta cần phải tiến hành thử lại rồi đưa ra kết luận nghiệm của phương trình.

Dạng 1: Phương trình có dạng $f(\varphi(x)) = g(x)$ (1)

Cách giải: Đặt $t = \varphi(x)$ (2)

Nếu phương trình (2) dễ giải và cho biểu thức nghiệm đơn giản $x = \varphi^{-1}(t)$, rồi thế vào (1) ta có: $f(t) = g\left(\varphi^{-1}(x)\right)$.

Nếu phương trình (2) khó giải và cho biểu thức nghiệm phức tạp thì ta tìm cách biến đổi đưa (1) về dạng $f(\varphi(x)) = g(\varphi(x)) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

Chú ý:

Các phương pháp nói trên thường sử dụng để giải các bài toán đơn giản nhất về phương trình hàm số.

Vì cách giải là điều kiện cần, nên sau khi giải xong ta phải thử lại xem hàm số tìm được có thỏa các yêu cầu không.

Ví dụ 3. Tìm hàm số f(x) biết $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + 3, x \ne 1.$

Giải

Đặt $t = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{t+1}{t-1}, \ \forall x \ne 1.$

Từ (1) ta suy ra f(t) = $\frac{t+1}{t-1}$ + 3 = $\frac{4t-2}{t-1}$ $\Rightarrow$ f(x) = $\frac{4x-2}{x-1}$

Thử lại ta thấy f(x) thoả yêu cầu bài toán.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x)=\frac{4x-2}{x-1}, x\neq 1$.

Ví dụ 4. Tìm f(x) biết $f(x+\frac{1}{x}) = x^3+\frac{1}{x^3}, x\neq 0.$

Giải

Vì đặt $t = x+\frac{1}{x}$ cho biểu thức nghiệm x theo t phức tạp nên ta biến đổi giả thiết về dạng:

$$f(x+\frac{1}{x}) = (x+\frac{1}{x})^3 - 3(x+\frac{1}{x}) \quad (*)$$

Từ (*) $\Rightarrow f(x)=x^3-3x,\ |x|\geq 2$. Thử lại thấy f(x) thoả yêu cầu đề bài.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x)=x^3-3x, |x|\geq 2$.

Ví dụ 5. Tìm hàm $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$ thỏa $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = x^2+2x, x\neq 1.$

Giải

Đặt $t=\frac{2x+1}{x-1}$. Do tập xác định của hàm f nên $t\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta được

$$x=\frac{t+1}{t-2}\Rightarrow f(t)=x^2+2x=\left(\frac{t+1}{t-2}\right)^2+2\left(\frac{t+1}{t-2}\right)=\frac{3t^2-3}{(t-2)^2}, t\neq 2.$$

Thử lại thấy đúng. Vậy $f(x)=\frac{3x^2-3}{(x-2)^2}, x\neq 2.$

Nhận xét: Khi đặt t phải chú ý miền giá trị $\underset{x\in D_x}{t}\subset D_f$. Trong ví dụ trên, nếu hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thì có vô số hàm f dạng $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-3}{(x-2)^2}, & x\neq 2\\ a, & x=2\end{cases}$.

Ví dụ 6. Tìm hàm $f:(-\infty;-1]\cup(0;1]\to\mathbb{R}$ thỏa $f\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=x+\sqrt{x^2-1}, |x|\geq 1.$

Giải

Đặt $t=x-\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=x-t\Leftrightarrow\begin{cases}x-t\geq 0\\ x^2-1=(x-t)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq t\\ x=\frac{t^2+1}{2t}\end{cases}$. Hệ có nghiệm x $\Leftrightarrow\frac{t^2+1}{2t}\geq t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\leq -1\\ 0<t\leq 1\end{array}\right.\Rightarrow t\in(-\infty;-1]\cup(0;1]$. Vậy miền giá trị $\underset{|x|\geq 1}{t}=D_f=(-\infty;-1]\cup(0;1]$.

Với $t=x-\sqrt{x^2-1}\Rightarrow x+\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{t}\Rightarrow f(t)=\frac{1}{t}$. Thử lại thấy đúng.

Vậy $f(x)=\frac{1}{x}$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$ thỏa $f(\tan 2x)=\tan^4 x+\dfrac{1}{\tan^4 x},\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Chứng minh $f(\sin x)+f(\cos x)\ge 196,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

Đặt $t=\tan 2x, t>0$

$\Rightarrow t=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\Rightarrow \dfrac{2}{t}=\dfrac{1}{\tan x}-\tan x$

$\Rightarrow \dfrac{4}{t^2}=\dfrac{1}{\tan^2 x}+\tan^2 x-2\Rightarrow\left(\dfrac{4}{t^2}+2\right)^2=\dfrac{1}{\tan^4 x}+\tan^4 x+2$

Khi đó: $\dfrac{16}{t^4}+\dfrac{16}{t^2}+2=\dfrac{1}{\tan^4 x}+\tan^4 x$

Hàm số trở thành $f(t)=\dfrac{16}{t^4}+\dfrac{16}{t^2}+2, t>0.$

Như vậy $f(\sin x)+f(\cos x)=\dfrac{16}{\sin^4 x}+\dfrac{16}{\cos^4 x}+\dfrac{16}{\sin^2 x}+\dfrac{16}{\cos^2 x}+4$

$$\Rightarrow f(\sin x)+f(\cos x)\ge 16\frac{2}{\sin^2 x\cos^2 x}+16\frac{2}{\sin x\cos x}+4=16.\frac{8}{\sin^2 2x}+16\frac{4}{\sin 2x}+4$$
$$\ge 16.8+16.4+4=196$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Ví dụ 8. Tìm hàm số $f(x)$ thỏa

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y,\forall x,y \quad (1)\\ f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1 \quad (2)\end{cases}$$

Giải

Trong (1) cho $x=0, y=t$, ta có: $f(t)+f(-t)=2\cos t \quad (3)$

Trong (1) cho $x=\dfrac{\pi}{2}+t, y=\dfrac{\pi}{2}$, ta có: $f(\pi+t)+f(t)=0 \quad (4)$

Trong (1) cho $x=\dfrac{\pi}{2}, y=\dfrac{\pi}{2}+t$, ta có: $f(\pi+t)+f(-t)=-2\sin t \quad (5)$

Cộng hai vế của (3) và (4) rồi trừ cho (5), ta được: $f(t)=\cos t+\sin t \quad (6)$

Thử lại ta thấy hàm số xác định ở (6) thỏa điều kiện.

Ví dụ 9. Tìm hàm số $f(x)$ xác định với mọi x thỏa

$$\begin{cases}(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy\left(x^2-y^2\right),\forall x,y \quad (1)\\ f(1)=2 \quad (2)\end{cases}$$

Giải

Trong (1) thay $x=t+1, y=t$:

$f(2t+1)=(2t+1)\left(4t^2+4t+2\right)\Leftrightarrow f(2t+1)=(2t+1)\left((2t+1)^2+1\right)$

Từ đó suy ra: $f(x)=x\left(x^2+1\right)=x^3+x \quad (3)$

Thử lại ta thấy hàm số xác định ở (3) thỏa yêu cầu.

Ví dụ 10. Tìm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho:

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy.(x^2-y^2),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Giải

Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{u+v}{2} \\ y=\dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow vf(u)-uf(v)=(u^2-v^2)uv \Rightarrow \frac{f(u)}{u}-u^2=\frac{f(v)}{v}-v^2, \forall u,v\neq 0$$

Cho v = 1 ta có: $\dfrac{f(u)}{u}-u^2=\dfrac{f(1)}{1}-1^2, \forall u\neq 0$

$\Rightarrow f(u)=u^3+au, \forall u\neq 0$ (a = f(1) – 1)

Cho x = y = 0 ta có 2f(0) = 0 do đó f(0) = 0

Kết luận $f(x)=x^3+ax, \forall x\in\mathbb{R}$

Ví dụ 11. Tìm hàm $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa $xf(xf(y))=f(f(y)), \forall x;y\in(0;+\infty)$.

Giải

Cho $y=1$, ta có $xf(xf(1))=f(f(1))$. Cho $x=\dfrac{1}{f(1)}\Rightarrow f(f(1))=1$.

$\Rightarrow xf(xf(1))=1\Rightarrow f(xf(1))=\dfrac{1}{x}$. Đặt $t=x.f(1)$

$\Rightarrow f(t)=\dfrac{f(1)}{t}=\dfrac{a}{t}, a=f(1)$. Vì $f(1)\in(0;+\infty)$ nên miền giá trị $\underset{x\in(0;+\infty)}{t}\in(0;+\infty)$.

Vậy $f(x)=\dfrac{a}{x}$. Thử lại thỏa yêu cầu.

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm hàm số f(x) biết $f(x+1)=x^2+2x+3,\ x\in\mathbb{R}$.

Giải

Đặt t = x + 1. Giải ra x = t – 1 rồi thế vào phương trình đã cho ta được:

$f(t)=g(t-1)=(t-1)^2+2(t-1)+3=t^2+2\Rightarrow f(x)=x^2+2$

Thử lại ta thấy f(x) thoả yêu cầu bài toán. Vậy hàm số cần tìm là: $f(x)=x^2+2$.

Bài 2. Xác định f(x) khi biết:

a) $f\left(\dfrac{3x+1}{x+2}\right)=\dfrac{x+1}{x+2}\quad (\forall x\neq 1, x\neq -2)$

b) $f(\sin x)=x-3$

Giải

a) Đặt $t=\dfrac{3x+1}{x+2}\Rightarrow x=\dfrac{2t-1}{3-t}(t\neq 3)\Rightarrow \dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{t+2}{3t-4}\Rightarrow f(t)=\dfrac{t+2}{3t-4}$

Vậy $f(x)=\dfrac{x+2}{3x-4}$.

b) Đặt $t = \sin x \Rightarrow x = \arcsin t$

Do đó: f(t) = arcsin t −3 $\Leftrightarrow$ f(x) = arcsinx – 3.

Bài 3. Tìm hàm $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3};3\right\} \to \mathbb{R}$ thỏa $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}, x \neq -2; x \neq 1.$

Giải

Đặt $t = \frac{3x-1}{x+2}$. Miền giá trị $\underset{x\neq -2;1}{t} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3};3\right\}$

$\Rightarrow x = \frac{2t+1}{3-t}$. Khi đó $f(t) = \frac{t+4}{3t-2}$. Thử lại thỏa yêu cầu đề bài. Vậy $f(x) = \frac{x+4}{3x-2}$.

Bài 4. Tìm hàm f(x) nếu biết:

a) $f\left(x+\frac{a}{x}\right) = x^2 + \frac{a^2}{x^2}, \forall x \neq 0.$

b) $f\left(\sqrt{1+x}\right) = \sqrt{1+x^2}, \forall x \geq -1.$

c) $f\left(1+\frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$

Giải

a) Đặt $t = x + \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{a^2}{x^2} = t^2 - 2a$, $\forall x \neq 0$

Do đó: $f(t) = t^2 - 2a$. Vậy: $f(x) = x^2 - 2a$.

b) Đặt $t = \sqrt{1+x} \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \left(t^2-1\right)^2, x \geq -1$

Do đó: $f(t) = \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\left(t^2-1\right)^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 2}$

Vậy $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}$

c) Đặt $t = x + \frac{1}{x}, x \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{t-1}, t \neq 1.$

Do đó $f(t) = \frac{1}{(t-1)^2} - 1 = \frac{-t^2+2t}{(t-1)^2}$. Vậy $f(x) = \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$.

Bài 5. Tìm hàm số f(x) biết $f(\cos x) = \sin^2 x + 2$. (1)

Giải

Nếu đặt t = cosx giải phương trình này với ẩn x sẽ cho ta nghiệm phức tạp vì vậy ta biến đổi: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Ta đưa (1) về dạng $f(\cos x) = 3 - \cos^2 x \Rightarrow f(x) = 3 - x^2$; $x \in [-1;1]$.

Thử lại thấy f(x) thoả yêu cầu bài toán.

Vậy $f(x) = f(x) = 3 - x^2$ là hàm số cần tìm.

Bài 6. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ lấy giá trị nguyên và xác định trên tập hợp các số nguyên sao cho $3f(x) - 2f(f(x)) = x$ với mọi số nguyên x.

Giải

Hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Cho $f(x)$ là một hàm số thỏa điều kiện đề bài. Đặt $g(x)=f(x)-x$

Khi đó $3f(x)-2f(f(x))=x \Leftrightarrow 2f(x)-2f(f(x))=f(x)-x \Leftrightarrow 2g(f(x))=g(x)$

Từ đó ta được: $g(x)=2g(f(x))=2^2g(f(f(x)))=.....=2^n g\left(\underbrace{f(f(...f(x)...))}_{n}\right)$

Vì $g\left(\underbrace{f(f(...f(x)...))}_{n}\right)\in\mathbb{Z}$ nên $g(x)\vdots 2^n, \forall n, \forall x\in\mathbb{Z}$. Điều này chỉ xảy ra khi $g(x)=0$.

Vậy $f(x)=x$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bài 7. Tìm hàm f(x) biết:

a/ $f\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right)=x+2, x\neq 1.$

b/ $f(\cos x)=\cos 3x, x\in\mathbb{R}.$

c/ $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^3-\dfrac{1}{x^3}, x\neq 0.$

d/ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}.$

Bài 8. Tìm $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right), x\neq 0$ biết $f\left(\dfrac{2}{x+1}\right)=x^2-1.$

Bài 9. Tìm hàm f(x) biết $f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)=\dfrac{x^4+1}{x^2}.$

DẠNG 2: $a(x)f(u(x))+b(x)f(v(x))=w(x)$ (1)

Từ phương trình (1), đặt ẩn phụ $u(x)=v(t)$ để thu thêm một phương trình

$$a'(x)f(u(x))+b'(x)f(v(x))=w'(x)\ (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta giải hệ tìm $f(u(x))$ hoặc $f(v(x))$ rồi trở lại dạng trên.

Ví dụ 1. Tìm hàm số f(x) biết $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x, x\neq 0,1.$ (1)

Giải

Đặt $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{t}\Rightarrow x=\dfrac{t}{t-1}$, ($t\neq 0,1$)

Thì (1) $\Leftrightarrow$ $f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f\left(\dfrac{t-1}{t}\right)=\dfrac{t}{t-1}$, $t\neq 0,1$ (2)

Từ (1) và (2) ta được hệ: $\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=\dfrac{x}{x-1} \\ f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x \end{cases}$

Giải hệ trên ta được $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2x^2-3x}{3(x-1)}\Rightarrow f(x)=\dfrac{2-3x}{3x(x-1)}$

Thử lại thấy f(x) thoả yêu cầu đề bài. Vậy hàm số cần tìm là $f\left(x\right)=\dfrac{2-3x}{3x\left(x-1\right)}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các hàm f(x) thoả:

a) $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=x, x\neq 2, x\neq -1$.

b) $f\left(x-1\right)+3f\left(\dfrac{1-x}{1-2x}\right)=1-2x, x\neq \dfrac{1}{2}$.

Giải

a) $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=x, x\neq 2, x\neq -1 \quad (1)$

Cách 1:

Đặt $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{t-2}{t+1}\Rightarrow x=1-t, t\neq -1\Rightarrow \dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{t+1}{t-2}, t\neq -1, t\neq 2$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{t-2}{t+1}\right)+2f\left(\dfrac{t+1}{t-2}\right)=1-t\Rightarrow f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)+2f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)=1-x, x\neq -1, x\neq 2 \quad (2)$

Từ (1) và (2):

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=x \\ 2f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=1-x \end{cases} \Rightarrow f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=x-\dfrac{1}{3}\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{4x+5}{3\left(1-x\right)}$$

Cách 2:

Đặt $t=\dfrac{x+1}{x-2}\left(x\neq 2\right)\Rightarrow x=\dfrac{2t+1}{t-1}\left(t\neq 1\right)\Rightarrow f\left(t\right)+2f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{2t+1}{t-1}\left(t\neq 1\right)$.

Đặt $u=\dfrac{1}{t}\left(t\neq 0\right)\Rightarrow t=\dfrac{1}{u}\left(u\neq 0\right)\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{u}\right)+2f\left(u\right)=\dfrac{\dfrac{2}{u}+1}{\dfrac{1}{u}-1}=\dfrac{u+2}{1-u}$

Ta có hệ: $\begin{cases} f\left(x\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{2x+1}{x-1} \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{1-x} \end{cases} \Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{4x+5}{-3x+3}$

b) $f\left(x-1\right)+3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)=1-2x \ (1)$

Đặt $\dfrac{x-1}{1-2x}=y-1\Rightarrow x=\dfrac{y}{2y-1}\Rightarrow x-1=\dfrac{1-y}{2y-1}\Rightarrow \dfrac{x-1}{1-2x}=y-1\Rightarrow x=\dfrac{y}{2y-1}\Rightarrow x-1=\dfrac{1-y}{2y-1}$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{1-y}{2y-1}\right)-3f\left(y-1\right)=\dfrac{-1}{2y-1}, \forall y\neq \dfrac{1}{2}\Rightarrow f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right)-3f\left(x-1\right)=\dfrac{-1}{2x-1}, \forall x\neq \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x-1) - 3f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right) = 1-2x, \forall x \neq \dfrac{1}{2} \\ \Rightarrow f\left(\dfrac{x-1}{1-2x}\right) - 3f(x-1) = \dfrac{-1}{2x-1}, \forall x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -8f(x-1) = 1-2x + \dfrac{3}{1-2x}$$

$$\Rightarrow f(x-1) = \frac{1}{8}\left(-1+2x+\frac{3}{2x-1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{8}\left(1+2x+\frac{3}{2x+1}\right), \forall x \neq \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các hàm f(x) thoả mãn điều kiện: $f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\dfrac{3+x}{1-x}\right) = x, |x| \neq 1.\ (1)$

Giải

Cách 1:

Đặt $\dfrac{x+3}{1-x} = \dfrac{t-3}{t+1} \Rightarrow x = \dfrac{t+3}{1-t} \Rightarrow \dfrac{x-3}{x+1} = t, t \neq \pm 1$

$$(1) \Rightarrow f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{t+3}{1-t}, |t| \neq 1\ (2)$$

Đặt $\dfrac{t-3}{t+1} = u \Rightarrow t = \dfrac{u+3}{1-u} \Rightarrow \dfrac{t+3}{1-t} = \dfrac{u-3}{1+u}, u \neq \pm 1$

$$(2) \Rightarrow f\left(\frac{u+3}{1-u}\right) + f(u) = \frac{u-3}{1+u}, |u| \neq 1\ (3)$$

Từ (2) và (3): $f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right) - f\left(\dfrac{3+x}{1-x}\right) = \dfrac{x+3}{1-x} - \dfrac{x-3}{1+x} = \dfrac{2x^2+6}{1-x^2}$ (4)

Từ (1) và (4), ta có:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right) - f\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right) = \dfrac{2x^2+6}{1-x^2} \\ f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\dfrac{3+x}{1-x}\right) = x \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = \frac{x^2+3}{1-x^2} + \frac{x}{2}$$

Giải hệ trên ta được: $f(x) = \dfrac{4x}{1-x^2} - \dfrac{x}{2}$

Cách 2:

Đặt $t = \dfrac{x-3}{x+1} \Rightarrow x = \dfrac{t+3}{1-t} \Rightarrow \dfrac{3+x}{1-x} = \dfrac{t-3}{t+1}$

(1) $\Leftrightarrow f(t) + f\left(\dfrac{t-3}{t+1}\right) = \dfrac{t+3}{1-t}$ (2)

Đặt $u = \dfrac{t-3}{t+1} \Rightarrow t = \dfrac{u+3}{1-u} \Rightarrow \dfrac{t+3}{1-t} = \dfrac{u-3}{u+1}$

(2) $\Leftrightarrow f\left(\dfrac{u+3}{1-u}\right) + f(u) = \dfrac{u-3}{u+1}$ (3)

Kết hợp (2) và (3) ta có hệ:

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right) = \dfrac{x+3}{1-x} \\ f\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right) + f(x) = \dfrac{x-3}{x+1} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) - f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) = \frac{x+3}{1-x} - \frac{x-3}{x+1} = \frac{2x^2+6}{1-x^2} (4)$$

Từ (1) và (4), ta có:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)-f\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)=\dfrac{2x^2+6}{1-x^2} \\ f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\dfrac{3+x}{1-x}\right)=x \end{cases} \Rightarrow f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)=\dfrac{x^2+3}{1-x^2}+\dfrac{x}{2}$$

Giải hệ trên ta được: $f\left(x\right)=\dfrac{4x}{1-x^2}-\dfrac{x}{2}$. Thử lại thấy f(x) thoả yêu cầu bài toán.

Vậy hàm số cần tìm là $f\left(x\right)=\dfrac{4x}{1-x^2}-\dfrac{x}{2}$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các hàm f(x) thoả: $f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=x+1-\dfrac{1}{x}, x\neq 0.$

Giải

Đặt $\dfrac{1}{1-x}=t\Rightarrow x=\dfrac{t-1}{t}$. Theo đề bài: $f\left(\dfrac{t-1}{t}\right)+f\left(t\right)=\dfrac{t-1}{t}+1-\dfrac{t}{t-1}=\dfrac{t^2-3t+1}{t\left(t-1\right)}$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+f\left(x\right)=\dfrac{x^2-3x+1}{x\left(x-1\right)}$

Lấy phương trình đã cho trừ phương trình này, ta được: $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)-f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=x-\dfrac{1}{x-1}.$

Đặt $t=\dfrac{1}{1-x}\Rightarrow x=\dfrac{t-1}{t}\Rightarrow \dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{1-t}.$

Thế vào phương trình trên, ta được: $f\left(t\right)-f\left(\dfrac{1}{1-t}\right)=-t+1-\dfrac{1}{t}$

Ta có hệ: $\begin{cases} f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=x+1-\dfrac{1}{x} \\ f\left(x\right)-f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=-x+1-\dfrac{1}{x} \end{cases}$. Giải hệ: $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}.$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tất cả các hàm f(x) thoả mãn điều kiện: $f\left(x\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x, x\neq 0.$

Giải

Đặt $\dfrac{1}{x}=t\Rightarrow x=\dfrac{1}{t}$, ta được: $f\left(\dfrac{1}{t}\right)+2f\left(t\right)=\dfrac{1}{t}$. Ta có hệ $\begin{cases} f\left(x\right)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x \\ 2f\left(x\right)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

Giải hệ, ta được: $f\left(x\right)=\dfrac{2-x^2}{3x}.$

Bài 2. Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa $f\left(x\right)=x^2+f\left(-x\right), \forall x\in\mathbb{R}$.

Giải

Không tồn tại vì $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=x^2$. Vế trái là hàm chẵn, vế phải là hàm số lẻ.

Bài 3. Tìm tất cả các hàm f và g thoả mãn các phương trình:

$$f\left(2x+1\right)+2g\left(2x+1\right)=2x \quad \text{và} \quad f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+g\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=x$$

Bài 4. Tìm hàm số f(x) biết rằng $f\left(x\right)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2, x\neq\frac{1}{2};1.$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Hệ có dạng $\begin{cases} af\left(u\left(x\right)\right)+bg\left(v\left(x\right)\right)=w\left(x\right) \\ a'f\left(u'\left(x\right)\right)+b'g\left(v'\left(x\right)\right)=w'\left(x\right) \end{cases}$

Đổi biến sao cho $u\left(x\right)$ thành $u'\left(x\right)$, giải hệ đưa về dạng: $Af\left(u\left(x\right)\right)+Bf\left(v\left(x\right)\right)=w''\left(x\right)$

Ví dụ 1. Tìm các hàm số $f(x), g(x)$ thỏa hệ sau:

$$\begin{cases} f(x+1)+xg(x+1)=2x, x\neq 0 (1) \\ f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x-1, x\neq 1 (2) \end{cases}$$

Giải

Đặt $u=x+1\Rightarrow x=u-1$ and $v=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow x=\frac{v+1}{v-1}$

Hệ trên trở thành: $\begin{cases} f(u)+(u-1)g(u)=2(u-1), u\neq 0 \\ f(v)+g(v)=\frac{2}{v-1}, v\neq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(u)+(u-1)g(u)=2(u-1) (3) \\ f(u)+g(u)=\frac{2}{u-1} \end{cases} \Rightarrow g(t)=\frac{2t}{t-1}(t\neq 2)$$

Thay $g(t)=\frac{2t}{t-1}$ thay vào (3), ta được: $f(t)=-2, t\neq 2$.

Mặt khác thay $x=1$ vào (1) và $x=3$ vào (2), ta được $f(2)+g(2)=2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=-2, x\neq 1, x\neq 2 \\ g(x)=\frac{2x}{x-1}, x\neq 1, x\neq 2, f(2)+g(2)=2 \end{cases}$$

Thử lại vào (1), (2), ta thấy nghiệm đúng. Vậy nghiệm của hệ là:

$$f(x)=\begin{cases} -2, x\neq 1, x\neq 2 \\ a, x=2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \frac{2x}{x-1}, x\neq 1, x\neq 2 \\ 2-a, x=2 \end{cases}$$ với a là hằng số tùy ý.

Chú ý:

Từ (*) nếu suy ra ngay $g\left(2t+1\right)=2t$ là phạm sai lầm. Khi làm bài học sinh cần chú ý điều này.

Ví dụ 2. Tìm các hàm số $f\left(x\right), g\left(x\right)$ xác định với mọi x thỏa:

$$\begin{cases} f\left(3x-1\right)-g\left(6x-1\right)=3x, \quad (1) \\ f\left(x+1\right)+xg\left(2x+3\right)=2x^2+x \quad (2) \end{cases}$$

Giải

Trong (1) thay $t=3x-1$: $f\left(t\right)+g\left(2t+1\right)=t+1$ (3)

Trong (2) thay $t=x+1$: $f\left(t\right)+\left(t-1\right)g\left(2t+1\right)=2t^2-3t+1$ (4)

Lấy (4) trừ (3): $(t-2)g(2t+1)=2t(t-2)\Rightarrow g(2t+1)=2t,\forall t\neq 2\Rightarrow g(x)=x-1,\forall x\neq 2$ (*)

Thay lại vào (3) ta có: $f(x)=1-x,\forall x\neq 2$.

Thay $x=1$ vào (1), (2) ta có: $f(2)+g(5)=3$. Do $g(5)=4\Rightarrow f(2)=-1$

Trong (1) cho $x=\frac{1}{2}$ ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right)+g(2)=\frac{3}{2}$

Trong (2) cho $x=-\frac{1}{2}$ ta có: $f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}g(2)=0\Rightarrow g(2)=1$

Từ $g(x)=\begin{cases}x-1, x\neq 2\\ 1, x=2\end{cases}\Leftrightarrow g(x)=x-1,\forall x$ và $f(x)=\begin{cases}1-x, x\neq 2\\ -1, x=2\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=1-x,\forall x$

Thử lại ta thấy thỏa điều kiện.

Ví dụ 3. Tìm các hàm số $f(x),g(x)$ xác định với mọi x thỏa:

$$\begin{cases}f(x+6)+2g(2x+15)=\dfrac{x+2}{2}, \quad (1)\\ f\left(\dfrac{x+2}{2}\right)+g(x+5)=x+4 \quad (2)\end{cases}$$

Giải

Đặt $\frac{x+2}{2}=t+6\Rightarrow x=2t+10$. Từ (2) suy ra $f(t+6)+g(2t+15)=2t+14$

Ta có hệ: $\begin{cases}f(x+6)+2g(2x+15)=\dfrac{x+2}{2}\\ f(x+6)+g(2x+15)=2x+14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=\dfrac{7x}{2}+6\\ g(x)=-\dfrac{3x+7}{4}\end{cases}$

Thử lại ta thấy thỏa điều kiện.

Ví dụ 4. Tìm các hàm số $f(x),g(x)$ xác định với mọi x thỏa:

$$\begin{cases}f(2x-1)+g(1-x)=x+1, \quad (1)\\ f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+2g\left(\dfrac{1}{2x+2}\right)=3 \quad (2)\end{cases}$$

Giải

Đặt $\frac{x}{x+1}=2t-1(\forall x\neq -1)\Rightarrow x=\frac{2t-1}{2+2t}(t\neq -1)$. Từ (2) suy ra $f(2t-1)+2g(t+1)=3 \quad (3)$

Ta có hệ: $\begin{cases}f(2x-1)+g(1-x)=x+1\\ f(2x-1)+2g(1+x)=3\end{cases} \quad (*)$

$$\Rightarrow g(1-x)-2g(1+x)=x-2 \quad (4)$$

Đặt $t=-x$ từ (4) ta được: $g(1+t)-2g(1-t)=-t-2 \quad (5)$

Kết hợp (4) và (5): $g(1+x)=\frac{6-x}{3}\Rightarrow g(x)=\frac{7-x}{3}$

Thay $g(1+x)=\frac{6-x}{3}$ vào (*) ta được: $f(2x-1)=\frac{2x-3}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{x-2}{3}$

Vậy $f(x)=\frac{x-2}{3},g(x)=\frac{7-x}{3}$. Thử lại ta thấy thỏa điều kiện.

Bài tập

Bài 1. Tìm các hàm số $f\left(x\right), g\left(x\right)$ xác định với mọi x thỏa:

$$\begin{cases} f\left(2x-1\right)+g\left(1-x\right)=x+1, \quad (1) \\ f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+2g\left(\dfrac{1}{2x+2}\right)=3 \quad (2) \end{cases}$$

Bài 2. Tìm các hàm số $f\left(x\right), g\left(x\right)$ xác định với mọi x thỏa:

$$\begin{cases} f\left(3x-1\right)+g\left(6x-1\right)=3x \\ f\left(x+1\right)+x^2g\left(2x+3\right)=2x^2+x \end{cases}$$

Bài 3. Tìm các hàm số $f\left(x\right), g\left(x\right)$ xác định với mọi x thỏa:

$$\begin{cases} xf\left(x-2\right)+2g\left(2x+1\right)=2x^2-8x+2 \\ f\left(2x+1\right)+g\left(4x+7\right)=-3 \quad (2) \end{cases}$$