

Bất đẳng thức Finsler-Hadwiger và Neuberg-Pedoe

L.H.P

<beyond_infinity_299@yahoo.com>

The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man.
David Hilbert



Định lý 1 (phép thế Ravi).

Cho tam giác ABC với độ dài 3 cạnh là a, b, c , khi đó tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ mà ở đây rõ ràng $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ trong đó $p = \frac{a+b+c}{2}$. Ngoài ra, hiển nhiên nếu ta có các số thực dương x, y, z thì tồn tại một tam giác nhận các biểu thức $x + y, y + z, z + x$ làm độ dài 3 cạnh.

Định lý 2 (phép thế Conway).

Cho tam giác ABC với độ dài 3 cạnh là a, b, c và diện tích S . Khi đó tồn tại các số thực x, y, z thỏa mãn $x + y \geq 0, y + z \geq 0, z + x \geq 0, xy + yz + zx \geq 0$ sao cho $a = \sqrt{y+z}, b = \sqrt{z+x}, c = \sqrt{x+y}$ và $S = \frac{1}{2}\sqrt{xy+yz+zx}$. Ngoài ra, ta cũng có điều ngược lại.

1

Từ đây, ta sẽ gọi bộ số thực $(x; y; z)$ thỏa mãn $x + y \geq 0, y + z \geq 0, z + x \geq 0, xy + yz + zx \geq 0$ là thỏa điều kiện Conway.

Định lý 3 (bất đẳng thức Finsler-Hadwiger).

Cho tam giác ABC có các cạnh là a, b, c và diện tích S . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Chứng minh 1.

Ta có:

$$a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$$

Tiếp tục như trên ta có các biểu thức tương ứng với b, c . Vậy bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{cyc} (a+b-c)(a+c-b) \right]^2 &\geq 3(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a) \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} [(b+c-a)(b-c)]^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Điều này hiển nhiên đúng.

Vậy ta có đ.p.c.m. ■

Chứng minh 2.

Theo định lý hàm cosin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

¹Việc chứng minh 2 định lý trên không có gì khó khăn (chỉ bằng tính toán trực tiếp), các bạn có thể tự kiểm tra nên sẽ không nêu ra ở đây.

Từ đó suy ra:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4S \tan \frac{A}{2}$$

Tương tự với b, c , ta có thể viết bất đẳng thức cần chứng minh lại thành:

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

Theo bất đẳng thức Jensen:

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 3 \tan \left(\frac{A + B + C}{6} \right) = \sqrt{3}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. ■

Hệ quả 3.1.²

Với mọi tam giác ABC có các cạnh là a, b, c và diện tích S ta đều có:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq \frac{(a + b + c)^2}{3} \\ &\geq ab + bc + ca \\ &\geq 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \\ &\geq 4\sqrt{3}S \end{aligned}$$

Bài toán trên khá đơn giản và đã quá quen thuộc với các bạn học sinh phổ thông nhưng nó lại chính là nền tảng để chúng ta tiếp cận với các bất đẳng thức nêu ra sau đây!

Bài toán 1.

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$2ab + 2ac - a^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

LỜI GIẢI 1.

Theo bất đẳng thức Finsler-Hadwiger và AM-GM:

$$4\sqrt{3}S \leq 2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2 \leq 2ab + 2ac - a^2$$

Ta có đ.p.c.m. □

LỜI GIẢI 2.

Sử dụng công thức Heron đưa bất đẳng thức cần chứng minh về:

$$\sqrt{[a^2 - (b - c)^2](a + b + c)(3a + 3b - 3c)} \leq a(2b + 2c - a)$$

²Bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ còn được gọi là bất đẳng thức Weitzenböck.

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$LHS \leq \sqrt{a^2 - (b - c)^2} \left(\frac{4a + 4b - 2c}{2} \right) \leq a(2a + 2b - c) = RHS$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 2 (Turkey 2006).

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{27}{4}(x + y)(y + z)(z + x) \geq (\sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x})^2 \geq 6\sqrt{3}$$

LỜI GIẢI 1.

Bổ đề 1.

$$9(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8(x + y + z)(xy + yz + zx)$$

Chứng minh bổ đề.

Bất đẳng thức tương đương:

$$\sum_{cyc} x(y - z)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, ta có đ.p.c.m. ▼

Theo bổ đề trên và bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \frac{27}{4}(x + y)(y + z)(z + x) &\geq 3[(x + y) + (y + z) + (z + x)] \\ &\geq (\sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x})^2 \end{aligned}$$

Bây giờ ta chứng minh:

$$(\sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x})^2 \geq 6\sqrt{3}$$

Ta có:

$$LHS \geq 3 \sum_{cyc} \sqrt{(x + y)(x + z)} = 3 \sum_{cyc} \sqrt{x^2 + 1}$$

Theo bất đẳng thức Minkowski:

$$3 \sum_{cyc} \sqrt{x^2 + 1} \geq 3\sqrt{(x + y + z)^2 + 9}$$

Lại có:

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 3$$

Do đó:

$$3\sqrt{(x + y + z)^2 + 9} \geq 6\sqrt{3}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

LỜI GIẢI 2.

Theo phép thế Conway: tồn tại một tam giác có độ dài 3 cạnh là $\sqrt{x + y}$, $\sqrt{y + z}$, $\sqrt{z + x}$ và diện tích là $\frac{1}{2}\sqrt{xy + yz + zx}$.

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{27}{4}a^2b^2c^2 \geq 4(a + b + c)^2S^2 \geq 48\sqrt{3}S^3 \quad (1)$$

Bất đẳng thức vế trái của (1) tương đương:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \sum_{cyc} \sin A$$

Theo bất đẳng thức Jensen:

$$\sum_{cyc} \sin A \leq 3 \sin \left(\frac{A + B + C}{3} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức vế phải:

$$(a + b + c)^2 \geq 12\sqrt{3}S$$

Theo **Hệ quả 3.1** ta có đ.p.c.m. □

Mở rộng 1.

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện Conway. Chứng minh rằng:

$$\frac{27}{4}(x + y)(y + z)(z + x) \geq (\sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x})^2 \geq 6\sqrt{3}$$

Việc thay đổi điều kiện hoàn toàn không ảnh hưởng đến việc sử dụng phép thế Conway nhưng cũng thật may mắn khi bài toán trên vẫn có thể giải bằng phương pháp đại số tương tự **Bài toán 2** (Tại sao?).

Bài toán 3 (Darij Grinberg).

Cho bộ số thực $(x; y; z)$ thỏa mãn điều kiện Conway. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt{(x + y)(x + z)} \geq x + y + z + \sqrt{3(xy + yz + zx)}$$

LỜI GIẢI.

Theo phép thế Conway, tồn tại một tam giác XYZ thỏa mãn:

$$\begin{aligned}YZ &= \sqrt{y+z} \\XZ &= \sqrt{x+z} \\XY &= \sqrt{x+y} \\S_{XYZ} &= \frac{1}{2}\sqrt{xy+yz+zx}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trở thành bất đẳng thức Finsler-Hadwiger:

$$xy + yz + zx \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + 2\sqrt{3}S$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 4 (Cosmin Pohoată).

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3}S + 2r(4R + r) + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

LỜI GIẢI.

Ta có các đẳng thức:

$$\left\| \begin{aligned}ab + bc + ca &= p^2 + r^2 + 4Rr \\a^2 + b^2 + c^2 &= 2(p^2 - r^2 - 4Rr)\end{aligned} \right\|$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\begin{aligned}8Rr + 2r^2 &\geq 2\sqrt{3}pr \\&\Leftrightarrow 4R + r \geq \sqrt{3}p \\&\Leftrightarrow \frac{abc}{S} + \frac{S}{p} \geq \sqrt{3}p \\&\Leftrightarrow \frac{abc + (p - a)(p - b)(p - c)}{S} \geq \sqrt{3}p \\&\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)}\end{aligned}$$

trong đó:

$$\begin{aligned}x &= p - a \\y &= p - b \\z &= p - c\end{aligned}$$

Đây là bất đẳng thức quen thuộc. Bài toán được cm xong. □

Bài toán 5 (Cezar Lupu, Cosmin Pohoată).

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3 + \frac{4(R-2r)}{4R+r}}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

LỜI GIẢI.

Ta có các đẳng thức sau đây:

$$\left\| \begin{array}{l} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ R = \frac{abc}{4S} \\ r = \frac{S}{p} \end{array} \right\|$$

Theo phép thế Ravi, đặt $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, ($x, y, z > 0$).

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{cyc} (x+y)(x+z) - \sum_{cyc} (x+y)^2 &\geq 4\sqrt{(x+y+z)xyz} \sqrt{\frac{4(x+y)(y+z)(z+x) - 5xyz}{(x+y)(y+z)(z+x) + xyz}} \\ &\Leftrightarrow (xy + yz + zx) \geq \sqrt{xyz} \sqrt{\frac{4(x+y+z)(xy + yz + zx) - 9xyz}{xy + yz + zx}} \\ &\Leftrightarrow (xy + yz + zx)^3 + 9(xyz)^2 \geq 4(xy + yz + zx)(x^2yz + y^2xz + z^2xy) \end{aligned}$$

Đặt $xy = m$, $yz = n$, $zx = p$, bất đẳng thức trên trở thành:

$$(m + n + p)^3 + 9mnp \geq 4(m + n + p)(mn + np + pm)$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur.

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 6 (Cosmin Pohoată).

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + \frac{1}{2}(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2$$

3

LỜI GIẢI.

³Chú ý rằng $(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 = 4 \max\{(a-b)^2; (b-c)^2; (c-a)^2\}$ do đó bất đẳng thức trên có thể phát biểu khác đi là:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + 2 \max\{(a-b)^2; (b-c)^2; (c-a)^2\}.$$

Không mất tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.
 Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$4ac + b^2 - a^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Theo hệ thức Heron và bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3}S &= \sqrt{[(c+a)^2 - b^2][3b^2 - 3(c-a)^2]} \\ &\leq \frac{(c+a)^2 - b^2 + 3b^2 - 3(a-c)^2}{2} \\ &= 4ac + b^2 - a^2 - c^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 7 (Trần Quang Hùng).

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} a^2 \geq 4\sqrt{3}S + \sum_{cyc} (a-b)^2 + 16Rr \left(\sum_{cyc} \cos^2 \frac{A}{2} - \sum_{cyc} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right)$$

LỜI GIẢI 1.

Đặt $p-a = x$, $p-b = y$, $p-c = z$ ($x, y, z > 0$).

Khi đó ta có các hệ thức sau:

$$\left\| \begin{aligned} a &= y+z, \quad b = z+x, \quad c = x+y, \quad p = x+y+z \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \\ Rr &= \frac{abc}{4p}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned} \right\|$$

Biến đổi tương đương đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\sum_{cyc} \sqrt{xy(x+z)(y+z)} \geq (xy + yz + zx) + \sqrt{3xyz(x+y+z)} \quad (2)$$

Không mất tổng quát ta chuẩn hóa $x+y+z = 1$. Bất đẳng thức (2) tương đương:

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{cyc} \sqrt{(xy)^2 + xyz} \right]^2 \geq (xy + yz + zx + \sqrt{3xyz})^2 \\ \Leftrightarrow &\sum_{cyc} \sqrt{[(xy)^2 + xyz][(yz)^2 + xyz]} \geq xy + \sqrt{3xyz}(xy + yz + zx) \\ \Leftrightarrow &\left\{ \sum_{cyc} \sqrt{[(xy)^2 + xyz][(yz)^2 + xyz]} \right\}^2 \geq [xyz + \sqrt{3xyz}(xy + yz + zx)]^2 \\ \Leftrightarrow & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{cyc} [(zx)^2 + xyz] \sqrt{[(xy)^2 + xyz][(yz)^2 + xyz]} \\
& \geq xyz[xyz + 2xyz(xy + yz + zx) + (xy + yz + zx)^2 + 2\sqrt{3xyz}(xy + yz + zx)] \\
& \text{Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:} \\
& 2 \sum_{cyc} [(zx)^2 + xyz] \sqrt{[(xy)^2 + xyz][(yz)^2 + xyz]} \geq 2 \sum_{cyc} [(zx)^2 + xyz](y^2xz + xyz) \\
& = 2xyz[xyz(xy + yz + zx) + 4xyz + (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2] \\
& \text{Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:} \\
& 2xyz[xyz(xy + yz + zx) + 2xyz + (xy + yz + zx)^2] \\
& \geq xyz[2xyz(xy + yz + zx) + xyz + (xy + yz + zx)^2 + 2\sqrt{3xyz}(xy + yz + zx)] \\
& \text{Vậy ta có đ.p.c.m.} \quad \square
\end{aligned}$$

LỜI GIẢI 2. ⁴

Áp dụng bất đẳng thức Finsler-Hadwiger cho tam giác $I_AI_BI_C$ trong đó I_A, I_B, I_C lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC . Ta dễ dàng chứng minh được các hệ thức sau:

$$\left\| \begin{aligned} x &= 4R \cos \frac{A}{2}, \quad y = 4R \cos \frac{B}{2}, \quad z = 4R \cos \frac{C}{2}, \quad T = 2pR \\ \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{aligned} \right\|$$

trong đó p là nửa chu vi tam giác ABC

Từ các hệ thức trên ta dễ dàng thấy được:

$$\begin{aligned}
& x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\sqrt{3}T + (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 \geq 4\sqrt{3}S + \sum_{cyc} (a-b)^2 + 16Rr \left(\sum_{cyc} \cos^2 \frac{A}{2} - \sum_{cyc} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right)
\end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. $\square$

Bài toán 8 (tổng quát bất đẳng thức Finsler-Hadwiger).

Cho số thực dương k thỏa mãn $k \geq 1$ và tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} a^{2k} \geq 3 \left(\frac{4}{\sqrt{3}} S \right)^k + \sum_{cyc} (a-b)^{2k}$$

LỜI GIẢI.

Ta có:

$$a^2 = (b-c)^2 + 4S \tan \frac{A}{2}$$

⁴Lời giải này của Trần Quang Hùng.

Suy ra:

$$a^{2k} \geq (b - c)^{2k} + 4S \tan^k \frac{A}{2}$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự với b, c , từ đó ta quy về chứng minh:

$$(4S)^k \sum_{cyc} \tan^k \frac{A}{2} \geq 3 \left(\frac{4}{\sqrt{3}} S \right)^k$$

$$\sqrt{3}^k \sum_{cyc} \tan^k \frac{A}{2} \geq 3$$

Ta dễ dàng chứng minh điều này ⁵.

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 9 (Tsintsifas).

Cho tam giác ABC và 3 số thực không âm p, q, r . Chứng minh rằng:

$$\frac{p}{q+r} a^2 + \frac{q}{p+r} b^2 + \frac{r}{p+q} c^2 \geq 2\sqrt{3}S$$

LỜI GIẢI.

Theo bất đẳng thức Finsler-Hadwiger:

$$2\sqrt{3}S \leq ab + bc + ca - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{2p}{q+r} a^2 + \frac{2q}{p+r} b^2 + \frac{2r}{p+q} c^2 \geq 2(ab + bc + ca) - a^2 + b^2 + c^2 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (q+r) \sum_{cyc} \frac{a^2}{q+r} \geq (a+b+c)^2 \quad (4)$$

Tuy nhiên (4) đúng theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz cho 2 bộ số

$(q+r; p+r; p+q)$ và $(\frac{a^2}{q+r}; \frac{b^2}{p+r}; \frac{c^2}{p+q})$.

Vậy ta có đ.p.c.m. ⁶ □

Ta cũng có thể chứng minh bài toán sau đây một cách hoàn toàn tương tự như trên:

⁵Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm $f(x) = \tan^k \frac{x}{2}$ với x lần lượt bằng A, B, C .

⁶Bất đẳng thức (3) cũng được tác giả gặp trong [3].

Mở rộng 2 (mở rộng **Bài toán 9**).

Cho tam giác ABC và 3 số thực p, q, r thỏa mãn $p + q, q + r, r + p \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{p}{q+r}a^2 + \frac{q}{p+r}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geq 2\sqrt{3}S$$

Thú vị hơn, trong [1], chúng ta lại bắt gặp một bài bất đẳng thức khác (không liên quan gì đến hình học) có hình thức khá giống với **Bài toán 9**:

Bài toán 10 (Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu).

Cho hai bộ số thực không âm $(x; y; z)$ và $(a; b; c)$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{a+c}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geq 3$$

Ta dễ dàng nhận ra nếu sử dụng phép thế Conway cho bộ số $(x; y; z)$ ta sẽ đưa bất đẳng thức trên trở thành **Bài toán 9**, nhưng tác giả thực sự ấn tượng với lời giải thuần đại số rất đẹp mắt sau đây!

LỜI GIẢI.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau đây cho mọi a, b, c, x, y, z không âm:

$$\frac{a}{b+c}(y+z) + \frac{b}{a+c}(z+x) + \frac{c}{a+b}(x+y) \geq \sqrt{3(xy + yz + zx)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a}{b+c}x + \sqrt{3(xy + yz + zx)} &\leq \sqrt{\sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^2} \sum_{cyc} x^2} + \sqrt{\frac{3}{4} \sum_{cyc} xy} + \sqrt{\frac{3}{4} \sum_{cyc} xy} \\ &\leq \sqrt{\left[\sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{3}{2} \right] \left(\sum_{cyc} x^2 + 2 \sum_{cyc} xy \right)} \\ &= (x + y + z) \sqrt{\sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Cuối cùng ta chứng minh:

$$\begin{aligned} (x + y + z) \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} &\geq (x + y + z) \sqrt{\sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab}{(c+a)(c+b)} &\geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} a(b-c)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Vậy ta có đ.p.c.m. □

Định lý 4 (bất đẳng thức Neuberg-Pedoe).

Cho hai tam giác ABC và XYZ. Chứng minh rằng:

$$(z^2 + y^2 - x^2)a^2 + (x^2 + z^2 - y^2)b^2 + (x^2 + y^2 - z^2)c^2 \geq 16S_{ABC}S_{XYZ}$$

Chứng minh.

Bổ đề 2 (bất đẳng thức Aczel).

Cho hai bộ số thực không âm a_i và b_i ($i = \overline{1, n}$) và 2 số thực không âm $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &\geq \sum_{i=1}^n a_i^2 \\ \mathcal{B}^2 &\geq \sum_{i=1}^n b_i^2\end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\left(\mathcal{A}^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\mathcal{B}^2 - \sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq \left(\mathcal{AB} - \sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

Chứng minh bổ đề.

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có:

$$\mathcal{AB} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sqrt{\left(\mathcal{A}^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\mathcal{B}^2 - \sum_{i=1}^n b_i^2\right)} \leq \mathcal{AB} \quad (5)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned}VT_{(5)} &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sqrt{\left(\mathcal{A}^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\mathcal{B}^2 - \sum_{i=1}^n b_i^2\right)} \\ &\leq \sqrt{\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2}\end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. ▼

Ta có đẳng thức:

$$\begin{aligned}4S_{ABC} &= \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)} \\ 4S_{XYZ} &= \sqrt{2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\begin{aligned} & \sqrt{[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)] [(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)]} \\ & \leq (z^2 + y^2 - x^2)a^2 + (x^2 + z^2 - y^2)b^2 + (x^2 + y^2 - z^2)c^2 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Aczel:

$$LHS \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2\sqrt{(x^4 + y^4 + z^4)(a^4 + b^4 + c^4)}$$

Ta cần chứng minh:

$$2(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) \leq 2\sqrt{(x^4 + y^4 + z^4)(a^4 + b^4 + c^4)}$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz.

Vậy ta có đ.p.c.m. ■

Bài toán 11.

Cho u, v, w là 3 số thực thỏa mãn điều kiện Conway, a, b, c và S là độ dài 3 cạnh và diện tích của một tam giác. Khi đó ta luôn có:

$$ua^2 + vb^2 + wc^2 \geq 4\sqrt{uv + vw + wu}S$$

LỜI GIẢI 1.

Do u, v, w là 3 số thực thỏa mãn điều kiện Conway nên tồn tại một tam giác XYZ thỏa mãn:

$$x = \sqrt{v + w}, \quad y = \sqrt{u + w}, \quad z = \sqrt{u + v}, \quad S_{XYZ} = \frac{1}{2}\sqrt{uv + vw + wu}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(z^2 + y^2 - x^2)a^2 + (x^2 + z^2 - y^2)b^2 + (x^2 + y^2 - z^2)c^2 \geq 16S_{ABC}S_{XYZ}$$

Đây chính là bất đẳng thức Neuberg-Pedoe. Ta có đ.p.c.m. □

Sau đây tác giả xin nêu ra một lời giải khác (rất đẹp và đơn giản) cho bài toán trên:

LỜI GIẢI 2.

Ta có:

$$\begin{aligned} LHS &= u(a^2 - b^2 - c^2) + (u + v)b^2 + (u + v)c^2 \geq -2ubc \cos A + 2bc\sqrt{u^2 + uv + vw + wu} \\ RHS &= 2bc\sqrt{uv + vw + wu} \sin A \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & -2ubc \cos A + 2bc\sqrt{u^2 + uv + vw + wu} \geq 2bc\sqrt{uv + vw + wu} \sin A \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(\sin^2 A + \cos^2 A)(uv + vw + wu + u^2)} \geq \sqrt{uv + vw + wu} \sin A + u \cos A \end{aligned}$$

Điều này đúng theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz.

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 12 (Vasile Cirtoaje).

Cho x, y, z, a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$(ay + az + bx + bz + cx + cy)^2 \geq 4(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)$$

Bài toán trên tương đương với bài toán của Ukraine 2001 sau đây:

Cho x, y, z, a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq (ax + by + cz) + 2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)}$$

LỜI GIẢI 1.

Bất đẳng thức tương đương:

$$x(b + c) + y(c + a) + z(a + b) \geq 2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)}$$

Theo phép thế Conway, tồn tại tam giác XYZ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} YZ &= \sqrt{y + z} \\ XY &= \sqrt{x + y} \\ ZX &= \sqrt{z + x} \\ S_{XYZ} &= \frac{1}{2}\sqrt{xy + yz + zx} \end{aligned}$$

và tam giác ABC thỏa mãn:

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{b + c} \\ AC &= \sqrt{a + c} \\ AB &= \sqrt{a + b} \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{ab + bc + ca} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(z^2 + y^2 - x^2)a^2 + (x^2 + z^2 - y^2)b^2 + (x^2 + y^2 - z^2)c^2 \geq 16S_{ABC}S_{XYZ}$$

Đây chính là bất đẳng thức Neuberger-Pedoe. Ta có đ.p.c.m. □

LỜI GIẢI 2.

Ta sẽ chứng minh bài toán ở dạng bài Ukraine 2001.

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} ax + by + cz + 2\sqrt{\sum_{cyc} xy \sum_{cyc} ab} &\leq \sqrt{\sum_{cyc} a^2 \sum_{cyc} x^2} + \sqrt{2 \sum_{cyc} xy \cdot 2 \sum_{cyc} ab} \\ &\leq \sqrt{(x + y + z)^2 (a + b + c)^2} \\ &= a + b + c \end{aligned}$$

Ta có đ.p.c.m. □

LỜI GIẢI 3.

Không mất tổng quát chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(xy + yz + zx)(ab + bc + ca)} &\leq xy + yz + zx + ab + bc + ca \\ &= \frac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{2} + \frac{1 - a^2 - b^2 - c^2}{2} \\ &\leq 1 - ax - by - cz \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 13 (Cosmin Pohoatǎ).

Cho tam giác ABC và 3 số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + \frac{2}{x + y + z} \sum_{cyc} \frac{x^2 - yz}{x} a^2$$

LỜI GIẢI.

Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\sum_{cyc} \frac{2yz + xy + xz - x^2}{x(x + y + z)} a^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

Đặt

$$\begin{aligned} u &= \frac{2yz + xy + xz - x^2}{x(x + y + z)} \\ v &= \frac{2xz + xy + yz - y^2}{y(x + y + z)} \\ w &= \frac{2xy + yz + xz - z^2}{z(x + y + z)} \end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} uv + vw + wu &= 3 \\ u + v &\geq 0 \\ v + w &\geq 0 \\ w + u &\geq 0 \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh:

$$ua^2 + vb^2 + wc^2 \geq 4\sqrt{uv + vw + wu}S$$

Đây chính là **Bài toán 11**. Ta có đ.p.c.m. □

Bài toán 14 (Vasile Cirtoaje).

Chúng minh rằng với mọi 6 số thực dương a, b, c, x, y, z ta luôn có:

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z)$$

LỜI GIẢI.

Biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng sau:

$$\begin{aligned} & \sqrt{9(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} - (a + b + c)(x + y + z) \\ & \geq (a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz:

$$\sqrt{9(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} - (a + b + c)(x + y + z) \geq 0$$

Nếu

$$0 \geq (a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz)$$

bất đẳng thức hiển nhiên đúng, ta chỉ xét trong trường hợp:

$$(a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz) \geq 0$$

Bình phương 2 vế và áp dụng bất đẳng thức Aczel:

$$\begin{aligned} LHS & \geq [3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2] [3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2] \\ & = \sum_{cyc} (a - b)^2 \sum_{cyc} (x - y)^2 \\ & \geq [(a - b)(x - y) + (b - c)(y - z) + (c - a)(z - x)]^2 \\ & = [(a + b + c)(x + y + z) - 3(ax + by + cz)]^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có đ.p.c.m. □

Tài liệu

- [1] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, Vol.1, GIL Publishing House, 2004.
- [2] Hojoo Lee, *Topic in Inequalities*, The IMO Compendium Group, 2007.
- [3] Phạm Văn Thuận, Lê Vĩ, *Bất đẳng thức suy luận và khám phá*, NXB ĐHQGHN, 2007.