

Đề thi Olympic toán sinh viên cấp trường đại học Kinh tế quốc dân Hà Nội năm 2013

Câu 1:

Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau $u_1 = \sqrt{2}$; $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2011\sqrt{2}} \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$$

Câu 2:

Cho $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ là hàm số liên tục sao cho $f(0) = 0$; $f(1) = 1$

Đặt

$$f_k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_k$$

Giả sử rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho $f_n(x) = x; \forall x \in [0, 1]$. Chứng minh rằng $f(x) = x, \forall x \in [0, 1]$

Câu 3:

Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi. có đạo hàm cấp 2 không âm. Chứng minh rằng

$$f(x + f'(x)) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 4:

Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(xf(y) + x) = xy + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$

Câu 5:

a) Tính tích phân

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$$

b) Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

Chứng minh rằng

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)$$

Câu 6:

cho $f : [a, b] \rightarrow (a, b)$ là hàm liên tục. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n tồn tại số dương α và $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) + f(c + \alpha) + \dots + f(c + n\alpha) = (n + 1)\left(c + \frac{n}{2}\alpha\right)$$

Hết

Đáp án tham khảo đề thi Olympic toán sinh viên cấp trường đại học Kinh tế quốc dân Hà Nội năm 2013

Câu 1:

Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau $u_1 = \sqrt{2}$; $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2011\sqrt{2}} \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$$

Lời giải

Từ công thức xác định dãy ta có: $2011\sqrt{2} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{u_n}{u_{n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_k}{u_{k+1}} = 2011\sqrt{2} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = 2011\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{u_{k+1}} \right)$$

Hơn nữa $u_{n+1} > u_n \geq \sqrt{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ Do đó $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu. Do đó nếu dãy $\{u_n\}$ bị chặn trên thì nó hội tụ về a hữu hạn suy ra

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_n^2}{2011\sqrt{2}} \right) = a + \frac{a^2}{2011\sqrt{2}}$$

Suy ra $a = 0$ vô lý do $a \geq \sqrt{2}$ Vậy $\{u_n\}$ không bị chặn trên nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = 2011\sqrt{2}$$

Câu 2:

Cho $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ là hàm số liên tục sao cho $f(0) = 0$; $f(1) = 1$

Đặt

$$f_k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_k$$

Giả sử rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho $f_n(x) = x, \forall x \in [0, 1]$.

Chứng minh rằng $f(x) = x, \forall x \in [0, 1]$

Lời giải

Với $x, y \in [0, 1]$ sao cho $f(x) = f(y)$, suy ra $f_n(x) = f_n(y) \Leftrightarrow x = y$

Vậy f đơn ánh. Kết hợp giả thiết f liên tục, suy ra f đơn điệu trên $[0, 1]$

Có $f(0) = 0 < 1 = f(1)$, do đó f đơn điệu tăng.

Giả sử tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) < x_0$

$$\Rightarrow f_n(x_0) < f_{n-1}(x_0) < \dots < f(x_0) < x_0$$

Mâu thuẫn !

Tương tự vậy nếu có $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) > x_0$ thì cũng dẫn đến $f_n(x_0) > x_0$.

Vậy phải có $f(x) = x, \forall x \in [0, 1]$

Câu 3:

Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi. có đạo hàm cấp 2 không âm. Chứng minh rằng

$$f(x + f'(x)) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Lời giải

Nếu $f'(x) = 0$ ta có điều cần chứng minh.

Nếu $f'(x) > 0$ thì áp dụng định lý *Lagrange* cho hàm f trên $(x; x + f'(x))$ ta có tồn tại c trong khoảng trên sao cho:

$$f'(c) \cdot f'(x) = f(x + f'(x)) - f(x)$$

Vì $f''(x) > 0$ nên ta có: $f'(x)$ là hàm tăng hay $0 < f'(x) < f'(c)$

Suy ra điều cần chứng minh.

Tương tự với $f'(x) < 0$

Câu 4:

Tìm hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(xf(y) + x) = xy + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$

Lời giải

Cho $x = 1 \Rightarrow f(f(y) + 1) = y + f(1)$

$$y = -f(1) - 1 \Rightarrow f(f(-f(1) - 1) + 1) = -1$$

Đặt $a = f(-f(1) - 1) + 1 \Rightarrow f(a) = -1$

Thay $y = a$ vào phương trình đầu:

$$f(0) = ax + f(x)$$

Vậy $f(x) = ax + b$ Thay lại phương trình đầu suy ra $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$

Câu 5:

a) Tính tích phân $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$

b) Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

Chứng minh rằng

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)$$

Lời giải

a) **Bổ đề:** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên đoạn $[-a; a]$ khi đó ta có

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(x)dx}{m^x + 1} = \int_{-a}^0 \frac{f(x)dx}{m^x + 1} + \int_0^a \frac{f(x)dx}{m^x + 1}$$

Chứng minh: Đặt

$$\begin{aligned} x = -t \Rightarrow I &= \int_{-a}^0 \frac{f(x)dx}{m^x + 1} = \int_a^0 \frac{f(-t)d(-t)}{m^{-1} + 1} = \int_0^a \frac{f(-t)dt}{\frac{1}{m^t} + 1} = \int_0^a \frac{m^t f(-t)dt}{m^t + 1} \\ &= \int_0^a \frac{m^x f(-x)dx}{m^x + 1} = \int_0^a \frac{m^x f(x)dx}{m^x + 1} \Rightarrow B = \int_0^a \frac{m^x f(x)}{m^x + 1} + \int_0^a \frac{f(x)}{m^x + 1} dx = \int_0^a f(x)dx \end{aligned}$$

Đặt $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}$; $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ là hàm chẵn; liên tục trên $[-1; 1]$ nên sử dụng bổ đề trên ta có

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

b) Từ giả thiết $\forall x_1, x_2 \in [a, b], f(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ suy ra f là hàm lồi trên $[a, b]$

Đổi biến $x = (1 - t)a + bt$

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a) \int_0^1 f((1 - x)a + bx)dx \leq (b - a) \int_0^1 [(1 - x)f(a) + xf(b)]dx \leq (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Đổi biến $x = t + \frac{a + b}{2}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(x + \frac{a+b}{2})dx \\ &= \int_0^{\frac{b-a}{2}} (f(x + \frac{a+b}{2}) + f(\frac{a+b}{2} - x))dx \\ &\geq \int_0^{\frac{b-a}{2}} 2f(\frac{a+b}{2})dx = (b - a)f(\frac{a+b}{2}) \end{aligned}$$

Câu 6:

cho $f : [a, b] \rightarrow (a, b)$ là hàm liên tục. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n tồn tại số dương α và $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) + f(c + \alpha) + \dots + f(c + n\alpha) = (n + 1)(c + \frac{n}{2}\alpha)$$

Lời giải

Ta có: $f(a) - a > 0$, $f(b) - b < 0$, $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nên $f(x) - x$ liên tục trên $[a, b]$, do đó phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trên (a, b)

Lại có $f(a) > a$, $f(b) < b$, do đó, trong tất cả nghiệm của phương trình $f(x) = x$, phải có nghiệm x_0 sao cho tồn tại $\epsilon > 0$ đủ nhỏ ($a < x_0 - \epsilon < x_0 + \epsilon < b$) để $\forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$, $f(x) > x$ và $\forall x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, $f(x) < x$

Với n là số nguyên dương cho trước, chọn $0 < \alpha < \frac{\epsilon}{n}$

Xét $g_n(x) = \sum_{i=0}^n [f(x + i\alpha) - (x + i\alpha)]$, $x \in (a, b - n\alpha)$

Dễ thấy g liên tục trên $(a, b - n\alpha)$

Chọn $x_1 \in (x_0 - \epsilon, x_0 - n\alpha)$, khi đó ta luôn có $x_1 + i\alpha \in (x_0 - \epsilon, x_0)$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$

do đó, $f(x_1 + i\alpha) > x_1 + i\alpha$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n [f(x_1 + i\alpha) - (x_1 + i\alpha)] > 0$$

$$\Leftrightarrow g(x_1) > 0$$

Chọn $x_2 \in (x_0, x_0 + \epsilon - n\alpha)$, khi đó ta luôn có $x_2 + i\alpha \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$

do đó, $f(x_2 + i\alpha) < x_2 + i\alpha$, $\forall i \in \{0, \dots, n\}$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n [f(x_2 + i\alpha) - (x_2 + i\alpha)] < 0$$

$$\Leftrightarrow g(x_2) < 0$$

Vậy theo định lý giá trị trung gian, $\exists c \in (x_1, x_2)$, $g(c) = 0$

tức

$$f(c) + f(c + \alpha) + \dots + f(c + n\alpha) = (n + 1)c + \sum_{i=1}^n i\alpha = (n + 1)\left(c + \frac{n}{2}\alpha\right)$$

Lời giải được thực hiện bởi các thành viên **Ispectorgadget**, **phudinhgioihan**,
Hoàng Quốc việt của diễn đàn toán học VMF -
www.diendantoanhoc.net