

# TƯ DUY SÁNG TẠO TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Nguyễn Song Minh

Phải nói ngay là kỹ năng mà tôi trình bày đến các bạn đây không phải là 1 phương pháp vạn năng (như tôi từng bị kết tội trong 1 buổi giảng dưới Hải Phòng). Nói chung là làm quái gì có pp vạn năng .. Có chăng chỉ là những nguyên tắc tư duy cơ bản, nói như Polya tức là những "lối đi có lý" .. Những lối đi có lý giúp người ta bớt mê .. Thế thôi!

Ta bắt đầu bằng một bài toán Đại Số như sau:

**Bài Toán:** Giải phương trình:  $x^3 - 3x + 2 = 0$ .

*Nhận xét:* Đây là một bài toán dễ với những học sinh không quá mất căn bản .. Bạn thường làm gì để tôi đoán nhé:

- Nhắm thấy  $x = 1$  là nghiệm đặc biệt.
- Lấy  $x^3 - 3x + 2$  chia cho  $x - 1$  ngoài nháp!
- Được  $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ .
- Kết luận: nghiệm phương trình là  $x = 1$  và  $x = -2$ .

Bạn làm như thế là rất tốt! Tuy nhiên việc "quá điều luyện" và "tự tin" với những kỹ năng máy móc như vậy là cả 1 vấn đề rất chi là nguy hại đến tư duy của bạn ... Trên quan điểm "hủy diệt" bài toán đó thì quả thực chiêu pháp của bạn là "tàn bạo" và vì "thiếu nhân đạo" nên đôi khi việc bạn mất công thì nó cũng chả đem lại tác dụng zê .. Nói thế tức là ta dè chừng "Dục" với lời giải xuống 1 tý đã .. "Gian manh thì sự nó mới TO cái thành .." các cụ chả dạy thế là gì?

Tôi thì có vài ý như sau:

- Nhắm thấy nghiệm  $x = 1$ .
- Số 1 là một "nghiệm đẹp" (ngoài đời oánh nhau vì số 1). Tuy nhiên khi vác đi tính toán thì số 1 chưa "tiện" bằng số 0 (số này bị sida cứ số nào khác ôm (nhân) phải nó cũng sida theo ...). Thêm nữa cộng trừ với 0 thì còn gì khoái bằng! (có phải làm cái giề đầu ) ...
- Ấn  $x$  ban đầu tý nữa bằng 1 tức là  $x = 1 + t$  ( $t$ : một tý). Cái "tý" ấy lát nữa sẽ bằng 0.
- Nếu gặp một phương trình đại số mà có nghiệm  $x = 0$  thì ... nhân tử cứ gọi là tự .. cỏi trường .. Chúng mình chả mất công .. làm cái gì cả.

*Lời giải:* Đặt  $x = 1 + t$  phương trình trở thành

$$(1 + t)^3 - 3(1 + t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \text{Hơ hơ!!}$$

Bây giờ ta nói đến phương trình lượng giác ...

Ai từng giải các phương trình lượng giác (hay phương trình loại cổ khỉ j khác ..) cũng phải chấp nhận là quanh đi quẩn lại ta phải:

- Biến đổi phương trình để ...  
-Bắt nhân tử.  
-Đưa ngay về phương trình cơ bản (đôi khi dễ tính thế lắm).  
-Làm xuất hiện ẩn phụ ...
- Sử dụng các đánh giá đặc biệt để cá biệt hóa sự so sánh trong phương trình (cái này tôi ghét vì tôi dốt .. BĐT ).

Trong các "trò" cơ bản trên cái trò bắt nhân tử đôi khi rất chi là phiền toái .. Giả dụ mà bạn gặp kiểu  $\sin 2x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$  thì chả nói làm gì! Nhưng nếu mà gặp kiểu  $2 \sin 2x + (2\sqrt{3} - 3) \sin x + (2 - 3\sqrt{3}) \cos x = 6 - \sqrt{3}$  thì tình hình là rất khác đó ...

Bây giờ "bắt chiếc" cái vẹo vắn ở trên kia với phương trình Đại Số ta có vài ý nghĩ như sau:

- Do sự xuất hiện của  $\sqrt{3}$  nên ta lợ mọ mọ quanh các nghiệm đặc biệt liên can đến  $\frac{\pi}{3}$  và  $\frac{\pi}{6}$ .
- Với cái Fx500 thì bạn chỉ cần mất 1 phút để .. mò ra nghiệm đặc biệt  $c = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ .
- Sẽ đặt  $x = t + \frac{7\pi}{6}$  đưa phương trình về ẩn  $t$ .
- Hý hóp hy vọng nhân tử sẽ tự .. cời truồng

*Lời giải:* Phương trình

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2 \sin 2x + 2(\sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x) - 3(\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x) = 6 - \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 2 \sin 2x + 4 \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 3 \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 6 - \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 2 \sin(2t + 7\pi/3) + 4 \sin(t + 8\frac{\pi}{6}) - 6 \sin(t + \frac{\pi}{6}) = 6 - \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \sin 2t + \sqrt{3} \cos 2t - 2 \sin t - 2\sqrt{3} \cos t + 6 \cos t - 6 + \sqrt{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sin 2t - 2 \sin t) + 6(\cos t - 1) + \sqrt{3}(1 + \cos 2t - 2 \cos t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin t \cdot (\cos t - 1) + 6(\cos t - 1) + \sqrt{3}(2 \cos^2 t - 2 \cos t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\cos t - 1) \cdot (\sin t + \sqrt{3} \cos t + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Ngon!} \end{aligned}$$

**Câu hỏi:** Cách giải này sáng tạo, em chưa thấy bao giờ. Thưa thầy, nhân tiện, thầy có thể nói về dạng bài, giải phương trình mà đưa về phương trình lượng giác để giải không ạ?

**Trả lời:**

Cái gì cũng nên tùy biến cháu à! Khi bắt đầu tìm lời giải 1 bài toán, lúc bé chú được dạy (bây giờ chú cũng hay dạy lại những đứa chú muốn+được+phải dạy) là nên tự đặt vấn đề và cần có vài nhận xét cơ bản về bài toán như sau:

- Có những đối tượng cơ bản nào trong bài toán của ta?
- Những thứ có mặt (đã nhận thức thấy sự xuất hiện), chúng có liên can ràng buộc gì với nhau?
- Những kiến thức cơ bản (định lý, tính chất, quy tắc) nào xác lập các mối tương quan đã đoán nhận?

Về 3 câu hỏi đó:

Câu thứ nhất muốn trả lời cho bản thân tốt, thì phải nắm chắc các khái niệm-định nghĩa Toán Học. Cái này cần đến trí nhớ, và sự chăm chỉ ở mức độ cần thiết. Vì lẽ đó mà chú từng định học Toán lên cao mà thất bại, vì chú cũng .. lười như ma.

Lười học khái niệm, thì hay dẫn đến nhận biết đối tượng sai! Tức là giống như bị mù màu hoặc lác, mà đã nhận thức sai dễ dẫn ra ảo. Đã bị ảo thì đến húp cháo cũng khó, chứ chả nói đến làm Toán cháu à! Làm Toán sơ cấp, có cái sướng là ít định nghĩa, nên để trả lời câu hỏi này cũng không quá khổ sở. Chú luôn tin thế, cháu cũng cứ lạc quan vậy nhá!

Câu thứ hai, thì đòi hỏi phải có trí tưởng tượng tốt cùng với thói quen liên hệ các hình tượng đời sống với nhau (kiểu như bọn bên Văn nó làm thơ viết truyện á!). Nói chung là, đầu óc cần có tỷ mơ mộng+sến tức là điều điều 1 tý! Chứ cứ mà nghĩ cái kiểu: "Củ khoai dẻo giống củ mài/ lông ta chả giống lông Tây bao giờ", tức là cái lối tư duy "mang lông bàn đi úp đĩa cho nó chắc ..". Thì, chả khá được! Sự mơ mộng cùng trí tưởng tượng, chả riêng trong mặt nào đời sống đều hơi bị cần thiết. Ông Tagore bên Ấn-Độ có dạy là: "Ước mơ quý báu hơn bánh mì". Hay người Việt dân dã mình thì hay xúi nhau "chả ai đánh thuế mơ ước sắt!". Trong khi làm bài tập Toán, đôi khi ta mất đi trí tưởng tượng là bởi vì áp lực kinh hoàng từ xung quanh. Nếu muốn tránh cái hoàn cảnh xấu đó, tốt nhất hãy nghĩ: "Bình tĩnh nào! Chả làm được chả sao, có ai tử hình mình được nếu mình không làm được bài toán này đâu?!". Tuy nhiên, mơ cái quái gì thì mơ nhưng mà làm bài tập Toán thì cũng phải đặt mục đích ra rõ ràng (cái này nhiều khi không giống đời). Tức là dù không thực dụng quá thể, nhưng nên thực tế! Ở đời, chưa thi bằng Bx nhìn thấy ô-tô trên TV vẫn ước được ôm tay của cái bốn bánh. Cơ mà làm Toán mà thế thì gay, đi ngay từ khi mới há mồm trình bày.

Cái câu hỏi thứ ba, thì cũng cần huy động từ bản thân những phẩm chất đã giúp ta giải đáp được câu hỏi thứ nhất. Có cái khác là, nếu câu hỏi thứ nhất còn ít ỏi câu giả nhời. Thì câu hỏi thứ ba này vô cùng tận, tính chất một đối tượng trong sự vận động hiện sinh của nó giữa tổng thể thì muôn trạng .. Nói đơn giản, cháu có một biểu thức lượng giác .. Mà nếu cháu chăm học, thì sẽ thuộc kèm một mớ các công thức LG liên can. Nếu không định hướng tốt, cháu sẽ biến đổi điên loạn+điên loạn .. Sau đó một lúc, thì ngồi vừa thở hồng hộc vừa rón rén thở dài vì nhớ lời mấy câu ông bà ngâm nga lúc ru mình ngủ hồi bé: "Con kiến mà leo cành đa/ leo phải cành cụt leo ra leo vào/ con kiến trèo lên cành đào/ leo phải cành cụt lại .. leo vào leo ra". Với kinh nghiệm ít ỏi của chú, muốn tránh cái đoạn xấu xa này thì lúc học lý thuyết phải biết lắng nghe thầy cô (hoặc đôi khi biết bịt tai trước những lời xúi dại của .. chính thầy cô ), và cả ngay tự ý thức bản thân nữa .. Cần có thói quen cô động coi, thật sự cái gì là "CƠ BẢN". Chú lúc dạy học, có cái thú xấu là hay ngó vở học trò .. Nhiều lần, chú bắt gặp những đứa chăm học nó liệt kê một đồng gọi là "Các dạng phương trình lượng giác cơ bản". Phương trình lượng giác cơ bản, vốn chỉ có bốn bài toán là các phương trình kiểu  $f(x) = m$  với  $f(x) \in \{\cos x; \sin x; \tan x; \cot x\}$ . Thế mà liệt kê ra hàng ngót ngét 20 dạng, thế thì bán bí đôi khi là phải thôi. Một kinh nghiệm quý để tránh cái thói xấu bệnh này, là chỗ có bao giờ giải bài tập kiểu "Hảo Hảo" tức là theo dạng ăn sẵn. Cứ cố gắng gắng coi nó mới toe mà lấy hứng, như thế thì có được những suy luận tự nhiên thú vị và dễ lên cơn cực khoái.

Để có những câu trả lời gút nhất cho 3 câu hỏi trên, hãy cố gắn bó các ý nghĩ lại trong một khối

thống kết! Và kiên trì tập luyện thói quen ứng xử đó, ngay ở những bài toán dễ nhất. Theo kinh nghiệm cá nhân chú, một trong những kẻ thù của tư duy (cũng chưa hẳn là sáng tạo). Chính là ký ức, cái ý nghĩ kiểu "trúng mẹ nó dạng đã mất công luyện rồi, há há!!" là cái ý nghĩ đôi khi hơi bị chua xót sau khi bị đề Toán tà lưạ Mới có một ý khá thú vị bắt chước thằng AQ khi làm bài tập Toán là: "Khó nhề! Nhưng không sao, cứ bình tĩnh xác định đúng chỗ khó gì đập trúng huyết cho nó phát. Thế ắt xong!". Nhiều đứa chú từng dạy, mới vớt bài được vài phút đã nhăn nhó kêu "Khó quá! Thầy gọi ý em với!!". Khi chú hỏi: "Khó ở chỗ nào?". Thì lại trả lời: "Em chưa biết, chỉ cảm thấy khó, khó lắm!"

Tránh bị mang tiếng văn vở, chú xin trình bày một thí dụ với câu hỏi chính của cháu nhá!

**Bài toán:** Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình sau:

$$\left| x + \sqrt{1 - x^2} \right| = -\sqrt{2} (2x^2 - 1)$$

*Nhận xét:*

Bất phương trình có cái căn và cái trị tuyệt đối, để điều trị cái căn thì sẽ phải dùng đến phép bình phương. Muốn bình phương kiểu tác động ngoài được, thì phải dọn cái căn qua 1 bên. Nếu thế thì phải phá bung được cái trị tuyệt đối, mà eo ôi xét dấu cái ruột trị tuyệt đối thì cũng được thôi cơ mà "làm người ai làm thế!". Cứ bình tĩnh đã nào ..

Cứ cho là đã xét dấu xong, dọn được căn qua bên, thế thì nó ở một trong hai hình thái:

$$\sqrt{1 - x^2} = -x - \sqrt{2}(2x^2 - 1) \text{ hoặc } \sqrt{1 - x^2} = -x + \sqrt{2}(2x^2 - 1)$$

Đến đây mà bình phương, là đưa về ngay phương trình bậc 4. Phương trình bậc 4 mà bí, thì lên Wiki soát cách giải tổng quát là xong ngay thôi mà! Nhưng mà nếu đương thi, thì chú biết là chả cuộc thi Toán nào cho dùng máy tính nối internet. Hoặc cứ cho là có ngày cho dùng đi, chắc cũng bị ngăn google và wiki.

Thôi thì tóm lại là sẽ có bình phương, không oánh được từ ngoài zô trong, thì .. Kích động bên trong biểu tình, gây bạo động!. Cái này giống như chuyện bên Lybia cháu à! Tức là để thoát cái căn khôn nạn kia, ta có 2 ngón:

- Viết  $(\sqrt{1 - x^2})^2 = 1 - x^2$ , ngón này giống như cụ Phan Bội Châu định nhờ Nhật đánh Pháp giúp mình. Suýt thành!
- Viết  $\sqrt{1 - x^2} = u^2$ , để mà lợi dụng cái đoạn  $\sqrt{1 - x^2}$  bây giờ sẽ là:  $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{u^2} = |u|$ . Vụ này, y như Nato xúi dân Ban-Kăng lật đổ cộng sản.

Cụ Phan thì đã bị Lịch Sử từ chối sự thành công, chú cháu mình với bài toán này vì .. lười (và biết tý Lịch Sử), nên cũng từ chối ngón kiểu cụ Phan. Thế bây giờ bắt chước Nato cháu nhá, xem như nào! Giả dụ mà viết  $1 - x^2 = u^2$ , ngứa tay tý toáy cái là nó thành  $1 = x^2 + u^2$  hay chính là  $x^2 + u^2 = 1$ . Viết công thức là thế, chứ đọc mồm là: "ích bình cộng u bình thành một". Đọc thế mà nhớ cháu có chú hàng xóm tên là Ích, em cháu lại tên là Một là thầy u cháu lục đục to, phỏng? Thôi thì lại lười, đọc tắt là "ứ ừ .. bình cộng ồ ồ .. bình bằng 1". Mà cứ có cái thói ứ ừ và ồ ồ như thế nó quen là hay phết nhá! Bởi vì, nói gọi ta đến " .. bình + .. bình = 1", rồi đơ đơ ra 1 lúc khắc nhớ đến  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ . Tất nhiên, chỉ có thể nhớ đến nếu từng đã chăm tập nhớ nó!

Tóm lại là thử phát nào:  $x = \cos t$ , thế rồi liếc qua bên phải mà rú lên sung sướng là: "Chết mẹ mày nhá!  $2 \cos^2 t - 1 = \cos 2t$ ". Tức là cái phương trình của chúng ta đã là:

$$|\cos t + |\sin t|| = \sqrt{2} \cos 2t$$

Vẫn còn cưu mang theo một lo toan là 2 cái dấu trị tuyệt đối, cơ mà thì thật ra để giá trị  $x = \cos t$  quét kín  $[-1; 1]$  thì chỉ cần  $t \in [0; \pi]$ . Lúc đó thì kéo theo sự xuống là:  $\sin t \geq 0$ . Tức là 1 cái trị tuyệt đối đã rơi vô quên lãng, và ta có được phương trình trở thành:  $|\cos t + \sin t| = \sqrt{2} \cos 2t$ . Bây giờ, nếu thuộc công thức biến đổi thì phụt 1 phát sẽ thành:

$$\sqrt{2} \left| \cos \left( t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = \sqrt{2} \cos 2t; (*)$$

Cái phương trình (\*) thì chữa hần tằm thường đâu, cơ mà chú tin là không quá khó! Bây giờ, chú quay lại cái nhận xét ở chỗ "ứ ừ và ồ ồ" trên kia ..

Ta thấy rằng nếu bạo dạn từ chối những trường hợp lèm nhèm, thì từ  $1 - x^2 = u^2$  (có thể giả sử luôn  $u > 0$  vì  $u = 0$  tức  $x = 1$  có đâu là nghiệm! ), sẽ có:

$$\left( \frac{1-x}{u} \right) \left( \frac{1+x}{u} \right) = 1$$

Một số mà nhân với cái số "nào đó" đã cho trước mà ra 1, người ta gọi là nghịch đảo của số "nào đó" kia! Nói thì là thế, chứ viết ra thì đơn giản là:  $g.v = 1$  thì  $g = \frac{1}{v}$ . Bây giờ, ta đặt bém cái phân số khùng khoảng  $\frac{1-x}{u} = t$  cho nó lành. Thế thì có ngay:

$$\begin{cases} \frac{1-x}{u} = t \\ \frac{1+x}{u} = \frac{1}{t} \end{cases}$$

Từ đó dẫn đến:

$$\begin{cases} \frac{1}{u} = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \\ \frac{x}{u} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} - t \right) \end{cases}$$

Dem chia búp 1 phát, là có:

$$\boxed{x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \sqrt{1-x^2} = u = \frac{2t}{1+t^2}; t > 0}$$

Khi này, để ý thêm là:

$$2x^2 - 1 = 2 \left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 - 1 = \frac{(1-t^2)^2 - 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1-t^2-2t)(1-t^2+2t)}{(1+t^2)^2}$$

Như vậy thì cái phương trình đề ra trở thành:

$$\left| \frac{1-t^2+2t}{1+t^2} \right| = \sqrt{2} \left( \frac{1-t^2-2t}{1+t^2} \right) \left( \frac{1-t^2+2t}{1+t^2} \right)$$

Nhân tử đã trần chuồng rồi nhá!

Tóm lại, cái điều mà chúng ta đã đúc rút được ra sau triển miên suy luận vừa rồi là: "Để mà kim thiền thoát xác cái  $\sqrt{1-x^2}$ " có 3 ngón:

- Kiểu cụ Phan Bội Châu, ngón này dùng được cũng còn phải nhòm ngó thêm "hoàn cảnh Lịch Sử".
- Đặt  $x = \cos t$ ;  $t \in [0; \pi]$ .

- Đặt  $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  với  $t \geq 0$ .

Cũng như chú đã xúi dại ở trên kia! Rằng thì là mấy ngón này, trong hoàn cảnh này, thì dùng là khoái trí đấy! Cơ mà trong hoàn cảnh .. khác (dù cũng là thấy cái  $\sqrt{1-x^2}$ ), thì đừng có cái thói "trúng mẹ nó dạng rồi nhá! há há!!". Là em đi trong sân si đấy! Tỷ dụ:

**Bài toán:** Giải phương trình:

$$2(2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}) - \sqrt{1-x^4} = 3x^2 + 1$$

Tại sao lại đi, á? Thì chuyện ở đây không phải là chỉ có nhõn cái  $\sqrt{1-x^2}$ , mà còn là cái  $\sqrt{1+x^2}$  nữa, nhè? Thôi, thì cái chuyện nghịch nó như nào? Thì chờ tập sau cháu nhá, nhiệt tình với cháu lắm vì cháu đã nhờ mồm khen chú "sáng tạo" ở trên kia cơ mà chú mỏi tay lắm rồi!