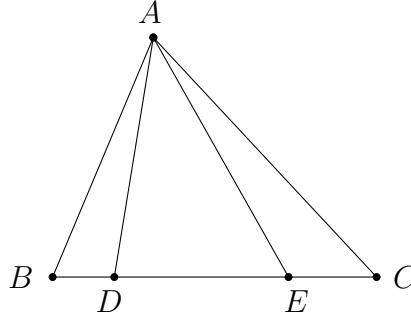


Chứng minh.



(a) *Phần thuận.* Giả sử AD và AE là hai đường đẳng giác của góc $\angle BAC$, ta sẽ chứng minh đẳng thức (1) cũng được thỏa mãn. Ta có

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{S_{BAD}}{S_{DAC}} = \frac{AD \cdot AB \cdot \sin \angle BAD}{AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC}. \quad (2)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle EAC}. \quad (3)$$

Mặt khác, do AD, AE là hai đường đẳng giác của góc $\angle BAC$ nên

$$\angle BAD = \angle EAC, \quad \angle DAC = \angle BAE. \quad (4)$$

Từ đây kết hợp với (2) và (3), ta thu được ngay đẳng thức (1).

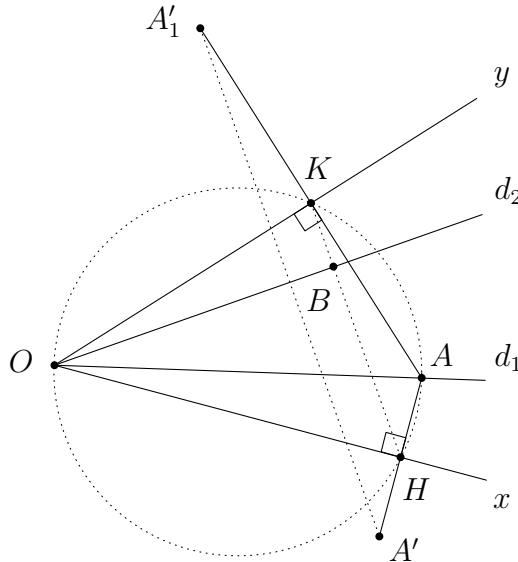
(b) *Phần đảo.* Giả sử AD, AE thỏa (1), ta chứng minh AD và AE là hai đường đẳng giác ứng với góc A . Vẽ AD' là đường đẳng giác của AE ($D' \in BC$). Khi đó ta có hệ thức

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Kết hợp với (1), ta có $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}$. Suy ra $D \equiv D'$, tức AD và AE là hai đường đẳng giác. $\square$

Định lý 2. Cho góc $\angle xOy$ và đường thẳng d_1 qua O , A là một điểm bất kỳ trên d_1 . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên Ox, Oy . Khi đó, đường thẳng d_2 là đường đẳng giác của d_1 ứng với góc $\angle xOy$ khi và chỉ khi d_2 qua O và vuông góc với HK .

Chứng minh. Chứng minh định lý này khá đơn giản, để thuận tiện ta sử dụng góc hình học.



(a) *Phần thuận.* Giả sử d_2 là đường đẳng giác của d_1 , ta sẽ chứng minh $d_2 \perp HK$. Ta có $OHAK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OA nên

$$\angle AOH = \angle AKH.$$

Mặt khác, ta lại có $\angle KOB = \angle AOH$, nên từ trên suy ra

$$\angle KOB = \angle AKH.$$

Vì $\angle AKH + \angle HKO = 90^\circ$ nên ta có $\angle KOB + \angle HKO = 90^\circ$, từ đó suy ra $OB \perp HK$.

(b) *Phần đảo.* Giả sử d_2 đi qua O và vuông góc với KH , ta sẽ chứng minh d_2 là đường đẳng giác của d_1 . Gọi đường thẳng d' là đường đẳng giác của d_1 ứng với góc $\angle xOy$. Theo phần thuận ta có $d' \perp HK$, suy ra d' trùng d_2 . Vậy d_2 là đường đẳng giác của d_1 . $\square$

Hệ quả 1. Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua Ox và Oy . Khi đó, đường trung trực của đoạn A_1A_2 là đường đẳng giác của OA .

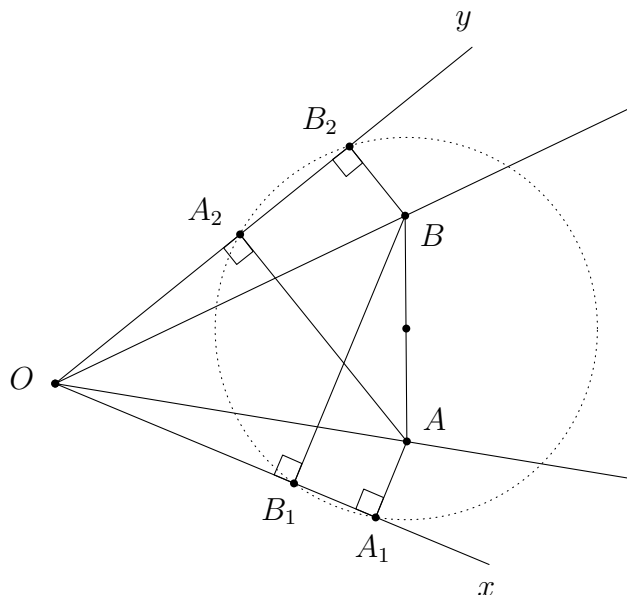
1.2.2 Các tính chất cơ bản

Định lý 3. Cho góc $\angle xOy$. A và B là hai điểm sao cho OA, OB là hai đường đẳng giác ứng với góc $\angle xOy$. A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên Ox, Oy và B_1, B_2 lần lượt là hình chiếu của B trên Ox, Oy . Khi đó, ta có các điều sau:

(a) Bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của AB ;

(b) $AA_1 \cdot BB_1 = AA_2 \cdot BB_2$.

Chứng minh.



(a) Ta có

$$OA_1 = OA \cos \angle AOA_1, \quad OB_1 = OB \cos \angle BOB_1$$

và

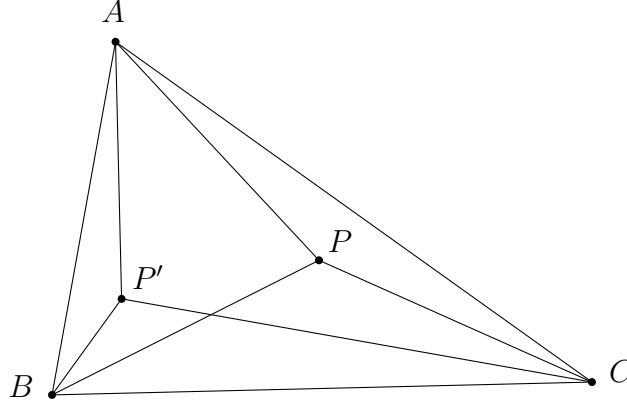
$$OA_2 = OA \cos \angle AOA_2, \quad OB_2 = OB \cos \angle BOB_2.$$

Suy ra $OA_1 \cdot OB_1 = OA_2 \cdot OB_2$. Do đó, bốn điểm A_1, A_2, B_1 và B_2 cùng thuộc một đường tròn. Hơn nữa tâm của đường tròn này chính là trung điểm của AB .

(b) Kết quả này được suy ra trực tiếp từ định nghĩa đường đẳng giác. $\square$

Định lý 4. Cho tam giác ABC . Các cặp đường thẳng d_a, d'_a là đường đẳng giác ứng với góc A , định nghĩa tương tự với d_b, d'_b và d_c, d'_c . Khi đó, d_a, d_b, d_c đồng quy tại P khi và chỉ khi d'_a, d'_b, d'_c đồng quy tại P' .

Chứng minh.



Sử dụng định lý Ceva dạng lượng giác ta chứng minh định lý 4 như sau: Giả sử d_a, d_b, d_c đồng quy tại P , ta có

$$\frac{\sin(d_a, c)}{\sin(d_a, b)} \cdot \frac{\sin(d_b, a)}{\sin(d_b, c)} \cdot \frac{\sin(d_c, b)}{\sin(d_c, a)} = -1.$$

Lại có $(d_a, c) = -(d'_a, b)$ và $(d_a, b) = -(d'_a, c)$ nên

$$\frac{\sin(d_a, c)}{\sin(d_a, b)} = \frac{\sin(d'_a, b)}{\sin(d'_a, c)}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\sin(d_b, a)}{\sin(d_b, c)} = \frac{\sin(d'_b, c)}{\sin(d'_b, a)}, \quad \frac{\sin(d_c, b)}{\sin(d_c, a)} = \frac{\sin(d'_c, a)}{\sin(d'_c, b)}.$$

Từ những kết quả này, ta suy ra

$$\frac{\sin(d'_a, b)}{\sin(d'_a, c)} \cdot \frac{\sin(d'_b, c)}{\sin(d'_b, a)} \cdot \frac{\sin(d'_c, a)}{\sin(d'_c, b)} = -1.$$

Do đó d'_a, d'_b, d'_c đồng quy. Định lý được chứng minh. $\square$

Từ định lý 4, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2. Hai điểm được gọi là hai điểm đẳng giác nếu các cặp đường thẳng nối chúng với mỗi đỉnh là những cặp đường đẳng giác.

Ví dụ 2. Trong một tam giác thì tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm là hai điểm đẳng giác.

Áp dụng định lý 3 ta có định lý sau:

Định lý 5. Cho P và P' là hai điểm đẳng giác đối với tam giác ABC . Gọi X, Y, Z lần lượt là các hình chiếu của P trên các cạnh BC, AC, AB và X', Y', Z' lần lượt là các hình chiếu của P' trên các cạnh BC, AC, AB . Khi đó, sáu điểm X, Y, Z, X', Y', Z' cùng nằm trên một đường tròn.

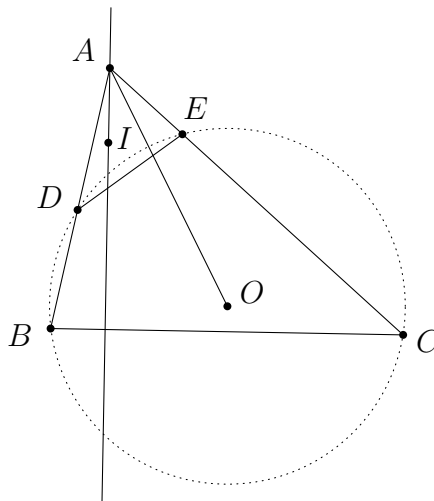
Một hệ quả của định lý 5 là định lý về đường tròn Euler:

Định lý 6. Trong một tam giác, chân các đường cao và trung điểm các cạnh thì cùng thuộc một đường tròn, tâm đường tròn Euler chính là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm và tâm ngoại tiếp tam giác.

1.3 Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. Cho tam giác ABC . Đường tròn thay đổi qua B và C cắt các đường thẳng AB và AC tại D và E . Chứng minh rằng tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Chứng minh.



Ta có tam giác ADE và tam giác ACB đồng dạng, suy ra hai tam giác AID và AOC đồng dạng, do đó $\angle DAI = \angle OAC$. Kết quả này cho thấy AI và AO là hai đường đẳng giác đối với góc A . Mà đường cao AH của tam giác ABC và AO cũng là hai đường đẳng giác. Từ đây suy ra $I \in AH$ cố định. $\square$

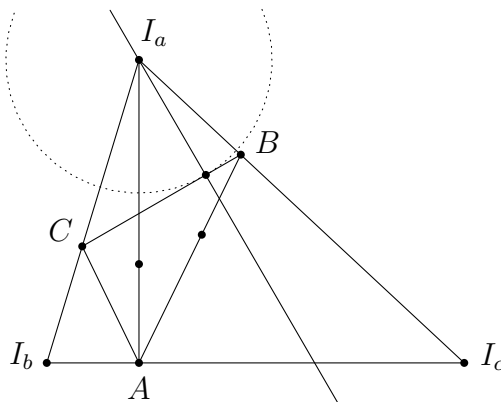
Nhận xét. Đây là bài toán thi vào trường Phổ thông Năng khiếu năm 2011 và là một bài toán khá dễ. Ta không cần phải sử dụng tới khái niệm đẳng giác. Tuy nhiên, qua bài này ta có một dấu hiệu để nhận biết được hai đường đẳng giác: Cho hai điểm D, E thuộc các đường thẳng AB và AC sao cho $\triangle ADE \sim \triangle ACB$. Khi đó các đường thẳng tương ứng của hai tam giác ADE và ABC qua A là hai đường đẳng giác của góc $\angle BAC$.²

Cụ thể hơn: Cho tam giác ABC . Nếu DE là đường đối song của BC thì trung tuyến (đường cao...) xuất phát từ A của tam giác ADE và tam giác ABC là hai đường đẳng giác.

Đây là một ý khá hay để ta giải được các bài toán. Ta xét ví dụ sau:

Bài toán 2. Chứng minh rằng trong một tam giác, các đường thẳng kẻ từ tâm của đường tròn bàng tiếp trong mỗi góc, vuông góc với cạnh đối diện, đồng quy tại một điểm.

Chứng minh.

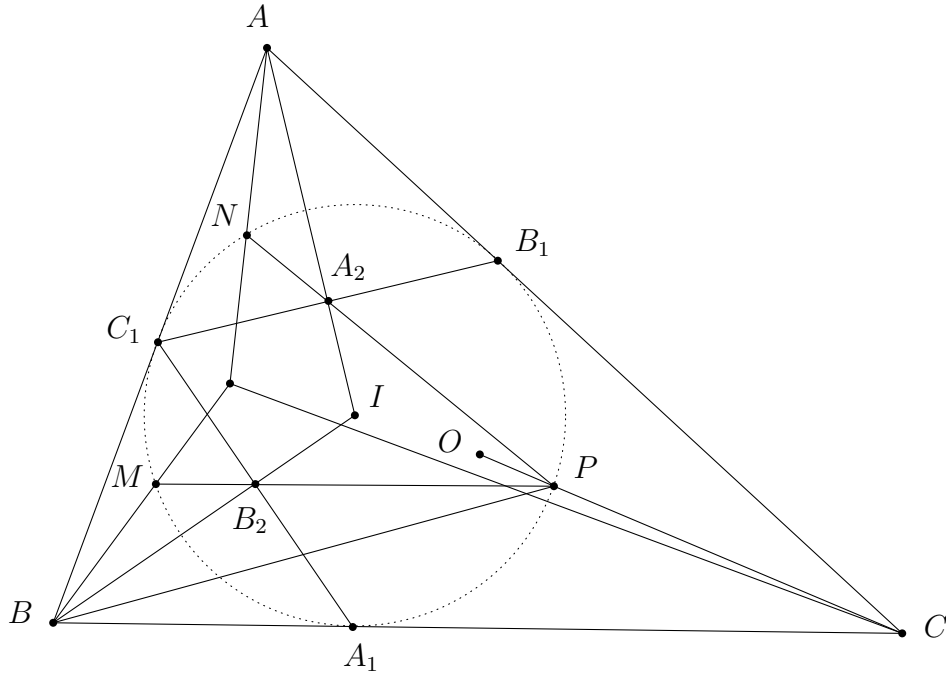


² DE và BC được gọi là hai đường đối song.

Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A, B, C . Dễ dàng chứng minh I_aA, I_bB, I_cC là các đường cao của tam giác $I_aI_bI_c$. Vì BC và I_aI_b là hai đường đối song nên theo tính chất trên ta có đường thẳng qua A vuông góc với BC và đường thẳng I_aA là hai đường đẳng giác ứng với góc $I_bI_aI_c$. Áp dụng định lý 4, ta có điều cần chứng minh. $\square$

Bài toán 3 (Nga, 2010). Đường tròn nội tiếp của tam giác nhọn ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, AC lần lượt tại C_1, A_1, B_1 . Các điểm A_2, B_2 lần lượt là trung điểm của các đoạn B_1C_1, A_1C_1 . Gọi P là giao điểm của đường tròn nội tiếp và CO , với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi N, M là giao điểm thứ hai của PA_2, PB_2 với đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng giao điểm của AN và BM thuộc đường cao hạ từ C của tam giác ABC .

Chứng minh.



Ta biết rằng đường cao hạ từ C và CO là hai đường đẳng giác. Các đường thẳng CO, BP, AP cắt nhau tại P . Do vậy, ta chỉ cần chứng minh (AP, AN) và (AP, AM) là các cặp đường đẳng giác ứng với góc A và B của tam giác ABC .

Từ đây, ta đi đến lời giải cho bài toán này như sau: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , K là giao điểm của AN và BM . Áp dụng phương tích của điểm P đối với đường tròn (I) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác AC_1IB_1 , ta có

$$\overline{A_2I} \cdot \overline{A_2A} = \overline{A_2C_1} \cdot \overline{A_2B_1}, \quad \overline{A_2C_1} \cdot \overline{A_2B_1} = \overline{A_2N} \cdot \overline{A_2P}.$$

Từ đó suy ra

$$\overline{A_2N} \cdot \overline{A_2P} = \overline{A_2I} \cdot \overline{A_2A}.$$

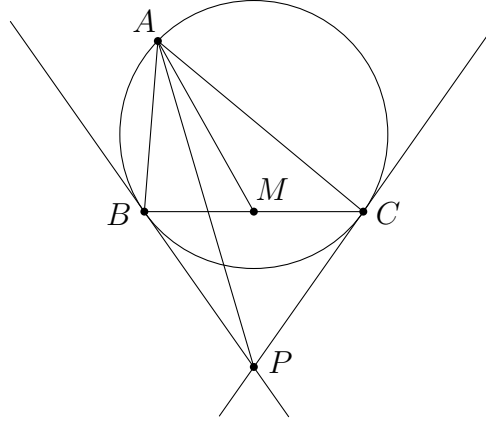
Đẳng thức này cho thấy $ANIP$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa $IN = IP$ nên ta có AI là phân giác góc $\angle NAP$, do đó AN và AP là hai đường đẳng giác ứng với góc A .

Chứng minh tương tự ta cũng có BM và BP là hai đường đẳng giác của góc B . Mà AP, BP, CO đồng quy tại I và AN, BM cắt nhau tại K , nên CK là đường đẳng giác của CO . Suy ra K thuộc đường cao hạ từ C của tam giác ABC . $\square$

Bài toán này có thể được chứng minh dựa vào nhận xét sau bài toán 1 (bạn đọc có thể tự chứng minh).

Bài toán 5. Cho tam giác ABC . Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại P . Chứng minh rằng AP là đường đối trung của tam giác ABC .

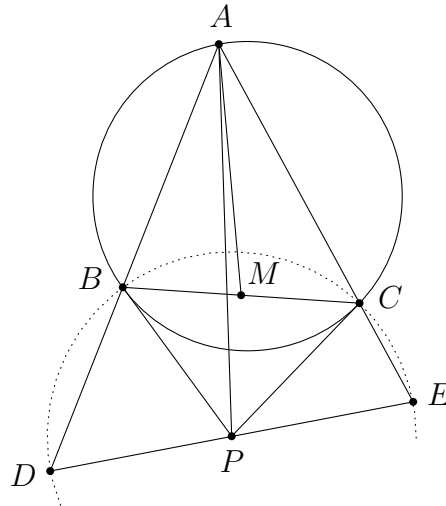
Chứng minh.



(a) *Cách 1.* Gọi D là giao điểm của AP và BC , ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot BP \cdot \sin \angle ABP}{AC \cdot CP \cdot \sin \angle ACP} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle ACB}{\sin \angle ABC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Do đó AP là đường đối trung của tam giác ABC .



(b) *Cách 2.* Gọi D, E là giao điểm của AB, AC với đường tròn tâm M bán kính MB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ta cần chứng minh DE là đường kính của đường tròn. Thật vậy ta có

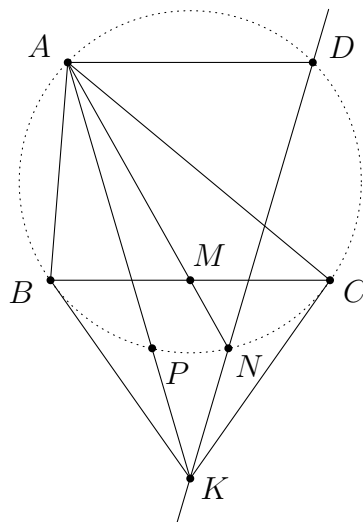
$$\angle DBE = \angle BAE + \angle AEB = \frac{\angle BOC}{2} + \frac{\angle BPC}{2} = 90^\circ,$$

nên DE là đường kính và P là trung điểm của DE . Từ đây, dễ dàng suy ra AP là đường đối trung của tam giác ABC . $\square$

Sau đây ta xét một vài ví dụ có liên quan đến đường đối trung.

Bài toán 6 (Đề chọn đội tuyển trường Phổ thông Năng khiếu, 2010). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có A cố định và B, C thay đổi trên (O) sao cho BC luôn song song với một đường thẳng cố định. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K . Gọi M là trung điểm của BC , N là giao điểm của AM với (O) . Chứng minh đường thẳng KN luôn qua một điểm cố định.

Chứng minh.



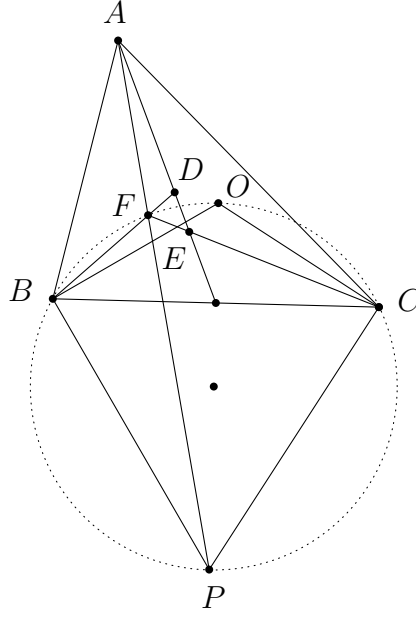
Gọi D, P lần lượt là giao điểm của KN, AP và (O) . Vì BC có phương không đổi nên KM là đường thẳng cố định. Theo trên, ta thấy AK là đường đối xứng, suy ra $\angle BAP = \angle NAC$. Từ đó ta chứng minh được P, N đối xứng nhau qua đường thẳng KM cố định. Khi đó dễ dàng suy ra D đối xứng với A qua đường thẳng KM nên D cố định. $\square$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC . Một đường tròn thay đổi qua BC cắt các cạnh AB và AC tại D và E . Tiếp tuyến tại D và E của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt nhau tại P . Chứng minh rằng P luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Chứng minh. Nhận xét P thuộc đường đối xứng của tam giác ADE . Mà BC là đường đối xứng của DE nên trung tuyến AM của tam giác ABC là đường đối xứng của tam giác ADE . Do đó P thuộc AM cố định. $\square$

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nhọn khác tam giác cân. M là trung điểm của BC . D và E là các điểm thuộc AM sao cho $AD = BD$ và $AE = EC$. DB cắt CE tại F . Một đường tròn qua B và C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại H và K . Chứng minh rằng AF đi qua trung điểm của HK .

Chứng minh.



Ta thấy rằng HK là đường đối song của BC nên để chứng minh AF qua trung điểm của HK thì ta chỉ cần chứng minh AF là đường đối trung của tam giác ABC . Áp dụng định lý sine cho tam giác ABF và tam giác ACF , ta có

$$\frac{AB}{AF} = \frac{\sin \angle AFB}{\sin \angle ABF} = \frac{\sin \angle AFB}{\sin \angle BAD} \quad (1)$$

và

$$\frac{AC}{AF} = \frac{\sin \angle AFC}{\sin \angle ACF} = \frac{\sin \angle AFC}{\sin \angle EAC}. \quad (2)$$

Mà D, E thuộc trung tuyến AM nên ta có

$$\frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle EAC} = \frac{AC}{AB}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra $\sin \angle AFB = \sin \angle AFC$, tức

$$\angle AFB = \angle AFC. \quad (4)$$

Mặt khác ta lại có

$$\angle BFC = \angle FDE + \angle FED = 2\angle BAD + 2\angle EAC = 2\angle BAC = \angle BOC.$$

Kết hợp với trên, ta được

$$\angle AFB = \angle AFC = 180^\circ - \angle BAC.$$

Như vậy, ta có

$$\angle FAC + \angle FCA = \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD.$$

Mà $\angle FCA = \angle CAD$ nên $\angle FAC = \angle BAD$. Vậy AF là đường đối trung của tam giác ABC . Từ đó suy ra điều cần chứng minh. $\square$

Nhận xét. Sau khi đã chỉ ra được $\angle BFC = \angle BOC$ thì ngoài cách chứng minh như trên, ta còn có một cách khác để hoàn tất bài toán như sau: Từ $\angle BFC = \angle BOC$, ta có tứ giác $BFOC$ nội tiếp. Gọi P là giao điểm của AF và $(BFOC)$. Từ (4) suy ra $PB = PC$. Điều này chứng tỏ

OP là đường kính và $PB \perp OB$, $PC \perp OC$. Suy ra PB , PC là tiếp tuyến của (ABC') và như thế, AP là đường đối trung của tam giác ABC . Từ đây ta có ngay điều phải chứng minh.

Qua cách chứng minh này, ta thấy $OF \perp AF$ và F thuộc đường tròn đường kính AO . Đây chính là nội dung của bài toán thi Olympic Toán toàn nước Mỹ năm 2008: *Cho tam giác ABC nhọn và không phải tam giác cân, đường trung trực của AB và AC cắt trung tuyến AM tại D và E . F là giao điểm của BD và CE . Gọi N , P lần lượt là trung điểm AB , AC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng bốn điểm N , F , O , P cùng nằm trên một đường tròn.*

3 Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi O_a , O_b , O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC , OAC và OAB . Chứng minh rằng AO_a , BO_b , CO_c đồng quy tại điểm K_0 và K_0 là điểm đẳng giác của tâm đường tròn Euler của tam giác ABC . (K_0 được gọi là điểm Kosnita.)

Bài tập 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm sao cho PB , PC là các tiếp tuyến với đường tròn (O) . Trên AB và AC ta lấy các điểm K và H sao cho $PK \parallel AC$ và $PH \parallel AB$. Chứng minh rằng các điểm H , K và trung điểm các cạnh AB , AC cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 3 (APMO, 2010). Cho tam giác ABC nhọn thỏa điều kiện $AB > BC$, $AC > BC$. Gọi H và O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt đường thẳng AB tại điểm M khác A , và đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB cắt đường thẳng AC tại điểm N khác A . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH thuộc đường thẳng OH .

Bài tập 4. Cho tam giác ABC cân tại A , và P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCB$. Gọi M là trung điểm của BC , chứng minh rằng

$$\angle APC + \angle MPB = 180^\circ.$$

Bài tập 5. Cho đường tròn (O) và hai điểm A , B cố định trên đường tròn, M là trung điểm của AB . Điểm C thay đổi trên cung lớn AB . Đường trung trực của AC và BC cắt CM lần lượt tại D và E . Gọi F là giao điểm của AD và BE . Chứng minh rằng CF luôn đi qua một điểm cố định khi C thay đổi.

Bài tập 6 (Nga, 2010). Một điểm B thay đổi trên dây AC của đường tròn (ω) . Đường tròn đường kính AB và BC có tâm là O_1 và O_2 cắt (ω) lần lượt tại D và E . Tia O_1D và O_2E cắt nhau tại F , tia AD và CE cắt nhau tại G . Chứng minh rằng FG đi qua trung điểm của AC .

Bài tập 7. Cho tam giác ABC . Một đường thẳng (d) thay đổi luôn song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại M , N . Gọi I là giao điểm của BN và CM . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIM và CIN cắt nhau tại P (khác I). Chứng minh rằng P luôn thuộc một đường thẳng cố định khi (d) thay đổi.

4 Lời kết

Bài viết này không đi sâu nghiên cứu các tính chất của đường đẳng giác, điểm đẳng giác, mà chỉ nêu lên một khái niệm khá phổ biến trong hình học nhưng có thể còn lạ lẫm với nhiều học sinh, qua đó giúp cho các em có thêm một hướng nhìn khi giải các bài toán hình học. Bạn nào yêu thích có thể nghiên cứu thêm trong các tài liệu tham khảo.

Tài liệu tham khảo

- [1] Hoàng Chúng (chủ biên), *Hình học của tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.
- [2] Đỗ Thanh Sơn, *Một số chuyên đề hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi THPT*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2010.
- [3] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1964.
- [4] Darij Grinberg, *Isogonal Conjugation with Respect to a Triangle*, Unpublished notes, 2006. [ONLINE: <http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html>]
- [5] Lê Bá Khánh Trình, *Hình học tĩnh và động*, Hội thảo các vấn đề dạy và học Toán ở trường phổ thông, 2008.
- [6] <http://www.geometry.ru>.