

Chuyên đề 11

Tổ Hợp - Xác Suất

§1. Hoán Vị - Chỉnh Hợp - Tổ Hợp

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Quy tắc đếm.

- Quy tắc cộng: Giả sử công việc được thực hiện theo một trong hai phương án A hoặc B . Phương án A có thể thực hiện theo n cách, phương án B có thể thực hiện theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n + m$ cách.
- Quy tắc nhân: Giả sử một công việc bao gồm hai công đoạn A và B . Công đoạn A có thể thực hiện theo n cách, công đoạn B có thể thực hiện theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n.m$ cách.

2. Hoán vị - Chỉnh hợp - Tổ hợp.

- Hoán vị: Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của A . Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là $P_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$ (Quy ước $0! = 1$).

- Chỉnh hợp: Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A . Số các chỉnh hợp chập k ($1 \leq k \leq n$) của một tập hợp có n phần tử là $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$. (Quy ước $A_n^0 = 1$).

- Tổ hợp: Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A . Số các tổ hợp chập k ($1 \leq k \leq n$) của một tập hợp có n phần tử là $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ (Quy ước $C_n^0 = 1$).

- Một số công thức về tổ hợp: $C_n^k = C_n^{n-k}$ ($0 \leq k \leq n$), $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ ($1 \leq k \leq n$).

Lưu ý. Hoán vị và chỉnh hợp có phân biệt thứ tự còn tổ hợp không biệt thứ tự.

B. Bài Tập

11.1. (B-05) Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội về giúp đỡ ba tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

11.2. (D-06) Đội thanh niên xung kích của trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A , 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C . Cần chọn bốn học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho bốn học sinh này thuộc không quá hai lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

11.3. (B-04) Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình và 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề phải có 3 loại câu hỏi (khó, trung bình và dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

11.4. Một hộp đựng 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không đủ ba màu.

11.5. Chứng minh các hệ thức sau

a) $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 A_{n+k}^n$.

b) $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

c) $P_k A_{n+1}^2 A_{n+3}^2 A_{n+5}^2 = nk! A_{n+5}^5$.

d) (B-08) $\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}$.

11.6. Giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình

a) $P_x A_x^2 + 72 = 6(A_x^2 + 2P_x)$.

b) $\frac{1}{2} A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x} C_x^3 + 10$.

$$\begin{aligned} \text{c) } & \begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases} \\ \text{e) } & A_n^3 + 2C_n^{n-2} \leq 9n. \end{aligned}$$

$$\text{d) } C_x^2 + C_x^4 + \dots + C_x^{2n} \geq 2^{2003} - 1.$$

$$\text{f) } C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$$

11.7. (D-05) Tính giá trị của $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$ biết $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$.

11.8. (B-06) Cho tập A gồm $2n$ phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con 4 phần tử bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử. Tìm $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

11.9. (B-02) Cho đa giác đều $A_1A_2\dots A_{2n}$ nội tiếp đường tròn (O) . Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ đỉnh nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ đỉnh. Tìm n .

§2. Xác Suất

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Không gian mẫu.

- Tập tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử gọi là không gian mẫu của phép thử đó. Ký hiệu là Ω .

2. Biến cố.

- Một biến cố A liên quan tới phép thử T được mô tả bởi một tập con Ω_A nào đó của không gian mẫu. Biến cố A xảy ra khi kết quả của T thuộc Ω_A . Mỗi phần tử của Ω_A gọi là một kết quả thuận lợi cho A .
- Biến cố sơ cấp: Là biến cố chỉ có một phần tử.
- Biến cố chắc chắn: Là không gian mẫu Ω . Biến cố không thể: Là biến cố rỗng $\emptyset$.
- Biến cố sơ cấp đồng khả năng: Là biến cố có khả năng xuất hiện mỗi kết quả là như nhau.
- Biến cố đối: Là biến cố A không xảy ra. Ký hiệu là $\bar{A}$ ($\Omega_{\bar{A}} = \Omega \setminus \Omega_A$).
- Biến cố xung khắc: Là hai biến cố A và B mà nếu A xảy ra thì B không xảy ra và ngược lại ($\Omega_A \cap \Omega_{\bar{A}} = \emptyset$).
- Biến cố độc lập: Là hai biến cố A và B mà việc xảy ra biến cố này không ảnh hưởng tới biến cố kia.

3. Xác suất của một biến cố.

- Tính chất: $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Quy tắc cộng xác suất: Nếu A, B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Quy tắc nhân xác suất: Nếu A, B độc lập thì $P(A \cap B) = P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

4. **Biến ngẫu nhiên rời rạc.** Là giá trị độc lập $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nhận kết quả bằng số, hữu hạn và không dự đoán trước được.

- Xác suất tại x_k : $P(X = x_k) = p_k$, ($k = 1..n$). Khi đó $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.
- Bảng phân bố xác suất:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

- Kỳ vọng: $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.
- Phương sai: $V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E^2(X)$.
- Độ lệch chuẩn: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

B. Bài Tập

11.10. (B-2012) Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

11.11. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong số bi lấy ra không đủ cả ba màu.

11.12. Một tổ có 9 nam và 3 nữ. Chia tổ thành 3 nhóm mỗi nhóm gồm 4 người. Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên nhóm nào cũng có nữ.

11.13. Một tổ có 13 học sinh, trong đó có 4 nữ. Cần chia tổ thành ba nhóm, nhóm thứ nhất có 4 học sinh, nhóm thứ hai có 4 học sinh, nhóm thứ ba có 5 học sinh. Tính xác suất để mỗi nhóm có ít nhất một học sinh nữ.

11.14. Có hai hộp đựng bi. Hộp một có 7 bi xanh và 3 bi đỏ, hộp hai có 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một bi. Tìm xác suất để được ít nhất một bi đỏ.

11.15. Có hai hộp chứa các viên bi chỉ khác nhau về màu. Hộp thứ nhất chứa ba bi xanh, hai bi vàng và một bi đỏ. Hộp thứ hai chứa hai bi xanh, một bi vàng và ba bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để lấy được hai bi xanh.

11.16. Một người gọi điện thoại, quên hai chữ số cuối và chỉ nhớ rằng hai chữ số đó phân biệt. Tính xác suất để người đó gọi một lần đúng số cần gọi.

11.17. Người ta sử dụng 5 cuốn sách Toán, 6 cuốn sách Lý, 7 cuốn sách Hoá (các cuốn sách cùng loại giống nhau), để làm giải thưởng cho 9 học sinh, mỗi học sinh được hai cuốn sách khác loại. Trong số học sinh có hai bạn Ngọc và Thảo. Tìm xác suất để hai bạn Ngọc và Thảo có giải thưởng giống nhau.

11.18. Một nhóm học tập gồm 7 nam và 5 nữ, trong đó có bạn nam A và bạn nữ B . Chọn ngẫu nhiên 5 bạn để lập một đội tuyển thi học sinh giỏi. Tính xác suất để đội tuyển có 3 nam và 3 nữ, trong đó phải có hoặc bạn nam A , hoặc bạn nữ B nhưng không có cả hai.

11.19. Có hai túi. Túi thứ nhất chứa 3 tấm thẻ đánh số 1, 2, 3 và túi thứ hai chứa 4 tấm thẻ đánh số 4, 5, 6, 8. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi một tấm thẻ rồi cộng hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là số thu được. Lập bảng phân bố xác suất của X và tính $E(X)$.

§3. Nhị Thức Newton

A. Kiến Thức Cần Nhớ

- Công thức: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n$.
- Số hạng tổng quát thứ $k + 1$: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.
- Một số khai triển thường dùng:
 - $(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$.
 - $(1 - x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$.
 - $(x + 1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} x + C_n^n$.

B. Bài Tập

- 11.20.** (D-04) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển thành đa thức của biểu thức $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7, x > 0$.
- 11.21.** (D-07) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$.
- 11.22.** (A-04) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của biểu thức $(1 + x^2(1 - x))^8$.
- 11.23.** Tìm hệ số của x^4 trong khai triển đa thức $P(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10}$.
- 11.24.** Đặt $(1 - x + x^2 - x^3)^4 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{12} x^{12}$. Tính hệ số a_7 .
- 11.25.** (D-02) Tìm số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức $C_n^0 + 2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + \dots + 2^n.C_n^n$.
- 11.26.** (D-08) Tìm số nguyên dương n thỏa mãn hệ thức $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$.
- 11.27.** Tìm số tự nhiên n sao cho $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + \dots + n.C_n^n = n.2^{2009}$.
- 11.28.** (A-2012) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n, x \neq 0$.
- 11.29.** (B-07) Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $(2 + x)^n$, biết $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$.
- 11.30.** (A-03) Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n + 3)$.
- 11.31.** (A-06) Tìm hệ số của x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$.
- 11.32.** (D-03) Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.
- 11.33.** (A-02) Cho khai triển biểu thức $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} \left(2^{-\frac{x}{3}}\right) + \dots + C_n^n \left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n$. Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tìm n và x .

11.34. (A-05) Tìm số nguyên dương n thỏa $C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 + \dots + (-1)^n 2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$.

11.35. (A-07) Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$.

11.36. (B-03) Cho n là số nguyên dương. Tính tổng $C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$.

11.37. Chứng minh rằng $2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + 4.3.C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$.

11.38. Tính tổng

a) $S = C_{2009}^0 + C_{2009}^2 + C_{2009}^4 + \dots + C_{2009}^{2008}$.

b) $S = C_{2009}^0 + 3^2C_{2009}^2 + 3^3C_{2009}^4 + \dots + 3^{2008}C_{2009}^{2008}$.

c) $S = 2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n+2)C_n^n$.

d) $(C_{2010}^0)^2 + (C_{2010}^1)^2 + (C_{2010}^2)^2 + \dots + (C_{2010}^{2010})^2$.

11.39. Tính tổng $S = 1^2C_{2011}^12^{2010} + 2^2C_{2011}^22^{2009} + \dots + 2011^2C_{2011}^{2011}2^0$.

11.40. Trong khai triển nhị thức $(a+b)^{50}$, tìm số hạng có giá trị tuyệt đối lớn nhất, cho biết $|a| = |b|\sqrt{3}$.

11.41. (A-08) Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) và các hệ số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.