

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC KHOA HỌC, ĐH THÁI NGUYÊN

PHẠM NGUYỄN PHƯƠNG THỦY

BIỂU DIỄN MỘT SỐ DẠNG ĐA THỨC VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 40

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu	3
Lời cảm ơn	4
1 Các tính chất của đa thức đại số	5
1.1 Định nghĩa. (Xem [2])	5
1.2 Các phép tính trên đa thức	5
1.3 Các tính chất cơ bản	6
1.4 Ước, ước chung lớn nhất	8
1.5 Quy tắc dấu Descartes	9
2 Biểu diễn một số dạng đa thức	15
2.1 Biểu diễn một số dạng đa thức dương	15
2.2 Biểu diễn một số dạng đa thức với hệ số nguyên	33
2.3 Biểu diễn một số dạng đa thức đặc biệt	37
2.3.1 Biểu diễn đa thức thông qua các hằng đẳng thức . .	37
2.3.2 Đa thức Chebyshev	40
2.3.3 Biểu diễn đa thức và nguyên hàm của nó	43
3 Một số áp dụng	51
3.1 Ứng dụng của đa thức trong tính toán	51
3.2 Ước lượng đa thức	55
3.3 Một số phương trình và bất phương trình có cách giải đặc thù	65
Kết luận	78
Tài liệu tham khảo	79

Mở đầu

Trong chương trình toán học phổ thông, đa thức là một chuyên đề quan trọng và có ứng dụng rất đa dạng và hiệu quả. Trong thực tiễn, đa thức và các ứng dụng của nó luôn là vấn đề thời sự và là chuyên đề hết sức cần thiết trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở bậc học phổ thông, đồng thời sự phát hiện các ứng dụng đa dạng của nó cũng luôn đem lại sự hấp dẫn đối với nhiều đối tượng học sinh và giáo viên khi nghiên cứu vấn đề này.

Mục tiêu của Luận văn "*Biểu diễn một số dạng đa thức và áp dụng trong đại số*" nhằm trình bày một số vấn đề liên quan đến các đồng nhất thức đại số sinh bởi đa thức cùng với một số ứng dụng của nó nhằm tạo ra được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Chương 1 trình bày tóm tắt các tính chất của đa thức đại số. Trong chương này cũng trình bày một số ví dụ và bài toán về mối liên hệ giữa các đồng nhất thức đại số cũng như các ứng dụng của các đồng nhất thức này.

Chương 2 trình bày biểu diễn đa thức dương trên trục thực, trên nửa trục dương, trên một đoạn cho trước và biểu diễn một số đa thức đặc biệt khác (đa thức với hệ số nguyên, đa thức Trebyshev,...).

Chương 3 trình bày một số ứng dụng của đa thức trong tính toán, ước lượng, giải phương trình và các bài toán cực trị.

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin cảm ơn quý thầy, cô giảng dạy lớp cao học khóa 4 (2010 - 2012) đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 05 năm 2012.

Người viết Luận văn

Phạm Nguyễn Phương Thủy

Chương 1

Các tính chất của đa thức đại số

1.1 Định nghĩa. (Xem [2])

Cho vành A là một vành giao hoán có đơn vị. Ta gọi đa thức (trên A) bậc n biến x là một biểu thức có dạng :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

trong đó các $a_i \in A$ được gọi là hệ số, a_n là hệ số cao nhất và a_0 là hệ số tự do của đa thức.

Nếu $a_i = 0$; $i = 1, 2, \dots, n-1$ và $a_0 \neq 0$ thì ta có bậc của đa thức là 0. Nếu $a_i = 0$; $\forall i = 0, 1, \dots, n$ thì ta coi bậc của đa thức là $-\infty$ và gọi là đa thức không.

Tập hợp tất cả các đa thức với hệ số lấy trong vành A được kí hiệu là $A[x]$.

Khi $A = K$ là một trường thì $K[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét $A = \mathbb{Z}$ hoặc $A = \mathbb{Q}$ hoặc $A = \mathbb{R}$ hoặc $A = \mathbb{C}$. Khi đó ta có các vành đa thức tương ứng là $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

1.2 Các phép tính trên đa thức

Cho hai đa thức

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

Ta định nghĩa các phép tính số học

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

$$f(x) - g(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0$$

$$f(x)g(x) = c_{2n}x^{2n} + c_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$

trong đó $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0$, $k = 0, \dots, n$.

1.3 Các tính chất cơ bản

Định lý 1.1. (Xem [2]) Giả sử A là một trường, $f(x)$ và $g(x) \neq 0$ là hai đa thức của vành $A[x]$, thế thì bao giờ cũng có hai đa thức duy nhất $q(x)$ và $r(x)$ thuộc $A[x]$ sao cho

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

với $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Nếu $r(x) = 0$ ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Giả sử a là phần tử tùy ý của vành A , $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ là đa thức tùy ý của vành $A[x]$, phần tử $f(a) = a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a + a_0$ có được bằng cách thay x bởi a được gọi là giá trị của $f(x)$ tại a .

Nếu $f(a) = 0$ thì ta gọi a là nghiệm của $f(x)$. Bài toán tìm nghiệm của $f(x)$ trong A gọi là giải phương trình đại số bậc n

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

trong A .

Định lý 1.2. (Xem [2]) Giả sử A là một trường, $a \in A$, $f(x) \in A[x]$. Dư số của phép chia $f(x)$ cho $(x - a)$ chính là $f(a)$.

Định lý 1.3. (Xem [2]) Số a là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x - a)$.

Giả sử A là một trường, $a \in A$, $f(x) \in A[x]$ và m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó a là nghiệm bội cấp m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x - a)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x - a)^{m-1}$.

Trong trường hợp $m = 1$ thì ta gọi a là nghiệm đơn còn khi $m = 2$ thì a được gọi là nghiệm kép. Số nghiệm của một đa thức là tổng số nghiệm của đa thức đó kể cả bội của các nghiệm (nếu có). Vì vậy, người ta coi một đa thức có một nghiệm bội cấp m như một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

• Lược đồ Horner

Giả sử

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in A[x]$$

(với A là một trường). Khi đó thương gần đúng của $f(x)$ cho $(x - a)$ là một đa thức có bậc bằng $n - 1$, có dạng :

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + a_0$$

trong đó

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_k = ab_{k+1} + a_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

và số dư $r = ab_0 + a_0$.

Định lý 1.4 (Định lý Viète). (Xem [2])

a) Giả sử phương trình

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (1.1)$$

có n nghiệm (thực hoặc phức) $x_1, x_2, \dots, x_n$ thì

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_1(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_n & = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ E_2(x) := x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n & = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \dots & \\ E_n(x) := x_1 x_2 \dots x_n & = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

b) Ngược lại, nếu các số $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn hệ trên thì chúng là nghiệm của phương trình (1.1). Hệ (1.2) có n thành phần và ở vế trái của

thành phần thứ k có C_n^k số hạng.

c) Các hàm $E_1(x), E_2(x), \dots, E_n(x)$ được gọi là hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp Viète bậc $1, 2, \dots, n$ tương ứng.

Định lý 1.5. (Xem [2]) Mọi đa thức bậc n đều có không quá n nghiệm thực.

Hệ quả 1.1. Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.

Hệ quả 1.2. Nếu đa thức có bậc $\leq n$ mà nhận cùng một giá trị tại $n + 1$ điểm khác nhau của đối số thì đa thức đó là đa thức hằng.

Hệ quả 1.3. Hai đa thức bậc $\leq n$ mà nhận giá trị bằng nhau tại $n + 1$ giá trị khác nhau của đối số thì đồng nhất bằng nhau.

Định lý 1.6 (Gauss). (Xem [2]) Mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ bậc n có đúng n nghiệm (tính cả bội của nghiệm).

Định lý 1.7. (Xem [2]) Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc n và có hệ số chính (hệ số bậc cao nhất) $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích (duy nhất) thành nhân tử

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^m (x - d_i) \prod_{k=1}^s (x^2 + b_k x + c_k)$$

với $d_i, b_k, c_k \in \mathbb{R}$, $2s + m = n$, $b_k^2 - 4c_k < 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1.4 Ước, ước chung lớn nhất

Định nghĩa 1.1. (Xem [2]) Khi đa thức

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

được viết dưới dạng

$$P_n(x) = g(x)q(x)$$

với $\deg g > 0$ và $\deg q > 0$ thì ta nói g là ước của $P_n(x)$ và ta viết $g(x) | P_n(x)$ hay $P_n(x) : g(x)$.

Nếu $g(x) | P(x)$ và $g(x) | Q(x)$ thì ta nói $g(x)$ là ước chung của $P(x)$ và $Q(x)$.

Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ chỉ có ước chung là các đa thức bậc 0 thì ta nói rằng chúng nguyên tố cùng nhau và viết $(P(x), Q(x)) = 1$.

Định lý 1.8. (Xem [2]) Điều kiện cần và đủ để hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ nguyên tố cùng nhau là tồn tại cặp đa thức $u(x)$ và $v(x)$ sao cho

$$P(x)u(x) + Q(x)v(x) = 1.$$

Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ (không đồng nhất với 0) có ước chung $d(x)$ là đa thức chia hết cho tất cả các ước chung khác thì $d(x)$ được gọi là ước chung lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Cũng như vậy, ta có ước chung lớn nhất của bộ nhiều đa thức.

Một số tính chất cơ bản.

Tính chất 1.1. (Xem [2]) Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau và các đa thức $f(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì các đa thức $f(x)$ và $g(x)h(x)$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Tính chất 1.2. (Xem [2]) Nếu các đa thức $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(x)h(x)$ chia hết cho $g(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Tính chất 1.3. (Xem [2]) Nếu đa thức $f(x)$ chia hết cho các đa thức $g(x)$ và $h(x)$ với $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $f(x)$ chia hết cho $g(x)h(x)$.

Tính chất 1.4. (Xem [2]) Nếu các đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau thì $[f(x)]^m$ và $[g(x)]^n$ sẽ nguyên tố cùng nhau với mọi m, n nguyên dương.

1.5 Quy tắc dấu Descartes

Xét dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \dots$ (hữu hạn hoặc vô hạn) cho trước.

Định nghĩa 1.2. (Xem [2]) Chỉ số m ($m \geq 1$) được gọi là vị trí (chỗ) đổi dấu của dãy nếu có $a_{m-1}a_m < 0$ hoặc là

$$a_{m-1} = a_{m-2} = \dots = a_{m-(k+1)} = 0$$

và

$$a_{m-k}a_m < 0 \quad (m > k \geq 2).$$

Trong trường hợp thứ nhất thì a_{m-1} và a_m , còn trong trường hợp thứ hai thì a_{m-k} và a_m lập thành vị trí đổi dấu. Số lần đổi dấu (bằng số vị trí đổi dấu) của một dãy nào đó vẫn không thay đổi nếu các số hạng bằng 0 được bỏ đi còn những số hạng còn lại vẫn bảo toàn vị trí tương hỗ của chúng. Ta có các tính chất sau đây.

Tính chất 1.5. (Xem [2]) Các dãy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ và $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ có cùng một số lần đổi dấu.

Tính chất 1.6. (Xem [2]) Khi gạch bỏ các số hạng của dãy, số lần đổi dấu không tăng lên.

Tính chất 1.7. (Xem [2]) Khi đặt vào giữa các số hạng của dãy một số lượng tùy ý các số hạng bằng 0, số vị trí đổi dấu của dãy cũng không thay đổi.

Tính chất 1.8. (Xem [2]) Số vị trí đổi dấu sẽ không thay đổi nếu bên cạnh một số hạng nào đó của dãy ta đặt một số hạng mới có cùng dấu với số hạng đó.

Tính chất 1.9. (Xem [2]) Nếu $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0 \dots$ thì các dãy

$$a_0, a_1, a_2 \dots$$

và

$$a_0 p_0, a_1 p_1, a_2 p_2 \dots$$

có cùng những vị trí đổi dấu.

Tính chất 1.10. Dãy $a_0, a_1 + a_0, a_2 + a_1, \dots, a_n + a_{n-1}, a_n$ có số vị trí đổi dấu không lớn hơn so với dãy $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Định nghĩa 1.3. (Xem [2]) Ta gọi sự đổi dấu và vị trí đổi dấu của đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

chính là sự đổi dấu và vị trí đổi dấu của dãy hệ số

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0.$$

- Quy tắc của dấu Descartes

Giả sử N là số không điểm dương của đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

và W là số lần đổi dấu trong dãy các hệ số của nó. Chứng minh rằng $W \geq N$ và $W - N$ là một số chẵn.

Giải.

1. Giả sử

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$$

là những không điểm dương của đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Khi đó, ta có

$$P(x) = Q(x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \dots (\alpha_N - x),$$

trong đó $Q(x)$ là một đa thức bậc $n - N$ với các hệ số thực. Nhận xét rằng $Q(x)$ có số vị trí đổi dấu ≥ 0 , $Q(x)(\alpha_1 - x)$ có số vị trí đổi dấu ≥ 1 ; $Q(x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)$ có số vị trí đổi dấu ≥ 2 , ..., sau cùng là

$$Q(x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \dots (\alpha_N - x)$$

có số vị trí đổi dấu $\geq N$ và đó chính là điều phải chứng minh.

2. Giả sử a_α là hệ số khác 0 đầu tiên của đa thức và a_ω là hệ số khác 0 cuối cùng của đa thức $P(x)$ thì khi đó $\alpha \leq \omega$ (nếu $\alpha = \omega$ thì điều cần chứng minh là hiển nhiên) nên ta xét trường hợp $\alpha < \omega$ và

$$0 < z_1 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots \leq \alpha_N < z_2 < +\infty.$$

Hiển nhiên đối với z_1 đủ gần 0 và z_2 đủ lớn thì

$$\text{sign}P(z_1) = \text{sign}a_\alpha, \quad \text{sign}P(z_2) = \text{sign}a_\omega$$

nên $W - N$ là một số chẵn. Nếu $\text{sign}P(z_1) = \text{sign}a_\alpha$ và $\text{sign}P(z_2) = \text{sign}a_\omega$ trái dấu nhau thì số vị trí đổi dấu của $P(x)$ và số không điểm dương $P(x)$ đều cùng lẻ nên $W - N$ là một số chẵn.

Một số ví dụ

Ví dụ 1.1. Cho $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và cho hai số nguyên dương m, k . Giả sử đa thức $P_n(x)$ bậc n sao cho $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x-a)^k$.

Chứng minh rằng $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x^m - a^m)^k$.

Giải.

Theo giả thiết $P_n(x^m)$ thì chia hết cho $(x-a)^k$. Vậy nên $mx^{m-1}P'_n(x^m)$ chia hết cho $(x-a)^{k-1}$. Do hai đa thức x^{m-1} và $(x-a)^{k-1}$ nguyên tố cùng nhau, nên $P'_n(x^m)$ chia hết cho $(x-a)^{k-1}$. Từ đó suy ra $P_n^{(k-1)}(x^m)$ chia hết cho $x-a$. Vậy nên

$$P_n(a^m) = P'_n(a^m) = \dots = P_n^{(k-1)}(a^m) = 0.$$

Do đó $P_n(t)$ chia hết cho $(t-a^m)^k$. Thay t bởi x^m ta có kết luận $P_n(x^m)$ chia hết cho $(x^m - a^m)^k$.

Ví dụ 1.2. Cho hai đa thức

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^{10} + 11x^3 - x^2 + 23x + 30;$$

$$g(x) = x^3 + 2x + m$$

Hãy xác định các giá trị nguyên m sao cho tồn tại đa thức $q(x)$ để

$$f(x) = g(x)q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải.

Ta có $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, trong đó

$$r(x) = ax^2 + bx + c.$$

Ta cần xác định m để $r(x) \equiv 0$, tức là $a = b = c = 0$. Thực hiện phép chia cho ta thu được

$$\begin{aligned} r(x) &= (m^3 + 6m^2 - 32m + 15)x^2 + (5m^3 - 24m^2 + 16m + 33)x + \\ &\quad + m^4 - 6m^3 + 4m^2 + 5m + 30. \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình

$$m^3 + 6m^2 - 32m + 15 = 0$$

$$5m^3 - 24m^2 + 16m + 33 = 0$$

$$m^4 - 6m^3 + 4m^2 + 5m + 30 = 0.$$

ta thu được $m = 3$.

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng nếu $p(x)$ là đa thức bậc n , không có nghiệm bội, còn đa thức $q(x)$ bậc nhỏ hơn n , không đồng nhất bằng 0 thì đa thức

$$\sum_{k=0}^{2n} (p(x)q(x))^{(k)}$$

không chia hết cho $p(x)$.

Giải.

Đặt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} (p(x)q(x))^{(k)}$$

Dễ thấy $f(x) - f'(x) = p(x)q(x)$.

Nếu $f(x)$ chia hết cho $p(x)$ thì $f'(x) = f(x) - p(x)q(x)$ cũng chia hết cho $p(x)$. Từ đó suy ra mọi nghiệm của $p(x)$ đều là nghiệm bội của $f(x)$.

Thế nhưng $p(x)$ không có nghiệm bội suy ra $f(x)$ chia hết cho $p^2(x)$.

Điều đó không thể xảy ra vì $\deg f(x) < 2n = \deg p^2(x)$.

Vậy $f(x)$ không thể chia hết cho $p(x)$.

Ví dụ 1.4. Cho $m \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng đa thức

$$P_n(x) = x^n \sin \alpha - x \sin(n\alpha) + \sin(n-1)\alpha$$

luôn chia hết cho

$$q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1.$$

Giải.

Khi $\alpha = k\pi$ thì $P_n(x) = 0$ còn $q(x) = x^2 \pm 2x + 1$. Suy ra $P_n(x)$ chia hết cho $q(x)$.

Với $\alpha \neq k\pi$ ($\sin \alpha \neq 0$), ta xét đa thức

$$T_n(x) = x^n - \frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha}x + \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin \alpha} = x^n - xU_n(t) + U_{n-1}(t),$$

trong đó $t = \cos \alpha$ còn $U_n(t)$ là đa thức Chebyshev loại II.

Chú ý rằng

$$U_{n+1}(t) + U_{n-1}(t) = 2tU_n(t); \quad P_n(x) = \sin \alpha T_n(x)$$

và do $\sin \alpha \neq 0$ nên $P_n(x)$ chia hết cho $q(x)$ khi và chỉ khi $T_n(x)$ chia hết cho $q(x)$.

Với $n = 2$ ta có $P_2(x) = \sin \alpha (x^2 - 2x \cos \alpha + 1)$ chia hết cho $q(x) = x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

Giả sử $T_n(x)$ chia hết cho $q(x)$. Khi đó, do

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= x [x^n - xU_n(t) + U_{n-1}(t)] + x^2U_n(t) - \\ &- xU_{n-1}(t) - xU_{n+1}(t) + U_n(t) = xT_n(x) + U_n(t)q(x) \end{aligned}$$

chia hết cho $q(x)$ theo giả thiết quy nạp. Suy ra $T_{n+1}(x)$ chia hết cho $q(x)$. Theo nguyên lý quy nạp ta được $T_n(x)$ chia hết cho $q(x)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và với mọi $n \geq 2$, đa thức $P_n(x)$ chia hết cho $q(x)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Chương 2

Biểu diễn một số dạng đa thức

2.1 Biểu diễn một số dạng đa thức dương

Trong phần này ta xét một số biểu diễn của đa thức dương trên một tập dưới dạng tổng, hiệu, tích... của các đa thức có dạng đặc biệt cho trước.

Bài toán 2.1. (Xem [5]) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ ($a \neq 0$) thỏa mãn điều kiện $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ sao cho đa thức $Q(x) = f(x)P(x)$ có tất cả các hệ số đều không âm.

Giải. Do $f(x) \geq 0$ với $\forall x \geq 0$ nên $a > 0$ và $c = f(0) \geq 0$.

Nếu $b \geq 0$ thì ta chọn $P(x) = 1$ và ta nhận được ngay điều phải chứng minh.

Nếu $b < 0$ và $a > 0$ thì ta tìm $P(x)$ dưới dạng $P(x) = (x+1)^n$ với $n \geq 2$. Ta có

$$P(x) = (x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

nên

$$\begin{aligned} f(x)P(x) &= (ax^2 + bx + c)(x+1)^n \\ &= ax^{n+2} + (b+na)x^{n+1} + \cdots + \sum_{k=0}^n (aC_n^{k-2} + bC_n^{k-1} + cC_n^k)x^k \\ &\quad + \cdots + (b+nc)x + c. \end{aligned}$$

Ta chọn n sao cho :

$$\begin{cases} b + na \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} b + nc \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} aC_n^{k-2} + bC_n^{k-1} + cC_n^k \geq 0 \quad (\forall k \geq 2) \end{cases} \quad (2.3)$$

Nhận thấy ngay rằng với $n > \max \left\{ \frac{-b}{a}, \frac{-b}{c} \right\}$ thì các điều kiện (2.1) và (2.2) được thỏa mãn (do $a > 0$). Ta biến đổi về trái của (2.3).

$$h(k) = (a - b + c)k^2 - [a - (n + 2)b + (2n + 3)c]k + c(n + 1)(n + 2) \geq 0$$

do $b < 0$, $a \geq 0$, $c \geq 0$ nên $a - b + c > 0$.

Để (2.3) đúng với mọi k ta chọn n sao cho biệt thức của tam thức bậc hai h_k không dương ($\Delta_h \leq 0$). Ta có

$$\begin{aligned} \Delta_h &= (b^2 - 4ac)n^2 + (4b^2 - 2ab - 8ac - 2bc)n + \\ &\quad + (a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 2ac - 4bc). \end{aligned}$$

Nhận xét rằng, biểu thức của Δ_h cũng là một tam thức bậc hai theo n có hệ số của n^2 là

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

(do $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$; $a > 0$). Do vậy, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_h = -\infty.$$

Do đó với n đủ lớn thì $\Delta_h \leq 0$. Từ đó suy ra tồn tại n thỏa mãn đồng thời (2.1), (2.2), (2.3).

Bài toán 2.2. (Xem [5]) Cho đa thức

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad (n \geq 3)$$

thỏa mãn điều kiện $P(x) > 0$ với mọi $x > 0$.

Chứng minh rằng tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để đa thức $Q(x)$ dạng $Q(x) = P(x)(x + 1)^s$ có các hệ số đều không âm.

Giải. Ta xét hai trường hợp $\deg P(x) = 2m$ và $\deg P(x) = 2m + 1$ với

$m \in \mathbb{N}$.

(i) Khi $\deg P(x) = 2m$ thì ta có thể phân tích

$$P(x) = \prod_{k=1}^m (a_k x^2 + b_k x + c_k)$$

trong đó

$$a_k x^2 + b_k x + c_k > 0 \quad (\forall x > 0).$$

Theo bài toán 2.1 với mỗi đa thức $a_k x^2 + b_k x + c_k$ đều tồn tại số tự nhiên r_k sao cho đa thức

$$Q_k(x) = (a_k x^2 + b_k x + c_k) (x + 1)^{r_k}$$

có các hệ số đều không âm. Từ đó

$$\prod_{k=1}^m Q_k(x) = \prod_{k=1}^m P(x) (x + 1)^{r_k} = P(x) (x + 1)^{r_1 + \dots + r_m}$$

là một đa thức cũng có các hệ số đều không âm.

Vậy tồn tại số tự nhiên $s = \sum_{i=1}^m r_i$ với $m = \frac{n}{2}$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

(ii) Khi $\deg P(x) = 2m + 1$ thì $P(x)$ có ít nhất một nghiệm không dương là $-a$ ($a \geq 0$). Ta có

$$P(x) = (x + a) H(x)$$

với $H(x) > 0$ ($\forall x > 0$) và $\deg H(x) = 2m$. Do $\deg P(x) = 2m$ nên theo trường hợp (i) tồn tại số nguyên dương s sao cho đa thức $H(x) (x + 1)^s$ có các hệ số đều không âm và vì vậy đa thức $Q(x) = P(x) (x + 1)^s$ cũng có các hệ số đều không âm.

Bổ đề 2.1. (Xem [5]) Giả sử đa thức $P_1(x) \in \mathbb{R}[x]$ chỉ có một nghiệm dương. Khi đó tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để đa thức $Q_1(x)$ dạng $Q_1(x) = (x + 1)^s P_1(x)$ có dãy hệ số đổi dấu đúng một lần.

Chứng minh. Giả sử đa thức $P_1(x)$ có một nghiệm dương là α với $\alpha > 0$. Ta có

$$P_1(x) = (\alpha - x) g(x) \quad \text{với } g(x) > 0 \quad (\forall x > 0).$$

Vì đa thức $g(x) > 0$ ($\forall x > 0$) nên theo bài toán 2 tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để đa

thức $M(x) = g(x)(x+1)^s$ có các hệ số đều không âm.

Ta giả sử

$$M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

trong đó $a_i \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), $a_n > 0$ và $M(x) > 0$ ($\forall x > 0$).

Xét đa thức

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= P_1(x)(x+1)^s \\ &= (\alpha - x)g(x)(x+1)^s \\ &= (\alpha - x)M(x) \\ &= (\alpha - x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \\ &= \alpha a_0 + (\alpha a_1 - a_0)x + (\alpha a_2 - a_1)x^2 + \cdots + (\alpha a_n - a_{n-1})x^n - \\ &\quad - a_nx^{n+1}. \end{aligned}$$

Thay x bởi αx , ta thu được

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha x) &= (\alpha - \alpha x)(a_0 + a_1\alpha x + a_2\alpha^2x^2 + \cdots + a_n\alpha^nx^n) \\ &= \alpha a_0 + (\alpha a_1 - a_0)\alpha x + \cdots + (\alpha a_n - a_{n-1})\alpha^n x^n - a_n\alpha^{n+1}x^{n+1} \end{aligned}$$

là đa thức có dãy hệ số như sau

$$\alpha a_0, (\alpha a_1 - a_0)\alpha, (\alpha a_2 - a_1)\alpha^2, \dots, (\alpha a_n - a_{n-1})\alpha^n, -a_n\alpha^{n+1}.$$

Mặt khác, dãy hệ số không âm

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$$

có cùng vị trí đổi dấu như đối với dãy

$$\alpha a_0, (\alpha a_1 - a_0)\alpha, (\alpha a_2 - a_1)\alpha^2, \dots, (\alpha a_n - a_{n-1})\alpha^n, -a_n\alpha^{n+1}$$

nên

$$\alpha a_0, (\alpha a_1 - a_0)\alpha, (\alpha a_2 - a_1)\alpha^2, \dots, (\alpha a_n - a_{n-1})\alpha^n, -a_n\alpha^{n+1}$$

là dãy các hệ số không âm. Vì thế dãy các hệ số

$$\alpha a_0, (\alpha a_1 - a_0)\alpha, (\alpha a_2 - a_1)\alpha^2, \dots, (\alpha a_n - a_{n-1})\alpha^n, -a_n\alpha^{n+1}$$

của đa thức $Q_1(\alpha x)$ đổi dấu đúng một lần.

Do $a > 0$ nên theo tính chất 1.9 thì các dãy hệ số của đa thức $Q_1(x)$ và đa thức $Q_1(\alpha x)$ có cùng vị trí đổi dấu. Vậy luôn tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để dãy hệ số của đa thức $Q_1(x)$ đổi dấu đúng một lần.

Ví dụ 2.1. Đa thức

$$P(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

$$((= (2 - x)(x + 2)(x^2 - x + 1))$$

có duy nhất một nghiệm dương là $x = 2$.

Ta xét các tích sau đây :

$$P(x)(x + 1) = -x^5 + 4x^3 - x^2 + 4$$

$$P(x)(x + 1)^2 = -x^6 - x^5 + 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x + 4$$

$$P(x)(x + 1)^3 = -x^7 - 2x^6 + 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 8x + 4.$$

Nhận xét rằng với $s = 3$ thì dãy hệ số của đa thức $Q(x) = P(x)(x + 1)^3$ là

$$-1, -2, 3, 7, 2, 3, 8, 4$$

đổi dấu đúng một lần.

Bổ đề 2.2. (Xem [5]) Giả sử đa thức $P_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ có hai nghiệm dương. Khi đó tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để đa thức $Q_2(x)$ dạng $Q_2(x) = P_2(x)(x + 1)^s$ có dãy hệ số đổi dấu đúng hai lần.

Chứng minh. Giả sử đa thức $P_2(x) \in \mathbb{R}[x]$ có hai nghiệm dương là α_1, α_2 ($\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$). Ta có

$P_2(x) = (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)g(x)$ với $g(x) > 0$ ($\forall x > 0$). Nhận xét rằng đa thức $P_1(x) = (\alpha_1 - x)g(x)$ chỉ có một nghiệm dương nên theo bổ đề (2.1) thì luôn tồn tại $s \in \mathbb{N}$ sao cho đa thức

$$Q_1(x) = P_1(x)(x + 1)^s$$

có dãy hệ số đổi dấu đúng một lần, trong đó hệ số cao nhất (hệ số chính) âm và tất cả các hệ số còn lại không âm. Vì vậy đa thức $Q_1(x)$ có dạng

$$Q_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n - a_{n+1}x^{n+1}$$

$$(a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n; a_{n+1} > 0).$$

Xét đa thức

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= P_2(x)(x+1)^s \\ &= \alpha_2 a_0 + (\alpha_2 a_1 - a_0)x + (\alpha_2 a_2 - a_1)x^2 + \cdots + (\alpha_2 a_n - a_{n-1})x^n \\ &\quad - (\alpha_2 a_{n+1} + a_n)x^{n+1} + a_{n+1}x^{n+2}. \end{aligned}$$

Thay x bởi $\alpha_2 x$, ta thu được

$$\begin{aligned} Q_2(\alpha_2 x) &= \alpha_2 a_0 + (\alpha_2 a_1 - a_0)\alpha_2 x + (\alpha_2 a_2 - a_1)\alpha_2^2 x^2 + \cdots + \\ &\quad + (\alpha_2 a_n - a_{n-1})\alpha_2^n x^n - (\alpha_2 a_{n+1} + a_n)\alpha_2^{n+1} x^{n+1} + \\ &\quad + a_{n+1}\alpha_2^{n+2} x^{n+2} \end{aligned}$$

là đa thức có dãy hệ số như sau

$$\alpha_2 a_0, (\alpha_2 a_1 - a_0)\alpha_2, \dots, (\alpha_2 a_n - a_{n-1})\alpha_2^n, -(\alpha_2 a_{n+1} + a_n)\alpha_2^{n+1},$$

$$a_{n+1}\alpha_2^{n+2}.$$

Mặt khác, dãy hệ số không âm

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$$

có cùng vị trí đổi dấu với dãy hệ số

$$\alpha_2 a_0, (\alpha_2 a_1 - a_0)\alpha_2, (\alpha_2 a_2 - a_1)\alpha_2^2, \dots, (\alpha_2 a_n - a_{n-1})\alpha_2^n.$$

Suy ra

$$\alpha_2 a_0, (\alpha_2 a_1 - a_0)\alpha_2, (\alpha_2 a_2 - a_1)\alpha_2^2, \dots, (\alpha_2 a_n - a_{n-1})\alpha_2^n$$

là dãy hệ số không âm.

Do $\alpha_2 > 0$, $a_{n+1} > 0$ và $a_n \geq 0$ nên $a_{n+1}\alpha_2^{n+2} > 0$ và $\alpha_2 a_{n+1} + a_n > 0$ hay $-(\alpha_2 a_{n+1} + a_n) < 0$. Vì thế đa thức $Q_2(\alpha_2 x)$ có hai lần đổi dấu. Mặt khác, theo tính chất 1.9 ta có đa thức $Q_2(x)$ và đa thức $Q_2(\alpha_2 x)$ có cùng vị trí đổi dấu ($\alpha_2 > 0$).

Vậy luôn tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để đa thức $Q_2(x)$ có đúng hai lần đổi dấu.

Ví dụ 2.2. Đa thức

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 8x + 4 \\ &= (1-x)(2-x)(x+2)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

có hai nghiệm dương là $x = 1, x = 2$.

Ta xét các tích sau :

$$P(x)(x+1) = x^6 - x^5 - 4x^4 + 5x^3 - x^2 - 4x + 4$$

$$P(x)(x+1)^2 = x^7 - 5x^5 + x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 4$$

$$P(x)(x+1)^3 = x^8 + x^7 - 5x^6 - 4x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2 + 4x + 4$$

$$P(x)(x+1)^4 = x^9 + 2x^8 - 4x^7 - 9x^6 + x^5 + 4x^4 - 6x^3 - x^2 + 8x + 4$$

$$P(x)(x+1)^5 = x^{10} + 3x^9 - 2x^8 - 13x^7 - 8x^6 + 5x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 12x + 4$$

$$P(x)(x+1)^6 = x^{11} + 4x^{10} + x^9 - 15x^8 - 21x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 19x^3 + 16x + 4$$

$$P(x)(x+1)^7 = x^{12} + 5x^{11} + 5x^{10} - 6x^9 - 36x^8 - 24x^7 - 6x^5 - 9x^4 + 19x^3 + 35x^2 + 20x + 4.$$

Nhận xét rằng với $s = 7$ thì dãy hệ số của đa thức $Q(x) = P(x)(x+1)^7$ là

$$1, 5, 5, -6, -36, -24, 0, -6, -9, 19, 35, 20, 4$$

đổi dấu đúng hai lần.

Bổ đề 2.3. (Xem [5]) Nếu đa thức $P_3(x) \in \mathbb{R}[x]$ có ba nghiệm dương thì tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để đa thức $Q_3(x)$ dạng $Q_3(x) = P_3(x)(x+1)^s$ có dãy hệ số đổi dấu đúng ba lần.

Chứng minh. Giả sử đa thức $P_3(x) \in \mathbb{R}[x]$ có ba nghiệm dương là

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \quad (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0).$$

Ta có

$P_3(x) = (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)g(x)$ với $g(x) > 0, \forall x > 0$. Nhận xét rằng đa thức $P_2(x) = (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)g(x)$ có đúng hai nghiệm dương nên theo bổ đề 2.2 thì luôn tồn tại $s \in \mathbb{N}$ sao cho đa thức

$$Q_2(x) = P_2(x)(x+1)^s$$

có dãy hệ số đổi dấu đúng hai lần. Hơn nữa, đa thức $Q_2(x)$ có hệ số cao nhất dương, hệ số của hạng tử kế tiếp hạng tử có bậc cao nhất âm và tất cả các hệ số còn lại không âm. Không giảm tính tổng quát, ta giả sử

$$Q_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n - a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2}$$

trong đó $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $a_{n+1} > 0$; $a_{n+2} > 0$. Xét đa thức

$$Q_3(x) = P_3(x)(x+1)^s$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_3 a_0 + (\alpha_3 a_1 - a_0)x + (\alpha_3 a_2 - a_1)x^2 + \cdots + (\alpha_3 a_n - a_{n-1})x^n \\ &\quad - (\alpha_3 a_{n+1} - a_n)x^{n+1} + (\alpha_3 a_{n+2} + a_{n+1})x^{n+2} - a_{n+2}x^{n+3}. \end{aligned}$$

Thay x bởi $\alpha_3 x$ ta thu được

$$\begin{aligned} Q_3(\alpha_3 x) &= \alpha_3 a_0 + (\alpha_3 a_1 - a_0)\alpha_3 x + (\alpha_3 a_2 - a_1)\alpha_3^2 x^2 + \cdots + \\ &\quad + (\alpha_3 a_n - a_{n-1})\alpha_3^n x^n - (\alpha_3 a_{n+1} + a_n)\alpha_3^{n+1} x^{n+1} + \\ &\quad + (\alpha_3 a_{n+2} + a_{n+1})\alpha_3^{n+2} x^{n+2} - a_{n+2}\alpha_3^{n+3} x^{n+3} \end{aligned}$$

là đa thức có dãy hệ số như sau :

$$\begin{aligned} &\alpha_3 a_0, (\alpha_3 a_1 - a_0)\alpha_3, (\alpha_3 a_2 - a_1)\alpha_3^2, \dots, (\alpha_3 a_n - a_{n-1})\alpha_3^n, \\ &\quad - (\alpha_3 a_{n+1} + a_n)\alpha_3^{n+1}, (\alpha_3 a_{n+2} + a_{n+1})\alpha_3^{n+2}, -a_{n+2}\alpha_3^{n+3}. \end{aligned}$$

Mặt khác, dãy hệ số không âm $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ có cùng vị trí đổi dấu như dãy

$$\alpha_3 a_0, (\alpha_3 a_1 - a_0)\alpha_3, (\alpha_3 a_2 - a_1)\alpha_3^2, \dots, (\alpha_3 a_n - a_{n-1})\alpha_3^n$$

vậy nên

$$\alpha_3 a_0, (\alpha_3 a_1 - a_0)\alpha_3, (\alpha_3 a_2 - a_1)\alpha_3^2, \dots, (\alpha_3 a_n - a_{n-1})\alpha_3^n$$

là dãy các hệ số không âm. Ta có $a_n \geq 0$, $a_{n+1} > 0$, $a_{n+2} > 0$ và $\alpha_3 > 0$ nên

$$- (\alpha_3 a_{n+1} + a_n)\alpha_3^{n+1} < 0, (\alpha_3 a_{n+2} + a_{n+1})\alpha_3^{n+2} > 0, -a_{n+2}\alpha_3^{n+3} < 0.$$

Suy ra đa thức $Q_3(\alpha_3 x)$ đổi dấu đúng ba lần $(+, -, +, -)$. Theo tính chất (1.9) ta có các dãy hệ số của đa thức $Q_3(\alpha_3 x)$ và $Q_3(x)$ có cùng vị trí đổi dấu (vì $\alpha_3 > 0$).

Vậy luôn tồn tại $s \in \mathbb{N}$ sao cho dãy hệ số của đa thức $Q_3(x) = P_3(x)(x+1)^s$ đổi dấu đúng ba lần.

Ví dụ 2.3. Xét đa thức

$$\begin{aligned} P(x) &= -x^5 + 7x^4 - 18x^3 + 23x^2 - 17x + 6 \\ &= (1-x)(2-x)(3-x)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

có ba nghiệm dương là $x = 1, x = 2, x = 3$. Ta xét các tích sau :

$$P(x)(x+1) = -x^6 + 6x^5 - 11x^4 - x^3 + 2x^2 - 11x + 6$$

$$P(x)(x+1)^2 = -x^7 + 5x^6 - 5x^5 - 12x^4 + x^3 - 9x^2 - 5x + 6$$

$$P(x)(x+1)^3 = -x^8 + 4x^7 - 17x^5 - 11x^4 - 8x^3 - 14x^2 + x + 6.$$

Nhận xét rằng với $s = 3$ thì dãy hệ số của đa thức $Q(x) = P(x)(x+1)^3$ là

$$-1, 4, 0, -17, -11, -8, -14, 1, 6$$

đổi dấu đúng ba lần $(-, +, -, +)$.

Ta phát biểu kết quả mở rộng bổ đề 2.1, 2.2, 2.3 như sau.

Định lý 2.1. (Xem [5]) Nếu đa thức $P_k(x) \in \mathbb{R}[x]$ có k nghiệm dương ($k \in \mathbb{N}^*$) thì tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để đa thức $Q_k(x)$ dạng $Q_k(x) = P_k(x)(x+1)^s$ có dãy hệ số đổi dấu đúng k lần.

Chứng minh (bằng phương pháp quy nạp). Ta đã chứng minh được định lý 2.1 đúng với $k = 1, k = 2, k = 3$ (theo các bổ đề 2.1, 2.2, 2.3).

Giả sử định lý trên đúng đến $k := k-1$, tức là nếu đa thức $P_{k-1}(x) \in \mathbb{R}[x]$ có $k-1$ nghiệm dương ($k \in \mathbb{N}, k > 1$) thì tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để đa thức $Q_{k-1}(x)$ dạng $Q_{k-1}(x) = P_{k-1}(x)(x+1)^s$ có dãy hệ số đổi dấu đúng $k-1$ lần.

Theo giả thiết đa thức $P_k(x) \in \mathbb{R}[x]$ có k nghiệm dương, ta giả sử các nghiệm đó là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ ($\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, k$) thì đa thức $P_k(x)$ có dạng

$$P_k(x) = (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x) \dots (\alpha_k - x)g(x), \quad g(x) > 0 \quad (x > 0).$$

Xét đa thức

$$P_{k-1}(x) = (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x) \dots (\alpha_{k-1} - x)g(x), \quad g(x) > 0 \quad (x > 0)$$

có $k-1$ nghiệm dương $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-1})$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $s \in \mathbb{N}$ để dãy hệ số của đa thức $Q_{k-1}(x) = P_{k-1}(x)(x+1)^s$ đổi

dấu $k - 1$ lần.

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử k là số chẵn thì $k - 1$ là số lẻ. Trước hết, ta sắp xếp đa thức $Q_{k-1}(x)$ theo thứ tự tăng dần của lũy thừa của x rồi xét dấu các hệ số theo thứ tự đó thu được kết quả như sau :

- Hệ số của hạng tử có bậc không vượt quá n đều không âm và không đồng thời bằng 0 (bài toán 2.2)

- Hệ số của hạng tử bậc $n + 1$ mang dấu $(-)$ (bổ đề 2.1)

- Hệ số của hạng tử bậc $n + 2$ mang dấu $(+)$ (bổ đề 2.2)

- Hệ số của hạng tử bậc $n + 3$ mang dấu $(-)$ (bổ đề 2.3)

Tiếp theo, bằng phương pháp quy nạp, ta có

- Hệ số của hạng tử bậc $n + k - 2$ mang dấu $(+)$,

- Hệ số của hạng tử bậc $n + k - 1$ mang dấu $(-)$.

$$Q_{k-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ - a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} - \cdots + a_{n+k-2}x^{n+k-2} - a_{n+k-1}x^{n+k-1}$$

trong đó

$$a_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad a_j > 0 \quad (j = n + 1, n + 2, \dots, n + k - 1).$$

Xét đa thức

$$Q_k(x) = P_k(x) (x + 1)^s \\ = (\alpha_1 - x) (\alpha_2 - x) (\alpha_3 - x) \dots (\alpha_{k-1} - x) (\alpha_k - x) g(x) (x + 1)^s \\ = (\alpha_k - x) P_{k-1}(x + 1)^s n \\ = (\alpha_k - x) Q_{k-1}(x).$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$(\alpha_k - x) Q_{k-1}(x) = (\alpha_k - x) (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n - a_{n+1}x^{n+1} + \\ + a_{n+2}x^{n+2} - \cdots + a_{n+k-2}x^{n+k-2} - a_{n+k-1}x^{n+k-1}) \\ = \alpha_k a_0 + (\alpha_k a_1 - a_0)x + (\alpha_k a_2 - a_1)x^2 + \cdots + \\ + (\alpha_k a_n - a_{n-1})x^n - (\alpha_k a_{n+1} + a_n)x^{n+1} + \\ + (\alpha_k a_{n+2} + a_{n+1})x^{n+2} - \cdots + (\alpha_k a_{n+k-2} + a_{n+k-3})x^{n+k-2} - \\ - (\alpha_k a_{n+k-1} - a_{n+k-2})x^{n+k-1} + a_{n+k-1}x^{n+k}.$$

Thay x bởi $\alpha_k x$ ta thu được

$$\begin{aligned} Q_k(\alpha_k x) = & \alpha_k a_0 + (\alpha_k a_1 - a_0) \alpha_k x + (\alpha_k a_2 - a_1) \alpha_k^2 x^2 + \dots + \\ & + (\alpha_k a_n - a_{n-1}) \alpha_k^n x^n - (\alpha_k a_{n+1} + a_n) \alpha_k^{n+1} x^{n+1} + \\ & + (\alpha_k a_{n+2} + a_{n+1}) \alpha_k^{n+2} x^{n+2} - \dots + \\ & + (\alpha_k a_{n+k-2} + a_{n+k-3}) \alpha_k^{n+k-2} x^{n+k-2} - \\ & - (\alpha_k a_{n+k-1} - a_{n+k-2}) \alpha_k^{n+k-1} x^{n+k-1} + a_{n+k-1} \alpha_k^{n+k} x^{n+k} \end{aligned}$$

là đa thức có dãy hệ số như sau

$$\begin{aligned} & \alpha_k a_0, (\alpha_k a_1 - a_0) \alpha_k, (\alpha_k a_2 - a_1) \alpha_k^2, \dots, (\alpha_k a_n - a_{n-1}) \alpha_k^n, \\ & - (\alpha_k a_{n+1} + a_n) \alpha_k^{n+1}, (\alpha_k a_{n+2} + a_{n+1}) \alpha_k^{n+2}, \dots, \\ & (\alpha_k a_{n+k-2} + a_{n+k-3}) \alpha_k^{n+k-2}, - (\alpha_k a_{n+k-1} - a_{n+k-2}) \alpha_k^{n+k-1}, \\ & a_{n+k-1} \alpha_k^{n+k}. \end{aligned}$$

Mặt khác, dãy hệ số không âm

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$$

có cùng vị trí đổi dấu như dãy

$$\alpha_k a_0, (\alpha_k a_1 - a_0) \alpha_k, (\alpha_k a_2 - a_1) \alpha_k^2, \dots, (\alpha_k a_n - a_{n-1}) \alpha_k^n$$

nên

$$\alpha_k a_0, (\alpha_k a_1 - a_0) \alpha_k, (\alpha_k a_2 - a_1) \alpha_k^2, \dots, (\alpha_k a_n - a_{n-1}) \alpha_k^n$$

là dãy các hệ số không âm.

Ta có $a_n \geq 0$, $a_j > 0$ ($j = n+1, n+2, \dots, n+k-1$) và $\alpha_k > 0$ nên

$$\begin{aligned} & - (\alpha_k a_{n+1} + a_n) \alpha_k^{n+1} < 0, (\alpha_k a_{n+2} + a_{n+1}) \alpha_k^{n+2} > 0, \dots, \\ & (\alpha_k a_{n+k-2} + a_{n+k-3}) \alpha_k^{n+k-2} > 0, - (\alpha_k a_{n+k-1} - a_{n+k-2}) \alpha_k^{n+k-1} < 0, \\ & a_{n+k-1} \alpha_k^{n+k} > 0. \end{aligned}$$

Suy ra đa thức $Q_k(\alpha_k x)$ đổi dấu k lần $(+, -, +, \dots, -, +)$. Theo tính chất 1.9 ta có dãy các hệ số của đa thức $Q_k(\alpha_k x)$ và $Q_k(x)$ có cùng vị trí

đổi dấu (vì $\alpha_k > 0$).

Vậy luôn tồn tại $s \in \mathbb{N}$ sao cho dãy hệ số của đa thức

$$Q_k(x) = P_k(x) (x + 1)^s$$

đổi dấu đúng k lần.

Từ định lý 2.1, ta có một cách xác định chính xác số nghiệm của đa thức chỉ có nghiệm thực thông qua hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.1. (Xem [5]) Nếu đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ chỉ có các nghiệm thực thì số nghiệm dương của đa thức bằng số lần đổi dấu của dãy hệ số.

Chứng minh.

Giả sử $\deg P(x) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, do đa thức $P(x)$ chỉ có nghiệm thực nên $P(x)$ có tất cả n nghiệm đều thực và viết được dưới dạng sau :

$$P(x) = (\alpha_1 + x)(\alpha_2 + x) \dots (\alpha_r + x) x^m (\beta_1 - x)(\beta_2 - x) \dots (\beta_p - x), \\ (r + m + p = n),$$

trong đó $r, m, p \in \mathbb{N}$; $\alpha_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $\beta_j > 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Xét đa thức

$$Q(x) = (\alpha_1 + x)(\alpha_2 + x) \dots (\alpha_r + x)$$

có $\alpha_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$ nên sau khi khai triển $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = E_r + E_{r-1}x + E_{r-2}x^2 + \dots + E_1x^{r-1} + x^r$$

trong đó E_i ($i \in \{1, 2, \dots, r\}$) là các đa thức đối xứng Viète bậc i của các số thực dương $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Nhận xét rằng,

$$E_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$$

nên dãy hệ số của đa thức $Q(x)$ không đổi dấu.

Xét tích

$$Q_1(x) := (\beta_1 - x) Q(x) \\ = (\beta_1 - x) (E_r + E_{r-1}x + E_{r-2}x^2 + \dots + E_1x^{r-1} + x^r).$$

Thay x bởi $\beta_1 x$ ta thu được

$$Q_1(\beta_1 x) = (\beta_1 - \beta_1 x) (E_r + E_{r-1}\beta_1 x + E_{r-2}\beta_1^2 x^2 + \dots + E_1\beta_1^{r-1} x^{r-1} \\ + \beta_1^r x^r) \\ = E_r\beta_1 + (E_{r-1}\beta_1 - E_r)\beta_1 x + (E_{r-2}\beta_1 - E_{r-1})\beta_1^2 x^2 + \dots + \\ + (E_1\beta_1 - E_2)\beta_1^{r-1} x^{r-1} + (\beta_1 - E_1)\beta_1^r x^r - \beta_1^{r+1} x^{r+1}$$

là đa thức có dãy hệ số như sau

$$E_r\beta_1, (E_{r-1}\beta_1 - E_r)\beta_1, (E_{r-2}\beta_1 - E_{r-1})\beta_1^2, \dots, (E_1\beta_1 - E_2)\beta_1^{r-1}, \\ (\beta_1 - E_1)\beta_1^r, -\beta_1^{r+1}.$$

Để ý rằng dãy hệ số

$$E_r, E_{r-1}, E_{r-2}, \dots, E_1, 1$$

có cùng vị trí đổi dấu với dãy hệ số

$$E_r\beta_1, (E_{r-1}\beta_1 - E_r)\beta_1, (E_{r-2}\beta_1 - E_{r-1})\beta_1^2, \dots, (E_1\beta_1 - E_2)\beta_1^{r-1}, \\ (\beta_1 - E_1)\beta_1^r.$$

Suy ra dãy hệ số

$$E_r\beta_1, (E_{r-1}\beta_1 - E_r)\beta_1, (E_{r-2}\beta_1 - E_{r-1})\beta_1^2, \dots, (E_1\beta_1 - E_2)\beta_1^{r-1}, \\ (\beta_1 - E_1)\beta_1^r.$$

không đổi dấu và đều là các số thực dương.

Mặt khác, $-\beta^{r+1} < 0$ nên dãy hệ số của đa thức $Q_1(\beta_1x)$ đổi dấu một lần. Do hai đa thức $Q_1(x)$ và $Q_1(\beta_1x)$ có cùng vị trí đổi dấu nên dãy hệ số của đa thức $Q_1(x)$ đổi dấu một lần.

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử

$$Q_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r - a_{r+1}x^{r+1}$$

trong đó $a_i > 0, \forall x \in \{1, 2, \dots, r, r+1\}$. Xét tích

$$Q_2(x) = (\beta_2 - x)Q_1(x) \\ = (\beta_2 - x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_rx^r - a_{r+1}x^{r+1}).$$

Thay x bởi β_2x ta được

$$Q_2(x) = (\beta_2 - \beta_2x)(a_0 + a_1\beta_2x + a_2\beta_2^2x^2 + \dots + a_r\beta_2^rx^r \\ - a_{r+1}\beta_2^{r+1}x^{r+1}) \\ = a_0\beta_2 + (a_1\beta_2 - a_0)\beta_2x + (a_2\beta_2 - a_1)\beta_2^2x^2 + \dots + \\ + (a_r\beta_2 - a_{r-1})\beta_2^rx^r - (a_{r+1}\beta_2 - a_r)\beta_2^{r+1}x^{r+1} + a_{r+1}\beta_2^{r+2}x^{r+2}.$$

Để ý rằng dãy hệ số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}$ của đa thức $Q_1(x)$ có cùng vị trí đổi dấu như đối với dãy hệ số

$$a_0\beta_2, (a_1\beta_2 - a_0)\beta_2, (a_2\beta_2 - a_1)\beta_2^2, \dots, (a_r\beta_2 - a_{r-1})\beta_2^r, \\ - (a_{r+1}\beta_2 - a_r)\beta_2^{r+1}.$$

Suy ra dãy

$$a_0\beta_2, (a_1\beta_2 - a_0)\beta_2, (a_2\beta_2 - a_1)\beta_2^2, \dots, (a_r\beta_2 - a_{r-1})\beta_2^r, \\ - (a_{r+1}\beta_2 - a_r)\beta_2^{r+1}$$

đổi dấu một lần, trong đó hệ số của tất cả các hạng tử có bậc nhỏ hơn $r + 1$ đều dương, hệ số của hạng tử bậc $r + 1$ âm. Do hệ số của hạng tử bậc $r + 2$ là $a_{r+1}\beta_2^{r+2} > 0$ nên dãy hệ số của đa thức $Q_2(\beta_2x)$ đổi dấu hai lần.

Mặt khác, hai đa thức $Q_2(x)$ và $Q_2(\beta_2x)$ có cùng vị trí đổi dấu nên dãy hệ số của đa thức $Q_2(x)$ đổi dấu hai lần.

Tiến hành tương tự như trên sau p bước ta được đa thức $Q_P(x)$ có dãy hệ số đổi dấu p lần hay dãy hệ số của đa thức $P(x)$ đổi dấu p lần. Do đa thức $P(x)$ có p nghiệm dương nên số nghiệm dương của đa thức bằng số lần đổi dấu của dãy hệ số.

Bài toán 2.3. (Xem [5]) Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $P(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$P(x) = [A(x)]^2 + [B(x)]^2,$$

trong đó $A(x), B(x)$ cũng là các đa thức.

Giải. Do $P(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên đa thức $P(x)$ có bậc bằng $2n$ và có thể phân tích được dưới dạng tích của các nhân tử bậc hai không âm, nghĩa là

$$P(x) = \prod_{j=1}^n [(a_jx + x_j)^2 + y_j^2],$$

trong đó $a_j, x_j, y_j \in \mathbb{R}; j = 1, 2, \dots, n$.

Từ hằng đẳng thức

$$(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) = (p_1p_2 + q_1q_2)^2 + (p_1q_2 - p_2q_1)^2$$

ta có kết luận :

Tích của hai biểu thức dạng $[u(x)]^2 + [v(x)]^2$ cũng là một biểu thức có dạng đó.

Sau hữu hạn bước thực hiện quy trình đó ta thu được biểu thức dạng

$$P(x) = [A(x)]^2 + [B(x)]^2.$$

Bài toán 2.4. (Xem [5]) Hỏi có tồn tại hay không tồn tại các đa thức $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$ với các hệ số nguyên dương và thỏa mãn hệ thức

$$T(x) = (x^2 - 3x + 3) P(x), \quad P(x) = \left(\frac{x^2}{20} - \frac{x}{15} + \frac{1}{12} \right) Q(x).$$

Giải. Viết lại các hằng đẳng thức của đề bài dưới dạng

$$60T(x) = 60(x^2 - 3x + 3) P(x) = (3x^2 - 4x + 5) Q(x) \quad (4)$$

Các đa thức $(x^2 - 3x + 3)$ và $(3x^2 - 4x + 5)$ vô nghiệm và nguyên tố cùng nhau. Vì vậy từ (4) suy ra tồn tại các đa thức $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$ thỏa mãn điều kiện đề bài khi và chỉ khi tồn tại đa thức $S(x)$ sao cho các đa thức

$$(3x^2 - 4x + 5) S(x), \quad 60(x^2 - 3x + 3) S(x)$$

và

$$(3x^2 - 4x + 5) (x^2 - 3x + 3) S(x)$$

đều là những đa thức với hệ số nguyên dương.

Theo kết quả của bài toán 2.2 thì tồn tại số nguyên dương k_1 đủ lớn sao cho

$$(3x^2 - 4x + 5) (x + 1)^{k_1}$$

là một đa thức có các hệ số nguyên không âm và từ đó dễ dàng suy ra rằng không có hệ số nào của đa thức bằng 0 và tồn tại số nguyên dương k_2 đủ lớn để

$$(x^2 - 3x + 3) (x + 1)^{k_2}$$

là đa thức có các hệ số đều nguyên dương. Từ đó suy ra

$$(3x^2 - 4x + 5) (x^2 - 3x + 3) (x + 1)^{k_1 + k_2}$$

cũng là một đa thức với hệ số nguyên dương. Như vậy, câu trả lời của bài toán là khẳng định. Chẳng hạn ta có thể chọn

$$P(x) = (3x^2 - 4x + 5)(x + 1)^{k_1 + k_2},$$

$$Q(x) = 60(x^2 - 3x + 3)(x + 1)^{k_1 + k_2},$$

$$T(x) = (3x^2 - 4x + 5)(x^2 - 3x + 3)(x + 1)^{k_1 + k_2}.$$

(Bằng cách thử trực tiếp có thể thấy rằng $k_1 \geq 3$, $k_2 \geq 1$, 5).

Bài toán 2.5. (Xem [5]) Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$ thì tồn tại các đa thức $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ để $P(x)$ biểu diễn được dưới dạng

$$P(x) = [A(x)]^2 + [B(x)]^2 + x \left\{ [C(x)]^2 + [D(x)]^2 \right\} \quad (5)$$

Giải.

1. Trường hợp $\deg P(x) = 2m$

Nếu $m = 0$ thì ta dễ dàng viết được biểu diễn (5).

Với $m \geq 1$, ta có thể phân tích đa thức $P(x)$ dưới dạng

$$P(x) = \prod_{k=1}^m (a_k x^2 + b_k x + c_k)$$

trong đó $a_k > 0$, $a_k x^2 + b_k x + c_k \geq 0$, $\forall x \geq 0$.

Nhận xét rằng với mỗi đa thức

$$a_k x^2 + b_k x + c_k \geq 0, \quad \forall x \geq 0$$

ta đều có thể viết được

$$a_k x^2 + b_k x + c_k = (\alpha_k x + \beta_k)^2 + x(\gamma_k^2 + \delta_k^2),$$

nên

$$P(x) = \prod_{k=1}^m \left[(\alpha_k x + \beta_k)^2 + x(\gamma_k^2 + \delta_k^2) \right].$$

Mặt khác, ta cũng có tích của hai đa thức dạng $(p^2 + q^2) + x(r^2 + s^2)$

cũng là một đa thức có dạng đó. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & [(p_1^2 + q_1^2) + x(r_1^2 + s_1^2)] [(p_2^2 + q_2^2) + x(r_2^2 + s_2^2)] \\ &= [(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) + x^2(r_1^2 + s_1^2)(r_2^2 + s_2^2)] + \\ &+ x[(p_1^2 + q_1^2)(r_2^2 + s_2^2) + x^2(p_2^2 + q_2^2)(r_1^2 + s_1^2)]. \end{aligned}$$

Theo bài toán 2.3 thì ta có biểu diễn

$$\begin{aligned} & [(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2) + x^2(r_1^2 + s_1^2)(r_2^2 + s_2^2)] = [A(x)]^2 + [B(x)]^2, \\ & [(p_1^2 + q_1^2)(r_2^2 + s_2^2) + x^2(p_2^2 + q_2^2)(r_1^2 + s_1^2)] = [C(x)]^2 + [D(x)]^2. \end{aligned}$$

Vậy nên

$$P(x) = [A(x)]^2 + [B(x)]^2 + x \{ [C(x)]^2 + [D(x)]^2 \}.$$

2. Trường hợp $\deg P(x) = 2m + 1$

Lập luận tương tự như đối với bài toán 2.2 ta thu được

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=1}^n (x + d) (a_k x^2 + b_k x + c_k) \\ &= [A(x)]^2 + [B(x)]^2 + x \{ [B(x)]^2 + [C(x)]^2 \} \\ &= [B(x)]^2 + [C(x)]^2. \end{aligned}$$

(Do các biểu thức trong ngoặc nhọn là không âm với mọi x nên áp dụng được kết quả biểu diễn của bài toán 2.3).

Bài toán 2.6. (Xem [5]) Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$f(x) = \sum_{j=0}^k a_j (1+x)^{\alpha_j} (1-x)^{\beta_j}$$

với $a_j \geq 0, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}$.

Giải. Giả sử $\deg f(x) = m$. Đặt $\frac{1+x}{1-x} = t \Rightarrow x = \frac{t-1}{t+1}$.

Do $x \in [-1; 1]$ nên $t > 0$. Vậy $f(x) = f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) > 0, \forall t > 0$. Do đó đa thức $Q(t)$ với

$$Q(t) = (t+1)^m f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$$

là một đa thức thỏa mãn điều kiện $Q(t) > 0, \forall t > 0$.

Theo bài toán 2.2 thì tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho :

$$(t+1)^n Q(t) = (t+1)^{m+n} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$$

là một đa thức có các hệ số đều không âm. Suy ra

$$(t+1)^{m+n} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \sum_{j=0}^k b_j t^j,$$

với $b_j > 0, k \leq m+n$.

Mà

$$t+1 = \frac{1+x}{1-x} + 1 = \frac{2}{1-x}$$

nên ta thu được

$$\left(\frac{2}{1-x}\right)^{m+n} f(x) = \sum_{j=0}^k b_j \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^j,$$

Suy ra

$$f(x) = \sum_{j=0}^k \frac{b_j}{2^{m+n}} (1+x)^j (1-x)^{m+n-j}$$

với $a_j = \frac{b_j}{2^{m+n}} \geq 0$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.7. (Xem [5]) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ bậc n và nhận giá trị dương trong đoạn $[-1; 1]$ và nó không thể biểu diễn được dưới dạng

$$P(x) = \sum A_{\alpha\beta} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

trong đó $A_{\alpha\beta} \geq 0$, $\alpha + \beta \leq n$; α, β là các số nguyên không âm.

Giải. Xét đa thức $P(x) = x^2 + \varepsilon$, trong đó $\varepsilon > 0$. Giả sử có thể viết $P(x)$ được dưới dạng

$$P(x) = x^2 + \varepsilon = \sum_{\alpha+\beta \leq 2} A_{\alpha\beta}(\varepsilon) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \quad (6)$$

trong đó $\varepsilon > 0$, $A_{\alpha\beta}(\varepsilon) \geq 0$, α và β chạy trên tất cả các số nguyên không âm mà $\alpha + \beta \leq 2$. Như vậy, với ε bất kì trong tổng này sẽ chứa vừa đúng sáu số hạng. Bằng cách thế $x = 0$ vào (6) ta nhận được $A_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ bị chặn với $0 < \varepsilon \leq 1$. Cho ε dần tới 0 sao cho tồn tại $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{\alpha\beta}(\varepsilon) = A$ trong tất cả sáu số hạng, khi đó chuyển qua giới hạn ta nhận được

$$x^2 = \sum_{\alpha+\beta \leq 2} A_{\alpha\beta} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta.$$

Nhưng với $x = 0$ thì đồng nhất thức này không thỏa mãn.

Vậy không phải đối với mọi đa thức $P(x)$ bậc n nhận giá trị dương trong đoạn $[-1; 1]$ và đều có thể biểu diễn được dưới dạng

$$P(x) = \sum_{\alpha+\beta \leq 2} A_{\alpha\beta} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad A_{\alpha\beta} \geq 0.$$

2.2 Biểu diễn một số dạng đa thức với hệ số nguyên

Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên và số nguyên tố p . Chúng ta sẽ xét vấn đề về sự tồn tại nghiệm của phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$, trong đó k là một số nguyên dương.

Định nghĩa 2.1. (Xem [5]) Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên âm và số nguyên dương $m \geq 2$. Ta nói rằng phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ có nghiệm $x_0 \in \mathbb{Z}$ nếu $f(x_0) \equiv 0 \pmod{m}$. Nếu $x_0 \in \mathbb{Z}$ là một nghiệm của phương trình $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$ và t là một số nguyên bất kì thì $f(x_0 + tm) \equiv f(x_0) \equiv 0 \pmod{m}$.

Định lý 2.2. (Xem [5]) Cho các số nguyên a và m , $m \geq 2$; $(a, m) = 1$. Khi đó phương trình $ax \equiv b \pmod{m}$, $b \in \mathbb{Z}$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in \mathbb{Z}$ mà $0 \leq x_0 \leq m-1$. Mọi nghiệm khác của phương trình này đều có dạng $x_t = x_0 + mt$, $t \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh. Nếu thì $ak \not\equiv al \pmod{m}$. Điều này có nghĩa là biểu thức $as - b$, $s = 0, 1, \dots, m - 1$ cho m số dư khác nhau khi chia cho m . Vậy tồn tại duy nhất, sao cho $ax_0 \equiv b \pmod{m}$. Nếu $x_t \in \mathbb{Z}$ là một nghiệm của phương trình đồng dư $ax \equiv b \pmod{m}$ thì $ax_t \equiv b \pmod{m}$. Suy ra $a(x_1 - x_0)$ chia hết cho m . Nhưng $(a, m) = 1$, vậy $x_1 - x_0$ chia hết cho m .

Suy ra $x_t = x_0 + mt$, $t \in \mathbb{Z}$.

Định lý 2.3 (Công thức Taylor). (Xem [5]) Cho đa thức $f(x)$ bậc n , $n \geq 1$ với các hệ số thực và $x_0 \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Chứng minh. Tồn tại các hằng số $b_0, b_1, \dots, b_n$ sao cho

$$f(x) = b_n (x_1 - x_0)^n + b_{n-1} (x - x_0)^{n-1} + \dots + b_0.$$

Với $1 \leq k \leq n$, ta có

$$f^{(k)}(x) = k!b_k + (k+1) \dots 2 (x - x_0) b_{k+1} + \dots + n(n-1) \dots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} b_n.$$

Suy ra $f^{(k)}(x_0) = k!b_k$, do đó $b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Mặt khác $f(x_0) = b_0$. Vậy

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x_1 - x_0)^k.$$

Định lý 2.4. (Xem [5]) Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên và một số nguyên tố p . Nếu phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có đúng r nghiệm nguyên phân biệt $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_r^{(1)}$ thuộc đoạn $[1; p]$ sao cho $f'(x_i^{(1)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, $(1 \leq i \leq r)$, thì phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ có đúng r nghiệm nguyên phân biệt thuộc đoạn $[1; p^k]$ với mọi $k \geq 1$: $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}$ và đối với các nghiệm này ta có $f'(x_i^{(k)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($1 \leq i \leq r$).

Chứng minh. Ta chứng minh khẳng định bằng phương pháp quy nạp toán học theo k . Với $k = 1$ thì khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng

với. Điều đó có nghĩa là trong đoạn $[1; p^k]$ thì phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ có đúng r nghiệm nguyên phân biệt $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}$, đồng thời $f'(x_i^{(k)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$ với $1 \leq i \leq r$.

Giả sử $x_0 \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in [1; p^{k+1}]$ là một nghiệm của phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$. Khi đó $f(x_0) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$. Suy ra $f(x_0) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Tồn tại duy nhất $i \in [1; r]$, $t \in \mathbb{Z}$, $t \in [0; p-1]$ sao cho $x_0 = x_i^{(k)} + p^k t$.

Giả sử $x = x_i^{(k)} + p^k t$ ($i \in [1; r]$, $t \in \mathbb{Z}$, $t \in [0; p-1]$) thì $x \in \mathbb{Z}$. Theo công thức Taylor có

$$f(x) = f(x_i^{(k)}) + f'(x_i^{(k)}) p^k t + \frac{f''(x_i^{(k)})}{2!} (p^k t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i^{(k)})}{n!} (p^k t)^n$$

trong đó n là bậc của $f(x)$.

Ta có $\frac{f^{(j)}(x_i^{(k)})}{j!} \in \mathbb{Z}$ và $jk \geq k+1$, $i \geq 2$. Phương trình $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$ tương đương với

$$f(x_i^{(k)}) + f'(x_i^{(k)}) p^k t \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$$

hay

$$\frac{f(x_i^{(k)})}{p^k} + f'(x_i^{(k)}) t \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$$

(Chú ý rằng $\frac{f(x_i^{(k)})}{p^k} \in \mathbb{Z}$).

Đặt $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + p^k t_i$ thì $x_i^{(k+1)} \in [1; p^{k+1}]$, $x_i^{(k+1)} \in \mathbb{Z}$ và $f(x_i^{(k+1)}) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$.

Mặt khác, $x_i^{(k+1)} \equiv x_i^{(k)} \pmod{p}$. Suy ra $f'(x_i^{(k+1)}) \equiv f'(x_i^{(k)}) \pmod{p}$.

Suy ra $f'(x_i^{(k+1)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$ vì $f'(x_i^{(k)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Vậy phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$ có đúng r nghiệm nguyên phân biệt trong đoạn $[1; p^{k+1}]$: $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_r^{(k+1)}$, đồng thời $f'(x_i^{(k+1)}) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($1 \leq i \leq r$). Như vậy khẳng định cũng đúng với $k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học thì khẳng định đúng với mọi

$k \geq 1$.

* Cho các đa thức $f(x)$, $g(x)$ có các hệ số hữu tỉ sao cho chúng chỉ có ước chung là hằng số. Khi đó ta nói rằng $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau và viết $(f(x), g(x)) = 1$.

Định lý 2.5. (Xem [5]) Cho các đa thức $f(x)$, $g(x)$ với các hệ số hữu tỉ và

$$(f(x), g(x)) = 1.$$

Khi đó tồn tại các đa thức $u(x)$, $v(x)$ với các hệ số hữu tỉ sao cho

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1.$$

Định lý này được chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học theo tổng các bậc của $f(x)$ và $g(x)$. Từ định lý suy ra.

Định lý 2.6. (Xem [5]) Cho các đa thức $f(x)$, $g(x)$ với các hệ số nguyên và nguyên tố cùng nhau (trong). Khi đó tồn tại các đa thức $u(x)$, $v(x)$ với các hệ số nguyên và số nguyên $m \neq 0$ sao cho $u(x)f(x) + v(x)g(x) = m$.

Định lý 2.7. (Xem [5]) Cho đa thức $f(x)$ khác hằng số và có các hệ số nguyên. Khi đó tồn tại vô số số nguyên tố p sao cho phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có nghiệm.

Chứng minh. Giả sử

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad n \geq 1, \quad a_0 \neq 0.$$

Nếu $a_n = 0$ thì $f(x) = xg(x)$, trong đó $g(x)$ là đa thức với các hệ số nguyên, khi đó phương trình đồng dư $xg(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có nghiệm với mọi số nguyên tố p .

Giả sử $a_n \neq 0$ và phương trình đồng dư $xg(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có nghiệm với mọi số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_k$. Với $t \in \mathbb{Z}$, đặt $x_t = p_1p_2 \dots p_k a_n t$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x_t) &= a_0(p_1p_2 \dots p_k a_n t) + a_{n-1}p_1p_2 \dots p_k a_n t + a_n \\ &= a_n(p_1p_2 \dots p_k B + 1), \quad B \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn $t \in \mathbb{Z}$ sao cho $p_1p_2 \dots p_k B + 1$ khác 1 và -1 . Khi đó $f(x_t)$ có ước nguyên tố, khác $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Định lý 2.8. (Xem [5]) Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên, bất khả quy trong và không phải là hằng số. Khi đó tồn tại các đa thức $u(x), v(x)$ với các hệ số nguyên và số nguyên $m \neq 0$ sao cho $u(x)f(x) + v(x)f'(x) = m$.

Chứng minh. Giả sử $g(x) = (f(x), f'(x))$ ($g(x) \in \mathbb{Q}[x]$). Khi đó $g(x)$ là ước của $f(x)$ và $\deg g(x) < \deg f(x)$. Vì $f(x)$ bất khả quy nên $g(x)$ là hằng số, $g(x) = r$, $r \in \mathbb{Q}$. Theo định lý 2.6 thì tồn tại các đa thức $u(x), v(x)$ với các hệ số nguyên và số nguyên $m \neq 0$ sao cho $u(x)f(x) + v(x)f'(x) = m$.

Hệ quả 2.2. (Xem [5]) Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên, bất khả quy trong và không phải là hằng số. Khi đó tồn tại vô số số nguyên tố p sao cho phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ có nghiệm $x_0 \in \mathbb{Z}$ mà $f'(x_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

2.3 Biểu diễn một số dạng đa thức đặc biệt

2.3.1 Biểu diễn đa thức thông qua các hằng đẳng thức

Bài toán 2.8. (Xem [2]) Cho các đa thức $u_i(x) = a_i x + b_i$ ($a_i, b_i, i = 1, 2, 3$ là các số thực) thỏa mãn hệ thức

$$[u_1(x)]^n + [u_2(x)]^n = [u_3(x)]^n \quad (1)$$

Chứng minh rằng các đa thức ấy có dạng

$$u_i(x) = c_i (Ax + B) \quad (i = 1, 2, 3)$$

trong đó A, B, c_1, c_2, c_3 là các số thực.

Giải.

Nếu $a_1 = a_2 = 0$ thì các đa thức $u_1(x)$ và $u_2(x)$ là đa thức hằng và từ (1) suy ra $u_3(x)$ cũng là hằng số và vì vậy $a_3 = 0$. Đối với trường hợp này ta chọn $A = 0, B = 1$ và các b_i, c_i bằng nhau.

Khi a_1 và a_2 không đồng thời bằng 0, giả sử $a_1 \neq 0$, thì ta chỉ cần đặt

$$u_j(x) = \frac{a_j}{a_1} (a_1 x + b_1) + \frac{a_1 b_j - a_j b_1}{a_1}, \quad j = 2, 3.$$

Khi đó

$$u_j(x) = A_j x + B_j, \quad A_j = \frac{a_j}{a_1}, \quad B_j = \frac{a_1 b_j - a_j b_1}{a_1}, \quad j = 2, 3; \quad y = a_1 x + b_1.$$

Hệ thức (1) có dạng

$$y^n + [A_2y + B_2]^n = [A_3y + B_3]^n \quad (2)$$

trong đó $y = a_1x + b_1 \in \mathbb{R}$. So sánh các hệ số của lũy thừa của y ta được

$$B_2^n = B_3^n, \quad nA_2B_2^{n-1} = nA_3B_3^{n-1}, \quad 1 + A_2^n = A_3^n \quad (3)$$

Nếu $B_2 = 0$ thì $B_3 = 0$ và $b_j = \frac{a_j b_1}{a_1}$. Khi đó để có (1) ta chỉ cần đặt $c_1 = 1, c_j = \frac{a_j}{a_1}, A = a_1$ và $B = b_1$.

Nếu $B_2 \neq 0$ thì từ (3) suy ra $B_3 \neq 0$ và $\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$. Điều này trái với hệ thức $1 + A_2^n = A_3^n$ của (3). Vậy trường hợp $B_2 \neq 0$ không xảy ra.

Bài toán 2.9. (Xem [2]) Hãy biểu diễn đa thức

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

dưới dạng hiệu bình phương của hai đa thức

$$f(x) = [P(x)]^2 - [Q(x)]^2$$

bậc khác nhau và với các hệ số thực. Chứng minh rằng, không tồn tại đa thức $g(x)$ với các hệ số thực để

$$f(x) = [g(x)]^2$$

Giải.

Ta thấy ngay rằng $\deg P(x) = 2$ và $\deg Q(x) < 2$. Do đó

$$[P(x)]^2 = x^4 + x^3 + \dots$$

và

$$P(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + a.$$

Chọn $a = 1$ thì

$$f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}x\right)^2$$

Nếu xảy ra đẳng thức $f(x) = [g(x)]^2$ thì $g(x)$ phải có dạng

$$g(x) = x^2 + ax + b.$$

So sánh hệ số đồng bậc sau khi khai triển

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + b)^2 \quad (4)$$

ta được hệ

$$\begin{cases} 1 = 2a \\ 1 = a^2 + 2b \\ 1 = b^2 \\ 1 = 2ab \end{cases} \quad (5)$$

Nhận thấy ngay rằng không tồn tại cặp số a, b thỏa mãn (5).

Bài toán 2.10. (Xem [2]) Giả sử các đa thức $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x) \quad (6)$$

Chứng minh rằng khi đó tồn tại đa thức để viết được dưới dạng

$$P(x) = (x - 1)T(x) \quad (7)$$

Giải.

Giả sử

$$S(x) = s_0 + s_1x + \cdots + s_nx^n$$

Khi đó theo (6) thì

$$\begin{aligned} (x - 1)P(x^5) + x(x - 1)Q(x^5) + x^2(x - 1)R(x^5) = \\ = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)S(x) \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} P(x^5) &= (x^5 - 1)S_1(x) = \\ &= (x^5 - 1)S_2(x) + xP(x^3) + (x^2 - x)Q(x^5) + (x^3 - x^2)R(x^5) \end{aligned} \quad (8)$$

trong đó

$$S_1(x) = s_0 + s_5x^5 + s_{10}x^{10} + \cdots + s_{5m}x^{5m}, \quad m = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil,$$

$$S_2(x) = S(x) - S_1(x).$$

Vì vế trái của (8) là một đa thức chỉ chứa mũ bội 5 của x còn vế phải của (8) là đa thức không là lũy thừa bội của 5 nên chúng đồng nhất bằng 0. Từ đó ta có (7).

2.3.2 Đa thức Chebyshev

Định nghĩa 2.2. (Xem [2]) Các đa thức $T_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) được xác định như sau

$$\begin{cases} T_0(x) = 1; T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \forall n > 1 \end{cases}$$

được gọi là các đa thức Chebyshev (loại 1).

Định nghĩa 2.3. (Xem [2]) Các đa thức $U_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) xác định như sau

$$\begin{cases} U_0(x) = 0; U_1(x) = 1, \\ U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad \forall n > 1 \end{cases}$$

được gọi là các đa thức Chebyshev (loại 2).

• Tính chất của các đa thức $T_n(x)$.

Tính chất 2.1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

Tính chất 2.2. $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ bậc n có các hệ số bậc cao nhất bằng 2^{n-1} và là hàm chẵn khi n chẵn; là hàm lẻ khi n lẻ.

Tính chất 2.3. $T_n(x)$ có đúng n nghiệm phân biệt trên $[-1; 1]$ là

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Tính chất 2.4. $T_n(x) \leq 1, \quad \forall x \in [-1; 1]$ và $T_n(x) = 1$ khi $x = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Tính chất 2.5. Đa thức $T^*(x) = 2^{n-1}T_n(x)$ là đa thức bậc n với hệ số bậc cao nhất bằng 1 và có độ lệch so với 0 trên $[-1; 1]$ là nhỏ nhất trong tất cả các đa thức bậc n với hệ số bậc cao nhất bằng 1.

• Tính chất của đa thức $U_n(x)$.

Tính chất 2.6. $U_n(x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ với mọi $x \in (-1; 1)$.

Tính chất 2.7. $U_n(x) = \frac{1}{n}T'_n(x) = \frac{\sin nt}{\sin t}$, $\cos t = x$ đa thức bậc $n-1$ có hệ số bậc cao nhất bằng 2^{n-1} và là hàm chẵn khi n lẻ; là hàm lẻ khi n chẵn.

Tính chất 2.8. $|U_n(x)| \leq n, \forall x \in [-1; 1]$ và $|T'_n(x)| \leq n^2, \forall x \in [-1; 1]$.

Xét các hàm số

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Khi đó với $|x| > 1$ thì

$$T_n(x) = \cosh(nt), \quad U_n(x) = \frac{\sinh(nt)}{\sinh t} \quad (1)$$

trong đó $x = \cosh t$.

Bài toán 2.11. (Xem [2]) Chứng minh rằng đa thức $U_n(x)$ có đúng $n-1$ nghiệm thực khác nhau trong $(-1; 1)$.

Giải.

Sử dụng tính chất 2 và $T_n(x)$ có đúng n nghiệm thực phân biệt trên $[-1; 1]$ nên theo Định lý Rolle ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài toán 2.12. (Xem [2]) Chứng minh rằng

$$U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}.$$

Giải.

Ta chứng minh cho trường hợp $x \in (-1; 1)$. Đặt $x = \cos t$ ($0 < t < \pi$) và sử dụng các tính chất của $T_n(x)$ và $U_n(x)$ ta thu được điều phải chứng minh.

Với $|x| > 1$ thì ta sử dụng kết quả của đẳng thức (1).

Bài toán 2.13. (Xem [2]) Chứng minh rằng

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)U_n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Giải.

Sử dụng phương pháp quy nạp và dựa vào kết quả của bài toán 2.12 ta sẽ thu được (2).

Bài toán 2.14. Chứng minh rằng

$$(1 - x^2) T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Giải.

Với $x \in [-1; 1]$, ta sử dụng tính chất 1 của $T_n(x)$ và thay trực tiếp biểu thức của $T_n(x)$ vào điều kiện bài ra ta thấy đẳng thức đúng.

Với $|x| > 1$ thì sử dụng (1) và kết quả của bài toán 2.1 và các tính chất của hàm số sinh x và chx .

Bài toán 2.15. (Xem [2]) Chứng minh rằng với $m, n \in \mathbb{N}; n \geq m$ và $x \in \mathbb{R}$ thì

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x).$$

Giải.

Sử dụng định nghĩa và phương pháp quy nạp hoặc sử dụng các công thức

$$\cos(n+m)x + \cos(n-m)x = 2\cos nx \cos mx$$

và

$$\cosh(n+m)x + \cosh(n-m)x = 2\cosh nx \cosh mx.$$

Bài toán 2.16. (Xem [2]) Chứng minh rằng

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Giải.

Ta chứng minh (3) bằng phương pháp quy nạp theo m .

Với n cố định tùy ý và $m = 0$, ta có $T_0(T_n(x)) = 1 = T_{0n}(x)$ (theo định nghĩa $T_n(x)$). Vậy (3) đúng với $m = 0; n \in \mathbb{N}$.

Giả sử (3) đúng tới m . Khi đó

$$\begin{aligned} T_{m+1}(T_n(x)) &= 2T_n(x)T_m(T_n(x)) - T_{m-1}(T_n(x)) \\ &= 2T_n(x)T_{mn}(x) - T_{(m-1)n}(x) \\ &= T_{n+mn}(x) + T_{mn-n}(x) - T_{mn-n}(x) \\ &= T_{(m+1)n}(x) \end{aligned}$$

Vậy

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}.$$

2.3.3 Biểu diễn đa thức và nguyên hàm của nó

Tiếp theo, ta xét một số biểu diễn của đa thức thông qua các hàm đối xứng Viète. Ta nhắc lại kết quả sau định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai.

Định lý 2.9. (Xem [4]) Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Khi đó điều kiện cần và đủ để tồn tại α sao cho $af(\alpha) < 0$ là $\Delta > 0$ và $x_1 < \alpha < x_2$, trong đó $x_{1,2}$ là các nghiệm của $f(x)$.

Nhận xét rằng, định lý trên được mô tả thông qua bất đẳng thức (kết quả so sánh biệt thức Δ với 0). Định lý thuận và định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai cho ta phát biểu kết quả biểu diễn tam thức bậc hai theo các nghiệm của chúng.

Định lý 2.10 (Định lý Viète). (Xem [4]) Điều kiện cần và đủ để tam thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

có nghiệm thực là tồn tại các số $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = -x_1 - x_2 \\ \frac{c}{a} = x_1 x_2 \end{cases}$$

Tuy nhiên, ta cũng có thể phát biểu kết quả tương tự trong trường hợp khi ta còn chưa tường minh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai. Điều này rất có ý nghĩa khi xét các bài toán tam thức bậc hai tổng quát. Các định lý sau đây cho ta tiêu chuẩn nhận biết, thông qua biểu diễn hệ số, khi nào thì tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ có nghiệm. Không mất tính tổng quát, ta xét tam thức bậc hai dạng

$$f(x) = 3x^2 + 2bx + c. \tag{2.1}$$

Ta chứng minh một số kết quả quan trọng khác liên quan đến tam thức bậc hai $f(x)$ dạng (2.1).

Định lý 2.11. (Xem [4]) Với mọi tam thức bậc hai $f(x)$ có nghiệm thực đều tồn tại một nguyên hàm $F(x)$, là đa thức bậc ba, có ba nghiệm đều thực.

Chứng minh. Khi $f(x)$ có nghiệm kép, tức $f(x) = a(x - x_0)^2$, thì ta chỉ cần chọn nguyên hàm dưới dạng

$$F(x) = \frac{a}{3}(x - x_0)^3.$$

Khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt, tức

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_1 < x_2, \quad a \neq 0.$$

ta chọn nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 0.$$

Khi đó, rõ ràng hàm $F(x)$ có cực đại và cực tiểu lần lượt tại x_1 và x_2 và điểm uốn của đồ thị tương ứng là $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$. Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Định lý 2.12. (Xem [4]) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 + 2bx + c$ có nghiệm (thực) khi và chỉ khi các hệ số b, c có dạng

$$\begin{cases} b = \alpha + \beta + \gamma \\ c = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \end{cases} \quad (2.2)$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned} \Delta' &= b^2 - 3c = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Điều kiện cần. Giả sử phương trình bậc hai có nghiệm thực x_1, x_2 . Khi đó, tồn tại đa thức bậc ba có ba nghiệm thực, là nguyên hàm của $f(x)$, tức là

$$F(x) = (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)$$

Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

Tiếp theo ta tìm các tiêu chuẩn để nhận biết, thông qua biểu diễn các hệ số, khi nào thì một đa thức bậc ba tổng quát

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

có các nghiệm đều thực.

Không mất tính tổng quát, ta coi đa thức bậc ba tổng quát có dạng

$$f(x) = -4x^3 + 3ax^2 - 2bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Định lý 2.13. (Xem [4]) Đa thức bậc ba $f(x) = -4x^3 + 3ax^2 - 2bx + c$ với hệ số thực có các nghiệm đều thực khi và chỉ khi các hệ số a, b, c có dạng

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ b = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta \\ c = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta \end{cases} \quad (2.3)$$

Chứng minh.

Điều kiện đủ. Xét đa thức $F(x) = -x^4 + ax^3 - bx^2 + cx - m$ với m là hằng số tùy ý. Thay a, b, c từ công thức (2.3) vào biểu thức của $F(x)$, ta thu được

$$\begin{aligned} F(x) &= -x^4 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 \\ &\quad - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)x^2 \\ &\quad + (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)x - m. \end{aligned}$$

Chọn $m = \alpha\beta\gamma\delta$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} F(x) &= -x^4 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)x^2 \\ &\quad + (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)x - \alpha\beta\gamma\delta \\ &= -(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta). \end{aligned}$$

Suy ra $F(x)$ có bốn nghiệm thực là $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Theo định lý Rolle thì đạo hàm của nó là hàm $f(x) = F'(x)$ sẽ có ba nghiệm thực.

Điều kiện cần. Giả sử phương trình bậc ba có ba nghiệm thực x_1, x_2, x_3 .

Ta chỉ ra rằng tồn tại đa thức bậc bốn có bốn nghiệm thực là nguyên hàm của $f(x)$, tức là

$$F(x) = -(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta).$$

Thật vậy, ta xét ba trường hợp sau đây.

i) Nếu $f(x)$ có nghiệm bội bậc ba là x_0 thì $f(x)$ có dạng $f(x) = -4(x - x_0)^3$. Chọn $F(x) = -(x - x_0)^4$ thì ta sẽ có $\alpha = \beta = \gamma = \delta = x_0$.

ii) Nếu $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt thì phải có một nghiệm là nghiệm kép. Giả sử đó là nghiệm x_0 , nghiệm còn lại là x_1 . Không giảm tính tổng quát, ta giả sử $x_0 = 0$. Khi đó $f(x)$ có dạng

$$f(x) = -4x^2(x - x_1) = -4x^3 + 4x_1x^2.$$

Suy ra

$$F(x) = -x^4 + \frac{4}{3}x_1x^3 + m \quad (m \text{ là hằng số}).$$

Chọn $m = 0$ thì đa thức $F(x) = -x^3 \left(x - \frac{4}{3}x_1\right)$ sẽ có hai nghiệm phân biệt, trong đó, $x = 0$ là nghiệm bội ba, nghiệm còn lại là $x = \frac{4}{3}x_1$. Khi đó, ta thu được

$$\alpha = \beta = \gamma = 0, \quad \delta = \frac{4}{3}x_1.$$

Nhận xét rằng trong trường hợp tổng quát, nếu $f(x)$ có nghiệm kép (bội bậc hai) là x_0 , nghiệm còn lại là x_1 thì ta thu được $\alpha = \beta = \gamma = x_0, \quad \delta = x_0 + \frac{4}{3}x_1$.

iii) Nếu $f(x)$ có ba nghiệm phân biệt, thì không giảm tính tổng quát, ta có thể coi $f(x)$ có dạng

$$f(x) = -4(x + a)x(x - b), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

hay

$$f(x) = -4x^3 - 4(a - b)x^2 + 4abx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Khi đó

$$F(x) = -x^4 - \frac{4}{3}(a - b)x^3 + 2abx^2 + m.$$

Chọn $m = 0$ thì

$$\begin{aligned} F(x) &= -x^4 - \frac{4}{3}(a-b)x^3 + 2abx^2 + m \\ &= -x^2 \left[x^2 + \frac{4}{3}(a-b)x - 2ab \right]. \end{aligned}$$

Suy ra $F(x) = 0$ khi và chỉ khi

$$x^2 \left[x^2 + \frac{4}{3}(a-b)x - 2ab \right] = 0.$$

Nếu xảy ra trường hợp $x^2 = 0$ thì $x_1 = x_2 = 0$.

Nếu $x^2 + \frac{4}{3}(a-b)x - 2ab = 0$ thì do

$$\Delta' = \frac{2(2a^2 + 5ab + 2b^2)}{9} > 0$$

nên phương trình bậc hai đã cho có hai nghiệm thực phân biệt là x_3, x_4 và $F(x)$ sẽ có bốn nghiệm là

$$x_{1,2} = 0 \quad (\alpha = \beta = 0), \quad x_3 = \gamma, \quad x_4 = \delta.$$

Nhận xét rằng nếu đa thức có nghiệm $x = x_0$ bội k ($k > 1$) thì đạo hàm của nó có nghiệm $x = x_0$ bội bậc $k - 1$. Kết hợp với định lý Rolle, ta thu được kết quả quan trọng sau đây.

Định lý 2.14. (Xem [4]) Nếu đa thức $P(x)$ có k nghiệm thực thì đạo hàm của nó là đa thức $P'(x)$ có ít nhất $k - 1$ nghiệm thực.

Trong trường hợp đặc biệt, ta thu được kết quả có nhiều ứng dụng trong đại số sau đây.

Hệ quả 2.3. (Xem [4]) Nếu đa thức có các nghiệm đều thực thì đạo hàm của nó là đa thức cũng có các nghiệm đều thực.

Tuy nhiên, để ý rằng bài toán ngược, tức là bài toán xác định điều kiện cần để ứng với một đa thức có các nghiệm đều thực đã cho sẽ cho ta ít nhất một nguyên hàm cũng có các nghiệm đều thực là một bài toán phức tạp và khó. Các trường hợp riêng biệt ứng với các đa thức bậc thấp (bậc

nhất, bậc hai, bậc ba) đã được chúng ta khảo sát chi tiết ở trên. Tuy nhiên, từ hệ quả 2.3 ta có ngay điều kiện đủ có dạng rất đơn giản.

Giả sử cho $\bar{a}$ là bộ n số dương $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$). Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n) \\ &= x^n + E_1(\bar{a})x^{n-1} + E_2(\bar{a})x^{n-2} + \dots + E_n(\bar{a}) \end{aligned}$$

trong đó

$$E_1(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n a_i, \quad E_2(\bar{a}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \quad \dots, \quad E_n(\bar{a}) = a_1 a_2 \dots a_n. \quad (2.4)$$

Đặt $E_0(\bar{a}) = 1$. Ta gọi $E_r(\bar{a})$ ($r \in \{1, \dots, n\}$) là các hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp thứ r ($E_r(\bar{a})$ là tổng của tất cả các tích r số khác nhau của bộ số $\bar{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$) hay còn gọi là hàm đối xứng Viète bậc r .

Định lý 2.15. (Xem [4]) Đa thức

$$f(x) = (n+1)x^n - na_1x^{n-1} + (n-1)a_2x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n$$

với hệ số $a_1, a_2, \dots, a_n$ có dạng

$$\begin{cases} a_1 = E_1(\bar{x}) \\ a_2 = E_2(\bar{x}) \\ \dots \\ a_n = E_{n+1}(\bar{x}), \end{cases} \quad (2.5)$$

trong đó $E_k(\bar{x})$ là các hàm đối xứng Viète bậc k theo các biến thực $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ luôn luôn có các nghiệm đều thực.

Chứng minh. Xét đa thức

$$F(x) = x^{n+1} - a_1x^n + \dots + (-1)^n a_nx + (-1)^{n+1} a_{n+1},$$

trong đó các $a_1, a_2, \dots, a_n$ xác định theo (2.5) và

$$a_{n+1} = x_1 x_2 \dots x_{n+1}.$$

Khi đó, theo định lý Viète, ta có

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}).$$

Từ $F'(x) = f(x)$, ta có ngay điều phải chứng minh.

Tiếp theo ta xét bài toán ngược cho trường hợp đa thức bậc 4 khi nó có các nghiệm đều thực dạng

$$f(x) = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), \quad x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4.$$

Định lý 2.16. (Xem [4]) Giả sử đa thức

$$f(x) = 5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), \quad x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4.$$

có các nguyên hàm $F_0(x)$ là đa thức bậc 5 với các hệ số thực

$$F_0(x) = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x.$$

Khi đó, điều kiện cần và đủ để tồn tại hằng số thực c sao cho nguyên hàm

$$F(x) = F_0(x) - c$$

là đa thức có các nghiệm đều thực là

$$F_0(x_1) \geq F_0(x_4). \quad (2.6)$$

Chứng minh. Ta xét các trường hợp theo sự phân bố các nghiệm.

Khi $f(x)$ có 4 nghiệm trùng nhau thì $f(x) = 5(x - x_1)^4$ và hiển nhiên (2.6) là thỏa mãn. Do $F_0(x) = (x - x_1)^5$ nên chỉ cần chọn nguyên hàm ứng với $c = 0$. Nhận xét rằng $c = 0$ là giá trị duy nhất thỏa mãn điều kiện của định lý.

Khi $f(x)$ có 2 nghiệm trùng nhau, chẳng hạn $x_1 = x_2 < x_3 < x_4$ ($x_1 < x_2 < x_3 = x_4$) và nếu xảy ra $F_0(x_1) < F_0(x_2)$ thì hiển nhiên điều kiện (2.6) là không thỏa mãn và không tồn tại c để đa thức $F(x)$ tương ứng có 5 nghiệm thực. Khi $F_0(x_1) \geq F_0(x_4)$ thì ta chọn $c = F_0(x_1)$, ta thu được đa thức $F(x)$ tương ứng có 5 nghiệm thực. Nếu xảy ra $x_1 < x_2 = x_3 < x_4$ thì chọn $c = F_0(x_2)$, ta cũng thu được đa thức $F(x)$ có 5 nghiệm thực.

Khi $f(x)$ có hai cặp nghiệm trùng nhau $x_1 = x_2 < x_3 = x_4$, thì $f(x) = 5(x - x_1)^2(x - x_3)^2$ và $F_0(x)$ là hàm đồng biến và đường thẳng đi qua các điểm dừng cắt đồ thị của đa thức $F_0(x)$ tại 1 điểm (bội bậc 3), tức là $F(x)$ có 3 nghiệm thực (kể cả bội). Do đó, ứng với mọi c , các nguyên hàm tương ứng $F(x)$ đều có không quá 3 nghiệm thực.

Khi $f(x)$ có ba nghiệm trùng nhau, chẳng hạn $x_1 = x_2 = x_3 < x_4$

$(x_1 < x_2 = x_3 = x_4)$. Không giảm tính tổng quát, ta coi $x_1 = 0$, tức là $f(x) = 5x^3(x - x_4)$. Khi đó

$$F_0(x) = x^5 - \frac{5}{4}x_4x^4.$$

Do đó $F_0(x)$ có 5 nghiệm thực. Vậy ta chỉ cần chọn $c = 0$, thì đa thức $F(x)$ tương ứng sẽ có đúng 5 nghiệm thực.

Cuối cùng ta xét trường hợp khi các nghiệm của $f(x)$ là phân biệt, tức là $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, thì nguyên hàm đạt cực đại tại $x = x_1$ và $x = x_3$, đạt cực tiểu tại $x = x_2$ và $x = x_4$. Nếu điều kiện (2.6) được thỏa mãn thì ta có

$$F_0(x_1) \geq \max\{F_0(x_2), F_0(x_4)\}, \quad F_0(x_3) \geq \max\{F_0(x_2), F_0(x_4)\}.$$

Suy ra

$$\min\{F_0(x_1), F_0(x_3)\} \geq \max\{F_0(x_2), F_0(x_4)\}.$$

Vậy ta chỉ cần chọn c sao cho

$$c \in (\max\{F_0(x_2), F_0(x_4)\}, \min\{F_0(x_1), F_0(x_3)\})$$

, thì nguyên hàm $F(x)$ tương ứng sẽ có 5 nghiệm thực.

Tư tưởng chứng minh định lý 2.16 cho phép ta phát biểu định lý sau.

Định lý 2.17. (Xem [4]) Giả sử đa thức bậc n ($n \geq 4$) có các nghiệm đều thực

$$f(x) = (n+1)(-1)^{n+1}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n), \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

và có nguyên hàm $F_0(x)$ là đa thức bậc $n+1$ với hệ số thực

$$F_0(x) = (-1)^{n+1}x^{n+1} + a_1x^n + \dots + a_nx, \quad F_0(0) = 0.$$

Khi đó, điều kiện cần và đủ để tồn tại hằng số thực c sao cho nguyên hàm

$$F_c(x) = F_0(x) - c$$

là một đa thức có các nghiệm đều thực là điều kiện sau đây được thỏa mãn :

$$\min\{F_0(x_1), F_0(x_3), \dots\} \geq \max\{F_0(x_1), F_0(x_3), \dots\}.$$

Chương 3

Một số áp dụng

3.1 Ứng dụng của đa thức trong tính toán

Bài 3.1. (Xem [2]) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc n với các hệ số nguyên không âm không lớn hơn 8 và $P(9) = 32078$.

Giải.

Giả sử

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Khi đó theo giả thiết thì

$$P(9) = a_n 9^n + a_{n-1} 9^{n-1} + \cdots + a_0 = 32078.$$

Do $0 \leq a_k \leq 8$ ($0 \leq k \leq n$) và $a_n \neq 0$ nên a_0 là số dư của phép chia 32078 cho 9, tức $a_0 = 2$. Như vậy

$$a_1 + 9a_2 + \cdots + 9^{n-1}a_n = 3564.$$

Lập luận tương tự ta nhận được a_1 là số dư của phép chia 3564 cho 9, tức $a_1 = 0$ và

$$a_2 + 9a_3 + \cdots + 9^{n-2}a_n = 396.$$

Tương tự, ta nhận được a_2 là số dư của phép chia 396 cho 9, tức $a_2 = 0$ và

$$a_3 + \cdots + 9^{n-3}a_n = 44.$$

Tiếp theo, lập luận tương tự ta nhận được $a_3 = 8$ và $a_4 = 4$. Vậy đa thức cần tìm có dạng

$$P(x) = 4x^4 + 8x^3 + 2.$$

Bài 3.2. (Vô định Mỹ - 1975) Đa thức $P(x)$ bậc n thỏa mãn các đẳng thức $P(k) = \frac{1}{C_{n+1}^k}$, với $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Tính $P(n+1)$.

Giải.

Với $1 \leq i \leq n$, áp dụng công thức nội suy Lagrange, ta có

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_{n+1}^k} \prod_{i \neq k} \frac{x-i}{k-i} = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{i \neq k} (x-i)}{C_{n+1}^k (-1)^{n-k} (n-k)! k!} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n+1-k}{(n+1)!} \prod_{i \neq k} (x-i). \end{aligned}$$

Suy ra

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n+1-k}{(n+1)!} \prod_{i \neq k} (n+1-i) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}.$$

Do đó $P(n+1) = 0$ nếu n lẻ và $P(n+1) = 1$ nếu n chẵn.

Bài 3.3. (Xem [5]) Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn $P(x) + P'(x) = x^3$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho phương trình

$$P(x) + ce^{-x} = 0$$

có 4 nghiệm thực.

Giải.

Từ giả thiết $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $P(x) + P'(x) = x^3$ suy ra đa thức $P(x)$ có dạng

$$P(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\rightarrow P'(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1.$$

$$\rightarrow P(x) + P'(x) = x^3 + (3 + a_2)x^2 + (2a_2 + a_1)x + (a_1 + a_0).$$

Mặt khác, $P(x) + \alpha P'(x) = x^3$. Đồng nhất hệ số ta thu được

$$\begin{cases} 3 + a_2 = 0 \\ 2a_2 + a_1 = 0 \\ a_1 + a_0 = 0. \end{cases}$$

Vậy các hệ số của $P(x)$ là :

$$\begin{cases} a_2 = -3 \\ a_1 = 6 \\ a_0 = -6. \end{cases}$$

Khi đó, $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$. Nhận xét rằng, với mọi số thực c và

$$P_c(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + ce^{-x},$$

ta đều có

$$P_c(x) + P'_c(x) = x^3.$$

Vậy nên nếu chọn $c = 6$ thì hàm số

$$P_6(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + 6e^{-x},$$

sẽ có tính chất sau :

$$P_6(0) = 0$$

$$P'_6(x) = 3x^2 - 6x + 6 - 6e^{-x}, \quad P'_6(0) = 0,$$

$$P''_6(x) = 6x - 6 + 6e^{-x}, \quad P''_6(0) = 0,$$

$$P^{(3)}_6(x) = 6 - 6e^{-x}, \quad P^{(3)}_6(0) = 0,$$

$$P^{(4)}_6(x) = 6e^{-x}, \quad P^{(4)}_6(0) = 6 \neq 0.$$

Suy ra ứng với $c = 6$ phương trình $P_6(x) = 0$ nhận $x = 0$ là nghiệm bội bậc 4, hay phương trình

$$P(x) + 6e^{-x} = 0$$

có 4 nghiệm thực.

Bài 3.4. (Xem [6]) Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau :

$$x_1 = 7, x_2 = 50, x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1975 \quad (n \geq 2)$$

Chứng minh rằng $x_{1996} \leq 1997$.

Giải.

Xét dãy $\{y_n\}$ với $y_1 = 7, y_2 = 50$ và

$$y_{n+1} = 4y_n + 5y_{n-1} + 22, \quad n \geq 2.$$

Dễ thấy $y_n \equiv x_n \pmod{1997}$. Do đó chỉ cần chứng minh

$$y_{1996} \equiv 0 \pmod{1997}.$$

Đặt $z_n = 4y_n + 11$. Suy ra $z_1 = 39$, $z_2 = 211$. Nhận xét rằng

$$z_{n+1} = 4y_{n+1} + 11 = 16y_n + 20y_{n-1} + 99 = 4z_n + 20y_{n-1} + 55. \quad (3.1)$$

Ta lại có $z_{n-1} = 4y_{n-1} + 11$ suy ra $20y_{n-1} = 5z_{n-1} - 55$. Thế vào (3.1), ta được

$$z_{n+1} = 4z_n + 5z_{n-1}.$$

Suy ra

$$z_{n+1} - 4z_n - 5z_{n-1} = 0. \quad (3.2)$$

Phương trình đặc trưng của (3.2) là $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ có hai nghiệm $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. Nghiệm tổng quát của (3.2) là

$$z_n = (-1)^n \alpha + 5^n \beta.$$

Ta có

$$\begin{cases} z_1 = -\alpha + 5\beta = 39, \\ z_2 = \alpha + 25\beta = 211, \end{cases}$$

nên $\alpha = \frac{8}{3}$, $\beta = \frac{25}{3}$. Do đó, ta nhận được

$$z_n = \frac{8}{3} \cdot (-1)^n + \frac{25}{3} \cdot 5^n. \quad (3.3)$$

Từ (3.3) suy ra

$$z_{1996} = \frac{8 + 25 \cdot 5^{1996}}{3}.$$

Ta cần chứng minh

$$z_{1996} \equiv 11 \pmod{1997}.$$

Do

$$\begin{cases} 5^{1996} - 1 : 1997 \\ 5^{1996} - 1 : 3 \end{cases}$$

nên $5^{1996} - 1 : 3.1997$. Từ đó, ta có $5^{1996} = 3n.1997 + 1$, và khi đó,

$$\begin{aligned} z_{1996} &= \frac{8}{3} + \frac{25(3n.1997 + 1)}{3} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{25}{3} + 25.n.1997 \\ &= 25.n.1997 + 11. \end{aligned}$$

Vậy, $z_{1996} \equiv 11 \pmod{1997}$.

3.2 Ước lượng đa thức

Ta kí hiệu $P_s(x)$ là đa thức bậc $\leq s$ dạng sau

$$P_s(x) = a_0x^s + a_1x^{s-1} + \cdots + a_{s-1}x + a_s. \quad (3.4)$$

Bài 3.5. (Xem [5]) Cho nhị thức $f(x) = ax + b$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2}|ax+b| \leq 1, \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng khi đó ta luôn có

$$|a| \leq 2.$$

Giải.

Đặt $x = \cos t$, từ giả thiết ta có $|\sin t(a \cos t + b)| \leq 1, \quad \forall t$, do đó ứng với $t = \frac{\pi}{4}$, ta có

$$\left| a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right| \leq 1$$

Tương tự, ứng với $t = \frac{3\pi}{4}$, ta có

$$\left| -a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right| \leq 1$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} |a| &= \left| a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} - \left(-a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right) \right| \\ &\leq \left| a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right| + \left| -a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right| \leq 2, \end{aligned}$$

điều phải chứng minh.

Nhận xét 3.1. Nếu nhị thức $f(x) = ax + b$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2} |ax + b| \leq 1, \quad \forall x \in [-1; 1].$$

thì

$$|f(x)| \leq 2.$$

Bài 3.6. (Xem [5]) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2} |ax^2 + bx + c| \leq 1, \quad \forall x \in [-1; 1]$$

Chứng minh rằng

$$|a| \leq 4.$$

Giải.

Đặt $x = \cos t$, từ giả thiết ta có

$$|\sin t (a \cos^2 t + b \cos t + c)| \leq 1, \quad \forall t.$$

Suy ra

$$\left| \sin \frac{\pi}{6} \left(a \cos^2 \frac{\pi}{6} + b \cos \frac{\pi}{6} + c \right) \right| \leq 1,$$

$$\left| \sin \frac{\pi}{2} \left(a \cos^2 \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} + c \right) \right| \leq 1,$$

$$\left| \sin \frac{5\pi}{6} \left(a \cos^2 \frac{5\pi}{6} + b \cos \frac{5\pi}{6} + c \right) \right| \leq 1.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned} |a| &= \frac{4}{3} \left| \sin \frac{\pi}{6} \left(a \cos^2 \frac{\pi}{6} + b \cos \frac{\pi}{6} + c \right) \right| \\ &\quad - \left| \sin \frac{\pi}{2} \left(a \cos^2 \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} + c \right) \right| + \left| \sin \frac{5\pi}{6} \left(a \cos^2 \frac{5\pi}{6} + b \cos \frac{5\pi}{6} + c \right) \right|. \end{aligned}$$

Do đó

$$|a| \leq \frac{4}{3} \cdot 3 = 4.$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét : Nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2} |ax^2 + bx + c| \leq 1, \quad \forall x \in [-1; 1]$$

thì

$$|f(x)| \leq 3.$$

Bài 3.7. (Xem [4]) Cho đa thức $P_{n-1}(x)$ bậc $\leq n-1$ có hệ số bậc cao nhất a_0 , thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2} |P_{n-1}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng khi đó

$$|P_{n-1}(x)| \leq n, \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Giải.

Ta viết đa thức đã cho dưới dạng nội suy Lagrange theo các nút nội suy $x_j = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi$ là các nghiệm của đa thức Chebyshev $T_n(x)$:

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sqrt{1-x_j^2} P_{n-1}(x_j) \frac{T_n(x)}{x-x_j}.$$

Do hàm số $\cos x$ nghịch biến trong $(0; \pi)$ nên $-1 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_2 < x_1 < 1$. Nếu $x_1 < x < 1$ thì

$$P_{n-1}(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| \sqrt{1-x_j^2} P_{n-1}(x_j) \right| \left| \frac{T_n(x)}{x-x_j} \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n \frac{T_n(x)}{(x-x_j)} \right| \quad (3.5)$$

(do $x-x_j > 0$ và $T_n(x)$ có dấu không đổi trên $(x_1; 1]$).

Mặt khác thì

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{j=1}^n (x-x_j),$$

nên ta có

$$T'_n = 2^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^n (x-x_j)}{(x-x_k)} = \sum_{j=1}^n \frac{T_n(x)}{x-x_j} \quad (3.6)$$

Mà

$$\frac{|T_n(x)|}{n} = |U_n(x)| \leq n,$$

nên từ (3.5) và (3.6) suy ra

$$|P_{n-1}(x)| \leq n, \quad \forall x \in (x_1; 1]$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$|P_{n-1}(x)| \leq n, \quad \forall x \in [-1; x_n)$$

Xét $x_n \leq x \leq x_1$. Khi đó ta có

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-x_1^2} = \sin(\arccos x_1) = \sin \frac{\pi}{2n}$$

Do

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$$

nên

$$\sin \frac{\pi}{2n} \geq \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{n}$$

và

$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow |P_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n.$$

Tóm lại, ta đã chứng minh được rằng $|P_{n-1}(x)| \leq n, \quad \forall x \in [-1; 1]$.

Bài 3.8. (Xem [2]) Cho đa thức lượng giác

$$P(t) = a_1 \sin t + a_2 \sin 2t + \cdots + a_n \sin nt$$

thỏa mãn điều kiện

$$|P(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}.$$

Chứng minh rằng

$$\left| \frac{P(t)}{\sin t} \right| \leq n, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}.$$

Giải.

Nhận xét rằng $\frac{P(t)}{\sin t} = P_{n-1}(\cos t)$ với $P_{n-1}(x)$ là đa thức dạng (3.4).

Đặt $\cos t = x$. Khi đó $|x| \leq 1$ và

$$P(t) = \sin t P_{n-1}(\cos t) = \sqrt{1-x^2} P_{n-1}(x).$$

Nhận xét rằng $P(x)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán nên

$$|P_{n-1}(x)| \leq n, \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Do đó

$$\left| \frac{P(t)}{\sin t} \right| \leq n, \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots\}.$$

Bài 3.9. (Xem [2]) Cho đa thức lượng giác

$$P(x) = \sum_{j=0}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

thỏa mãn điều kiện $|P(x)| \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $|P'(x)| \leq n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải.

Cho trước x_0 tùy ý. Do

$$\cos(x_0 - x) - \cos(x_0 + x) = 2 \sin x_0 \sin x,$$

$$\sin(x_0 + x) - \sin(x_0 - x) = 2 \cos x_0 \sin x$$

nên

$$g(x) = \frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2} = \sum_{j=0}^n c_j \sin jx$$

Suy ra $g'(x) = \frac{P'(x_0 + x) - P'(x_0 - x)}{2}$ và $g'(0) = P'(x_0)$.

Ta chứng minh rằng $|g'(0)| \leq n$. Thật vậy, $g(x)$ là đa thức lượng giác chứa thuần sin như trong bài toán (3.8) và

$$|g(x)| = \left| \frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2} \right| \leq \frac{|P(x_0 + x)| + |P(x_0 - x)|}{2} \leq 1$$

nên theo kết quả của bài toán (3.8) thì

$$\left| \frac{g(x)}{\sin x} \right| \leq n, \quad \forall x \notin \{\dots, -2\pi, -\pi, 2\pi, \dots\}$$

Nhưng

$$g(0) = 0 \text{ và } \left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin x} \right| \leq n$$

nên khi $x \rightarrow 0$ thì do $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \rightarrow g'(0)$ và $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$ ta thu được $|g'(0)| \leq n$.

Từ đó ta có $|P(x_0)| \leq n$. Nhưng x_0 được chọn tùy ý nên suy ra $|P(x)| \leq n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.10. (Định lí Bernstein - Markov) (Xem [2])

Cho đa thức

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

thỏa mãn điều kiện $|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Chứng minh rằng khi đó

$$|P'_n(x)| \leq n^2, \forall x \in [-1; 1].$$

Giải.

Đặt $x = \cos \alpha$. Khi đó theo giả thiết thì $|P_n(\cos \alpha)| \leq 1$. Mà $P_n(\cos \alpha)$ có dạng

$$P_n(\cos \alpha) = \sum_{j=0}^n (a_j \cos j\alpha + b_j \sin j\alpha)$$

nên ta có thể áp dụng kết quả của bài toán (3.9). Ta được

$$|\sin \alpha P'_n(\cos \alpha)| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1 - x^2} \left| \frac{P'_n(x)}{n} \right| \leq 1$$

Cũng theo bài toán (3.8) thì ta có $\left| \frac{P'_n(x)}{n} \right| \leq n$. Suy ra

$$|P'_n(x)| \leq n^2.$$

Chú ý.

Dựa vào kết quả của định lí Bernstein - Markov, sau khi áp dụng liên tiếp kết quả của định lí này, ta sẽ thu được kết quả sau :

Nếu $P_n(x) \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ thì

$$\left| P^{(k)}(x) \right| \leq [n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)]^2, \forall x \in [-1; 1]$$

Bài 3.11. (Xem [4]) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực ≥ 0 và không đồng thời bằng 0.

1) Chứng minh rằng phương trình

$$x^n - a_1 x^{n-1} - \dots - a_{n-1} x - a_n = 0 \quad (3.7)$$

có đúng một nghiệm duy nhất.

2) Giả sử R là nghiệm dương của phương trình (3.7) và

$$A = \sum_{j=1}^n a_j; \quad B = \sum_{j=1}^n j a_j$$

Chứng minh rằng khi đó $A^A \leq R^B$.

Giải.

1) Do $x > 0$ nên

$$(3.7) \Leftrightarrow 1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} = f(x)$$

Nhận xét rằng $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty)$ nên tồn tại duy nhất $R > 0$ sao cho $f(R) = 1$.

2) Đặt $c_j = \frac{a_j}{A}$. Suy ra $c_j > 0$ và $\sum_{j=1}^n c_j = 1$. Do hàm số $y = -\ln x$ lõm trong khoảng $(0; +\infty)$ nên theo bất đẳng thức Jensen thì

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j \left[-\ln \frac{A}{R^j} \right] &\geq -\ln \left(\sum_{j=1}^n c_j \frac{A}{R^j} \right) = -\ln \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{R^j} \right) \\ &= -\ln f(R) = -\ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^n (c_j \ln R^j - c_j \ln A) \geq 0$$

và

$$(\ln A) \sum_{j=1}^n c_j \leq (\ln R) \sum_{j=1}^n j c_j$$

hay

$$\frac{1}{A} \sum_{j=1}^n a_j (\ln A) \leq \frac{1}{A} \sum_{j=1}^n j a_j (\ln R) \quad \left(\text{do } c_j = \frac{a_j}{A}; A > 0 \right)$$

Vậy

$$\ln(A^A) \leq \ln(R^B) \Rightarrow A^A \leq R^B.$$

Bài 3.12. (Xem [5]) Cho dãy các đa thức $\{P_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) xác định như sau

$$P_0(x) = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2} [x - P_n^2(x)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Chứng minh rằng với mọi $x \in [0; 1]$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta luôn có

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}.$$

Giải.

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng

$$0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \quad (3.8)$$

Thật vậy, với $n = 1$ thì

$$P_1(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow 0 \leq P_1(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0; 1].$$

Giả sử (3.8) đúng đến n . Xét hàm số

$$f(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2), \quad t \in [0; 1].$$

Ta có $f'(t) = 1 - t \geq 0$. Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0; 1]$.

Mặt khác thì

$$0 \leq t = P_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$$

nên

$$P_{n+1}(x) = f(P_n(x)) \leq f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}.$$

Do

$$P_n^2(x) \leq x \Leftrightarrow x - P_n^2(x) \geq 0$$

nên

$$P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0.$$

Vậy (3.8) đúng với $n + 1$.

Ta chứng minh

$$\sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x} - P_n(x) &= [\sqrt{x} - P_{n-1}(x)] \left[1 - \frac{\sqrt{x} + P_{n-1}(x)}{2} \right] \leq \\
 &\leq [\sqrt{x} - P_{n-1}(x)] \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right) \quad (\text{do } P_{n-1}(x) \geq 0) \\
 &\leq [\sqrt{x} - P_{n-2}(x)] \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\leq [\sqrt{x} - P_0(x)] \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^n = \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^n.
 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x} \in [0; 1]$. Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Cauchy) thì

$$\begin{aligned}
 t \left(1 - \frac{t}{2} \right)^n &= \frac{2}{n} \left[\frac{n}{2} t \left(1 - \frac{t}{2} \right)^n \right] \leq \frac{2}{n} \left[\frac{\frac{n}{2} t + n \left(1 - \frac{t}{2} \right)}{n+1} \right]^{n+1} = \\
 &= \frac{2}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n < \frac{2}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Bài 3.13. (Xem [5]) Cho đa thức $f(x)$ với $\deg f = n$ và $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) \geq 0 \tag{3.9}$$

Giải.

Đặt

$$\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) = g(x)$$

Suy ra

$$g(x) = f(x) + g'(x)$$

Do $f(x) \geq 0$ với mọi x nên suy ra n chẵn và hệ số bậc cao nhất của $f(x)$ là dương. Nếu $f(x) = \text{const}$ thì $g(x) \equiv 0$ và (3.9) đúng. Nếu $n \geq 1$ thì suy ra $\deg f = \deg g$ và các hệ số chính của $f(x)$ và $g(x)$ bằng nhau. Suy ra $\deg g(x)$ là chẵn và hệ số bậc cao nhất của $g(x)$ dương. Vậy tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ để $g(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x)$. Nhưng $g(x_0) = f(x_0) + g'(x_0)$ và $g'(x_0) = 0$, nên

$$\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = g(x_0) = f(x_0) \geq 0$$

Từ đó suy ra $g(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.14. (Xem [5]) Cho đa thức $P(x)$ bậc $\leq 2n$ thỏa mãn điều kiện

$$|P(k)| \leq 1, \quad k = -n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n.$$

Chứng minh rằng

$$|P(x)| \leq 2^n, \quad \forall x \in [-n; n].$$

Giải.

Theo công thức nội suy Lagrange thì

$$P(x) = \sum_{k=-n}^n P(k) \prod_{j \neq k} \frac{x-j}{k-j}.$$

Vì $|P(k)| \leq 1$ với $k \in \{-n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n\}$ nên

$$|P(x)| \leq \sum_{k=-n}^n |P(k)| \prod_{j \neq k} \left| \frac{x-j}{k-j} \right| \leq \sum_{k=-n}^n \prod_{j \neq k} \left| \frac{x-j}{k-j} \right|$$

Nhận xét rằng với $x \in [-n; n]$ thì

$$\prod_{j \neq k} |x-j| \leq (2n)!$$

và vì vậy

$$\prod_{j \neq k} \left| \frac{x-j}{k-j} \right| \leq \frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!}$$

Do đó

$$|P(x)| \leq \sum_{k=-n}^n \frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{(k+n)!(n-k)!} = 2^{2n}.$$

3.3 Một số phương trình và bất phương trình có cách giải đặc thù

Bài 3.15. (Xem [1]) Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm với mọi b :

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

Giải.

Giả sử $\exists a$ để hệ (3.10) có nghiệm $(x; y)$ với mọi b . Khi đó phương trình thứ hai của (3.10), coi là phương trình ẩn b , phải có vô số nghiệm. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} xy = 0 \\ a + x^2y = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Ngược lại, khi $a = 1$, hệ (3.10) có dạng :

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^1 + (b^2 + 1)^y = 2 \\ 1 + bxy + x^2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (b^2 + 1)^y = 1 \\ xy(b + x) = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này có nghiệm $(x; y) = (0; 0)$ với mọi b . Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.16. (Xem [1]) Tìm m sao cho $\forall x \in [-4; 6]$ đều là nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m. \quad (3.11)$$

Giải.

Giả sử $\forall x \in [-4; 6]$ đều là nghiệm của (3.11). Khi đó $x = 1 (\in [-4; 6])$ cũng là nghiệm của (3.11). Tức là

$$\sqrt{(4+1)(6-1)} \leq 1^2 - 2 \cdot 1 + m \Rightarrow m \geq 6.$$

Ngược lại, với $m \geq 6$ ta có Với $x \in [-4; 6]$ thì $x + 4 \geq 0$; $6 - x \geq 0$ nên theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq \frac{4+x+6-x}{2} = 5. \quad (3.12)$$

Còn

$$x^2 - 2x + m = (x - 1)^2 + m - 1 \geq 0 + 6 - 1 = 5 \quad (3.13)$$

với mọi $x \in [-4; 6]$. Từ (3.12) và (3.13) ta có Với $m \geq 6$ thì $\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m$ với mọi $x \in [-4; 6]$.
Vậy $m \geq 6$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3.17. (Xem [1]) Giải và biện luận theo a, b bất phương trình :

$$\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} > a + b \quad (3.14)$$

Giải.

Nghiệm của (3.14) là hoành độ các điểm thuộc phần đường thẳng $y = a + b (\perp \angle y'Oy)$ nằm ở phía dưới đồ thị hàm số :

$$y = \sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} := f(x).$$

$$f(x) \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - x \geq 0 \\ b^2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a^2 \\ x \leq b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \min \{a^2; b^2\} := m \Leftrightarrow x \in [m; +\infty).$$

$f(x)$ liên tục trên $[m; +\infty)$ và có

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{a^2 - x}} + \frac{-1}{2\sqrt{b^2 - x}} < 0, \quad \forall x \in (m; +\infty)$$

nên $f(x)$ là hàm số nghịch biến. Vì vậy, với mọi $x \in [m; +\infty)$ ta có

$$f(x) \leq f(m) = \sqrt{|a^2 - b^2|}.$$

Ngoài ra, do $f(x)$ liên tục trên $[m; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên khi $a + b > f(m)$, phương trình

$$f(x) = a + b \quad (3.15)$$

có nghiệm duy nhất. Mà với $x \in [m; +\infty)$, $a + b > f(m)$, ta có

$$\begin{aligned}
 (3.15) &\Leftrightarrow a^2 - x + b^2 - x + 2\sqrt{(a^2 - x)(b^2 - x)} = (a + b)^2 \\
 &\left(\text{Do } a + b > f(m) = \sqrt{|a^2 - b^2|} \geq 0 \Rightarrow a + b > 0 \right) \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 - x)(b^2 - x)} = x + ab \\
 &\Rightarrow (a^2 - x)(b^2 - x) = (x + ab)^2 = x^2 + 2abx + a^2b^2 \\
 &\Leftrightarrow (a + b)^2 x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \left(\text{Do } (a + b)^2 > 0 \right).
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình (3.15) có nghiệm duy nhất $x = 0$. Từ nhận xét trên ta được kết quả sau :

+) Khi $a+b < \sqrt{|a^2 - b^2|}$, bất phương trình có nghiệm là : $x \leq \min \{a^2; b^2\}$.

+) Khi $a+b = \sqrt{|a^2 - b^2|}$, bất phương trình có nghiệm là : $x < \min \{a^2; b^2\}$.

+) Khi $a + b > \sqrt{|a^2 - b^2|}$, bất phương trình có nghiệm là : $x < 0$.

Bài 3.18. (Xem [6]) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$P(a) = a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0 \quad (3.16)$$

Giải.

Do vai trò của a, b, c là như nhau nên không giảm tính tổng quát, có thể giả sử $a = \max \{a; b; c\}$.

Đặt $P(a) = a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a)$, thế thì $P(a)$ là đa thức bậc 3 với hệ số chính là b . Ta có $P(b) = bc(b - c)^2 = P(c)$ nên đa thức bậc ba $Q(a) = P(a) - bc(b - c)^2$ có hai nghiệm $a = b, a = c$. Theo định lí Bezout, ta có

$$Q(a) = b(a - b)(a - c)(a - x) \Rightarrow P(a) = b(a - b)(a - c)(a - x) + bc(b - c)^2 \quad (3.17)$$

So sánh số hạng tự do ở hai vế của (3.17) ta được

$$-b^2cx + bc(b - c)^2 = b^2c(b - c) \Leftrightarrow x = \frac{c(c - b)}{b}.$$

Thay vào (3.17) và rút gọn ta được

$$P(a) = a(b+c-a)(b-c)^2 + b(a-b)(a-c)(a+b-c).$$

Từ đó thấy ngay $P(a) \geq 0$. Đó chính là điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Bài 3.19. (Xem [3]) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2.$$

Giải.

Từ hằng đẳng thức

$$\begin{aligned} \sin^2 C + \cos^2 C = 1 &\Rightarrow \left(\frac{2S}{ab}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ba}\right)^2 = 1 \\ &\Rightarrow 16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4a^2b^2 \end{aligned}$$

suy ra

$$16S^2 + a^4 + b^4 + c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2. \quad (3.18)$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \leq a^4 + b^4 + b^4 + c^4 + c^4 + a^4 = 2(a^4 + b^4 + c^4). \quad (3.19)$$

Từ (3.18) và (3.19) ta được

$$16S^2 + a^4 + b^4 + c^4 \leq 2(a^4 + b^4 + c^4) \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2 \text{ (đpcm)}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Bài 3.20. (Xem [6]) Cho hàm số $f(x) := x^3 + \frac{x}{2}$. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của hàm số $f(x)$. Giải phương trình

$$f(x) = g(x) \quad (3.20)$$

Giải.

Do hàm số $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số đồng biến nên tồn tại hàm ngược $g(x)$ thỏa mãn

$$f(g(x)) = x = g(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét rằng nếu $x = a$ là nghiệm của (3.20) thì

$$f(a) = g(a) \Rightarrow f(f(a)) = f(g(a)) \Rightarrow f(f(a)) = a$$

$\Rightarrow x = a$ là nghiệm của phương trình

$$f(f(x)) = x. \quad (3.21)$$

Ngược lại, nếu $x = a$ là nghiệm của (3.21) thì

$$f(f(a)) = a = f(g(a)) \Rightarrow f(a) = g(a) \text{ (do } f(x) \text{ là hàm số đồng biến).}$$

Vậy $x = a$ là nghiệm của phương trình (3.20). Nói cách khác :

$$(3.20) \Leftrightarrow f(f(x)) = x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x \text{ (do } f(x) \text{ là hàm số đồng biến).}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{x}{2} = x$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm

$$T = \left\{ 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Bài 3.21. (Xem [1]) Giải phương trình

$$64x^7 - 112x^5 - 8x^4 + 56x^3 + 8x^2 - 7x - 1 = 0. \quad (3.22)$$

Giải.

Ta có

$$(3.22) \Leftrightarrow 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Trước hết ta tìm các nghiệm thuộc $[-1; 1]$ của (3.22). Do $x \in [-1; 1]$ nên có thể đặt $x := \cos t$ với $t \in [0; \pi]$. Khi đó (3.22) trở thành

$$\cos 7t = \cos 4t \quad (3.23)$$

$$(3.23) \Leftrightarrow \begin{cases} 7t = 4t + 2k\pi \\ 7t = -4t + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2k\pi}{3} \\ t = \frac{2n\pi}{11} \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

Vì $t \in [0; \pi]$ nên ta được $k \in \{0; 1\}$; $n \in \overline{0..5}$ và ta được tập nghiệm $t \in [0; \pi]$ của (3.23) là

$$N(t) = \left\{ 0; \frac{2\pi}{11}; \frac{4\pi}{11}; \frac{6\pi}{11}; \frac{2\pi}{3}; \frac{8\pi}{11}; \frac{10\pi}{11} \right\}.$$

Mà hàm số $\cos t$ nghịch biến trên $[0; \pi]$ và các nghiệm $t \in N(t)$ là đôi một khác nhau nên tập nghiệm tương ứng $x \in [-1; 1]$ của (3.22) :

$$N(x) = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\cos \frac{2n\pi}{11} \mid n \in \overline{1..5}\right\}$$

cũng gồm các nghiệm đôi một khác nhau. Nói cách khác phương trình (3.22) có ít nhất 7 nghiệm phân biệt là $x \in N(x)$. Nhưng (3.22) là phương trình bậc 7 nên nó không quá 7 nghiệm thực phân biệt. Vậy (3.22) có đúng 7 nghiệm $x \in N(x)$ đã xác định ở trên.

Bài 3.22. (Xem [7]) Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình :

$$a.\cos 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0 \quad (3.24)$$

luôn có nghiệm.

Giải.

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{a}{3} \sin 3x + \frac{b}{2} \sin 2x + c.\sin x - \cos x.$$

Ta có $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm bậc nhất :

$$f'(x) = a.\cos 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = VT$$

với mọi $x \in [0; 2\pi]$. Ngoài ra,

$$f(0) = f(2\pi) = a + b + c.$$

Vậy, theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in [0; 2\pi]$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = \frac{(a + b + c) - (a + b + c)}{2\pi} = 0.$$

Nói cách khác, phương trình (3.24) luôn có ít nhất một nghiệm ($x = c$) nói trên. Đó chính là điều cần chứng minh.

Bài 3.23. (Xem [1]) Tìm m để bất phương trình

$$x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0 \quad (3.25)$$

thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải.

Ta có (3.25) $\Leftrightarrow (|x - m|)^2 + 2|x - m| + 2 > m^2$.
Đặt $t = |x - m|$. Với $x \in \mathbb{R}$ có $t \in [0; +\infty)$. Bất phương trình đã cho (3.25) trở thành

$$f(t) = t^2 + 2t + 2 > m^2 \quad (3.26)$$

(3.25) đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ (3.26) đúng với mọi $t \in [0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m^2 < \min_{[0; +\infty)} f(t)$$

Mà với $t \in [0; +\infty)$ có

$$f(t) \geq 0^2 + 2 \cdot 0 + 2 = 2 = f(0) \Rightarrow \min_{[0; +\infty)} f(t) = 2.$$

Vậy $m^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3.24. (Xem [6]) Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+4} - m\sqrt{4-x} = 3m.$$

Giải.

Điều kiện

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -4 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; 4].$$

Với $x \in [0; 4]$ có $\sqrt{4-x} + 3 \neq 0$ nên

$$m = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+4}}{\sqrt{4-x} + 3} := f(x). \quad (3.27)$$

Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[0; 4]$ nên

(3.27) có nghiệm $\Leftrightarrow \min_{[0; 4]} f(x) \leq m \leq \max_{[0; 4]} f(x)$. Mà với $x \in [0; 4]$ ta có

$$\begin{cases} 0 \leq \sqrt{x} \leq 2 \\ 2 \leq \sqrt{x+4} \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} + \sqrt{x+4} \leq 2 + 2\sqrt{2}. \quad (3.28)$$

Mặt khác có

$$0 < 3 = 0 + 3 \leq \sqrt{4-x} + 3 \leq 2 + 3 = 5. \quad (3.29)$$

Từ (3.28) và (3.29) có

$$f(0) = \frac{2}{5} \leq f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+4}}{\sqrt{4-x} + 3} \leq \frac{2+2\sqrt{2}}{3} = f(4).$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;4]} f(x) = \frac{2}{5}; \max_{[0;4]} f(x) = \frac{2+2\sqrt{2}}{3}.$$

Do đó $\frac{2}{5} \leq m \leq \frac{2+2\sqrt{2}}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3.25. (Xem [7]) Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm

$$x^3 + 3x^2 - 1 \leq a(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3. \quad (3.30)$$

Giải.

Điều kiện

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; +\infty)$$

Với điều kiện đó ta có $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} > 0$ nên
(3.30)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 (x^3 + 3x^2 - 1) \leq \\ &\leq a(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3 (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 = a \\ &\Leftrightarrow a \geq (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 (x^3 + 3x^2 - 1) := f(x). \end{aligned}$$

(3.30) có nghiệm $a \geq \min_{[1;+\infty)} f(x)$. Mà với $x \in [1; +\infty)$ ta có

$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 \geq (1+0)^3 = 1 > 0 \\ x^3 + 3x^2 - 1 \geq 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq 3 = f(1)$$

Suy ra $\min_{[1;+\infty)} f(x) = 3$. Vậy $a \geq 3$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3.26. (Xem [1]) Cho phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3.31)$$

Chứng minh rằng nếu $\exists m > 0; a, b, c \in \mathbb{R}$, thỏa mãn $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$ thì phương trình (3.31) luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$.

Giải.

Đặt $f(x) = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} = x^{m-1}(ax^2 + bx + c)$.

Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a}{m+2}x^{m+2} + \frac{b}{m+1}x^{m+1} + \frac{c}{m}x^m.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0; 1]$ và có

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (0; 1); \quad F(0) = 0; \quad F(1) = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0.$$

hay là $x_0^{m-1}(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0 \Rightarrow ax_0^2 + bx_0 + c = 0$
(vì $x_0 \in (0; 1) \Rightarrow x_0^{m-1} \neq 0$).

Vậy, phương trình (3.31) luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$ (đpcm).

Bài 3.27. (Xem [1]) Cho phương trình :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.32)$$

Chứng minh rằng nếu

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \quad (3.33)$$

thì phương trình (3.32) luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$.

Giải.

Đặt $f(x) = VT$ (3.32). Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \dots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0; 1]$ và có $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (0; 1)$; $F(0) = 0$; $F(1) = 0$ (do (3.33)). Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (3.32) luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$ (đpcm).

Bài 3.28. (Xem [6]) Cho hàm số

$$y(x) = |3x^2 - 6x + 2a - 1|.$$

Xác định a để giá trị lớn nhất của hàm số đó trên đoạn $[-2; 3]$ là nhỏ nhất.

Giải.

Đặt $f(x) = 3x^2 - 6x + 2a - 1$. Do $y(x) = |f(x)|$ nên

$$\max_{[-2; 3]} y(x) = \max \left\{ \left| \min_{[-2; 3]} f(x) \right| ; \left| \max_{[-2; 3]} f(x) \right| \right\}.$$

Mà $f(x)$ là tam thức bậc hai với hệ số của x^2 là $3 > 0$ và hoành độ đỉnh $x_0 = 1 \in [-2; 3]$ nên

$$\min_{[-2; 3]} f(x) = f(1) = 2a - 4;$$

$$\max_{[-2; 3]} f(x) = \max \{f(-2); f(3)\}$$

$$= \max \{2a + 23; 2a + 8\} = 2a + 23$$

$$\Rightarrow g(a) := \max_{[-2; 3]} y(x) = \max \{|2a - 4|; |2a + 23|\}$$

$$\geq \frac{|4 - 2a| + |2a + 23|}{2} \quad \left(\text{do } x, y \geq 0 : \max \{x; y\} \geq \frac{x + y}{2} \right)$$

$$\geq \frac{|4 - 2a + 2a + 23|}{2} = \frac{27}{2} \quad (\text{do } |x| + |y| \geq |x + y|).$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |4 - 2a| = |2a + 23| \\ (4 - 2a)(2a + 23) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{19}{4}.$$

Vậy $a = -\frac{19}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.29. (Xem [1]) Giải bất phương trình

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2+7x+10} < 5 - 2x \quad (3.34)$$

Giải.

$$(3.34) \Leftrightarrow f(x) := \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} + 2\sqrt{x^2+7x+10} + 2x < 5 = f(-1)$$

$$f(x) \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ x^2+7x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -5 \\ x \leq -5 \vee x \geq 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x \in [-2; +\infty)$$

$f(x)$ liên tục trên $[-2; +\infty)$, có

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+5}} + \frac{2x+7}{\sqrt{x^2+7x+10}} > 0 \text{ với mọi } x \in [-2; +\infty)$$

nên $f(x)$ là hàm số đồng biến. Bởi vậy

$$(3.34) \Leftrightarrow f(x) < f(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < -1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm : $T = [-2; -1)$.

Bài 3.30. (Xem [1]) Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn :

$$\forall x \in [-1; 1] : |P(x)| \leq 1. \quad (3.35)$$

Chứng minh rằng

$$|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7.$$

Giải.

Do (3.35) đúng $\forall x \in [-1; 1]$ nên (3.35) đúng khi

$$x \in \left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2} \right\} \subset [-1; 1].$$

Ta có

$$|P(-1)| \leq 1 \Rightarrow |-a + b - c + d| \leq 1 \quad (3.36)$$

$$|P(1)| \leq 1 \Rightarrow |a + b + c + d| \leq 1 \quad (3.37)$$

$$\left| P\left(-\frac{1}{2}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow |-a + 2b - 4c + 8d| \leq 8 \quad (3.38)$$

$$\left| P\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow |a + 2b + 4c + 8d| \leq 8 \quad (3.39)$$

Từ (3.36) và (3.37) ta có

$$|a + c| + |b + d| \leq 1 \Rightarrow |b + d| + |a| - |c| \leq 1. \quad (3.40)$$

Tương tự, từ (3.38) và (3.39) ta có

$$|2a + 8d| - |a| + 4|c| \leq 8. \quad (3.41)$$

Nhân hai vế của (3.40) với 5, của (3.41) với 2 rồi cộng lại ta được :

$$3|a| + 3|c| + 4|b + 4d| + 5|b + d| \leq 21.$$

Mà

$$\begin{aligned} 4|b + 4d| + 5|b + d| &= (|-b - d| + |b + 4d|) + (|-b - 4d| + 4|b + d|) + \\ &\quad + 2|b + 4d| \\ &\geq |-b - d + b + 4d| + |-b - 4d + 4b + 4d| + 0 \\ &= 3|b| + 3|d| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3|a| + 3|c| + 3|b| + 3|d| \leq 3|a| + 3|c| + 4|b + 4d| + 5|b + d| \leq 21$$

$$\Rightarrow |a| + |b| + |c| + |d| \leq 7.$$

Bài 3.31. (Xem [1]) Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x + 7} = \sqrt[4]{x + 80} \quad (3.42)$$

Giải.

Điều kiện

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 80 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0; +\infty).$$

Với điều kiện đó hai vế của (3.42) cùng không âm nên tứ phương hai vế của (3.42) ta được

$$x^2 + f(x) = x + 80 \quad (3.43)$$

trong đó

$$f(x) = 4x\sqrt{x}\sqrt[3]{x + 7} + 6x\sqrt[3]{(x + 7)^2} + 4(x + 7)\sqrt{x} + (x + 7)\sqrt[3]{x + 7}.$$

Dễ thấy $f(x)$ là hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$ và $f(1) = 80$.

Với $x = 1$ ta có (3.42) $\Leftrightarrow \sqrt{1} + \sqrt[3]{1 + 7} = \sqrt[4]{1 + 80} \Leftrightarrow 3 = 3$: đúng.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của (3.42). Với $x > 1$ ta có

$$x^2 > x, f(x) > f(1) = 80 \Rightarrow x^2 + f(x) > x + 80.$$

Vậy (3.43) không có nghiệm thỏa mãn $x > 1$. Với $0 \leq x < 1$ ta có

$$x^2 < x, f(x) < f(1) = 80 \Rightarrow x^2 + f(x) < x + 80.$$

Vậy (3.43) không có nghiệm thỏa mãn $0 \leq x < 1$. Như vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Kết luận

Luận văn "*Biểu diễn một số dạng đa thức và áp dụng trong đại số*" đã trình bày chi tiết một số vấn đề liên quan đến các đồng nhất thức đại số sinh bởi đa thức cùng với một số ứng dụng của nó.

Trong luận văn cũng trình bày một số ví dụ và bài toán về mối liên hệ giữa các đồng nhất thức đại số cũng như các ứng dụng của các đồng nhất thức này.

Tiếp theo xét biểu diễn đa thức dương trên trục thực, trên nửa trục dương, trên một đoạn cho trước và biểu diễn một số đa thức đặc biệt khác (đa thức với hệ số nguyên, đa thức Trebyshev, ...).

Cuối cùng là nêu một số ứng dụng của đa thức trong tính toán, ước lượng, giải phương trình và các bài toán cực trị.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, 1993, *Một số phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, 2004, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo Dục.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Bất đẳng thức, định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [5] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Đăng Phát, Nguyễn Minh Tuấn, 2009, *Chuyên đề đa thức và các vấn đề liên quan*, NXB Giáo Dục.
- [6] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Kỷ yếu hội nghị khoa học, *Các chuyên đề chuyên toán bồi dưỡng học sinh giỏi*, Hội toán học Hà Nội, 2010.
- [7] Tạp chí Toán học và tuổi trẻ các năm 2008-2011.
- [8] Peter Borwein and Tamás Erdélyi, 1995, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer-Verlag New York, Inc.