

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGÔ THẾ GIANG

CÁC DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học:

GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2010

Mục lục

Mở đầu	2
1 Các giá trị trung bình cơ bản	4
1.1 Hàm biểu diễn các giá trị trung bình cơ bản	4
1.2 Bất đẳng thức AM-GM và các bài toán liên quan	8
1.2.1 Quy nạp kiểu Cauchy	9
1.2.2 Một số dạng đa thức đối xứng sơ cấp	10
1.2.3 Bất đẳng thức AG suy rộng	14
1.3 Các dạng trung bình đồng bậc khác	15
2 Một số định lý liên quan đến biểu diễn các giá trị trung bình	22
2.1 Biểu diễn hàm lồi, hàm lõm	22
2.2 Biểu diễn các hàm đơn điệu bậc cao	24
3 Một số áp dụng	27
3.1 Bài toán cực trị đại số	27
3.2 Bài toán cực trị trong lượng giác	43
3.3 Giải và biện luận phương trình, bất phương trình	54
Kết luận	68
Tài liệu tham khảo	69

Mở đầu

Bất đẳng thức là một chuyên đề cơ bản của toán học. Đây là dạng toán rất quan trọng trong chương trình phổ thông. Các kết quả về nội dung này đã được trình bày rất hoàn chỉnh, đầy đủ ở những tài liệu trong nước và Quốc tế. Mặt khác, trong các kì thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng, đặc biệt là các kì thi Học sinh giỏi, ta vẫn hay gặp các dạng bài toán về bất đẳng thức. Để giúp học sinh phổ thông tìm hiểu các kết quả về bất đẳng thức cổ điển của các nhà toán học đã nghiên cứu, đồng thời nắm được các kĩ thuật chứng minh các dạng bất đẳng thức cụ thể và hệ thống chung theo một logic nhất định là nhiệm vụ mà đề tài luận văn này đề cập đến.

Bằng cách đưa ra các dạng bất đẳng thức về giá trị trung bình, mục tiêu của bản luận văn sẽ giúp cho học sinh nắm được các kết quả đầy đủ, chi tiết và cách thức vận dụng chúng để giải quyết một số bài toán liên quan.

Việc xây dựng các dạng trung bình đồng bậc khác nhau cũng nhằm giúp học sinh nhìn nhận, khái quát hóa được nhiều bất đẳng thức mà các học sinh vẫn thường gặp. Từ đó tạo cho các em làm quen với việc tập dượt nghiên cứu các chuyên đề toán sau này.

Luận văn ngoài mục lục, mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, gồm 3 chương.

Chương 1. Các giá trị trung bình cơ bản.

Nội dung chương này nhằm trình bày các giá trị trung bình cơ bản. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (AM-GM) và các dạng trung bình đồng bậc khác. Đây là phần lí thuyết cơ sở để vận dụng cho các bài toán ứng dụng ở chương sau.

Chương 2. Một số định lí liên quan đến biểu diễn các giá trị trung bình.

Chương này trình bày một số định lý liên quan tới các giá trị trung bình mà trực tiếp liên quan tới chương trình toán Trung học phổ thông. Đó là lớp hàm lồi, hàm lõm và các hàm đơn điệu bậc cao.

Chương 3. Một số áp dụng.

Đây là nội dung ứng dụng của các chương 1 và chương 2 vào việc giải quyết các bài toán về cực trị đại số, cực trị lượng giác, đồng thời ứng dụng để giải quyết các dạng toán về giải và biện luận phương trình.

Tiếp theo, nêu bài tập minh họa được tập hợp, lựa chọn từ những đề trong các kì thi học sinh giỏi Quốc gia, kì thi Olympic khu vực và Quốc tế...

Đối với mỗi dạng bài tập đều có nêu phương pháp giải cụ thể. Các bài tập được trình bày theo một hệ thống với nhiều lời giải độc đáo, thể hiện tính sáng tạo. Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS-TSKH, nhà giáo nhân dân Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Giáo sư, đã tận tình giúp đỡ tác giả hoàn thành bản luận văn này.

Nhân đây tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau Đại học, Khoa Toán- Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cùng các thầy cô đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán K2.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tới UBND Tỉnh, Sở GD và ĐT Tỉnh Lạng Sơn, Ban giám hiệu trường THPT Việt Bắc Thành phố Lạng Sơn, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả có cơ hội được học tập, nghiên cứu.

Mặc dù đã hết sức cố gắng, song vì khuôn khổ bài viết, bản luận văn này vẫn còn nhiều vấn đề chưa được đề cập tới, và vì thời gian và khả năng có hạn, chắc chắn luận văn sẽ không tránh khỏi khiếm khuyết. Tác giả mong muốn nhận được nhiều ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô, cùng bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn.

Thái Nguyên, 08 tháng 09 năm 2010.

Chương 1

Các giá trị trung bình cơ bản

Trong chương này, ta sẽ đề cập đến các giá trị trung bình cơ bản, định lý về bất đẳng thức giá trị trung bình cộng và giá trị trung bình nhân (Còn gọi là bất đẳng thức AM-GM hoặc ngắn gọn là bất đẳng thức AG), bất đẳng thức AG suy rộng và các dạng trung bình đồng bậc khác (xem [1]-[7]).

1.1 Hàm biểu diễn các giá trị trung bình cơ bản

Giả sử $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Xét các đại lượng trung bình sau

$$(1) \text{ Trung bình cộng } M_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

$$(2) \text{ Trung bình nhân } M_2 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

$$(3) \text{ Trung bình điều hòa } M_3 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

$$(4) \text{ Trung bình bình phương } M_4 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

Ta có hệ thức sau giữa các đại lượng trung bình.

Định lý 1.1. Với mọi bộ số dương a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, ta luôn có

$$M_3 \leq M_2 \leq M_1 \leq M_4.$$

Trong trường hợp $n = 2$, ta có thể mô tả ý nghĩa hình học của định lý như sau.

Xét nửa đường tròn đường kính BC , tâm O . Giả sử $OD \perp BC$ tại O . Từ điểm E bất kì khác D , ta kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt BC kéo dài ở A . Kẻ $EF \perp BC, F \in BC$.

Đặt $AB = a_1 > 0, AC = a_2 > 0$ ($a_1 \neq a_2$). Khi đó, $AO = \frac{a_1 + a_2}{2} > AE$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông). Mặt khác, ta có

$$AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = \sqrt{(AO + OE)(AO - OE)} = \sqrt{AB \cdot AC} = \sqrt{a_1 a_2}.$$

Suy ra $M_3 = AO > AE = M_2$ hoặc $AE^2 = AC \cdot AB$ tức là $AE = \sqrt{AB \cdot AC}$ (hệ thức lượng trong đường tròn).

Từ công thức $2(x^2 + y^2) = (x + y)^2 + (x - y)^2$, ta có

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{AO^2 + OD^2} + \sqrt{\frac{(AO - OD)^2 + (AO + OD)^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{AC^2 + AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} = M_4. \end{aligned}$$

(3) Theo bất đẳng thức Cauchy, thì $M_2 \leq M_1$.

(4) Vậy nên $M_3 \leq M_2 \leq M_1 \leq M_4$.

Ví dụ 1.1 (Đề thi học sinh giỏi năm 1980). Gọi $T = \sum_{i=1}^k m_i$ ($m_i > 0$). Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^k \left(m_i + \frac{1}{m_i} \right)^2 \geq k \left(\frac{k}{T} + \frac{T}{k} \right)^2. \quad (1.1)$$

Giải. Ta có

$$(1.1) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k m_i^2 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i^2} \geq k \left(\frac{k^2}{T^2} + \frac{T^2}{k^2} \right).$$

Ta có

$$\frac{T}{k} = M_1 \leq M_4 = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^k m_i^2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{k^2} \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^k m_i^2 \geq k \frac{T^2}{k^2}.$$

Lại có

$$\frac{k}{\sum_{i=1}^k m_i^2} = M_3 \leq M_2 = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k m_i^2} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k m_i} \cdot \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k m_i}$$

$$\leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_i \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_i = \frac{T^2}{k^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i^2} \geq k \frac{k^2}{T^2}.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^k m_i^2 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i^2} \geq k \left(\frac{k^2}{T^2} + \frac{T^2}{k^2} \right).$$

Ví dụ 1.2 (Đề thi học sinh giỏi năm 1976). Chứng minh rằng, với bất kỳ điểm M nào nằm trong tam giác ABC ta đều có

$$d_a \cdot d_b \cdot d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}, \quad (1.2)$$

trong đó d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ M lần lượt đến các cạnh BC, CA, AB ; a, b, c là độ dài các cạnh và S là diện tích của tam giác. Hãy mở rộng (1.2) cho tứ diện trong không gian.

Giải. +) Ta có thể viết $ad_a + bd_b + cd_c = 2S$, khi xét ba tam giác MBC, MAC, MAB . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$ad_a \cdot bd_b \cdot cd_c \leq \left(\frac{ad_a + bd_b + cd_c}{3} \right)^3 = \left(\frac{2S}{3} \right)^3 = \frac{8S^3}{27},$$

tức là

$$d_a \cdot d_b \cdot d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad_a = bd_b = cd_c$, tức là

$$d_a : d_b : d_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

+) Xét 4 hình chóp $MBCD, MACD, MABD, MABC$, trong đó M là một điểm bất kỳ nằm trong tứ diện $ABCD$, ta có thể viết

$$S_A d_A + S_B d_B + S_C d_C + S_D d_D = 3V.$$

Từ đó ta có

$$S_A d_A \cdot S_B d_B \cdot S_C d_C \cdot S_D d_D = \left(\frac{S_A d_A + S_B d_B + S_C d_C + S_D d_D}{4} \right)^4 = \left(\frac{3V}{4} \right)^4,$$

tức là

$$d_A d_B d_C d_D \leq \frac{81V^4}{256 S_A S_B S_C S_D}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $S_A d_A = S_B d_B = S_C d_C = S_D d_D$, tức là

$$d_A : d_B : d_C : d_D = \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} : \frac{1}{S_D}.$$

Ví dụ 1.3 (Đề thi học sinh giỏi năm 1981). Cho n số thực $t_1, t_2, \dots, t_n$ sao cho $0 < p \leq t_k \leq q$ với $k = 1, 2, \dots, n$.

Biết rằng

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k t_k \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k t_k^2.$$

Chứng minh rằng $\frac{A^2}{B} \geq \frac{4pq}{(p+q)^2}$ và tìm điều kiện cần và đủ để có dấu đẳng thức.

Giải. Ta có

$$\sum_{i=1}^k (t_k - p)(t_k - q) \leq 0.$$

Từ đó

$$\sum_{i=1}^k t_k^2 - (p+q) \sum_{i=1}^k t_k + npq \leq 0.$$

Hay

$$B - (p+q)A + pq \leq 0.$$

$$\text{Vậy } \frac{B}{A^2} \leq -\frac{pq}{A^2} + \frac{p+q}{A^2} = -pq \left(\frac{1}{A} - \frac{p+q}{2pq} \right)^2 + \frac{(p+q)^2}{4pq} \leq \frac{(p+q)^2}{4pq}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(t_k - p)(t_k - q) = 0 \text{ với } k = 1, 2, \dots, n \text{ và } A = \frac{2pq}{p+q}.$$

Ví dụ 1.4 (Đề thi học sinh giỏi năm 1976). Cho $x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n}$.

Chứng minh rằng $\forall n > 1$ ta có $\frac{1}{5} \leq x_n < 2$.

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho vế trái, vế phải. Tìm điều kiện đơn điệu của x_n .

Ví dụ 1.5 (Đề thi học sinh giỏi Hungary). Chứng minh rằng, nếu α là góc nhọn thì

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) > 5.$$

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

1.2 Bất đẳng thức AM-GM và các bài toán liên quan

Trong bài này, ta sẽ đề cập đến định lý về bất đẳng thức giá trị trung bình cộng và giá trị trung bình nhân (Còn gọi là bất đẳng thức AM-GM hoặc ngắn gọn là bất đẳng thức AG), các bài toán liên quan và bất đẳng thức AG suy rộng.

Định lý 1.2 (Định lý về các giá trị trung bình cộng và trung bình nhân ([2],[5])).
Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số không âm. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (1.3)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức AG là bất đẳng thức giữa trung bình nhân và trung bình điều hòa. (Gọi và viết tắt là GM - HM hoặc GH).

Hệ quả 1.1 (Bất đẳng thức GH). *Với mọi bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta đều có*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AG đối với bộ số dương $x_k = \frac{1}{a_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), ta có ngay bất đẳng thức GH.

Cho đến nay, người ta đã biết đến hàng trăm cách khác nhau để chứng minh bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng và trung bình nhân (Gọi là bất đẳng thức AM-GM hoặc AG). Sau đây là một cách chứng minh định lý 1.2 theo quy nạp kiểu Cauchy. Đây là kiểu quy nạp theo cặp hướng (lên-xuống) do Cauchy đề xuất vào năm 1821. Để chứng minh định lý 1.2, một số người đã lợi dụng tình huống này để gọi tên bất đẳng thức (1.3) là bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên,

cho đến nay, theo thông lệ Quốc tế và theo cách gọi của các nhà khoa học thì (1.3) là bất đẳng thức giữa giá trị trung bình cộng (trung bình số học) và trung bình nhân (trung bình hình học).

1.2.1 Quy nạp kiểu Cauchy

Từ hệ thức bậc hai

$$u_1^2 + u_2^2 \geq 2u_1u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Ta suy ra

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \text{ không âm}. \quad (1.5)$$

Thay x_1, x_2 lần lượt bằng các biến mới $\frac{x_1 + x_2}{2}$ và $\frac{x_3 + x_4}{2}$, từ (1.5) ta nhận được

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \left[\frac{x_1 + x_2}{2} \frac{x_3 + x_4}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

Tiếp tục quá trình như trên, ta thấy bất đẳng thức (1.3) đúng với $n = 2, 4, \dots$ và nói chung, đúng với n là lũy thừa của 2. Đây chính là quy nạp theo hướng lên trên.

Bây giờ ta thực hiện quy nạp theo hướng xuống phía dưới. Ta chứng minh rằng, khi bất đẳng thức (1.3) đúng với n ($n > 1$) thì nó cũng đúng với $n - 1$. Thay x_n trong (1.3) bởi $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n - 1}$ và giữ nguyên các biến x_i khác, từ (1.3) ta thu được

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n - 1}}{n} \geq \\ & \geq (x_1x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n}} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n - 1} \right)^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

hay

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n - 1} \geq (x_1x_2 \dots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n - 1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n - 1} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \dots x_{n-1}}.$$

Từ kết quả chứng minh theo cặp hướng (lên, xuống), ta thu được phép chứng minh quy nạp của định lý 1.2.

Tiếp theo, theo đúng cách chứng minh quy nạp kiểu Cauchy, ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức sau đây.

Bài toán 1.1 (Bất đẳng thức Ky Fan). Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương trong $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. Khi đó

$$\frac{\prod_{i=1}^k x_k}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^n\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^k (1 - x_k)}{\left[\sum_{k=1}^n (1 - x_k)\right]^n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Bài toán 1.2. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_m$ là các số không âm và $n = 1, 2, \dots$. Khi đó

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}\right)^n \geq \frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n}{m}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_m$.

1.2.2 Một số dạng đa thức đối xứng sơ cấp

Đa thức

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n M_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

trong đó

$$M_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_n = k} a_{j_1 \dots j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}, \quad j_n \in \mathbb{N} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.6)$$

Trong mục này, ta chỉ quan tâm chủ yếu đến các dạng đa thức đồng bậc biến số thực và nhận giá trị thực, đặc biệt là các đa thức đối xứng sơ cấp quen biết liên quan đến các hằng đẳng thức đáng nhớ trong chương trình toán trung học phổ thông.

Trước hết, ta chứng minh lại công thức khai triển nhị thức Newton

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k.$$

Nếu ta coi $(x+a)^n$ như là tích của n thừa số: $(x+a)(x+a)\cdots(x+a)$ thì khi đó tích

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{k} p_j^{n-k} x^k,$$

trong đó

[illegible]

Vậy nên, nếu các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ đều dương (hoặc không âm và không đồng thời bằng 0) thì không mất tính tổng quát, ta có thể coi các số $p_1, p_2, \dots, p_n$ đều là các số dương (không âm). Từ (1.7), ta thu được

[illegible]

Ta thấy, p_1 chính là trung bình cộng, p_n là trung bình nhân, và do đó các p_j khác cũng là các đại lượng trung bình cần đặt tên cho chúng như là những đối tượng cơ bản cần tập trung nghiên cứu.

Định lý 1.3. Cho $\bar{a}$ là bộ n số dương $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$). Khi đó

$$f(x) = (x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n) = x^n + E_1(\bar{a})x^{n-1} + E_2(\bar{a})x^{n-2} + \cdots + E_n(\bar{a}),$$

trong đó

$$E_1(\bar{a}) = \sum_{i=1}^n a_i, E_2(\bar{a}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \dots, E_n(\bar{a}) = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Đặt $E_0(\bar{a}) = 1$. Ta gọi $E_r(\bar{a})$ ($r \in \{1, 2, \dots, n\}$) là các hàm (Đa thức) đối xứng sơ cấp thứ r ($E_r(\bar{a})$ là tổng của tất cả các tích r số khác nhau của bộ số $\bar{a}$).

Kí hiêu

$$P_r(\bar{a}) = \frac{r!(n-r)!}{n!} E_r(\bar{a}).$$

Tính chất 1.1. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là bộ n các số thực không âm (kí hiệu bởi $(\bar{x})$) và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là bộ các số thực không âm khác (được kí hiệu bởi $(\bar{y})$).

Hai dãy $(\bar{x})$ và $(\bar{y})$ được gọi là đồng dạng (và kí hiệu $(\bar{x}) \sim (\bar{y})$) nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{R} (\lambda \neq 0)$ sao cho ta có $x_j = \lambda y_j (j = 1, 2, \dots, n)$.

Bài toán 1.3. Cho $(\bar{a})$ là bộ $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ các số thực dương.

Đặt

$$P_0 = 1, P_k = P_k(\bar{a}); E_r = E_r(\bar{a}).$$

Chứng minh rằng

$$P_{k-1} \cdot P_{k+1} \leq P_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

(Nếu các a_i dương và không đồng thời bằng nhau thì ta có dấu bất đẳng thức thực sự).

Giải. Giả sử

$$f(x, y) = (x + a_1 y)(x + a_2 y) \cdots (x + a_n y) = E_0 x^n + E_1 x^{n-1} y + \cdots + E_n y^n,$$

trong đó E_i là tổng tất cả các tích i số khác nhau,

$$P_k = \frac{k!(n-k)!}{n!} E_k.$$

Vì tất cả các $a_i > 0$, $t = \frac{x}{y} = 0$ và $v = \frac{y}{x} = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $f(t, 1) = 0$ và $f(1, v) = 0$, tương ứng nên $\frac{x}{y} = 0$ và $\frac{y}{x} = 0$ không phải là nghiệm của các phương trình nhận từ đạo hàm của nó.

Từ đó, ta có thể kết luận rằng các số P_i dương, tức là phương trình

$$P_{k-1} x^2 + 2P_k xy + P_{k+1} y^2 = 0$$

nhận được từ $f(x, y) = 0$ bằng cách lấy vi phân liên tiếp theo x và y . Do phương trình này có nghiệm thực nên

$$P_{k-1} \cdot P_{k+1} \leq P_k^2.$$

Bài toán 1.4. Chứng minh bất đẳng thức

$$E_{r-1} \cdot E_{r+1} \leq E_r^2.$$

Giải. Từ bất đẳng thức trong bài toán 1.3, ta có

$$P_{k-1} \cdot P_{k+1} \leq P_k^2.$$

Suy ra

$$\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} E_{k-1} \cdot \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{n!} E_{k+1} \leq \left(\frac{k!(n-k)!}{n!} \right)^2 E_k^2$$

hay

$$\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{k(n-k)!} E_{k-1} E_{k+1} \leq E_k^2.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 1.5. Cho các số $a_i > 0$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) và không đồng thời bằng nhau. Chứng minh bất đẳng thức

$$P_1 > P_2^{\frac{1}{2}} > P_3^{\frac{1}{3}} > \dots > P_n^{\frac{1}{n}}. \quad (1.9)$$

Giải. Từ bất đẳng thức trong bài toán 1.3, ta có

$$P_0 \cdot P_2 \leq P_1^2$$

$$(P_1 \cdot P_3)^2 \leq P_2^4$$

.....

$$(P_{r-1} \cdot P_{r+1})^r \leq P_r^{2r}.$$

Suy ra

$$(P_0 \cdot P_2) (P_1 \cdot P_3)^2 \dots (P_{r-1} \cdot P_{r+1})^r < P_1^2 P_2^4 \dots P_r^{2r} \\ \Rightarrow P_{r+1}^r < P_r^{r+1} \Rightarrow P_r^{\frac{1}{r}} > P_{r+1}^{\frac{1}{r+1}}.$$

Nhận xét 1.1. Ta dễ dàng chứng minh $P_{r-1} \cdot P_{r+1} < P_r^2$ bằng phương pháp quy nạp.

Thật vậy, giả sử bất đẳng thức đúng với $n-1$ số dương $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ và đặt E'_r, P'_r là các E_r, P_r tạo bởi $n-1$ số ấy và giả sử tất cả các số đó không đồng thời bằng nhau. Khi đó

$$E'_r = a_n E'_{n-1} \Rightarrow P_r = \frac{r}{n} P'_r + \frac{r}{n} a_n P'_{r-1}.$$

Từ đó suy ra

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2,$$

trong đó

$$A = \{(n-r)^2 - 1\}P'_{r-1}P'_{r+1} - (n-r)^2P'_r,$$

$$B = (n-r+1)(r+1).P'_{r-1}P'_{r+1} + (n-r-1)(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1} - 2(n-r)P'_{r-2}P'_{r+1},$$

$$C = (r^2 - 1)P'_{r-2}P'_r - r^2P_{r-1}^2.$$

Điều này vẫn đúng khi $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$. Khi đó $a_n \neq a_i$.

Từ bất đẳng thức (1.6), ta thu được bất đẳng thức sau

Hệ quả 1.2.

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n.$$

trong đó

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ p_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j} \\ \dots\dots\dots \\ p_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \end{array} \right.$$

Đặc biệt, $p_1 \geq p_n$. Đó chính là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

1.2.3 Bất đẳng thức AG suy rộng

Một mở rộng tự nhiên của định lý giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho bộ số có trong là định lý sau đây.

Định lý 1.4 (Bất đẳng thức AG suy rộng). *Giả sử cho trước hai cặp dãy số dương $x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n$. Khi đó*

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leq \left(\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Nhận xét 1.2. Các phương pháp đã nêu ở trên để chứng minh bất đẳng thức AG đều có thể sử dụng (có cải biên) để chứng minh bất đẳng thức AG suy rộng.

Chứng minh. Đặt

$$s = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$e^{x-1} \geq x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ta thu được hệ

$$\begin{cases} x_1 \leq s \cdot e^{\frac{x_1}{s}-1} \\ \dots\dots\dots \\ x_n \leq s \cdot e^{\frac{x_n}{s}-1}. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1^{p_1} \leq s^{p_1} \cdot e^{\left(\frac{x_1}{s}-1\right)p_1} \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{p_n} \leq s^{p_n} \cdot e^{\left(\frac{x_n}{s}-1\right)p_n}. \end{cases}$$

Vậy nên

$$x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leq s^{p_1+p_2+\cdots+p_n} \cdot e^{\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}{s} - (p_1+p_2+\cdots+p_n)},$$

hay

$$x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} \leq s^{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{s} = \cdots = \frac{x_n}{s} = 1$

hay $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

1.3 Các dạng trung bình đồng bậc khác

Xét hàm số mô tả các trung bình bậc tùy ý đối với cặp số dương a, b cho trước sau đây

$$S_{a,b}(t) = \left(\frac{a^t + b^t}{2} \right)^{\frac{1}{t}}, \quad 0 \neq t \in \mathbb{R}.$$

Khi đó $S_{a,b}(-1)$, $S_{a,b}(1)$ và $S_{a,b}(2)$ lần lượt là các giá trị trung bình điều hòa, trung bình cộng và trung bình bậc hai của cặp số a, b và

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} S_{a,b}(t) = \min\{a, b\}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S_{a,b}(t) = \max\{a, b\}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} S_{a,b}(t) = \sqrt{ab}.$$

Vậy nên

$$\min\{a, b\} \leq S_{a,b}(-1) \leq S_{a,b}(0) \leq S_{a,b}(1) \leq S_{a,b}(2) \leq \max\{a, b\}$$

hay

$$\min\{a, b\} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max\{a, b\}$$

chính là những bất đẳng thức giữa các đại lượng trung bình cơ bản.

Tổng quát, ta xét bất đẳng thức giữa các trung bình bậc k . Trong phần này, ta xét các biểu thức trung bình dưới dạng

$$T_k = \left(\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}$$

và chứng minh các bất đẳng thức liên quan giữa chúng.

Định nghĩa 1.1. *Ta định nghĩa*

i) Với $k \in \mathbb{N}$ ta gọi biểu thức dạng $T_k = \left(\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}$ là trung bình lũy thừa bậc k của n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$.

ii) $T_0 = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$ gọi là trung bình nhân của n số không âm.

iii) Với $k \in \mathbb{N}$, ta gọi biểu thức dạng $T_{-k} = \left(\frac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k}}{n} \right)^{-\frac{1}{k}}$ là trung bình lũy thừa điều hòa bậc k của n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Tính chất 1.2. Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì bất đẳng thức sau đây nghiệm đúng

$$\left(\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \cdots + a_n^{k+1}}{n} \right)^{\frac{1}{k+1}} \text{ với } k \in \mathbb{Z}^*.$$

Trường hợp đặc biệt $T_{-1} \leq T_0 \leq T_1$.

1) Xét trường hợp $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \right)^{k+1} \leq n \left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \cdots + a_n^{k+1} \right)^k.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski mở rộng, ta có

$$\left(a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \right)^{k+1} = \left(1.a_1^k + 1.a_2^k + \cdots + 1.a_n^k \right)^{k+1} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 + 1 + \cdots + 1) \left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \cdots + a_n^{k+1} \right) \cdots \left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \cdots + a_n^{k+1} \right) \\ &= n \left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \cdots + a_n^{k+1} \right)^k \end{aligned}$$

hay

$$\left(a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \right)^{k+1} \leq n \left(a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \cdots + a_n^{k+1} \right)^k.$$

2) Xét trường hợp $k + 1 \leq -1$.

Đặt $b_i = \frac{1}{a_i}, i = \overline{1, n}$. Khi đó $a_i^k = b_i^{-k}$ với $-k > 0$ và $-k > -(k+1) > 0$, suy ra $0 < \frac{-1}{k} < \frac{-1}{k+1}$. Áp dụng trường hợp (1), ta có

$$\left(\frac{b_1^{-k} + b_2^{-k} + \cdots + b_n^{-k}}{n} \right)^{-\frac{1}{k}} \geq \left(\frac{b_1^{-(k+1)} + b_2^{-(k+1)} + \cdots + b_n^{-(k+1)}}{n} \right)^{-\frac{1}{k+1}},$$

hay

$$\left(\frac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k}}{n} \right)^{\frac{-1}{k}} \leq \left(\frac{a_1^{k+1} + a_2^{k+1} + \cdots + a_n^{k+1}}{n} \right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

3) Cuối cùng, ta chứng minh $T_{-1} \leq T_0 \leq T_1$ ứng với $k = -1, k = 0$

$$T_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = T_0 \text{ (đúng theo bất đẳng thức Cauchy)}$$

$$T_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} = T_{-1}.$$

Thực vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}$

$$\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}} = \left(\sqrt[n]{a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}} \right)^{-1}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \right)^{-1} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Vậy tính chất được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Bài toán 1.6. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{\tan^3 \frac{A}{2} + \tan^3 \frac{B}{2}} + \sqrt[3]{8 \cot^3 A + 8 \cot^3 B} \geq \sqrt[3]{2} \cot \frac{A+B}{4}.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức trung bình đồng bậc, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\cot^3 \frac{A}{2} + \cot^3 \frac{B}{2}} &\geq \sqrt[3]{\frac{1}{4} \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right)^3} \\ &\geq \sqrt[3]{\frac{2^3}{4} \cot^3 \frac{A+B}{4}} = \sqrt[3]{2} \cot \frac{A+B}{4}.\end{aligned}$$

Tổng quát

$$\sqrt[n]{\tan^n \frac{A}{2} + \tan^n \frac{B}{2}} + \sqrt[n]{2^n \cot^n A + 2^n \cot^n B} \geq \sqrt[n]{2} \cot \frac{A+B}{4}.$$

Cách giải hoàn toàn tương tự bài toán 1.6.

Bài toán 1.7. Cho A, B là hai góc thỏa mãn $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt[n]{\tan^n \frac{A}{2} + 2^n \cot^n B} + \sqrt[n]{\tan^n \frac{B}{2} + 2^n \cot^n A} \geq \sqrt[n]{2} \cot \frac{A+B}{4}.$$

Giải.

$$\begin{aligned}VT &\geq \sqrt[n]{\left(\tan \frac{A}{2} + 2 \cot A \right)^n + \left(\tan \frac{B}{2} + 2 \cot B \right)^n} = \sqrt[n]{\cot^n \frac{A}{2} + \cot^n \frac{B}{2}} \\ &\geq \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-1}} \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right)^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}} \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \right) \geq \sqrt[n]{2} \cot \frac{A+B}{4}.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bài toán 1.8. Chứng minh rằng

$$2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \geq 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Không mất tính tổng quát, có thể coi $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Khi đó bất đẳng thức đã cho có dạng

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} = 2^{\sin x} + \frac{1}{2} 2^{\cos x} \geq 3 \sqrt[3]{2^{\sin x + \cos x - 2}}.$$

Do $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ nên

$$\sin x + \cos x - 2 \geq 0,$$

vì vậy

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đẳng thức xảy ra, chẳng hạn, khi $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 1.9. Xét dãy số thực $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots, 2004)$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\pi}{6} \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$y = (\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_{2004}) \left(\frac{1}{\sin x_1} + \frac{1}{\sin x_2} + \dots + \frac{1}{\sin x_{2004}} \right).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} \leq x_i \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x_i \leq 1 \text{ với } i = 1, 2, \dots, 2004 \\ &\Leftrightarrow \left(\sin x_i - \frac{1}{2} \right) (\sin x_i - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x_i - \frac{3}{2} \sin x_i + \frac{1}{2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x_i - \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \sin x_i} \leq 0 \text{ với } i = 1, 2, \dots, 2004. \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i} \leq 2004 \cdot \frac{3}{2}. \quad (1.10)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i} \geq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i}}. \quad (1.11)$$

Từ (1.10) và (1.11) suy ra

$$\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i} \leq \frac{9}{8} \cdot 2004^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng của (1.10) và (1.11) xảy ra, tức là

$$\sin x_i = \frac{1}{2} \text{ hoặc } \sin x_i = 1 \text{ với } i = 1, 2, \dots, 2004$$

và

$$\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i}.$$

Gọi p là số các $\sin x_i$ bằng $\frac{1}{2}$ và q là số các $\sin x_i$ bằng 1, ta có

$$\begin{cases} p + q = 2004 \\ \frac{1}{2}p + q = \frac{1}{2}(2p + q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 2004 \\ p + 2q = 2p + q \end{cases} \Leftrightarrow p = q = 1002.$$

Vậy giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{9}{8} \cdot 2004^2$ khi có 1002 số x_i bằng $\frac{\pi}{6}$ và 1002 số x_i bằng $\frac{\pi}{2}$.

Bài toán 1.10. Chứng minh rằng, trong tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}. \quad (1.12)$$

Giải. Vì $\triangle ABC$ là tam giác nhọn nên $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$. Do đó $\tan A > 0$, $\tan B > 0$, $\tan C > 0$.

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \tan A + \tan B + \tan C &= \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} + \tan C = \frac{\sin C}{\cos A \cos B} + \tan C \\ &= \tan C \left[\frac{-\cos(A+B) + \cos A \cos B}{\cos A \cos B} \right] = \tan A \tan B \tan C. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C},$$

hay

$$(\tan A \tan B \tan C)^3 \geq 27 \tan A \tan B \tan C.$$

Suy ra

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\tan A = \tan B = \tan C$ hay $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài toán 1.11. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương, ta luôn có

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[3]{3^n}.$$

Giải. Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[n]{(\tan A \tan B \tan C)^n} \geq 3\sqrt[n]{(3\sqrt{3})^n}.$$

Theo bài toán 1.10, ta có $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

Vậy ta có

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[n]{3^n}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Từ đó, ta có các bất đẳng thức

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9,$$

$$\tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C \geq 9\sqrt{3},$$

$$\tan^4 A + \tan^4 B + \tan^4 C \geq 27,$$

.....

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[n]{3^n}.$$

Bài tập áp dụng

Bài 1.1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^4}{c^2 - ac + a^2} + \frac{c^4}{a^2 - ab + b^2} > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Bài 1.2. (Trích đề thi vô địch của Mỹ) Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b + 2c + 3d} + \frac{b}{c + 2d + 3a} + \frac{c}{d + 2a + 3b} + \frac{d}{a + 2b + 3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Bài 1.3. Với mọi $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq a^2 b^2 c^2 \cdot \frac{(a + b + c)^2}{3}.$$

Bài 1.4. Cho các số thực dương m, n, p . Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$m \frac{\sin A}{\sin B \sin C} + n \frac{\sin B}{\sin C \sin A} + p \frac{\sin C}{\sin A \sin B} \geq 2\sqrt{mn + np + pm}.$$

Chương 2

Một số định lý liên quan đến biểu diễn các giá trị trung bình

2.1 Biểu diễn hàm lồi, hàm lõm

Để đơn giản cách trình bày, nếu không có chú thích đặc biệt, ta chỉ xét lớp các hàm lồi (lõm) khả vi bậc hai. Như vậy, hàm $f(x)$ đơn điệu tăng trong khoảng $I(a; b)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I(a; b)$$

và hàm $f(x)$ lồi trên $I(a; b)$ khi và chỉ khi

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I(a; b).$$

Từ đó, ta có nhận xét. Hàm $f(x)$ lồi trên $I(a; b)$ thì đạo hàm bậc nhất của nó là một hàm đơn điệu tăng.

Do vậy, ta có thể phát biểu tính chất biểu diễn hàm lồi như sau.

Định lý 2.1. *Hàm $f(x)$ lồi trên $I(a; b)$ khi và chỉ khi tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a; b)$ và số $c \in (a; b)$ sao cho*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt.$$

Tiếp theo, ta còn rất nhiều cách tiếp cận khác đến lớp các hàm lồi và hàm lõm và người ta tìm ra cách biểu diễn chúng theo những mục tiêu khác nhau để giải quyết các bài toán thực tiễn.

Trong mục này, chúng ta đặc biệt quan tâm đến một dạng biểu diễn hàm lồi và

hàm lõm thông qua các hàm số bậc nhất, vì lớp hàm này đơn giản và dễ tính toán trên tập giá trị của chúng.

Để ý rằng, nếu $f(x)$ là hàm lồi, liên tục trên $[a; b]$ và với một cặp số dương $(\alpha; \beta)$ với $\alpha + \beta = 1$ xảy ra đẳng thức

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = f(\alpha a + \beta b)$$

thì $f(x)$ là hàm số (đa thức) bậc nhất.

Vì vậy, khi hàm số $f(x)$ lồi và khả vi trên $I(a; b)$ thì đồ thị của nó luôn thuộc nửa mặt phẳng tạo nên bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm tùy ý cho trước của đồ thị đó. Nói cách khác, nếu $f(x)$ lồi trên $I(a; b)$ thì mọi cặp $x_0, x \in I(a; b)$, ta đều có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.1)$$

Thật vậy, ta có (2.1) tương đương với

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{khi } x > x_0; \quad x_0, x \in I(a; b) \quad (2.2)$$

và

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{khi } x < x_0; \quad x_0, x \in I(a; b). \quad (2.3)$$

Các bất đẳng thức (2.2) và (2.3) là hiển nhiên. (Theo định lý Lagrange)

Dễ nhận thấy rằng (2.1) xảy ra đẳng thức khi $x_0 = x$. Vậy ta có thể viết (2.1) dưới dạng

$$f(x) = \min_{u \in I(a; b)} [f(u) + f'(u)(x - u)].$$

Tương tự, ta cũng có biểu diễn đối với hàm lõm.

Khi hàm số $f(x)$ lõm và khả vi trên $I(a; b)$ thì đồ thị của nó thuộc nửa mặt phẳng dưới tạo bởi tiếp tuyến tại mỗi điểm tùy thuộc đồ thị, tức là với mỗi cặp $x_0, x \in I(a; b)$, ta đều có

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.4)$$

Dễ nhận thấy rằng (2.4) xảy ra đẳng thức khi $x_0 = x$. Vậy ta có thể viết (2.4) dưới dạng

$$f(x) = \max_{u \in I(a; b)} [f(u) + f'(u)(x - u)]. \quad (2.5)$$

Vậy, chúng ta đã có một dạng biểu diễn hàm lồi và hàm lõm thông qua cực trị của các hàm số bậc nhất phụ thuộc vào tham biến. Phép biểu diễn này được gọi là (Theo Bellman) biểu diễn á tuyến tính và nó đóng vai trò quan trọng như là một công cụ hữu hiệu trong nhiều bài toán cực trị và tối ưu.

Tương tự, ta cũng có thể biểu diễn đối với lớp hàm lồi nhiều biến.

Xét hàm số thực nhiều biến $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Giả sử, ứng với mọi bộ số $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ mà $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n$, ta đều có

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq F(z_1, z_2, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i}.$$

Khi đó, hiển nhiên

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max_{R(z)} \left[F(z_1, z_2, \dots, z_n) + \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i} \right].$$

2.2 Biểu diễn các hàm đơn điệu bậc cao

Tiếp theo, ta xét các lớp hàm lồi bậc cao và một số tính chất cơ bản của chúng. Trước hết, ta nhắc lại các tính chất đặc trưng và cũng là định nghĩa của hàm đồng biến và hàm lồi quen biết. Đó là

Tính chất 2.1 (Dạng nội suy). Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $I(a; b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp số phân biệt $x_1, x_2 \in I(a; b)$, ta đều có

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} \geq 0. \quad (2.6)$$

Tính chất 2.2 (Dạng nội suy). Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a; b)$ khi và chỉ khi với mọi bộ số phân biệt $x_0, x_1, x_2 \in I(a; b)$, ta đều có

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \geq 0. \quad (2.7)$$

Chúng minh được suy trực tiếp từ tính chất tương đương sau đây của hàm lồi.

Tính chất 2.3. Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a; b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp số phân biệt $x_0, x_1, x_2 \in I(a; b), x_1 < x_2$, ta đều có

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \text{ khi } x_1 < x < x_2.$$

Từ các tính chất đã nêu này, gợi ý cho chúng ta có thể ngầm coi hàm đồng biến như một hàm lồi "bậc 0", còn hàm lồi thì cũng có thể coi là "hàm đồng biến bậc hai". Với cách ngầm hiểu như vậy, ta có thể phát biểu định nghĩa hàm lồi bậc cao (bậc lẻ, $k \in \mathbb{N}^*$) tùy ý như sau.

Định nghĩa 2.1. Hàm số $f(x)$ được coi là hàm n -lồi trên $I(a; b)$ khi ứng với mọi bộ $n + 1$ số phân biệt trong $I(a; b)$, ta đều có

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)} \geq 0,$$

trong đó

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm lõm bậc cao.

Định nghĩa 2.2. Hàm số $f(x)$ được coi là hàm n -lõm trên $I(a; b)$ khi ứng với mọi bộ $n + 1$ số phân biệt trong $I(a; b)$, ta đều có

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)} \leq 0$$

trong đó

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Từ định nghĩa n -lồi (lõm) trên $I(a; b)$, ta dễ dàng chứng minh các tính chất sau.

Tính chất 2.4. Nếu hàm số $f(x)$ là hàm n - lồi trên $I(a; b)$ với $n > 2$, thì tồn tại $f^{(k)}(x), \quad \forall \quad 1 \leq k \leq n - 2$ và hàm số $g(x) = f^{(k)}(x)$ là hàm $n - k$ - lồi trên $I(a; b)$.

Tính chất 2.5. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm bậc n trên $I(a; b)$ khi và chỉ khi

$$f^{(n)}(x) \geq 0, \quad \forall x \in I(a; b).$$

Cũng tương tự như phép biểu diễn hàm lồi (lõm) thông thường, ta có.

Định lý 2.2. Nếu hàm số $f(x)$ là hàm n - lồi trên $I(a; b)$ thì tồn tại hàm số $g(x)$ và đa thức $P(x)$ bậc không quá $n - 1$ sao cho

$$f(x) = P(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t) dt. \quad (2.8)$$

Chúng minh được suy trực tiếp từ biểu diễn của hàm lồi $f^{(n-2)}(x)$

$$f^{(n-2)}(x) = a_0 + \int_a^x g(t) dt$$

và lấy tích phân $n - 2$ lần liên tiếp, ta thu được (2.8), điều phải chứng minh.

Chương 3

Một số áp dụng

3.1 Bài toán cực trị đại số

Trong mục này nêu cách thức vận dụng bất đẳng thức AG trong thực hành như là một công cụ trung gian để giải quyết một số dạng bất đẳng thức quen biết.

3.1.1. Điều chỉnh và lựa chọn tham số

Cũng như các ứng dụng đối với bất đẳng thức Cauchy, một số bất đẳng thức đồng bậc dạng không đối xứng ở mục này được xét khi dấu đẳng thức trong các bất đẳng thức xảy ra khi giá trị của các biến tương ứng không bằng nhau. Vì vậy kĩ thuật để giải các bài toán cực trị dạng không đối xứng là rất cần thiết. Một trong những kĩ thuật cơ bản nhất chính là xây dựng thuật toán sắp thứ tự gần đều. Trong trường hợp dạng bậc hai thì sử dụng phương pháp miền giá trị như đã nêu ở trên. Trong phần này, ta nêu thêm một số kĩ thuật nữa nhằm chỉnh tính đều bằng tham số. Ta đưa vào các tham số tự do cần thiết, thường là các giá trị trung gian được xác định sau theo cách chọn đặc biệt để tất cả các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra. Tham số phụ thuộc được đưa vào hợp lí để phương trình xác định chúng có nghiệm.

Bài toán 3.1. Xét bộ số thực $x_1, x_2, \dots, x_n (n > 2)$ thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \\ |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 1. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

Giải. Với $n = 3$, không giảm tổng quát, ta giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Ta có

$$\frac{P}{2} = (x_2 - x_1) \frac{x_3 - x_1}{2} (x_3 - x_2).$$

Sử dụng bất đẳng thức AG cho 3 số không âm ta nhận được

$$\frac{P}{2} \leq \left(\frac{(x_2 - x_1) + \frac{x_3 - x_1}{2} + (x_3 - x_2)}{3} \right)^3.$$

Hay

$$\frac{P}{2} \leq \left(\frac{x_3 - x_1}{2} \right)^3 \leq \frac{1}{8}.$$

Suy ra

$$P \leq \frac{1}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 \\ (x_2 - x_1) = \frac{x_3 - x_1}{2} = (x_3 - x_2) \end{cases} \quad \text{Hay} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $\text{Max } P = \frac{1}{4}$ khi $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2}$.

Với $n = 4$, một cách tự nhiên, ta có thể dự đoán rằng

$\text{Max } P$ đạt được khi $x_1 = -x_4, x_2 = -x_3$.

Giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. Khi đó thì $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$. Chọn hiệu $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ là đơn vị và đặt $x_3 - x_2 = a$, thì ta sẽ có bộ biến để biểu thức P đạt Max, cần thỏa mãn điều kiện

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \frac{x_3 - x_2}{3} = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_4 - x_2}{a+1} = \frac{x_4 - x_1}{a+2}.$$

Từ cách phân tích trên, ta có lời giải của bài toán trong trường hợp $n = 4$ như sau

Với giả thiết $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, ta có

$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{P}{a(a+2)(a+1)^2} &= (x_2 - x_1) \frac{(x_3 - x_1)}{a+1} \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} \frac{(x_3 - x_2)}{a} \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} (x_4 - x_3) \leq \\ &\leq \left[\frac{1}{6} \left((x_2 - x_1) + \frac{(x_3 - x_1)}{a+1} + \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} + \frac{(x_3 - x_2)}{a} + \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} + (x_4 - x_3) \right) \right]^6. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{a(a+2)(a+1)^2}{6^6} \times \\ &\times \left[(x_2 - x_1) \left(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} - 1 \right) (x_3 - x_4) \right]^6. \end{aligned}$$

Ta chọn a sao cho

$$\left(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} - 1 \right).$$

Hay $a = \sqrt{2} - 1$. Khi đó

$$\left(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} - 1 \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Và ta thu được

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 P \leq \frac{1}{6^6} \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)^6 \right]^6.$$

Hay $P \leq \frac{1}{2^8}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 1 \\ x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \frac{x_3 - x_2}{\sqrt{2} - 1} = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}} = \frac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}} = \frac{x_4 - x_1}{\sqrt{2} + 1}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta nhận được

$$\begin{cases} x_4 = -x_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ x_3 = -x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức hay $MaxP = \frac{1}{2^8}$ khi các biến thỏa mãn điều kiện (3.1).

Xét trường hợp $n = 5$.

Với giả thiết $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, ta dự đoán bộ số tương ứng để P đạt Max là $x_5 = -x_1, x_4 = -x_2, x_3 = 0$

Do vậy $x_2 - x_1 = x_5 - x_4$ và $x_3 - x_2 = x_4 - x_3$. Từ đó, ta có thể đoán nhận rằng nếu hiệu $x_2 - x_1$ bằng đơn vị và $x_3 - x_2 = a$ thì bộ số để P đạt Max cần phải thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - x_1}{1} &= \frac{x_4 - x_3}{a} = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_5 - x_3}{a+1} = \frac{x_4 - x_2}{2a} = \\ &= \frac{x_5 - x_2}{2a+1} = \frac{x_4 - x_1}{2a+1} = \frac{x_5 - x_1}{2a+2} = \frac{x_5 - x_4}{1}. \end{aligned}$$

Từ cách phân tích trên, ta suy ra lời giải bài toán trong trường hợp $n = 5$ như sau.

Không giảm tổng quát, ta giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_5 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_5 - x_2) \times \\ &\quad \times (x_4 - x_3)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4). \end{aligned}$$

Xét biểu thức

$$Q = \frac{P}{4a^2(a+1)^3(2a+1)^2}.$$

Viết Q dưới dạng

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{(x_2 - x_1)}{1} \right) \left(\frac{(x_3 - x_1)}{a+1} \right) \left(\frac{(x_4 - x_1)}{2a+1} \right) \left(\frac{(x_5 - x_1)}{2a+2} \right) \left(\frac{(x_3 - x_2)}{a} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{(x_4 - x_2)}{2a} \right) \left(\frac{(x_5 - x_2)}{2a+1} \right) \left(\frac{(x_4 - x_3)}{a} \right) \left(\frac{(x_5 - x_3)}{a+1} \right) \left(\frac{(x_5 - x_4)}{1} \right). \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AG cho 10 số không âm trên, ta có

$$Q \leq \frac{1}{10^{10}} [M]^{10}.$$

Trong đó

$$M = \left(\frac{(x_2 - x_1)}{1} \right) + \left(\frac{(x_3 - x_1)}{a+1} \right) + \left(\frac{(x_4 - x_1)}{2a+1} \right) + \left(\frac{(x_5 - x_1)}{2a+2} \right) + \left(\frac{(x_3 - x_2)}{a} \right) +$$

$$+ \left(\frac{(x_4 - x_2)}{2a} \right) + \left(\frac{(x_5 - x_2)}{2a + 1} \right) + \left(\frac{(x_4 - x_3)}{a} \right) + \left(\frac{(x_5 - x_3)}{a + 1} \right) + \left(\frac{(x_5 - x_4)}{1} \right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| = 1 \\ (x_3 - x_2) = \frac{x_3 - x_1}{3} = \frac{x_4 - x_1}{2} = \frac{x_5 - x_1}{3} = \frac{x_3 - x_2}{1} = \\ = \frac{x_4 - x_2}{1} = \frac{x_5 - x_2}{2} = \frac{x_4 - x_3}{1} = \frac{x_5 - x_3}{3} = \frac{x_5 - x_4}{1}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta nhận được

$$\begin{cases} x_1 = -x_5 = -\frac{3}{8} \\ x_2 = -x_4 = -\frac{1}{8} \\ x_3 = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $Max P = \frac{27}{2^{22}}$ khi các biến thỏa mãn điều kiện (3.2).

Nhận xét 3.1. Bằng phương pháp tương tự sẽ tìm được lời giải ứng với $n \geq 6$.

Bài toán 3.2. Xét bộ ba số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$21ab + 2bc + 12ca \leq 12.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

Giải. Với x, y, z là các số thực dương tùy ý (sẽ được chọn sau), áp dụng bất đẳng thức AG suy rộng, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{ax} + \frac{2y}{by} + \frac{3z}{cz} \geq (x + y + z) \left[\left(\frac{1}{ax} \right)^x \left(\frac{2}{by} \right)^y \left(\frac{3}{cz} \right)^z \right]^{\frac{1}{x+y+z}} \\ &= \frac{x + y + z}{\left[\left(\frac{abxy}{2} \right)^{\frac{x+y-z}{2}} \left(\frac{bcyz}{6} \right)^{\frac{-x+y+z}{2}} \left(\frac{cazx}{3} \right)^{\frac{x-y+z}{2}} \right]^{\frac{1}{x+y+z}}} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{xy(x+y-z)}{4}ab + \frac{yz(y+z-x)}{12}bc + \frac{zx(z+x-y)}{6}ca}.$$

Suy ra

$$P \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{xy(x+y-z)}{4}ab + \frac{yz(y+z-x)}{12}bc + \frac{zx(z+x-y)}{6}ca}. \quad (3.3)$$

Chọn các số x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\frac{xy(x+y-z)}{4.21} = \frac{yz(y+z-x)}{12.2} = \frac{zx(z+x-y)}{6.8}.$$

Hay $(x, y, z) = (6, 5, 4)$.

Thay $(x, y, z) = (6, 5, 4)$ vào (3.3), ta nhận được

$$P \geq \frac{15}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{6a} = \frac{2}{5b} = \frac{3}{4c} \\ 15ab = \frac{10bc}{3} = 8cz \\ 21ab + 2bc + 8ca = 12. \end{cases} \quad \text{Hay} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{1} \end{cases}.$$

Vậy $\text{Min}P = \frac{15}{2}$ khi $(a, b, c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{1}\right)$.

Bài toán 3.3. Xét bộ ba số thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} x, y, z \in [1, 3]; u, v, w \in [5, 7]; a, b, c \in [9, 11] \\ a + b + c + x + y + z + u + v + w = 60. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của

$$F = abcxzyuvw.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG cho ba số dương, ta có

$$F \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \frac{x+y+z}{3} \frac{u+v+w}{3} \right)^3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có

$$x = y = z, u = v = w, a = b = c.$$

Đặt

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} = r \\ \frac{x+\frac{3}{y}+z}{3} = p \\ \frac{u+\frac{3}{v}+w}{3} = q. \end{cases}$$

Khi đó thì

$$\begin{cases} p \in [1, 3]; q \in [5, 7]; r \in [9, 11] \\ p+q+r = 20 \\ F \leq (pqr)^3. \end{cases}$$

Xét $m > n > 1$, ta có

$$\begin{aligned} (mp)(nq)r &\leq \left(\frac{mp+nq+r}{3}\right)^3 = \left(\frac{p+q+r}{3} + \frac{m-1}{3}p + \frac{n-1}{3}q\right)^3 \\ &\leq \left(\frac{20}{3} + \frac{m-1}{3}3 + \frac{n-1}{3}7\right)^3. \end{aligned}$$

Suy ra

$$F \leq \frac{1}{(mn)^3} \left(\frac{20+3(m-1)+7(n-1)}{3}\right)^9.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=y=z, u=v=w, a=b=c \\ mp=nq=r; p=3, q=7; p+q+r=20. \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} x=y=z=3, u=v=w=7, a=b=c=10 \\ m=\frac{10}{3}, n=\frac{10}{7}. \end{cases}$$

Thay m, n vào ta được $F \leq (210)^3$.

Kết luận $\text{Max} F = (210)^3$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=y=z=3, u=v=w=7, a=b=c=10 \\ m=\frac{10}{3}, n=\frac{10}{7}. \end{cases}$$

Bài toán 3.4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \geq a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{m.a^{m+n} + n.b^{m+n}}{m+n},$$

$$\frac{m.b^{m+n} + n.c^{m+n}}{m+n},$$

$$\frac{m.c^{m+n} + n.a^{m+n}}{m+n}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{b^2} + ab^2 &\geq 2a^3, \\ \frac{b^5}{c^2} + bc^2 &\geq 2b^3, \\ \frac{c^5}{a^2} + ca^2 &\geq 2c^3, \\ a^3 + b^3 + c^3 &\geq ab^2 + bc^2 + ca^2.\end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ca} + \frac{c^5}{ab} \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{bc} + abc &\geq 2a^3, \\ \frac{b^5}{ca} + abc &\geq 2b^3, \\ \frac{c^5}{ab} + abc &\geq 2c^3, \\ a^3 + b^3 + c^3 &\geq 3abc.\end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.7. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{a^5}{b^3} + ab \geq 2\frac{a^3}{b}.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{a^5}{b^3} + 2ab \geq \frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{b} + ab.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{b} + ab \geq \frac{a^3}{b} + 2a^2.$$

Nên

$$\frac{a^5}{b^3} + 2ab \geq \frac{a^3}{b} + 2a^2,$$

$$\frac{b^5}{c^3} + 2bc \geq \frac{b^3}{c} + 2b^2,$$

$$\frac{c^5}{a^3} + 2ca \geq \frac{c^3}{a} + 2c^2,$$

và

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca).$$

Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.8. Cho a, b, c là các số thực dương phân biệt thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a^{102}}{b^{100}} + \frac{b^{102}}{c^{100}} + \frac{c^{102}}{a^{100}} < 1.$$

Chứng minh rằng luôn tồn tại các số tự nhiên k ($0 \leq k \leq 99$) sao cho bất đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$$\frac{a^{k+3}}{b^{k+1}} + \frac{b^{k+3}}{c^{k+1}} + \frac{c^{k+3}}{a^{k+1}} \leq \frac{1}{100} + \frac{a^{k+2}}{b^k} + \frac{b^{k+2}}{c^k} + \frac{c^{k+2}}{a^k}.$$

Giải. Vì a, b, c là các số dương phân biệt nên ta có thể sắp thứ tự dãy bất đẳng thức sau

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} < \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} < \dots < \frac{a^{102}}{b^{100}} + \frac{b^{102}}{c^{100}} + \frac{c^{102}}{a^{100}} < 1.$$

Ta chia $[0;1]$ thành 100 đoạn nhỏ bằng nhau có độ dài bằng $\frac{1}{100}$.

Suy ra theo nguyên lý Dirichle, trong 101 biểu thức của dãy bất đẳng thức trên phải có ít nhất hai biểu thức thuộc cùng một đoạn. Từ kết luận này, ta thu được điều cần chứng minh.

Nhận xét 3.2. Khi sử dụng bất đẳng thức AG cần chú ý

1. Lựa chọn thừa số để đảm bảo dấu đẳng thức của bất đẳng thức xảy ra.
2. Bổ sung thêm một số hạng để sau khi sử dụng bất đẳng thức AG ta khử được mẫu số của biểu thức phân thức.

Bài toán 3.9. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{9a^3}{a+2b} + a(a+2b) \geq 6a^2,$$

$$\frac{9b^3}{b+2c} + b(b+2c) \geq 6b^2,$$

$$\frac{9c^3}{c+2a} + c(c+2a) \geq 6c^2,$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca).$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.10. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(b+c)^2} + \frac{b^3}{(c+a)^2} + \frac{c^3}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{8a^3}{(b+c)^2} + (b+c) + (b+c) \geq 6a,$$

$$\frac{8b^3}{(c+a)^2} + (c+a) + (c+a) \geq 6b,$$

$$\frac{8c^3}{(a+b)^2} + (a+b) + (a+b) \geq 6c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{4a^3}{b(c+a)} + 2b + (c+a) \geq 6a,$$

$$\frac{4b^3}{c(a+b)} + 2c + (a+b) \geq 6b,$$

$$\frac{4c^3}{a(b+c)} + 2a + (b+c) \geq 6c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.12. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{bc^2} + \frac{b^4}{ca^2} + \frac{c^4}{ab^2} \geq a + b + c.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{a^4}{bc^2} + b + c + c \geq 4a,$$

$$\frac{b^4}{ca^2} + c + a + a \geq 4b,$$

$$\frac{c^4}{ab^2} + a + b + b \geq 4c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.13. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$\frac{8a^3}{(a+b)(b+c)} + (a+b) + (b+c) \geq 6a,$$

$$\frac{8b^3}{(b+c)(c+a)} + (b+c) + (c+a) \geq 6b,$$

$$\frac{8c^3}{(c+a)(a+b)} + (c+a) + (a+b) \geq 6c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.14. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Giải. Ta sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{b^2} + \frac{a^3}{c^2} \geq a+b+c.$$

Suy ra

$$\frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{b^2} + \frac{a^3}{c^2} = \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^3}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^3}{\left(\frac{1}{b}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$a+b+c=3abc.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a^3(c+2b)} + \frac{ca}{b^3(a+2c)} + \frac{ab}{c^3(b+2a)} \geq 1. \quad (3.4)$$

Giải. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{9a^3}{b+2c} + a(b+2c) &\geq 6a^2, \\ \frac{9b^3}{c+2a} + b(c+2a) &\geq 6b^2, \\ \frac{9c^3}{a+2b} + c(a+2b) &\geq 6c^2, \\ 3(a^2+b^2+c^2) &\geq 3(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức (3.4).

Từ (3.4) ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{b} + \frac{2}{c}} + \frac{\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{c} + \frac{2}{a}} + \frac{\frac{1}{c^3}}{\frac{1}{a} + \frac{2}{b}} &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{a+b+c}{abc} \right) = 1. \end{aligned}$$

Bài toán 3.16. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

Giải. Ta có

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3,$$

và

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2,$$

từ đây suy ra

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

Bài toán 3.17. Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và cho đa thức

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1 \in \mathbb{R}[x],$$

với $a_i \geq 0 (i = 0, \dots, n-1)$. Biết rằng $P(x)$ có nghiệm đều thực. Chứng minh rằng

$$P(m) \geq (m-1)^n.$$

Giải. Do $a_i \geq 0 (i = 0, \dots, n-1)$ và vì $P(0) = 1 > 0$ nên các nghiệm của $P(x)$ đều âm. Gọi các nghiệm của $P(x)$ là

$$-x_1, -x_2, \dots, -x_n \quad (x_i > 0, i = 1, \dots, n).$$

Theo định lý Vi-et thì

$$x_1x_2 \cdots x_n = 1.$$

Vì hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ bằng 1 nên

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x + x_i).$$

Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì

$$P(m) = \prod_{i=1}^n (m - x_i) \geq (m+1)^n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n 1}.$$

Bài toán 3.18. Cho đa thức

$$P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

có các nghiệm đều dương. Chứng minh rằng

$$|a_{2n-k}| \geq \left(C_n^k\right)^2 |a_0| \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2n.$$

Giải. Theo định lý Vi-et thì

$$|a_{2n-k}| = \left| \sum x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{2n-k}} \right|.$$

Trong đó tổng chứa C_{2n}^{2n-k} số hạng. Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta được

$$|a_{2n-k}| \geq \left(\prod x_i^{C_{2n}^{2n-k-1}} \right)^{\frac{1}{C_{2n}^{2n-k}}} C_{2n}^{2n-k}.$$

Để ý rằng

$$C_{2n}^{2n-k} = \frac{2n}{2n-k} C_{2n-1}^{2n-k-1}.$$

Từ đó suy ra

$$|a_{2n-k}| \geq \left(\prod x_i \right)^{\frac{2n-k}{2n}} C_{2n}^{2n-k}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$|a_k| \geq \left(\prod x_i \right)^{\frac{k}{2n}} C_{2n}^k.$$

Từ đó suy ra

$$|a_{2n-k} a_k| \geq \left(C_n^k\right)^2 |a_0| \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2n.$$

3.1.2. Bài tập

Bài 3.1. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b = 2$. Chứng minh rằng

$$x^3 y^3 (x^3 + y^3) \leq 2.$$

Bài 3.2. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 3.3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ba}} \geq 1.$$

Bài 3.4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+b)^3} + \frac{b^3}{(b+c)^3} + \frac{c^3}{(c+a)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Bài 3.5. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Bài 3.6. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} x + y + z, u = v = w = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = x^2y + y^2z + z^2x.$$

Bài 3.7. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn điều kiện

$$|f(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng

$$|a| + |b| + |c| + |d| \leq 7.$$

Bài 3.8. Cho $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$. Chứng minh rằng $n^{n+1} > (n+1)^n$.

Bài 3.9. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$x^x y^y z^z \geq (xyz)^{\frac{x+y+z}{3}}.$$

Bài 3.10. Cho $x, y \geq 0; x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}.$$

Bài 3.11. Giả sử phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm, ký hiệu m, n, p . Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{2}}{m} + \frac{\sqrt{3}}{n} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{p} \leq m^2 + n^2 + p^2.$$

Bài 3.12. Cho $a, b, c > 0; abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Bài 3.13. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

- (i) $(1+x)(1+y)(1+z) \geq (1 + \sqrt[3]{xyz})^3$.
(ii) $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\right)$.

Bài 3.14. Cho $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$. Tìm a, b, c để

$$|f(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Bài 3.15. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2c+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

Bài 3.16. Biết rằng phương trình $x^3 - ax^2 + bx - 1 = 0$ có ba nghiệm dương. Chứng minh rằng

$$2a^2(a+1) \geq 9(3b-1).$$

Bài 3.17. Cho $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn bán kính $R = 1$. Gọi ρ là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$, trong đó A', B', C' là chân các đường cao hạ từ A, B, C của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

$$\rho \leq 1 - \frac{1}{3}(1+r)^2.$$

Bài 3.18. Tam giác ABC có diện tích S . Trên các cạnh $BC = a; CA = b; AB = c$ lấy các điểm D, E, F sao cho tam giác DEF đều. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S} \geq \frac{2\sqrt{2}S}{DE}.$$

Bài 3.19. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $\forall P \in mp(ABC)$, ta luôn có $PA + PB + PC \geq CA + CB$ là góc $ABC \geq 120^\circ$.

Bài 3.20. Tứ giác $ABCD$ thỏa mãn điều kiện

- (i) $AB = AD + BC$.

(ii) Tồn tại điểm P ở trong tứ giác có khoảng cách đến CD bằng x sao cho $AP = x + AD$; $BP = x + BC$.

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

Bài 3.21. Cho một số tam giác nhọn. Từ các cạnh của tam giác đó dựng một tam giác mới Δ theo quy tắc sau. Cạnh nhỏ nhất của Δ bằng tổng các cạnh nhỏ nhất của tam giác đã cho. Cạnh "trung bình" của Δ bằng tổng các cạnh trung bình của tam giác đã cho. Cạnh lớn nhất của Δ bằng tổng các cạnh lớn nhất của tam giác đã cho. Gọi α là góc lớn nhất trong tam giác Δ . Chứng minh rằng $\cos \alpha > 1 - \sqrt{2}$.

Bài 3.22. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $6(a+b+c)r^2 = abc$. Lấy điểm M bất kỳ thuộc đường tròn nội tiếp tam giác. Hạ MD, ME, MF lần lượt vuông góc với BC, CA, AB. Gọi S, S_1 lần lượt là diện tích tam giác ABC, DEF. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của tỷ số $\frac{S}{S_1}$

3.2 Bài toán cực trị trong lượng giác

Các bài toán sau (từ bài toán 3.19 đến bài toán 3.23) có thể giải được trực tiếp bằng phương pháp tam thức bậc hai hoặc phương pháp miền giá trị của hàm phân thức mà tử thức và mẫu thức là đa thức bậc nhất hoặc bậc hai.

Bài toán 3.19. Cho các số thực a, b. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = a \sin x + b \cos x.$$

Giải. Cách 1. Với $\cos \frac{x}{2} = 0$ tức là $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$, thì $y = -b$.

Khi $x \neq \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ thì sử dụng công thức biến đổi theo $\tan \frac{x}{2}$ là

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ với } t = \tan \frac{x}{2}$$

ta nhận được bài toán cực trị cơ bản của hàm phân thức dạng

$$y = -\frac{bt^2 + 2at + b}{1+t^2}.$$

Cách 2. Biến đổi $y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin x + \varphi$, trong đó

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = a \sin x + b \cos x$$

lần lượt là $\sqrt{a^2 + b^2}$ và $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

Bài toán 3.20. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x.$$

Giải. Cách 1. Với $\cos x = 0$ tức là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ thì $y = a$.

Khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ thì sử dụng công thức $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Thu được bài toán cực trị cơ bản của phân thức dạng

$$y = \frac{at^2 + bt + c}{t^2 + 1} \quad \text{với } t = \tan x.$$

Cách 2. Biến đổi

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = A \sin 2x + B \cos 2x + C.$$

Trong đó $A = \frac{b}{2}, B = \frac{c-a}{2}, C = \frac{a+c}{2}$. Từ đó đưa về bài toán 3.19.

Bài toán 3.21. Cho các số thực $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}.$$

Giải. Với $\cos \frac{x}{2} = 0$, tức là $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$, thì $y = \frac{-b_1 + c_1}{-b_2 + c_2}$.

Khi $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, tức là $x \neq \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$, thì sử dụng công thức biến đổi theo $\tan \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{với } t = \tan \frac{x}{2}.$$

Khi đó ta nhận được bài toán cực trị cơ bản của hàm phân thức dạng

$$y = \frac{(c_1 - b_1)t^2 + 2a_1t + b_1 + c_1}{(c_2 - b_2)t^2 + 2a_2t + b_2 + c_2}.$$

Bài toán 3.22. Cho các số thực $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin^2 x + b_2 \sin x \cos x + c_2 \cos^2 x}.$$

Giải. Với $\cos x = 0$, tức là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, thì $y = \frac{a_1}{a_2}$.

Khi $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, thì ta chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 x$, ta nhận được bài toán cực trị cơ bản của hàm phân thức dạng

$$y = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{a_2 t^2 + b_2 t + c_2} \text{ với } t = \tan \frac{x}{2}.$$

Bài toán 3.23. Cho các số thực a, b, c . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c.$$

Giải. Đặt $\sin x \pm \cos x = t$ thì $|t| \leq \sqrt{2}$ và ta nhận được bài toán cực trị cơ bản của tam thức bậc hai

$$y = at \pm \frac{b}{2}(t^2 - 1) + c.$$

Bài toán 3.24. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq x \leq y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x, y) = x \cos y - y \cos x + (x - y) \left(\frac{1}{z} xy - 1 \right).$$

Giải. Trước hết ta nhận xét rằng

(i) Nếu $g(t)$ là hàm số liên tục và đồng biến trong $[0; y]$, thì với mọi x sao cho $0 \leq x \leq y$, ta luôn có

$$y \int_0^x g(t) dt \leq x \int_0^y g(t) dt. \quad (3.5)$$

(ii) Nếu $g(t)$ là hàm số liên tục và nghịch biến trong $[0; y]$, thì với mọi x sao cho $0 \leq x \leq y$, ta đều có

$$y \int_0^x g(t) dt \geq x \int_0^y g(t) dt. \quad (3.6)$$

Thật vậy (i) Xét trường hợp $g(t)$ liên tục và đồng biến trong $[0; y]$.

*) Với $x = y$ hoặc $x = 0$ thì (1) hiển nhiên đúng.

*) Với $0 < x < y$, ta xét hàm số

$$F(x) = \frac{\int_0^x g(t)dt}{x}.$$

Có

$$F'(x) = \frac{xg(x) - \int_0^x g(t)dt}{x^2}.$$

Do hàm số $g(t)$ đồng biến trong $[0; y]$ nên với $t \in (0; x) \subset (0; y)$, ta có

$$\int_0^x g(t)dt \leq \int_0^x g(x)dt = xg(x).$$

Vậy $F'(x) \geq 0$ với $0 < x < y$, tức là $F(x)$ đồng biến trong $(0; y)$. Do đó

$$\frac{\int_0^x g(t)dt}{x} \leq \frac{\int_0^y g(t)dt}{y}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra (3.5).

(ii) Đối với trường hợp $g(t)$ liên tục và nghịch biến trong $[0; y]$ thì với $t \in (0; x) \subset (0; y)$, ta có

$$\int_0^x g(t)dt \geq \int_0^x g(x)dt = xg(x).$$

Vậy $F'(x) \leq 0$ với $0 < x < y$, tức là $F(x)$ nghịch biến trong $(0; y)$. Do đó

$$\frac{\int_0^x g(t)dt}{x} \geq \frac{\int_0^y g(t)dt}{y}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra (3.6).

Xét hàm số $g(t) = \sin t + t$. Ta thấy $g(t)$ là hàm liên tục và đồng biến trong $[0; y]$, nên theo (1) với mọi x sao cho $0 \leq x \leq y$, ta đều có

$$y \int_0^x (\sin t + t)dt \leq x \int_0^y (\sin t + t)dt$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y \left(-\cos t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x \leq x \left(-\cos t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^y \\
&\Leftrightarrow y \left(-\cos x + \frac{x^2}{2} + 1 \right) \leq x \left(-\cos y + \frac{y^2}{2} + 1 \right) \\
&\Leftrightarrow -y \cos x + \frac{x^2 y}{2} + y \leq -x \cos y + \frac{xy^2}{2} + x.
\end{aligned}$$

Hay

$$x \cos y - y \cos x + \frac{x^2 y}{2} - \frac{xy^2}{2} + y - x \leq 0.$$

Suy ra

$$x \cos y - y \cos x + (x - y) \left(\frac{1}{2}xy - 1 \right) \leq 0.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x, y)$ là 0 ứng với $x = 0, y \geq 0$ tùy ý hoặc $x = y$.

Bài toán 3.25. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} \quad \text{với mọi } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Giải. Khi $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ thì $0 \leq \sin x \leq 1$ nên $\sqrt{\sin x} \geq \sin^2 x$.

Do $0 \leq \cos x \leq 1$ nên $\sqrt[3]{\cos x} \geq \cos^2 x$.

Suy ra

$$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

vậy $y_{\min} = 1$ khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 3.26. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 1 + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x.$$

Giải. Xét hàm số

$$\begin{aligned}
y &= 1 + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x \\
&= 1 + \cos x \frac{1}{2} (2 \cos^2 x - 1) + \frac{1}{3} (4 \cos^3 x - 3 \cos x) \\
&= \frac{4}{3} \cos^3 x + \cos^2 x + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x, |x| \leq 1$. Khi đó $y = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2}$. Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2} \quad \text{trong } [-1; 1].$$

Ta có $y' = 4t^2 + 2t$. Suy ra $y' = 0$ khi $t = 0$ và $t = -\frac{1}{2}$.

Ta có y' đổi dấu từ dương sang âm tại $t = -\frac{1}{2}$ và y' đổi dấu từ âm sang dương tại $t = 0$ nên

$$y_{\text{CD}} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{12}, \quad y_{\text{CT}} = y(0) = \frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$y_{\max} = \max\{y(-1), y(-\frac{1}{2}), y(1)\} = \frac{17}{6} \text{ khi } t = 1 (x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

và

$$y_{\min} = \min\{y(-1), y(0), y(1)\} = \frac{1}{6} \text{ khi } t = -1 (x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

Bài toán 3.27. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = -\cos 3x + 2\cos 2x + \cos x.$$

Giải. Xét hàm số

$$\begin{aligned} y &= -\cos 3x + 2\cos 2x + \cos x \\ &= -4\cos^3 x + 4\cos^2 x + 4\cos x - 2. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x, |t| \leq 1$. Khi đó $y = -4t^3 + 4t^2 + 4t - 2$. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = -4t^3 + 4t^2 + 4t - 2 \quad \text{với điều kiện } |t| \leq 1.$$

Làm tương tự như bài toán 3.26, ta được

$$y_{\min} = -\frac{74}{27} \quad \text{khi } \cos x = -\frac{1}{3}.$$

Bài toán 3.28. (Định lý Feje'r).

Chứng minh rằng với mọi $x \in [0; \pi]$ và với mọi số nguyên dương n , ta đều có

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx \geq 0. \quad (3.7)$$

Giải. Ta chỉ cần xét $0 < x < \pi$.

Đặt

$$S_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx.$$

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n và phản chứng.

*) Với $n = 1$, ta có $S_1(x) = \sin x > 0$ với $x \in (0; \pi)$ hiển nhiên đúng.

*) Giả sử (3.7) đúng với n , tức là $S_n(x) \geq 0$ với $x \in (0; \pi)$.

Ta chứng minh (3.7) đúng với $n + 1$.

Thật vậy. Giả sử tồn tại $x_0 \in (0; \pi)$ sao cho $S_{n+1}(x_0) < 0$. Khi đó (vì $S_{n+1}(x)$ là một hàm liên tục trên $[0; \pi]$), $S_{n+1}(x)$ có giá trị nhỏ nhất là một số âm, và ta có thể chọn x_0 sao cho

$$\min_{x_0 \in [0; \pi]} S_{n+1}(x) = S_{n+1}(x_0) < 0.$$

Hàm $S_{n+1}(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (0; \pi)$.

$$S'_{n+1}(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos(n+1)x = \frac{\sin \frac{(2n+3)x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

và nhận giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 \in (0; \pi)$. Vậy tại x_0 , ta có

$$S'_{n+1}(x_0) = 0, \quad \text{tức là } \sin \frac{(2n+3)x_0}{2} = \sin \frac{x_0}{2} > 0 \quad (\text{Do } x_0 \in (0; \pi)).$$

Suy ra

$$\left| \cos \frac{(2n+3)x_0}{2} \right| = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{(2n+3)x_0}{2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{x_0}{2}} = \cos \frac{x_0}{2} > 0.$$

Theo định nghĩa, ta có

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + \frac{\sin(n+1)x}{n+1}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (n+1)(S_{n+1}(x_0) - S_n(x_0)) &= \sin(n+1)x_0 \\ &= \sin \frac{(2n+3)x_0}{2} \cos \frac{x_0}{2} - \cos \frac{(2n+3)x_0}{2} \sin \frac{x_0}{2} \\ &\geq \sin \frac{x_0}{2} \cos \frac{x_0}{2} - \left| \cos \frac{(2n+3)x_0}{2} \right| \sin \frac{x_0}{2} = \end{aligned}$$

$$= \sin \frac{x_0}{2} \cos \frac{x_0}{2} - \sin \frac{x_0}{2} \cos \frac{x_0}{2} = 0.$$

Suy ra

$$S_n(x) \leq S_{n+1}(x_0) < 0, \text{ (trái với giả thiết } S_n(x) \geq 0, \quad \forall x \in (0; \pi)).$$

Vậy, ta phải có $S_{n+1}(x_0) \geq 0, \quad \forall x \in (0; \pi)$.

Bất đẳng thức (3.7) được chứng minh.

Bài toán 3.29. Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi số tự nhiên n , ta có

$$1 + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \cdots + \frac{1}{n} \cos nx \geq 0.$$

Giải.

*) Với $n = 1$, ta thấy kết quả trên là đúng.

*) Ta xét với $n \geq 2$. Đặt

$$S_n(x) = 1 + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \cdots + \frac{1}{n} \cos nx.$$

Các hàm $S_n(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , và là những hàm chẵn, vì vậy ta chỉ cần xét những hàm đó trên đoạn $[0; \pi]$. Ta có

$$\begin{aligned} S'_n(x) + S'_{n+1}(x) &= \frac{\cos \frac{(2n+1)x}{2} + \cos \frac{(2n+3)x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cos(n+1)x - 1}{\tan \frac{x}{2}} \leq 0, \quad x \in (0; \pi). \end{aligned}$$

Biểu thức $\cos(n+1)x - 1$ bằng 0 tại những điểm rời rạc $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}, (k \in \mathbb{Z})$ và $\cos(n+1)x - 1 < 0$ trên khoảng $(x_k; x_{k+1})$. Suy ra hàm $S_n(x) + S_{n+1}(x)$ là hàm nghịch biến trên $[0; \pi]$. Do vậy

$$\begin{aligned} S_n(x) + S_{n+1}(x) &\geq S_n(\pi) + S_{n+1}(\pi) \\ &= 2(1 + \cos \pi + \frac{1}{2} \cos 2\pi + \frac{1}{3} \cos 3\pi + \cdots + \frac{1}{n} \cos n\pi) + \frac{1}{n+1} \cos(n+1)\pi \\ &= 2(\frac{1}{2} \cos 2\pi + \frac{1}{3} \cos 3\pi + \cdots + \frac{1}{n} \cos n\pi) + \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

Vì $\cos k\pi = (-1)^k$, nên với $n = 2m$ ($m \geq 1$), ta có

$$S_{2m}(x) + S_{2m+1}(x) \geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m}\right) - \frac{1}{2m+1}. \quad (3.8)$$

Mặt khác

$$S_{2m}(x) + S_{2m+1}(x) = 2S_{2m}(x) + \cos \frac{(2m+1)x}{2m+1}.$$

Theo (3.8) thì

$$S_{2m}(x) + S_{2m+1}(x) \geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2m-1}\right) + \frac{1}{m} - \frac{1}{2m+1}.$$

Hay

$$\begin{aligned} S_{2m}(x) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2m-1}\right) + \frac{1}{2m} - \frac{1 + \cos(2m+1)x}{2(2m+1)} \\ &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2m-2} - \frac{1}{2m-1}\right) > 0. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$S_{2m}(x) + S_{2m+1}(x) = 2S_{2m+1}(x) - \cos \frac{(2m+1)x}{2m-1}.$$

Theo (3.8) thì

$$\begin{aligned} S_{2m}(x) + S_{2m+1}(x) &\geq 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2m-1}\right) + \frac{1}{m} - \frac{1}{2m+1} \\ &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2m-2} - \frac{1}{2m-1}\right) > 0. \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.30. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{15 - 10\sqrt{2} \cos x}.$$

Giải. Nhận xét rằng hàm số đã cho xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và

$$f(x) = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{5} \sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos x}.$$

Tiếp theo áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski cho hai bộ số $(1; \sqrt{5})$ và $(\sqrt{2} \sin x; \sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos x})$, ta nhận được

$$[f(x)]^2 \leq (1 + 5)(2 \sin^2 x + 3 - 2\sqrt{2} \cos x)$$

$$= 6[6 - (\sqrt{2} \cos x + 1)^2] \leq 6^2.$$

Do đó $f(x) \leq 6$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos x + 1 = 0 \\ \frac{\sqrt{2} \sin x}{1} = \frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2} \cos x}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Hay $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài toán 3.31. Xét dãy số thực $x_n, n = 1, 2, 3, \dots, 2004$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\pi}{6} \leq x_1, x_2, \dots, x_{2004} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$y = (\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_{2004}) \left(\frac{1}{\sin x_1} + \frac{1}{\sin x_2} + \dots + \frac{1}{\sin x_{2004}} \right).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} \leq x_i \leq \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \sin x_i \leq 1 \text{ với } i = 1, 2, \dots, 2004 \\ &\Leftrightarrow (\sin x_i - \frac{1}{2})(\sin x_i - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x_i - \frac{3}{2} \sin x_i + \frac{1}{2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x_i - \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \sin x_i} \leq 0, \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, 2004. \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i} \leq 2004 \cdot \frac{3}{2}. \quad (3.9)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i} \geq 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i}}. \quad (3.10)$$

Từ (3.9) và (3.10) suy ra

$$\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i \cdot \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i} \leq \frac{9}{8} \cdot 2004^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi (3.9) và (3.10) xảy ra dấu " $=$ ", tức là $\sin x_i = \frac{1}{2}$ hoặc $\sin x_i = 1$, với $i = 1, 2, \dots, 2004$ và $\sum_{i=1}^{2004} \sin x_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{\sin x_i}$.

Gọi p là số các $\sin x_i$ bằng $\frac{1}{2}$ và q là số các $\sin x_i$ bằng 1, ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} p + q = 2004 \\ \frac{1}{2}p + q = \frac{1}{2}(2p + q) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} p = q = 2004 \\ p + 2q = 2p + q \end{cases} \\ \Leftrightarrow & p = q = 1002. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của y bằng $\frac{9}{8} \cdot 2004^2$ khi đó có 1002 số x_i bằng $\frac{\pi}{6}$ và 1002 số x_i bằng $\frac{\pi}{2}$.

Bài toán 3.32. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq x \leq y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x, y) = \ln \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^y}{(y^2 + 1)^x}} - xy(\operatorname{arccot} y - \operatorname{arccot} x).$$

Giải. Xét hàm số $g(t) = \operatorname{arccot} t$ ($0 \leq t \leq y$). Ta có

$$g'(t) = -\frac{1}{1+t^2} < 0,$$

nên $g(t)$ liên tục và nghịch biến trong $[0; y]$. Theo (2) ở bài toán 6, $\forall x, y$ mà $0 \leq x \leq y$ thì

$$\begin{aligned} & y \int_0^x \operatorname{arccot} t dt \geq x \int_0^y \cos t dt \\ \Leftrightarrow & y(t \cdot \operatorname{arccot} t \Big|_0^x + \int_0^x \frac{t dt}{t^2 + 1}) \geq x(t \cdot \operatorname{arccot} t \Big|_0^y + \int_0^y \frac{t dt}{t^2 + 1}) \\ & y[x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)] \geq x[y \operatorname{arccot} y + \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1)]. \end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned} & xy(\operatorname{arccot} x - \operatorname{arccot} y) + \ln \sqrt{(x^2 + 1)^y} - \ln \sqrt{(y^2 + 1)^x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \ln \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^y}{(y^2 + 1)^x}} - xy(\operatorname{arccot} x - \operatorname{arccot} y) \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $f(x, y)$ là 0 ứng với $x = 0, y$ tùy ý thỏa mãn điều kiện $y \geq x$ hoặc $x = y$.

3.2.3. Bài tập

Bài 3.23 Giả sử phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ba nghiệm $\tan \alpha_1, \tan \alpha_2, \tan \alpha_3$ và phương trình $x^3 + cx^2 + bx + a = 0$ có ba nghiệm $\tan \beta_1, \tan \beta_2, \tan \beta_3$. Chứng minh rằng

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 3.24 Giả sử phương trình $x^3 + x^2 + x + a = 0$ có ba nghiệm $\tan \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\beta}{2}, \tan \frac{\gamma}{2}$ với $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi)$. Chứng minh rằng

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

Bài 3.25 Chứng minh rằng hàm số

$$f(t) = \frac{a \tan \alpha t + b}{c \tan \alpha t + d} \quad \text{với} \quad ad - bc \neq 0$$

thỏa mãn hệ thức

$$\frac{f(t_1 + t) - f(t_3 + t)f(t_2 + t) - f(t_4 + t)}{f(t_2 + t) - f(t_3 + t)f(t_1 + t) - f(t_4 + t)} = \frac{f(t_1) - f(t_3)f(t_2) - f(t_4)}{f(t_2) - f(t_3)f(t_1) - f(t_4)}$$

với mọi bộ số phân biệt t, t_1, t_2, t_3, t_4 .

Bài 3.26 Cho

$$\begin{cases} \frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x - \beta)} = \frac{a}{b} \\ \frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)} = \frac{A}{B}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{aA + bB}{aB + bA} = \cos(\alpha - \beta).$$

3.3 Giải và biện luận phương trình, bất phương trình

Phương pháp bất đẳng thức để giải phương trình, bất phương trình dựa vào các nhận xét sau.

Bổ đề 3.3.1 Nếu với mọi $x \in (a, b) \subseteq D_f \cap D_g$, ta luôn có.

$$\begin{cases} f(x) \leq A \\ g(x) \geq A \end{cases}$$

(với $A = \text{const}$ cho trước $\in \mathbb{R}$), thì trong $I(a; b)$ ta có

$$1) f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A. \end{cases}$$

$$2) f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases} \Leftrightarrow (f(x) = g(x)).$$

3) $f(x) > g(x)$ không có nghiệm $x \in I(a; b)$.

4) $f(x) \leq g(x)$ luôn đúng với mọi $x \in I(a; b)$.

Bổ đề 3.3.2 Nếu với mọi $x \in I(a; b) \subseteq D_f \cap D_g$ ta luôn có $f(x) \leq g(x)$ (I) và dấu bằng trong bất đẳng thức (I) xảy ra khi và chỉ khi x thỏa mãn điều kiện (α) thì trong $I(a; b)$ ta có

1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (\alpha)$ (Xảy ra dấu bằng trong $(*)$).

2) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow (\alpha)$ (Xảy ra dấu bằng trong $(*)$).

3) $f(x) > g(x)$ không có nghiệm $x \in I(a; b)$.

4) $f(x) \leq g(x)$ luôn đúng với mọi $x \in I(a; b)$.

Nhận xét sau là hệ quả trực tiếp của nhận xét (4). Phương pháp giải phương trình, bất phương trình dựa vào nhận xét này còn được gọi là phương pháp tổng các số hạng không âm hay là phương pháp tổng bình phương.

Bổ đề 3.3.3 Nếu với mọi $x \in I(a; b)$ ta luôn có $A \geq 0; B \geq 0; C \geq 0$ thì trong

$$I(a; b) \text{ ta luôn có } A + B + C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

Đặc biệt

$$1) \quad A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

$$2) \quad A^{2n} + \sqrt[2k]{B} + |C| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0. \end{cases}$$

Bài toán 3.33. Giải phương trình

$$x^2 + 1 = \sqrt[4]{1 - \sin^4 x}. \quad (3.11)$$

Giải. Với mọi x thuộc tập xác định, ta luôn có $VT(3.11) \geq 1$, đồng thời $VP(1) \leq 1$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} VT(3.11) = 1 \\ VP(3.11) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ \sqrt[4]{1 - \sin^4 x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình (3.11) có nghiệm $x = 0$

Bài toán 3.34. Giải phương trình

$$2 \sin^5 x + 3 \cos^3 x = 5. \quad (3.12)$$

Giải. Với mọi x thuộc tập xác định $\mathbb{R}$, ta luôn có

$$\begin{cases} 2 \sin^5 x \leq 2.1 = 2 \\ 3 \cos^3 x \leq 3.1 = 3 \end{cases} \Rightarrow VT(3.12) \leq 2.1 + 3.1 = 5 = VP(3.12).$$

Dấu bằng xảy ra

$$\begin{cases} \sin^5 x = 1 \\ \cos^3 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = \sin^2 x + \cos^2 x = 2 \quad (\text{vô lý}).$$

Vậy phương trình (3.12) vô nghiệm.

Bài toán 3.35. Giải phương trình

$$6x - x^2 - 2 = |x - 1| + |x - 2| + |2x - 3| + |4x - 13|. \quad (3.13)$$

Giải. Với mọi x thuộc tập xác định $\mathbb{R}$, ta luôn có

$$VP(3.13) = |x - 1| + |x - 2| + |2x - 3| + |13 - 4x| \geq |x - 1 + x - 2 + 2x - 3 + 13 - 4x| = 7.$$

$$\text{Còn } VT(3.13) = 6x - (x - 3)^2 \text{ luôn } \leq 7 \text{ nên } (3.13) \Leftrightarrow \begin{cases} VT(3.13) = 7 \\ VP(3.13) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình (3.13) có nghiệm $x = 3$.

Bài toán 3.36. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0 & (\alpha) \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 & (\beta) \end{cases} \quad (3.14)$$

Giải. Nếu $y = 0$ thì từ (α) ta có $x = 0$. Thay vào (β) được $3 = 0$ (vô lý). Vậy $y \neq 0$.

Coi (α) là phương trình bậc hai ẩn x . Ta có

$$(\alpha) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta'_{(\alpha)} = 1 - y^4 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1. \quad (\alpha.1)$$

Tương tự, coi (β) là phương trình bậc hai ẩn x . Ta cũng có

$$(\beta) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta'_{(\beta)} = -2 - 2y^3 \geq 0 \Rightarrow y \leq -1. \quad (\beta.1)$$

Từ $(\alpha.1)$ và $(\beta.1)$ ta được $y = -1$. Thay vào (α) ta được $x = 1$.

Các giá trị này thỏa mãn hệ phương trình (3.14).

Vậy hệ phương trình (3.14) có nghiệm $(x; y) = (1; -1)$.

Bài toán 3.37. Giải phương trình

$$\sin^2 x - \sqrt{2} \sin x + \tan^2 x - 2 \tan x + \frac{3}{2} = 0. \quad (3.15)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} (3.15) &\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + (\tan x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \tan x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình (3.15) có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Bài toán 3.38. Giải phương trình

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}. \quad (3.16)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} VT(3.16) &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \cos^2 \frac{x+y}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{x-y}{2} \leq \frac{3}{2} \\ &= VP(3.16). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(2 \cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2}\right)^2 + \sin^2 \frac{x-y}{2} = 0$.

Hay

$$\begin{cases} 2 \cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2} = 0 \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0 \\ \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2k\pi \\ \frac{x+y}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi \end{cases}$$

(với $k, n \in \mathbb{Z}$).

Tức là

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = \frac{2\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = -\frac{2\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases}$$

(với $k, n \in \mathbb{Z}$).

Vậy phương trình (3.16) (xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức (3.17)) có nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases}$$

$$\text{và } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = \frac{2\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = -\frac{2\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases}$$

trong đó $k, n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 3.39. Giải phương trình

$$4 \cos^2 x + 3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 2\sqrt{3} \tan x + 4 = 0. \quad (3.18)$$

Giải. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$(3.18) \Leftrightarrow (4 \cos^2 x - 4\sqrt{3} \cos x + 3) + (3 \tan^2 x + 2\sqrt{3} \tan x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} \tan x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3} \tan x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi.$$

Vậy phương trình (3.18) có nghiệm $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Bài toán 3.40. Giải phương trình

$$\sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x. \quad (3.19)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} (3.19) &\Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 3x\right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 3x (1 - \sin^2 3x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 3x = 0 \\ \sin^2 3x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \sin^2 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin x = 0 \\ \sin^2 3x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 0 \\ \sin x = 0 \\ (3 \sin x - 4 \sin^3 x)^2 = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Bài toán 3.41. Giải phương trình

$$\cos 2x - \cos 6x + 4(3 \sin x - 4 \sin^3 x + 1) = 0. \quad (3.20)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} (3.20) &\Leftrightarrow (1 + \cos 2x) + (1 - \cos 6x) + 4 \sin 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 3x + 4 \sin 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x + (\sin 3x + 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \text{ hoặc } \sin x = 1 \\ 3 \sin x - 4 \sin^3 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Bài toán 3.42. Giải phương trình

$$x^2 + 2x \sin x - 2 \cos x + 2 = 0. \quad (3.21)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
 (3.21) &\Leftrightarrow (x^2 + 2x \sin x + \sin^2 x) + (\cos^2 x - 2 \cos x + 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x + \sin x)^2 + (\cos x - 1)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sin x = 0 \\ \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -x \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = (-x)^2 + 1^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 0.
 \end{aligned}$$

Bài toán 3.43. Giải phương trình

$$\sqrt{\sin^2 x - \sin x + \frac{17}{4}} + \sqrt{\cos^2 x - \sqrt{3} \cos x + \frac{39}{4}} = 5. \quad (3.22)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
 (3.22) &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4} + \sqrt{\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 9} = 5 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \frac{1}{2} = 0 \\ \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

Bài toán 3.44. Giải phương trình

$$\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = 1. \quad (3.23)$$

Giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x} \geq 0 \\ \frac{1}{\cos 3x} - 1 = \frac{1 - \cos 3x}{\cos 3x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \cos x \leq 1 \\ 0 \leq \cos 3x \leq 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Với điều kiện (3.24), ta có

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} \cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} = \sqrt{\cos x - \cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \\ \cos 3x \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = \sqrt{\cos 3x - \cos^2 3x} = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\cos 3x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \\
 &\Rightarrow \cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
 &\text{Do đó } (3.23) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos 3x + 1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Vô nghiệm.}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình (3.23) vô nghiệm.

Bài toán 3.45. Giải phương trình

$$\tan^2 x + 2(\sin y + \cos y) \tan x + 2 = 0. \quad (3.25)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} (3.25) &\Leftrightarrow [\tan x + (\sin y + \cos y)]^2 + 2 - (\sin y + \cos y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\tan x + \sin y + \cos y)^2 + 1 - 2 \sin y \cos y = 0 \\ &\Leftrightarrow (\tan x + \sin y + \cos y)^2 + (\sin y - \cos y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin y - \cos y = 0 \\ \tan x + \sin y + \cos y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan y = 1 \\ \tan x = -\sqrt{2} \sin(y + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = -\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi; \tan x = -\sqrt{2} = -\tan \alpha \\ y = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi; \tan x = \sqrt{2} = \tan \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi; x = -\alpha + m\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + (2n+1)\pi; x = \alpha + m\pi \end{cases} \text{ với } \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan \alpha = \sqrt{2} \end{cases}, (m, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Bài toán 3.46. Giải phương trình

$$\tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y) = 1. \quad (3.26)$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} \cot(x+y) &= \frac{1}{\tan(x+y)} = \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} \\ &\Rightarrow \cot(x+y)[\tan x + \tan y] = 1 - \tan x \tan y \\ &\Leftrightarrow \tan x \tan y + \tan y \cot(x+y) + \cot(x+y) \tan x = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Lấy các vế tương ứng của (3.27) trừ các vế tương ứng của (3.26), ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[(\tan x - \tan y)^2 + (\tan y - \cot(x+y))^2 + (\cot(x+y) - \tan x)^2] = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan y = \cot(x+y) \\ \tan^2 x + \tan^2 y + \cot^2(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \tan y = \cot(x+y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan x = \tan y = \cot(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hệ

$$\begin{cases} \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot(x+y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + m\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + n\pi \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Xét hệ

$$\begin{cases} \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + m\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + n\pi \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Bài toán 3.47. Cho bất phương trình

$$\sqrt{3} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \geq m. \quad (3.28)$$

1) Tìm m để bất phương trình vô nghiệm.

2) Tìm nghiệm của bất phương trình

$$\sqrt{3} \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \geq \sqrt{3} \text{ thỏa mãn điều kiện } \lg(x^2 + x + 1) < 1.$$

Giải. 1) Bất phương trình (3.28) $\Leftrightarrow \sqrt{3} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin 2x \geq m$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} - m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} - m < -1 \Leftrightarrow m > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Với $m = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) &\leq -\frac{\sqrt{3}}{2} && \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi &\leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \lg(x^2 + x + 1) &< 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + x + 1 &< 10 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 9 &< 0 \Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{37}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Từ (3.29) và (3.30) $\Rightarrow x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài toán 3.48. Tìm a để bất phương trình sau nghiệm đúng $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\sin^5 x + \cos^5 x - a(\sin x + \cos x) \geq \sin x \cos x (\sin x + \cos x). \quad (3.31)$$

Giải.

$$\begin{aligned} \text{VT (3.31)} &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^3 x + \cos^3 x) - \sin^2 x \cos^2 x - \sin^3 x \cos^3 x - \\ &\quad - a(\sin x + \cos x) \\ &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) - \sin^2 x \cos^2 x (\sin x + \cos x) - \\ &\quad - a(\sin x + \cos x) \\ &= (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x - a). \end{aligned}$$

Do đó ta có

$$(3.31) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x - a) \geq 4. \quad (3.32)$$

Vì $\sin x + \cos x > 0, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ nên

$$(3.32) \Leftrightarrow \sin^2 2x + a \sin 2x + 4(a - 1) \leq 0 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Đặt $t = \sin 2x \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 4t + 4(a - 1) \leq 0 \quad \forall x \in [0; 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 4(a - 1) \leq 0 \\ f(1) = 1 + 4a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -\frac{1}{4}.$$

Bài toán 3.49. Tìm a để hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x}.$$

Giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + a \sin x \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x + \frac{a}{2} \sin 2x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin 2x$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f(t) = 3t^2 - 2at - 4 \leq 0 \quad t \in [-1; 1] \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3f(-1) \leq 0 \\ 3f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 2a - 1 \leq 0 \\ f(1) = -2a - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bài toán 3.50. Giải biện luận bất phương trình

$$(m+1) \cos 2x + m(1 + \sin 2x) < 0. \quad (3.33)$$

Giải. Xét $\cos x = 0$ hay $x = \frac{\pi}{2} = k\pi$ là nghiệm của (3.33). Vì khi đó $\cos 2x = -1$ và $\sin 2x = 0$, khi đó (3.33) $\Leftrightarrow -(m+1) + m = -1 < 0$ (luôn đúng)

Xét $\cos x \neq 0$ không là nghiệm của (3.33). Đặt

$$t = \tan x \Rightarrow \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Bất phương trình (3.33)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (m+1) \frac{1-t^2}{1+t^2} + m \frac{2t}{1+t^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow (m+1)(1-t^2) + m(t+1)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1)(-t+2m+1) < 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Xét $f(t) = (t+1)(-t+2m+1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1; t_2 = 2m+1$.

+) Nếu $m > -1$ thì $t_2 = 2m+1 > -1 = t_1$, khi đó ta có

$$(3.34) \Leftrightarrow (t < -1) \cup (t > 2m+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Trong đó $\tan \alpha = 2m+1$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

+) Nếu $m = -1$ thì $t_1 = t_2 = -1$, khi đó (3.34) $\Leftrightarrow (t+1)^2 > 0$

$$\Leftrightarrow t \neq -1 \Leftrightarrow \tan x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

+) Nếu $m < -1$ thì $t_1 = t_2 < -1 = t_1$, khi đó (3.34) $\Leftrightarrow$

$$(2m+1) \cup (t > -1) \Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\right).$$

Bài toán 3.51. Tìm a, b để bất phương trình sau luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\cos 2x + a \cos x + b - 1| \leq 1. \quad (3.35)$$

Giải. Giả sử bất phương trình đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cho

$$x = 0 \Rightarrow |a + b| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a + b \leq 1. \quad (3.36)$$

Cho

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b - 2| \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq b \leq 3. \quad (3.37)$$

Cho

$$x = \pi \Rightarrow |b - a| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq b - a \leq 1. \quad (3.38)$$

Lấy các vế (3.36) cộng với (3.38)

$$\Rightarrow 2b \leq 2 \Rightarrow b \leq 1. \quad (3.39)$$

Từ (3.37) và (3.39) $\Rightarrow b = 1$.

Thế $b = 1$ vào (3.36)

$$\Rightarrow a \leq 0. \quad (3.40)$$

Thế $b = 1$ vào (3.38)

$$\Rightarrow a \geq 0. \quad (3.41)$$

Từ (3.40) và (3.41) $\Rightarrow a = 0$.

Với $a = 0, b = 1$ thì bất phương trình (3.35) $\Leftrightarrow |\cos 2x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 3.52. Tìm a để bất phương trình sau luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3. \quad (3.42)$$

Giải. Ta có (3.42) $\Leftrightarrow \left| 3 \frac{1 - \cos 2x}{2} + a \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} + a \right| \leq 3$

$$\Leftrightarrow |a \sin 2x - \cos 2x + a + 2| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{a^2 + 1} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \sin 2x - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \cos 2x \right) + a + 2 \right| \leq 3.$$

Đặt $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$, khi đó

$$|\sqrt{a^2 + 1} \sin(2x - \alpha) + a + 2| \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -a - 5 \leq \sqrt{a^2 + 1} \sin(2x - \alpha) \leq 1 - a$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(a + 5)}{\sqrt{a^2 + 1}} \leq \sin(2x - \alpha) \leq \frac{1 - a}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

$$\text{Bất phương trình (3.42) đúng } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - a}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 1 \\ \frac{-(a + 5)}{\sqrt{a^2 + 1}} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a \geq \sqrt{a^2 + 1} \\ a + 5 \geq \sqrt{a^2 + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a \geq 0; a + 5 \geq 0 \\ (1 - a)^2 \geq a^2 + 1; (a + 5)^2 \geq a^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq a \leq 1 \\ 2a \leq 0 \\ 10a \geq -24 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{12}{5} \leq a \leq 0.$$

Bài toán 3.53. Cho

$$f(x) = 3 \cos^4 x - 5 \cos 3x - 36 \sin^2 x - 15 \cos x + 36 + 24a - 12a^2. \quad (3.43)$$

Tìm a để bất phương trình $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Biến đổi

$$\begin{aligned} (3.43) &\Leftrightarrow f(x) = 3 \cos^4 x - 20 \cos^3 x + 36 \cos^2 x + 24a - 12a^2 \\ &= \cos^2 x \left[\left(\sqrt{3} \cos x - \frac{10}{\sqrt{3}} \right) + \frac{8}{3} \right] + 24a - 12a^2. \end{aligned}$$

Ta có

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 24a - 12a^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2.$$

3.3.3. Bài tập

Bài 3.27 Giải phương trình

$$2^{1+x} + 2^{1-x} + 3^{1+x} + 3^{1-x} = 5^{1+x} + 5^{1-x}.$$

Bài 3.28 Giải phương trình

$$8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y.$$

Bài 3.29 Giải phương trình

$$16x^4 - 72x^3 + 81x^2 - 28 + 16(x - \sqrt{x-2}) = 0.$$

Bài 3.30 Biện luận theo a số nghiệm của phương trình

$$\sqrt{2-x^2} \sin x + \sqrt{2+x^2} \cos x = |a+1| + |a-1|.$$

Bài 3.31 Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$\cos 2x + (m-1) \cos x + 3m - 2 \geq 0.$$

Bài 3.32 Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$\sin 2x - \sqrt{2}(2m-1) \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 1.$$

Bài 3.33 Giải và biện luận

- 1) $a \sin^2 x + (2a^2 + a) \cos x - a^3 - a^2 + a > 0.$
- 2) $a \cos^2 x - (2a^2 - a) \sin x - a^3 + a^2 + a \leq 0.$
- 3) $a(\sin x + \cos x)^2 > (1-a) \cos 2x.$
- 4) $(a+3) \tan^2 x - 2 \tan x + a - 3 \leq 0.$

Bài 3.34 Tìm tất cả các cặp số (x, y) để bất phương trình sau nghiệm đúng

$\forall a \in \mathbb{R}$

$$\sin^2(x+a) + \sin(y+a) + \sin(2x-y+a) + \frac{1}{4} \geq 0.$$

Bài 3.35 Tìm a, b biết rằng

$$a \sin x + b \cos^2 x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.36 Tìm a, b, c, d biết rằng

$$a \sin x + b \cos 2x + c \sin x + d \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kết luận

Luận văn nhằm trình bày theo hướng hệ thống các tính chất của các dạng trung bình đồng bậc và các ứng dụng liên quan.

Trình bày bài toán tổng quát về các trung bình đồng bậc. Chỉ ra cách sắp thứ tự các đại lượng trung bình. Từ đó nêu chỉ ra mối liên hệ giữa chúng với các bất đẳng thức cổ điển đã biết và vận dụng để giải quyết một số bài toán liên quan.

Tiếp theo, xét một số áp dụng trong đại số và lượng giác.

Tác giả mong muốn luận văn sẽ phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy bất đẳng thức trong nhà trường, ở hiện tại cũng như trong tương lai.

Dù bản thân đã hết sức cố gắng và nghiêm túc trong quá trình học tập, nghiên cứu, song thời gian và khả năng có hạn, chắc chắn luận văn sẽ không tránh khỏi khiếm khuyết. Tác giả mong muốn nhận được nhiều ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô, cùng bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, 2002, *Một số bài toán chọn lọc về dãy số*, NXB Giáo Dục.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, 2006 *Bất đẳng thức, định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [5] Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G., 1999, *Bất đẳng thức*, NXB ĐHQGHN.
- [6] Beckenbach F., Bellman R., 1961, *Inequalities*, Springer-Verlag, "Moskva 1965".
- [7] J. Michael Steele, 2004, *The Cauchy - Schwarz master class*, Cambridge University Press.