ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ DƯƠNG KIỀU

ĐỊNH LÝ ROLLE
VÀ MỘT SỐ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2010

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ DƯƠNG KIỀU

ĐỊNH LÝ ROLLE VÀ MỘT SỐ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - 2010

Mục lục

Mở đầu

Định lý Rolle và một số mở rộng của định lý Rolle (Định lý Lagrange, Định lý Cauchy, Định lý Rolle trên một khoảng không bị chặn) là các định lý quan trọng về giá trị trung bình trong chương trình giải tích cổ điển. Ứng dụng của các định lý này trong chương trình toán Trung học phổ thông rất đa dạng và phong phú, đặc biệt là các dạng toán về giải phương trình, biện luận số nghiệm của phương trình trên một khoảng, chứng minh bất đẳng thức, xét cực trị của hàm số... Tuy nhiên, trong các tài liệu sách giáo khoa dành cho học sinh phổ thông thì các ứng dụng này của định lý Rolle chưa được trình bày một cách hệ thống và đầy đủ.

Với suy nghĩ và theo ý tưởng đó, mục tiêu chính của bản luận văn này là nhằm cung cấp thêm cho các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh khá, giỏi, có năng khiếu và yêu thích môn toán một tài liệu, ngoài những kiến thức cơ bản còn có thêm một hệ thống các bài tập nâng cao, qua đó sẽ thấy rõ hơn các dạng toán ứng dụng rất phong phú của Định lý Rolle, Định lý Lagrange và một số định lý mở rộng khác. Đặc biệt, luận văn cũng định hướng cách giải và cách vận dụng các định lý đã biết để tìm tòi những lời giải hay, độc đáo đặc thù cho từng dạng toán cụ thể, từ đó hình thành ý thức sáng tạo những bài toán mới. Ngoài ra, đây cũng là những kết quả mà bản thân tác giả sẽ tiếp tục hoàn thiện trong quá trình nghiên cứu và giảng dạy toán tiếp theo ở trường phổ thông.

Luận văn ngoài mục lục, lời nói đầu, kết luận và tài liệu tham khảo gồm bốn chương.

Chương 1. Định lý Rolle và một số mở rộng.

Nội dung chương này nhằm trình bày một cách cơ bản nhất các định lý về giá trị trung bình cùng một số hệ quả quan trọng. Đây là phần lý thuyết cơ sở để vận dụng cho các bài toán ứng dụng ở những chương sau.

Chương 2. Khảo sát tính chất cơ bản của hàm số.

Chương này trình bày một số ứng dụng trực tiếp của định lý Rolle và định lý Lagrange trong việc khảo sát hai tính chất rất cơ bản và quan trọng của hàm số trong chương trình toán THPT, đó là tính đồng biến, nghịch biến và tính chất lồi, lõm của hàm số khả vi bậc hai.

Chương 3. Một số ứng dụng định lý Rolle trong đại số.

Đây là nội dung trọng tâm của luận văn. Chúng tôi nêu ứng dụng của Định lý Rolle và các định lý mở rộng trong các bài toán giải phương trình, biện luận số nghiệm của phương trình, chứng minh bất đẳng thức, sự phân bố nghiệm của đa thức và đạo hàm. Các bài tập minh họa được lựa chọn từ đề thi của các kì thi học sinh giỏi Quốc gia, các kì thi Olympic khu vực và Quốc tế, một số bài tập do tác giả tự sáng tác. Đối với mỗi dạng bài tập đều nêu phương pháp giải cụ thể, có đưa ra những bài toán với lời giải độc đáo đầy tính sáng tạo và bất ngờ.

Chương 4. Bài tập bổ sung.

Chương này giới thiệu một số bài toán tiêu biểu đã được sắp xếp và lựa chọn kỹ lưỡng. Mỗi bài đều có hướng dẫn cách giải nhằm vận dụng những kiến thức thu được từ ba chương trước để nâng cao kỹ năng lập luận và kỹ năng tính toán cụ thể.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Nhà giáo nhân dân, GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu, tác giả xin được tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới GS - Người Thầy rất nghiêm khắc và tận tâm trong công việc, đã truyền thụ nhiều kiến thức quý báu cũng như kinh nghiệm nghiên cứu khoa học cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu đề tài.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau Đại học, Khoa Toán-Tin của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, cùng quý thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học Toán K2.

Tác giả xin chân thành cảm ơn UBND Tỉnh, Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Cao Bằng, Ban giám hiệu và tập thể cán bộ giáo viên Trường THPT Dân tộc Nội trú Tỉnh Cao Bằng đã tạo điều kiện cho tác giả có cơ hội được học tập và nghiên cứu.

Tác giả cũng xin được cảm ơn sự quan tâm, giúp đỡ nhiệt tình của các bạn học viên Cao học Toán K1, K2, K3 trường ĐHKH - ĐHTN đối với tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã tập trung học tập và nghiên cứu khoa học một cách nghiêm túc trong suốt khóa học, cũng như rất cẩn thận trong khâu chế bản LaTex. Tuy nhiên do còn hạn chế về thời gian, khả năng và hoàn cảnh gia đình nên trong quá trình thực hiện không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của quý thầy cô và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2010.

Người thực hiện

Nguyễn Thị Dương Kiều

Chương 1

Định lý Rolle và một số mở rộng

Trong chương này chúng tôi giới thiệu nội dung Định lý Rolle và một số mở rộng của định lý Rolle (xem [3]-[4]-[8]-[10]-[11]). Một số hệ quả quan trọng cũng được trình bày ở đây để thuận lợi cho việc vận dụng giải các bài toán được trình bày trong hai chương tiếp theo.

1.1 Định lý Rolle

Cơ sở của định lý Rolle dựa vào hai định lý cơ bản nhất của Weierstrass đối với hàm liên tục khẳng định rằng khi f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó phải đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó và định lý Fermat về điểm cực trị của hàm khả vi khẳng định rằng nếu hàm khả vi $g(x)$ trong (a, b) đạt cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại một điểm trong khoảng đó thì đạo hàm tại điểm đó bằng 0.

Định lý 1.1 (Định lý Rolle). *Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$. Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chứng minh. Vì f liên tục trên đoạn $[a; b]$ nên theo định lý Weierstrass hàm f phải đạt giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trên đoạn $[a; b]$, tức là tồn tại các điểm $x_1, x_2 \in (a;b)$ sao cho

$$f(x_1) = \min_{[a;b]} f(x) = m, f(x_2) = \max_{[a;b]} f(x) = M.$$

Có hai khả năng:

a) $m = M$. Khi ấy $f(x) = const$ trên đoạn $[a;b]$, do đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a;b)$ và c là điểm bất kì trên khoảng đó.

b) $m < M$. Khi đó vì điều kiện $f(a) = f(b)$ nên ít nhất một trong hai điểm x_1, x_2 sẽ không trùng với các đầu mút của đoạn $[a;b]$. Giả sử $x_1 \in (a;b)$, theo định lý Fermat thì đạo hàm bằng 0 tại điểm này.

Định lý đã được chứng minh xong.

Nhận xét 1.1.

1) Định lý Rolle nói chung sẽ không còn đúng nếu trong khoảng $(a;b)$ có điểm c mà tại đó $f'(c)$ không tồn tại. Chẳng hạn, xét hàm $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}, x \in [-1;1]$. Dễ thấy $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện: $f(x)$ liên tục trên $(-1;1)$ và $f(-1) = f(1)$. Ta xét đạo hàm $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, rõ ràng tại $x_0 = 0 \in (-1;1)$ đạo hàm không tồn tại, nên hàm số không thoả mãn đủ các điều kiện của định lý Rolle.

2) Điều kiện liên tục trên đoạn $[a;b]$ đối với hàm $f(x)$ cũng không thể thay bởi điều kiện $f(x)$ liên tục trong khoảng $(a;b)$. Chẳng hạn, xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu} \quad x = 0, \\ x, & \text{nếu} \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Ở đây $x = 0$ là điểm gián đoạn. Khi đó, rõ ràng không tồn tại $x_0 \in (0,1)$ để $f'(x_0) = 0$.

3) Ý nghĩa hình học: Nếu các điều kiện của định lý Rolle được thoả mãn thì trên đồ thị của hàm số $y = f(x), \forall x \in [a;b]$ tồn tại điểm $M(c; f(c)), c \in (a;b)$ mà tiếp tuyến tại đó song song với trục hoành Ox.

Hệ quả 1.1. Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và phương trình $f(x) = 0$ có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $n-1$ nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$. (Phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có ít nhất $n-k$ nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$, với $k = 1, 2, \ldots, n$).

Chứng minh. Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có n nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a;b)$ đã được sắp thứ tự $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Khi đó áp dụng địng lý Rolle cho $n-1$ đoạn $[x_1;x_2], [x_2;x_3], \ldots, [x_{n-1};x_n]$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $n-1$ nghiệm thuộc $n-1$ khoảng $(x_1;x_2), (x_2;x_3), \ldots, (x_{n-1};x_n)$. Gọi $n-1$ nghiệm đó là $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ thì ta có

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \cdots = f'(\xi_{n-1}) = 0.$$

Tiếp tục áp dụng định lý Rolle cho $n-2$ khoảng $(\xi_1;\xi_2), \ldots, (\xi_{n-2};\xi_{n-1})$ thì phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất $n-2$ nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Tiếp tục lý luận trên, sau k bước phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có ít nhất $n-k$ nghiệm phân biệt trên khoảng $(a;b)$.

Hệ quả 1.2. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó, nếu phương trình $f'(x) = 0$ có không quá $n-1$ nghiệm phân biệt trên khoảng $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá n nghiệm phân biệt trên khoảng đó.

Chứng minh. Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có nhiều hơn n nghiệm phân biệt trên khoảng $(a;b)$, chẳng hạn là $n+1$ nghiệm, thế thì theo hệ quả 1.1 phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất n nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$. Điều này trái với giả thiết. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có không quá n nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Tiếp theo, ta xét một mở rộng của định lý Rolle.

Hệ quả 1.3. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các tính chất sau đây:

i) $f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp n $(n \geq 1)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

ii) $f(x)$ có đạo hàm cấp $n+1$ trong khoảng $(a;b)$.

iii) $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, \quad f(b) = 0.$

Khi đó tồn tại dãy điểm $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ phân biệt thuộc khoảng $(a; b)$sao cho

$$f^{(k)}(b_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Chứng minh. Từ giả thiết $f(a) = f(b) = 0$, theo định lý Rolle tồn tại $b_1 \in (a; b)$ sao cho $f'(b_1) = 0$, kết hợp với điều kiện $f'(a) = 0$, suy ra tồn tại $b_2 \in (a; b_1) \subset (a; b)$ sao cho $f''(b_2) = 0$. Lại kết hợp với điều kiện $f''(a) = 0$ và tiếp tục áp dụng định lý Rolle ta có $f'''(b_3) = 0$ với $b_3 \in (a; b_2) \subset (a; b)$.

Tiếp tục như vậy, đến bước thứ n, tồn tại $b_n \in (a; b_{n-1}) \subset (a; b)$ sao cho $f^{(n)}(b_n) = 0$, kết hợp với điều kiện $f^{(n)}(a) = 0$, suy ra tồn tại $b_{n+1} \in (a; b_n) \subset (a; b)$ sao cho $f^{(n+1)}(b_{n+1}) = 0$.

Như vậy tồn tại dãy điểm phân biệt $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ trong khoảng $(a; b)$ sao cho

$$f^{(k)}(b_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Chính nhờ những hệ quả này mà định lý Rolle trở thành một công cụ rất mạnh để giải toán, đặc biệt là đối với dạng toán về giải phương trình và kiểm chứng số nghiệm của phương trình trong một khoảng nào đó. Các ứng dụng này sẽ được trình bày chi tiết trong các chương sau.

1.2 Định lý Lagrange và Định lý Cauchy

Tiếp theo ta xét một số định lý liên quan mật thiết với định lý Rolle.

Định lý 1.2 (Định lý Lagrange). *Giả sử f là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng $(a; b)$. Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta xét hàm phụ

$$F(x) = f(x) - \lambda x, \tag{1.2}$$

trong đó số λ được chọn sao cho $F(a) = F(b)$, tức là sao cho

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b.$$

Để có điều đó chỉ cần lấy

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.3}$$

Rõ ràng hàm $F(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$ và $F(a) = F(b)$, do đó theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $F'(c) = 0$. Từ (1.2) ta có $F'(x) = f'(x) - \lambda$, do đó

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \lambda = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \lambda.$$

Thay giá trị λ từ (1.3) vào ta có $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, hay

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Công thức (1.1) được gọi là công thức số gia hữu hạn Lagrange.

Nhận xét 1.2.

1) Ta đã thu được định lý Lagrange như là một hệ quả của định lý Rolle. Thế nhưng chính định lý Rolle (về dạng của biểu thức) lại là một trường hợp riêng của định lý Lagrange (ứng với giả thiết $f(a) = f(b)$).

2) Ý nghĩa hình học: Nếu hàm $f(x)$ thoả mãn đầy đủ các điều kiện của định lý Lagrange thì trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phải tồn tại ít nhất một điểm $M(c; f(c))$ sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại điểm đó song song với dây cung AB, ở đó $A(a; f(a))$ và $B(b; f(b))$.

Hệ quả 1.4. Giả sử $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục và $f'(x) = 0$, với mọi $x \in (a;b)$. Khi đó $f = const$ trên đoạn $[a;b]$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $x_0 \in (a;b)$ là một điểm cố định nào đó, còn x là điểm tuỳ ý của $(a;b)$. Đoạn thẳng $[x_0; x]$ hoặc $[x; x_0]$ nằm trọn trong khoảng $(a;b)$, vì thế f có đạo hàm (và do đó nó liên tục) khắp nơi trên đoạn con ấy, áp dụng định lý Lagrange ta có

$$f(x) - f(x_o) = f'(c)(x - x_0), \quad \forall c \in (x_o; x).$$

Nhưng theo giả thiết $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a; b)$ nên $f'(c) = 0$ với mọi $c \in (x_0; x)$. Vì thế ta có $f(x) = f(x_0)$, đẳng thức này khẳng định rằng giá trị của hàm $f(x)$ tại điểm bất kỳ $x \in (a; b)$ luôn luôn bằng giá trị của hàm tại một điểm cố định. Do vậy, $f = const$ trên đoạn $[a; b]$.

Hệ quả 1.5. Nếu hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm đồng nhất bằng nhau trên một khoảng thì chúng chỉ sai khác nhau bởi hằng số cộng.

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết ta có

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Theo hệ quả 1.4 thì $f(x) - g(x) = C$ $(C = const)$ hay $f(x) = g(x) + C$.

Định lý 1.3 (Định lý Cauchy). *Giả sử các hàm f, g liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng $(a; b)$, ngoài ra $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$. Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1.4}$$

Chứng minh. Trước khi chứng minh định lý ta nhận xét rằng công thức (1.4) luôn có nghĩa, tức là $g(b) \neq g(a)$. Thật vậy, nếu $g(b) = g(a)$ thì hàm số $g(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Rolle và do đó tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $g'(c) = 0$, nhưng điều này trái với giả thiết $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a; b)$. Bây giờ ta xét hàm phụ

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x), \tag{1.5}$$

trong đó số λ được chọn sao cho $F(a) = F(b)$, tức là

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b).$$

Để có điều đó ta chỉ cần lấy

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{1.6}$$

Hàm $F(x)$ thoả mãn mọi điều kiện của định lý Rolle, do đó $\exists c \in (a;b)$ sao cho $F'(c) = 0$. Mặt khác từ (1.5) ta có $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$ nên

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \lambda g'(c) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1.7}$$

Từ (1.6)và (1.7) ta thu được

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Công thức (1.4) được gọi là công thức số gia hữu hạn Cauchy.

Nhận xét 1.3. Định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy với giả thiết $g(x) = x$.

1.3 Định lý Rolle trên khoảng vô hạn

Trong mục này, ta xét mở rộng của định lý Rolle ra khoảng vô hạn. Cơ sở của các mở rộng này là dựa vào định lý Bolzano-Cauchy khẳng định rằng miền giá trị của hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ lấp đầy các giá trị trong đoạn $\left[\min\limits_{[a,b]} f(x), \max\limits_{[a,b]} f(x)\right]$.

Định lý 1.4. *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; +\infty)$, có đạo hàm trong $(a; +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Khi đó, tồn tại $c \in (a; +\infty)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chứng minh. Nếu $f(x) = f(a)$ với mọi $x > a$ thì lấy c là một số bất kỳ lớn hơn a.

Giả sử tồn tại $b > a$ sao cho $f(b) \neq f(a)$, chẳng hạn $f(b) > f(a)$. Gọi μ là một số thực bất kỳ thuộc $(f(a); f(b))$, theo định lý Bolzano-Cauchy, tồn tại $\alpha \in (a; b)$ sao cho $f(\alpha) = \mu$. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a) < \mu$ nên tồn tại $d > b$ sao cho $f(d) < \mu$. Do $f(x)$ liên tục trên $[a; +\infty)$ nên theo định lý Bolzano-Cauchy tồn tại $\beta \in (b; d)$ sao cho $f(\beta) = \mu = f(\alpha)$, do đó theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (\alpha; \beta)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chương 2

Khảo sát tính chất cơ bản của hàm số

Tính chất đồng biến, nghịch biến và tính lồi, lõm của hàm số là những vấn đề cơ bản trong chương trình toán THPT. Định lý Lagrange đóng một vai trò quan trọng trong việc chứng minh các định lý, tính chất cơ bản trong chương trình. Ngoài ra, trong chương này, chúng tôi cũng đề cập đến khái niệm độ gần đều và sắp thứ tự các tam giác, mà dựa vào các tính chất của nó ta có được cách giải rất thú vị đối với một số bài toán về bất đẳng thức trong tam giác (xem [2]-[6]-[7]).

2.1 Hàm đồng biến, nghịch biến

Từ đây về sau, ta sử dụng kí hiệu $I(a;b) \subset \mathbb{R}$ là nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp $(a;b), [a;b), (a;b]$ và $[a;b]$ với $a < b$.

Định nghĩa 2.1. *Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên tập $I(a;b) \subset \mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện*

Với mọi $x_1, x_2 \in I(a;b)$ và $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \leq f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $I(a;b)$.

Đặc biệt, khi ứng với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a;b)$ và $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) < f(x_2)$ thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng thực sự *trên* $I(a;b)$.

Ngược lại, nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a;b)$ *và* $x_1 < x_2$*, ta đều có* $f(x_1) \geq f(x_2)$ *thì ta nói rằng* $f(x)$ *là một hàm đơn điệu giảm trên* $I(a;b)$.

Đặc biệt, khi ứng với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a;b)$ *và* $x_1 < x_2$*, ta đều có* $f(x_1) > f(x_2)$ *thì ta nói rằng* $f(x)$ *là một hàm đơn điệu giảm thực sự trên* $I(a;b)$.

Những hàm đơn điệu tăng thực sự trên $I(a,b)$ *được gọi là hàm đồng biến trên* $I(a;b)$ *và hàm đơn điệu giảm thực sự trên* $I(a;b)$ *được gọi là hàm nghịch biến trên* $I(a;b)$.

Trong chương trình giải tích, chúng ta đã biết đến các tiêu chuẩn để nhận biết được khi nào thì một hàm số khả vi cho trước trên khoảng $(a;b)$ là một hàm đơn điệu trên khoảng đó. Sau đây chúng ta sẽ dùng định lý Lagrange để chứng minh định lý về điều kiện đủ của tính đơn điệu của hàm số. Đây là một định lý rất quan trọng trong chương trình giải tích lớp 12- THPT.

Định lý 2.1. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* $(a;b)$.

i) Nếu $f'(x) > 0$ *với mọi* $x \in (a;b)$ *thì hàm số* $y = f(x)$ *đồng biến trên khoảng đó.*

ii) Nếu $f'(x) < 0$ *với mọi* $x \in (a;b)$ *thì hàm số* $y = f(x)$ *nghịch biến trên khoảng đó.*

Chứng minh. Lấy hai điểm x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ trên khoảng $(a;b)$. Vì $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nên $f(x)$ liên tục trên $[x_1;x_2]$ và có đạo hàm trong khoảng $(x_1;x_2)$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $y = f(x)$ trên $[x_1;x_2]$, khi đó $\exists c \in (x_1;x_2)$ sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

i) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a;b)$ thì $f'(c) > 0$, mặt khác $x_2 - x_1 > 0$ nên $f(x_2) - f(x_1) > 0$ hay $f(x_2) > f(x_1)$, suy ra hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

ii) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì $f'(c) < 0$, mặt khác $x_2 - x_1 > 0$ nên $f(x_2) - f(x_1) < 0$ hay $f(x_2) < f(x_1)$, suy ra hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

Định lý 2.2 (Mở rộng của định lý 2.1)**.** *Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Nếu $f'(x) \geq 0$ (hoặc $f'(x) \leq 0$) và đẳng thức chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên khoảng $(a; b)$ thì $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến trên khoảng đó).*

Chứng minh. Thật vậy, để đơn giản cách lập luận, giả sử rằng $f'(x) \geq 0$ trên $(a; b)$ và $f'(x) = 0$ tại $x_1 \in (a, b)$ thì khi đó $f(x)$ đồng biến trong từng khoảng (a, x_1) và (x_1, b) và liên tục trong $(a, x_1]$ và $[x_1, b)$ nên nó cũng đồng biến trong $(a, x_1]$ và $[x_1, b)$. Từ đó suy ra nó đồng biến trên cả khoảng (a, b).

2.2 Hàm lồi, lõm khả vi bậc hai

2.2.1 Tính chất của hàm lồi, hàm lõm

Định nghĩa 2.2.

i) Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lồi trên tập $I(a; b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a; b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{2.1}$$

Nếu dấu đẳng thức trong (2.1) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $I(a; b)$.

ii) Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lõm trên tập $I(a; b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a; b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{2.2}$$

Nếu dấu đẳng thức trong (2.2) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói $f(x)$ là hàm lõm thực sự (chặt) trên $I(a; b)$.

Nhận xét 2.1. Khi $x_1 < x_2$ thì $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$ đều thuộc $(x_1; x_2)$ và

$$\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}; \quad \beta = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Định lý 2.3. *Nếu $f(x)$ là hàm số khả vi trên $I(a;b)$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a;b)$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $I(a;b)$.*

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ lồi trên $I(a;b)$. Khi đó với $x_1 < x < x_2$, $(x, x_1, x_2 \in I(a;b))$, ta có

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} > 0; \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} > 0 \quad \text{và} \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1.$$

Vì thế

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &\leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Trong (2.3) cho $x \to x_1$, ta thu được

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{2.4}$$

Tương tự, trong (2.3) cho $x \to x_2$, ta thu được

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2). \tag{2.5}$$

Từ (2.4) và (2.5), ta nhận được $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, tức hàm số $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng.

Ngược lại, giả sử $f'(x)$ là hàm số đơn điệu tăng và $x_1 < x < x_2$ $(x, x_1, x_2 \in I(a;b))$. Theo định lý Lagrange, tồn tại x_3, x_4 với $x_3 \in (x_1; x)$ và $x_4 \in (x; x_2)$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_3),$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_4).$$

Do $f'(x_3) \le f'(x_4)$ nên $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$, hay ta có

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Tức $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a;b)$.

Định lý 2.4. *Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai trên $I(a;b)$ thì $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a;b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \ge 0$ ($f''(x) \le 0$) trên $I(a;b)$.*

Chứng minh. Suy trực tiếp từ định lý 2.3.

Về sau ta chỉ xét các hàm lồi (lõm) khả vi, tức là các hàm số khả vi bậc hai có đạo hàm cấp 2 không đổi dấu trong $I(a;b)$.

Hệ quả 2.1. Nếu hàm số $y = f(x)$ lồi hoặc lõm trên $I(a;b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm thuộc $I(a;b)$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử hàm số $y = f(x)$ lồi hoặc lõm trên $I(a;b)$, tức $f''(x) > 0$ hoặc $f''(x) < 0$ trên $I(a;b)$. Khi đó hàm số $f'(x)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên $I(a;b)$, nên phương trình $f'(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm trong khoảng $I(a;b)$. Do đó theo hệ quả 1.2 phương trình $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm trên khoảng đó.

Nhận xét 2.2. Với hệ quả này, chúng ta có thêm một công cụ hữu hiệu để áp dụng cho các dạng toán giải phương trình, chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình... mà chúng tôi sẽ giới thiệu phương pháp giải thông qua các ví dụ cụ thể trong chương sau.

Định lý 2.5 (Bất đẳng thức Karamata). *Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a;b), k = 1, 2, \ldots, n\}$, thoả mãn các điều kiện:*

$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n, \quad y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \ge y_1, \\ x_1 + x_2 \ge y_1 + y_2, \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \ge y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n. \end{cases}$$

Khi đó, ứng với mọi hàm lồi thực sự $f(x)$ trên $I(a;b)$, ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \ge f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1) \ge f(y_1) + f'(y_1)(x_1 - y_1), \quad \forall x_1, y_1 \in I(a;b). \tag{2.6}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = y_1$.

Thật vậy, ta có

$$(2.6) \Leftrightarrow f(x_1) - f(y_1) \ge f'(y_1)(x_1 - y_1). \tag{2.7}$$

Ta xét 3 trường hợp.

$i)$ Nếu $x_1 = y_1$ thì ta có dấu đẳng thức, do đó (2.7) đúng.

$ii)$ Nếu $x_1 > y_1$ thì $x_1 - y_1 > 0$ nên

$$(2.7) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \ge f'(y_1). \tag{2.8}$$

Theo định lý Lagrange thì (2.8) $\Leftrightarrow f'(x_1') \ge f'(y_1)$ với $y_1 < x_1' < x_1$. Bất đẳng thức này luôn đúng vì $f'(x)$ là hàm đồng biến do $f''(x) > 0$ (theo giả thiết), vì thế bất đẳng thức (2.6) đúng.

$iii)$ Nếu $x_1 < y_1$ thì $x_1 - y_1 < 0$ nên

$$(2.7) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \le f'(y_1). \tag{2.9}$$

Theo định lý Lagrange thì (2.9) $\Leftrightarrow f'(x_1') \le f'(y_1)$ với $x_1 < x_1' < y_1$. Bất đẳng thức này luôn đúng vì $f'(x)$ là hàm đồng biến do $f''(x) > 0$ (theo giả thiết), vì thế bất đẳng thức (2.6) đúng.

Tương tự ta chứng minh được

$$f(x_i) \geq f(y_i) + f'(y_i)(x_i - y_i), \quad \forall x_i, y_i \in I(a;b), i = 1, 2, \ldots, n.$$

Như vậy ta có

$$\begin{aligned}
f(x_1) &\geq f(y_1) + f'(y_1)(x_1 - y_1),\\
f(x_2) &\geq f(y_2) + f'(y_2)(x_2 - y_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f(x_n) &\geq f(y_n) + f'(y_n)(x_n - y_n).
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) + \sum_{i=1}^{n} f'(y_i)(x_i - y_i)\\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f'(y_i)(x_i - y_i). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Xét $\sum\limits_{i=1}^{n} f'(y_i)(x_i - y_i)$.

Sử dụng biến đổi Abel ứng với $a_i = f'(y_i)$ và $b_i = (x_i - y_i)$ ta được:

$$\sum_{i=1}^{n} f'(y_i)(x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n-1}[f'(y_i) - f'(y_{i+1})][(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) - (y_1 + y_2 + \cdots$$
$$+ y_{n-1})] + f'(y_n)[(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)].$$

Từ giả thiết ta có $f'(y_i) - f'(y_{i+1}) \geq 0$ (do hàm $f'(y)$ đồng biến), và

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) - (y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) \geq 0,$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = 0.$$

Vì thế

$$\sum_{i=1}^{n} f'(y_i)(x_i - y_i) \geq 0. \qquad (2.11)$$

Từ (2.10) và (2.11) ta thu được

$$\sum_{i-1}^{n} f(x_i) - \sum_{i-1}^{n} f(y_i) \geq 0,$$

tức là ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n).$$

2.2.2 Độ gần đều và sắp thứ tự các tam giác

Tiếp theo ta nêu ví dụ minh họa về các tính chất lồi (lõm) áp dụng trong chương trình lượng giác bậc phổ thông.

Định nghĩa 2.3. *Với mỗi tam giác ABC cho trước, ta kí hiệu*

$$\delta_{\triangle ABC} = \max\{A, B, C\} - \min\{A, B, C\}$$

và gọi $\delta_{\triangle ABC}$ là độ gần đều của tam giác ABC.

Rõ ràng $\delta_{\triangle ABC} \geq 0$ và $\delta_{\triangle ABC} = 0$ khi và chỉ khi tam giác ABC là một tam giác đều.

Định nghĩa 2.4. *Với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thoả mãn đồng thời các điều kiện*

$$\max\{A_1, B_1, C_1\} \leq \max\{A_2, B_2, C_2\},$$

$$\min\{A_1, B_1, C_1\} \geq \min\{A_2, B_2, B_2\}$$

thì ta nói cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là cặp sắp được thứ tự và tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

Vậy trong trường hợp có sắp thứ tự, nếu với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ (với $A_1 \geq B_1 \geq C_1, A_2 \geq B_2 \geq C_2$) thoả mãn đồng thời các điều kiện $A_1 \leq A_2$, $C_1 \geq C_2$, thì ta sẽ có tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

Nhận xét 2.3.

1) Tam giác đều gần đều hơn mọi tam giác khác.

2) Trong tập hợp các tam giác không nhọn thì tam giác vuông cân gần đều hơn mọi tam giác khác.

Trong quá trình chứng minh bất đẳng thức Karamata, chúng ta đã sử dụng định lý Lagrange để chứng minh một tính chất quan trọng, thường được sử dụng trong các bài toán về độ gần đều của tam giác. Ta sẽ nhắc lại tính chất đó.

Tính chất 2.1. *Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trong $(a; b)$.*

a) Nếu $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{với} \quad x, x_0 \in (a; b).$$

b) Nếu $f''(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{với} \quad x, x_0 \in (a; b).$$

Sau đây, ta xét một số bài toán tiêu biểu nhằm minh họa các tính chất đã nêu trên.

Bài toán 2.1. Cho tam giác $A_2B_2C_2$ gần đều hơn tam giác $A_1B_1C_1$ và cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0; \pi)$. Chứng minh rằng

$$f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) \geq f(A_2) + f(B_2) + f(C_2).$$

Giải. Do $f''(x) \geq 0, \forall x \in (0; \pi)$ nên theo tính chất 2.1 ta có:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in (0; \pi). \tag{2.12}$$

Không mất tính tổng quát, ta coi

$$A_1 \geq B_1 \geq C_1, \quad A_2 \geq B_2 \geq C_2.$$

Khi đó, theo định nghĩa 2.4 ta có $A_1 \geq A_2$ và $C_1 \leq C_2$. Suy ra

$$\begin{cases} A_1 \geq A_2, \\ A_1 + B_1 \geq A_2 + B_2, \\ A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2. \end{cases}$$

Theo (2.12) thì

$$\begin{cases} f(A_1) \geq f(A_2) + f'(A_2)(A_1 - A_2), \\ f(B_1) \geq f(B_2) + f'(B_2)(B_1 - B_2), \\ f(C_1) \geq f(C_2) + f'(C_2)(C_1 - C_2). \end{cases} \tag{2.13}$$

Cộng các vế tương ứng của (2.13), ta được

$$\begin{aligned} f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) &\geq f(A_2) + f(B_2) + f(C_2) \\ &\quad + [f'(B_2) - f'(C_2)][(A_1 + B_1) - (A_2 + B_2)] \\ &\quad + [f'(A_2) - f'(B_2)](A_1 - A_2) \\ &\geq f(A_2) + f(B_2) + f(C_2). \end{aligned}$$

Bài toán 2.2. Cho tam giác ABC và cho ba số dương α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt

$$\begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A, \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B. \end{cases} \tag{2.14}$$

Chứng minh rằng:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0.$$

Giải. Theo giả thiết ta có $A_0 + B_0 + C_0 = A + B + C = \pi$ nên A_0, B_0, C_0 là các góc của một tam giác và

$$\begin{cases} A \geq A_0, \\ A + B \geq A_0 + B_0, \\ A + B + C = A_0 + B_0 + C_0. \end{cases}$$

với giả thiết $A \geq B \geq C$, $A_0 \geq B_0 \geq C_0$.
Xét hàm số $f(x) = \sin x, \forall x \in [0; \pi]$. Ta có

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x \leq 0, \forall x \in [0; \pi].$$

Theo tính chất 2.1 ta có

$$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in [0; \pi].$$

Vậy nên

$$\begin{aligned} \sin A &\le \sin A_0 + \cos A_0(A - A_0), \\ \sin B &\le \sin B_0 + \cos B_0(B - B_0), \\ \sin C &\le \sin C_0 + \cos C_0(C - C_0). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C \le \sin A_0 &+ \sin B_0 + \sin C_0 \\ &+ \cos C_0(A + B + C - A_0 - B_0 - C_0) \\ &+ (\cos B_0 - \cos C_0)(A + B - A_0 - B_0) \\ &+ (\cos A_0 - \cos B_0)(A - A_0). \end{aligned}$$

Vì $A + B + C - (A_0 + B_0 + C_0) = 0; A + B \ge A_0 + B_0; A \ge A_0$,
$\pi > B_0 \ge C_0 \ge 0 \Rightarrow \cos B_0 \le \cos C_0$,
$\pi > A_0 \ge B_0 \ge 0 \Rightarrow \cos A_0 \le \cos B_0$,
nên $\quad \sin A + \sin B + \sin C \le \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0$.

Bài toán 2.3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC không nhọn, ta luôn có

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge 2\sqrt{2} - 1.$$

Giải. Không mất tính tổng quát, ta coi $A \ge B \ge C$. Khi đó

$$\begin{cases} A \ge \frac{\pi}{2}, \\ A + B \ge \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \\ A + B + C = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} \ge \frac{\pi}{4}, \\ \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \ge \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \\ \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \tan x$ với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f''(x) > 0, \forall x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Vậy nên theo tính chất 2.1, ta có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Theo bài toán 2.1 thì

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{8}.$$

Để ý rằng $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ nên

$$\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2} - 1.$$

Do đó

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq 2\sqrt{2} - 1.$$

Chương 3

Một số ứng dụng định lý Rolle trong đại số

3.1 Chứng minh sự tồn tại và biện luận số nghiệm của phương trình

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình, ta có thể sử dụng các định lý sau là dạng phát biểu khác của địng lý Rolle (xem [4]-[9]).

Định lý 3.1. *Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trong đoạn đó. Nếu tồn tại các số thực $x_1, x_2 \in [a; b]$ với $x_1 < x_2$ sao cho $F(x_1) = F(x_2)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong đoạn $[x_1; x_2]$ (hay có nghiệm trong đoạn $[a; b]$).*

Chứng minh. Giả sử phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trên đoạn $[x_1; x_2]$. Vì $f(x)$ liên tục nên suy ra hoặc $f(x) > 0, \forall x \in [x_1; x_2]$ hoặc $f(x) < 0, \forall x \in [x_1; x_2]$.

Nếu $f(x) > 0, \forall x \in [x_1; x_2]$ thì hàm số $F(x)$ đồng biến trên $[x_1, x_2]$, từ đó suy ra $F(x_1) < F(x_2)$.

Nếu $f(x) < 0, \forall x \in [x_1; x_2]$ thì hàm số $F(x)$ nghịch biến trên $[x_1; x_2]$, từ đó suy ra $F(x_1) > F(x_2)$.

Như vậy, trong cả hai trường hợp ta đều có $F(x_1) \neq F(x_2)$, điều này trái giả thiết là $F(x_1) = F(x_2)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong đoạn $[x_1; x_2]$.

Ta phát biểu kết quả trên dưới dạng định lý tương đương sau đây.

Định lý 3.2. *Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu tồn tại các số thực $x_1, x_2 \in [a; b]$ mà $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong đoạn $[x_1; x_2]$.*

Kỹ thuật cơ bản của dạng toán này là chọn hàm số thoả mãn điều kiện của các định lý dựa trên giả thiết của bài toán. Chúng tôi lựa chọn giới thiệu một số bài toán trong các kỳ thi quốc gia và quốc tế để minh hoạ cho dạng bài tập này (xem [1]-[2]-[5]).

Bài 3.1. Cho các số thực a, b, c và các số nguyên dương n thoả mãn điều kiện

$$c = -\frac{6(a+b)}{5(n+2)}.$$

Chứng minh rằng phương trình $a\sin^n x + b\cos^n x + c\sin x + c = 0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Giải. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{2a}{n+2}\sin^{n+2} x - \frac{2b}{n+2}\cos^{n+2} x + \frac{2c}{3}\sin^3 x - c\cos^2 x.$$

Rõ ràng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2a\sin^{n+1} x\cos x + 2b\cos^{n+1} x\sin x + 2c\sin^2 x\cos x + 2c\sin x\cos x \\ &= \sin 2x(a\sin^n x + b\cos^n x + c\sin x + c). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) &= \frac{2a}{n+2} + \frac{2c}{3} + \frac{2b}{n+2} + c \\ &= \frac{2a}{n+2} - \frac{4(a+b)}{5(n+2)} + \frac{2b}{n+2} - \frac{6(a+b)}{5(n+2)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Khi đó theo định lý Rolle, $\exists x_0 \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 &\Leftrightarrow \sin 2x_0(a\sin^n x_0 + b\cos^n x_0 + c\sin x_0 + c) = 0 \\ &\Leftrightarrow a\sin^n x_0 + b\cos^n x_0 + c\sin x_0 + c = 0. \end{aligned}$$

(Do $x_0 \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin 2x_0 \neq 0$).
Vậy phương trình $a\sin^n x + b\cos^n x + c\sin x + c = 0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 3.2. Cho $a_0, a_1, \dots, a_n$ là các số thực thoả mãn điều kiện

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = a_0 + a_1 + \frac{a_2 2^2}{3} + \frac{a_3 2^3}{4} + \dots + \frac{a_n 2^n}{n+1} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1} = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 2)$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = a_0 x + \dfrac{1}{2}a_1 x^2 + \dfrac{1}{3}a_2 x^3 + \dots + \dfrac{1}{n+1}a_n x^{n+1}$.
Rõ ràng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, và ta có:

$$f(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1},$$
$$f(2) = 2\Big(a_0 + a_1 + \frac{a_2 2^2}{3} + \frac{a_3 2^3}{4} + \dots + \frac{a_n 2^n}{n+1}\Big).$$

Từ giả thiết ta có $f(1) = f(2) = 0$, ngoài ra hiển nhiên $f(0) = 0$. Khi đó theo định lý Rolle, tồn tại c_1, c_2 thoả mãn $0 < c_1 < 1 < c_2 < 2$ sao cho $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Tiếp tục áp dụng định lý Rolle cho hàm $f'(x)$ trên đoạn $[c_1; c_2]$, $\exists x_0 \in (c_1; c_2) \subset (0; 2)$ sao cho $f''(x_0) = 0$. Như vậy x_0 là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ trên khoảng $(0; 2)$.

Dễ thấy $f''(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1}$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.3. Cho a, b, c tuỳ ý và m là số dương thoả mãn biểu thức

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0. \tag{3.1}$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Giải.

Cách 1. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{a}{m+2}x^{m+2} + \dfrac{b}{m+1}x^{m+1} + \dfrac{c}{m}x^m$.

Rõ ràng hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1}.$$

và

$$\begin{aligned} &f(0) = 0.\\ &f(1) = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0. \end{aligned}$$

Theo định lý Rolle, $\exists x_0 \in (0;1)$ sao cho $f'(x_0) = 0$, tức là

$$\begin{aligned} &ax_0^{m+1} + bx_0^m + cx_0^{m-1} = 0\\ \Leftrightarrow &x_0^{m-1}(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0\\ \Leftrightarrow &ax_0^2 + bx_0 + c = 0. \end{aligned}$$

Vậy phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$. Rõ ràng hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Ta có $f(0) = c$ và

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{m+1}{m+2}\Big) &= a\Big(\frac{m+1}{m+2}\Big)^2 + b\Big(\frac{m+1}{m+2}\Big) + c.\\ &= \Big[\frac{(m+1)^2}{m+2}\Big]\Big[\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c(m+2)}{(m+1)^2}\Big]\\ &= \Big[\frac{(m+1)^2}{m+2}\Big]\Big[-\frac{c}{m} + \frac{c(m+2)}{(m+1)^2}\Big] = -\frac{c}{m(m+2)}. \end{aligned}$$

$\Big($Do (3.1)$\Rightarrow \dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} = -\dfrac{c}{m}\Big)$.

Vậy $f(0).f\Big(\dfrac{m+1}{m+2}\Big) = \dfrac{-c^2}{m(m+2)} \le 0$ (do $m > 0$).

Nếu $c = 0$ thì $f\Big(\dfrac{m+1}{m+2}\Big) = 0$, như vậy $x_0 = \dfrac{m+1}{m+2}$ là nghiệm của phương trình đã cho. Hơn nữa do $m > 0$ nên $0 < \dfrac{m+1}{m+2} < 1$.

Nếu $c \neq 0$ thì $f(0).f\Big(\dfrac{m+1}{m+2}\Big) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in \Big(0; \dfrac{m+1}{m+2}\Big) \subset (0;1)$.

Như vậy với giả thiết đã cho, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Cách 3. (Áp dụng định lý đảo tam thức bậc hai).

1) Nếu $a = 0$, khi đó (3.1) trở thành

$$\frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0. \tag{3.2}$$

Ta xét hai trường hợp sau:

Nếu $b = 0$ thì từ (3.2) ta có $c = 0$. Khi đó, phương trình $ax^2+bx+c = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, suy ra phương trình có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Nếu $b \neq 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có dạng

$$bx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b}.$$

Từ (3.2) $\Rightarrow -\dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{m+1}$ nên $x = \dfrac{m}{m+1} \in (0; 1)$, do $m > 0$.

2) Nếu $a \neq 0$. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$, khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và ta có:

$$af(0) = ac, \quad af\Big(\frac{m}{m+1}\Big) = -\frac{ma^2}{(m+1)^2(m+2)} < 0 \ \ (\text{do} \ \ a \neq 0, m > 0).$$

Lại có hai khả năng xảy ra.

a) Nếu $ac > 0$ thì $af(0) > 0$, suy ra $\big(af(0)\big)\Big(af\Big(\dfrac{m}{m+1}\Big)\Big) < 0$.

Do đó

$$f(0)f\Big(\frac{m}{m+1}\Big) < 0.$$

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $x_1 \in \Big(0; \dfrac{m}{m+1}\Big)$ sao cho $f(x_1) = 0$.

Ngoài ra ta có $0 < \dfrac{m}{m+1} < 1$, cho nên $x_1 \in (0; 1)$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

b) Nếu $ac \leq 0$ thì $af(1) = a(a + b + c)$.

Từ giả thiết (3.1) suy ra $b = -\dfrac{a(m+1)}{m+2} - \dfrac{c(m+1)}{m}$. Vì thế

$$af(1) = \frac{a^2}{m+2} - \frac{ac}{m} > 0 \ \ (\text{do} \ \ m > 0, ac \leq 0, a \neq 0).$$

Do đó $\left(af(1)\right)\left(af\left(\dfrac{m}{m+1}\right)\right) < 0 \Rightarrow f(1)f\left(\dfrac{m}{m+1}\right) < 0.$

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $x_2 \in \left(\dfrac{m}{m+1}; 1\right)$ sao cho $f(x_2) = 0$, và do $0 < \dfrac{m}{m+1} < 1$ nên $x_2 \in (0; 1)$.

Như vậy với giả thiết đã cho, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Nhận xét 3.1.

1) Đây là một bài toán tổng quát, từ bài toán này ta có thể sáng tác được những bài toán mới với những điều kiện cụ thể hơn. Chẳng hạn ta có bài toán sau đây.

Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn $\dfrac{a}{2010} + \dfrac{b}{2009} + \dfrac{c}{2008} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $a.\ln^2 x + b.\ln x + c = 0$ luôn có nghiệm.

2) So sánh 3 cách giải trên, mỗi cách đều có ưu thế riêng, nhưng có lẽ cách 1 ngắn gọn hơn và tránh được sai sót trong quá trình tính toán. Tuy nhiên, trong quá trình giải toán, không nên vận dụng một cách máy móc một phương pháp cho một loại bài tập, vì phương pháp này có thể là hay với bài toán này, nhưng chưa hẳn là hay đối với bài khác. Chẳng hạn ta xét bài toán tiếp theo sau đây.

Bài 3.4. Chứng minh rằng phương trình
$$\frac{105}{2}x^4 - \frac{230}{3}x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$
có nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Giải.

Cách 1. Xét hàm số
$$f(x) = \frac{105}{60}x^6 - \frac{115}{30}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x.$$
Rõ ràng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, và ta có
$$f'(x) = \frac{105}{10}x^5 - \frac{115}{6}x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,$$
$$f''(x) = \frac{105}{2}x^4 - \frac{230}{3}x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

Dễ thấy $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Theo định lý Rolle, $\exists x_1 \in (0;1)$ và $x_2 \in (1;2)$ sao cho $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Do $f'(x)$ cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tiếp tục áp dụng định lý Rolle cho hàm số $f'(x)$ trên $[x_1; x_2]$: $\exists \alpha \in (x_1; x_2) \subset (0;2)$ sao cho $f''(\alpha) = 0$. Điều đó có nghĩa α là nghiệm của phương trình

$$\frac{105}{2}x^4 - \frac{230}{3}x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Cách 2. Đặt $f(x) = \dfrac{105}{2}x^4 - \dfrac{230}{3}x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và ta có

$$f(0) = 1, \quad f(1) = -\frac{109}{6}, \quad f(2) = \frac{173}{3}.$$

Suy ra $f(0).f(1) < 0, \quad f(1).f(2) < 0$. Theo định lý Bolzano-Cauchy, tồn tại $x_1 \in (0;1)$ và $x_2 \in (1;2)$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$.

Nhận xét 3.2. Cách 2 của bài toán trên cho ta kết quả mạnh hơn yêu cầu của bài toán và rõ ràng cách giải cũng ngắn gọn hơn. Như vậy, việc lựa chọn phương pháp phù hợp cho từng bài trong quá trình giải toán là một vấn đề vô cùng quan trọng cần được lưu ý trong quá trình giảng dạy, học tập và nghiên cứu.

Bài 3.5 (Tuyển tập 200 bài toán vô địch môn Giải tích)**.** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ là hàm đồng biến trên đoạn $[a;b]$, ngoài ra

$$f(a) = \frac{1}{2}(a-b),$$
$$f(b) = \frac{1}{2}(b-a).$$

Chứng minh rằng tồn tại α, β, γ phân biệt trong khoảng $(a;b)$ sao cho

$$f'(\alpha).f'(\beta).f'(\gamma) = 1.$$

Giải. Từ giả thiết $f'(x)$ đồng biến trên $[a;b]$, ta suy ra

$$f'(x) < f'(y) \;\; khi \;\; a \leq x < y \leq b. \tag{3.3}$$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên $[a;b] : \exists\gamma \in (a;b)$ sao cho

$$f'(\gamma) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}(a-b)}{b-a} = 1. \tag{3.4}$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x - \dfrac{a+b}{2}$. Do $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ (vì $f(x)$ khả vi trên $[a;b]$) nên $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Ta có

$$g(a) = \frac{1}{2}(a-b) + a - \frac{a+b}{2} = a - b,$$
$$g(b) = \frac{1}{2}(b-a) + b - \frac{a+b}{2} = b - a.$$

Suy ra $g(a)g(b) = -(a-b)^2 < 0$. Khi đó $\exists x_0 \in (a;b)$ sao cho $g(x_0) = 0$, hay

$$f(x_0) + x_0 - \frac{a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{a+b}{2} - x_0.$$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên $[a;x_0] : \exists\alpha \in (a;x_0)$ sao cho

$$f'(\alpha) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{\frac{1}{2}(a+b) - x_0 - \frac{1}{2}(a-b)}{x_0 - a} = \frac{b - x_0}{x_0 - a}. \tag{3.5}$$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên $[x_0;b] : \exists\beta \in (x_0;b)$ sao cho

$$f'(\beta) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{\frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}(a+b) + x_0}{b - x_0} = \frac{x_0 - a}{b - x_0}. \tag{3.6}$$

Từ (3.4), (3.5) và (3.6) ta thu được

$$f'(\alpha).f'(\beta).f'(\gamma) = 1.$$

Từ (3.3) ta suy ra α, β, γ đôi một khác nhau.

Ta có một bài toán tương tự như sau.

Bài 3.6 (Olympic Hoa Kỳ). Cho hàm số f khả vi trên $[0;1]$ và thỏa mãn

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại hai số thực phân biệt a, b thuộc khoảng $(0;1)$ sao cho $\quad f'(a).f'(b) = 1.$

Giải. Xét hàm số $g(x) = f(x) + x - 1$, rõ ràng g khả vi trên $[0;1]$.

Ta có $g(0) = -1, g(1) = 1 \Rightarrow g(0).g(1) < 0$ nên $\exists c \in (0;1)$ sao cho $g(c) = 0$, do đó

$$f(c) + c - 1 = 0 \Leftrightarrow f(c) = 1 - c.$$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên các đoạn $[0;c]$ và $[c;1]$ thì

$$\exists a \in (0;c) \text{ sao cho } \frac{f(c) - f(0)}{c} = f'(a).$$

$$\exists b \in (c;1) \text{ sao cho } \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(b).$$

Suy ra $\quad f'(a).f'(b) = \dfrac{f(c)}{c}.\dfrac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \dfrac{(1 - c)c}{c(1 - c)} = 1.$

Vậy, $\exists a, b \in (0;1)$ sao cho $f'(a).f'(b) = 1.$

Bài 3.7 (Olympic sinh viên toàn quốc - 1994). Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ và không phải là hàm hằng. Cho hai số thực a, b thoả mãn điều kiện $0 < a < b$. Chứng minh rằng phương trình

$$x.f'(x) - f(x) = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$$

có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Giải. Xét hai hàm số $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ và $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

Do $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ nên các hàm số $g(x)$ và $h(x)$ khả vi trên khoảng $(a;b)$ và ta có

$$g'(x) = \frac{x.f'(x) - f(x)}{x^2}, \quad h'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Theo định lý Cauchy, $\exists x_0 \in (a; b)$ sao cho

$$[h(b) - h(a)]g'(x_0) = [g(b) - g(a)]h'(x_0).$$

Nghĩa là ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\Big)\frac{x_0.f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = \Big[\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}\Big]\Big(-\frac{1}{x_0^2}\Big).\\
\Rightarrow &\frac{(a-b)[x_0.f'(x_0) - f(x_0)]}{abx_0^2} = -\frac{af(b) - bf(a)}{abx_0^2}\\
\Rightarrow &(b-a)[x_0.f'(x_0) - f(x_0)] = af(b) - bf(a)\\
\Rightarrow &x_0.f'(x_0) - f(x_0) = \frac{af(b) - bf(a)}{b-a}.
\end{aligned}$$

Như vậy phương trình $x.f'(x) - f(x) = \dfrac{af(b) - bf(a)}{b-a}$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Bài 3.8. Chứng minh rằng phương trình

$$(3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 5^x \ln 5) \tan x + \frac{3^x + 2^x - 5^x}{\cos^2 x} = 0$$

có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Giải. Xét hàm số

$$f(x) = (3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 5^x \ln 5) \tan x + \frac{3^x + 2^x - 5^x}{\cos^2 x}.$$

Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và có một nguyên hàm là

$$F(x) = (3^x + 2^x - 5^x) \tan x.$$

Dễ thấy $F(0) = F(1) = 0$. Theo định lý 3.1 thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3.9. Chứng minh rằng phương trình

$$2(x-1)\ln x + x\ln^2 x = 4x \tag{3.7}$$

có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa: $x > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}(3.7) &\Leftrightarrow 2(x-1)\ln x + x\ln x^2 - 4x = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2(x-1)\ln x}{x} + \ln^2 x - 4 = 0.\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2(x-1)\ln x}{x} + \ln^2 x - 4.$
Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và có một nguyên hàm là

$$F(x) = (x-1)(\ln^2 x - 4).$$

Dễ thấy $F(1) = F(e^2) = F\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = 0$. Do đó theo định lý 3.1, trong mỗi khoảng $\left(\dfrac{1}{e^2}; 1\right), (1; e^2)$ phương trình $f(x) = 0$ đều có ít nhất một nghiệm.

Vậy phương trình (3.7) có ít nhất 2 nghiệm.

Bài 3.10. Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng phương trình

$$a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx = 0$$

luôn có nghiệm.

Giải. Xét hàm số $f(x) = a_1\sin x + \dfrac{1}{2}a_2\sin 2x + \cdots + \dfrac{1}{n}a_n\sin nx.$
Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và ta có:

$$f'(x) = a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx.$$

Dễ thấy $f(0) = f(2\pi) = 0$. Theo định lý Rolle, $\exists x_0 \in (0; 2\pi)$ sao cho $f'(x_0) = 0$. Tức x_0 là nghiệm của phương trình

$$a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx = 0.$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Bài 3.11 (Olympic sinh viên toàn quốc - 1994)**.** Cho n là số nguyên dương; $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Chứng minh rằng phương trình

$$x + \sum_{k=1}^{n}(a_k\sin kx + b_k\cos kx) = 0 \tag{3.8}$$

có nghiệm trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

Giải. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(-\frac{a_k}{k} \cos kx + \frac{b_k}{k} \sin kx \Big), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rõ ràng $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ khả vi trên $(-\pi; \pi)$ và

$$f'(x) = x + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx).$$

Ta có:

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(-\frac{a_k}{k} \cos(-k\pi) + \frac{b_k}{k} \sin(-k\pi) \Big) \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(-\frac{a_k}{k} (-1)^k \Big). \\ f(\pi) &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(-\frac{a_k}{k} \cos(k\pi) + \frac{b_k}{k} \sin(k\pi) \Big) \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(-\frac{a_k}{k} (-1)^k \Big). \end{aligned}$$

Như vậy $f(-\pi) = f(\pi)$. Khi đó theo định lý Rolle, $\exists x_0 \in (-\pi; \pi)$ sao cho $f'(x_0) = 0$, hay x_0 là nghiệm của phương trình

$$x + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0.$$

Vậy phương trình (3.8) có nghiệm trong khoảng $(-\pi; \pi)$.

Bài 3.12. Giả sử hàm số f có đạo hàm mọi cấp trên $\mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau

i) Tồn tại L sao cho $| f^{(n)}(x) | \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ và $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Giải. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Vì f liên tục tại điểm 0 nên $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $x_n \in \Big(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\Big)$ sao cho $f'(x_n) = 0$. Vì f' liên tục tại điểm 0 và $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ nên $f'(0) = \lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

Giả sử tồn tại dãy điểm $\{a_n\}$ giảm nghiêm ngặt của $\mathbb{R}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ và $f^{(k)}(a_n) = 0$ với mọi n. Khi đó theo định lý Rolle, tồn tại $\alpha_n \in (a_{n+1}; a_n)$ sao cho $f^{(k+1)}(\alpha_n) = 0$. Hiển nhiên $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Vì $f^{(k+1)}$ liên tục tại điểm 0 nên

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{n\to\infty} f^{(k+1)}(\alpha_n) = 0.$$

Vậy $f^{(k)}(0) = 0, \forall k \geq 0$, tức $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Áp dụng công thức Taylor, ta được

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \quad (0 < \theta < 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó $\mid f(x) \mid \leq L \frac{\mid x \mid^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Từ $\lim_{n\to\infty} \frac{\mid x \mid^n}{n!} = 0$ suy ra $f(x) = 0$.

3.2 Giải phương trình và bất phương trình

Đối với dạng bài tập này thì các hệ quả của định lý Rolle tỏ ra là công cụ rất mạnh để giải toán. Kĩ thuật để giải một số bài trong phần này như sau:

+) Ta biến đổi phương trình cần giải về dạng $f(x) = 0$.

+) Xét hàm số $y = f(x)$. Tìm số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$. Giả sử phương trình $f'(x) = 0$ có $n - 1$ nghiệm, khi đó theo hệ quả 1.2 thì phương trình $f(x) = 0$ có không quá n nghiệm.

+) Chỉ ra các nghiệm của phương trình.

Bài 3.13. Biện luận số nghiệm của phương trình $2^x = x^2 + 1$.

Giải. Phương trình đã cho được viết dưới dạng

$$2^x - x^2 - 1 = 0.$$

Đặt $f(x) = 2^x - x^2 - 1$. Rõ ràng $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trên $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x,$$
$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2.$$

Ta có $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{2}{\ln^2 2}$.

Vì $\dfrac{2}{\ln^2 2} > 0$ nên phương trình $f''(x) = 0$ luôn có đúng 1 nghiệm. Khi đó theo hệ quả 1.2, phương trình $f'(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm thực phân biệt, suy ra phương trình $f(x) = 0$ có không quá 3 nghiệm thực phân biệt.

Mặt khác ta có $f(0) = 0, f(1) = 0$ và $f(2).f(5) = -6 < 0$, suy ra $\exists x_0 \in (2; 5)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt

$$x = 0, x = 1, x = x_0 (x_0 \in (2; 5)).$$

Nhận xét 3.3. Bài toán trên còn được giải bằng phương pháp đồ thị.

Bài 3.14. Biện luận số nghiệm của phương trình

$$\sin x = \frac{x}{3}. \tag{3.9}$$

Giải. Ta có $|\sin x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Vì vậy, nếu x thoả mãn phương trình (3.9) thì $|x| \leq 3$. Khi đó

$$(3.9) \Leftrightarrow 3 \sin x - x = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = 3 \sin x - x$. Rõ ràng $f(x)$ là hàm liên tục, có đạo hàm trên $[-3; 3]$ và $f'(x) = 3 \cos x - 1$. Dễ thấy phương trình $f'(x) = 0$ luôn có hai nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$. Vì $[-3; 3] \subset (-\pi; \pi)$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có không quá hai nghiệm thuộc khoảng $(-3; 3)$. Do đó theo hệ quả 1.2, phương trình $f(x) = 0$ có không quá ba nghiệm thuộc khoảng $(-3; 3)$. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
&f(0) = 0,\\
&f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)f(3) = \Big(3 - \frac{\pi}{2}\Big)(3\sin 3 - 3) < 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \Big(\frac{\pi}{2}; 3\Big) : f(\alpha) = 0,\\
&f\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)f(-3) = \Big(-3 + \frac{\pi}{2}\Big)(-3\sin 3 + 3) < 0\\
&\ \Rightarrow \exists \beta \in \Big(-3; -\frac{\pi}{2}\Big) : f(\beta) = 0.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho luôn có 3 nghiệm

$$x = 0, \quad x = \alpha \in \Big(\frac{\pi}{2}; 3\Big), \quad x = \beta \in \Big(-3; -\frac{\pi}{2}\Big).$$

Nhận xét 3.4. Bài toán trên còn được giải bằng phương pháp đồ thị.

Bài 3.15. Giải phương trình

$$(1 + \sin x)(2 + 4^{\sin x}) = 3.4^{\sin x}. \tag{3.10}$$

Giải. Đặt $\sin x = y$, với điều kiện $-1 \le y \le 1$. Khi đó

$$(3.10) \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + y)(2 + 4^y) = 3.4^y,\\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3.4^y}{2 + 4^y} - y - 1 = 0,\\ -1 \le y \le 1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Xét hàm số $f(y) = \dfrac{3.4^y}{2 + 4^y} - y - 1$, ta có

$$f'(y) = \frac{6.\ln 4.4^y}{(2 + 4^y)^2} - 1.$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow (4^y)^2 + (4 - 6\ln 4).4^y + 4 = 0. \tag{3.12}$$

Phương trình (3.12) là phương trình bậc hai đối với ẩn 4^y nên có không quá 2 nghiệm. Do đó theo hệ quả 1.2, phương trình (3.11) có không quá 3 nghiệm. Mặt khác, dễ thấy phương trình (3.11) có 3 nghiệm

$$y = 0, \quad y = \frac{1}{2}, \quad y = 1.$$

Các nghiệm này đều thoả mãn điều kiện $-1 \leq y \leq 1$. Khi đó

$$y = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x & = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x & = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$y = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Thử lại, các giá trị này đều thoả mãn phương trình (3.10).

Vậy, phương trình đã cho có các họ nghiệm là:

$$x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 3.16. Giải phương trình

$$3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x). \tag{3.13}$$

Giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa: $x > -\dfrac{1}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}(3.13) &\Leftrightarrow 3^x + x = 1 + 2x + \log_3(1 + 2x) \\ &\Leftrightarrow 3^x + \log_3 3^x = 1 + 2x + \log_3(1 + 2x) \\ &\Leftrightarrow f(3^x) = f(1 + 2x),\end{aligned}$$

với $f(t) = t + \log_3 t, \quad t > 0$.

Rõ ràng hàm $f(t) = t + \log_3 t$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nên ta có

$$\begin{aligned}f(3^x) = f(1 + 2x) &\Leftrightarrow 3^x = 1 + 2x \\ &\Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Xét hàm số $g(x) = 3^x - 2x - 1$, với điều kiện $x > -\dfrac{1}{2}$. Tacó

$$g'(x) = 3^x \ln 3 - 2.$$

$$g''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0, \forall x > -\frac{1}{2}.$$

Do đó theo hệ quả 2.1, phương trình $g(x) = 0$ (tức là phương trình (3.14)) có không quá hai nghiệm.

Mặt khác, thử trực tiếp ta thấy $x = 0$ và $x = 1$ thoả mãn phương trình (3.14), và đó cũng chính là các nghiệm của phương trình (3.13).

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Chú ý 3.1. Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bernoulli để giải bài toán trên như sau: (3.14) $\Leftrightarrow 3^x + (1-3)x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Bài 3.17. Giải phương trình

$$5^x + 12^x = 6^x + 11^x. \tag{3.15}$$

Giải. Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$12^x - 11^x = 6^x - 5^x.$$

Giả sử phương trình có nghiệm α, khi đó

$$12^\alpha - 11^\alpha = 6^\alpha - 5^\alpha. \tag{3.16}$$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)^\alpha - t^\alpha \ \ (t > 0)$. Rõ ràng $f(t)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0; +\infty)$, và

$$f'(t) = \alpha[(t+1)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}].$$

Mặt khác, từ (3.16) ta có $f(11) = f(5)$. Do đó theo định lý Rolle, $\exists c \in (5; 11)$ sao cho

$$\begin{aligned} & f'(c) = 0. \\ \Rightarrow & \alpha[(c+1)^{\alpha-1} - c^{\alpha-1}] = 0 \\ \Rightarrow & \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ (c+1)^{\alpha-1} = c^{\alpha-1} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0, \\ \alpha = 1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thử lại, ta thấy các giá trị $\alpha = 0, \alpha = 1$ thoả mãn phương trình (3.15).

Vậy, phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 0, x = 1$.

Bài 3.18. Giải phương trình

$$2010^{\cos x} - 2009^{\cos x} = \cos x. \tag{3.17}$$

Giải. Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$2010^{\cos x} - 2010\cos x = 2009^{\cos x} - 2009\cos x.$$

Giả sử phương trình có nghiệm α, khi đó

$$2010^{\cos\alpha} - 2010\cos\alpha = 2009^{\cos\alpha} - 2009\cos\alpha. \tag{3.18}$$

Xét hàm số $f(t) = t^{\cos\alpha} - t.\cos\alpha,\quad t > 0$. Rõ ràng hàm số $f(t)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$, và

$$f'(t) = \cos\alpha(t^{\cos\alpha - 1} - 1).$$

Mặt khác, từ (3.18) ta có $f(2010) = f(2009)$. Do đó theo định lý Rolle, $\exists c \in (2009; 2010)$ sao cho

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \cos\alpha(c^{\cos\alpha - 1} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha & = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \alpha & = k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Thử lại, ta thấy các giá trị $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \alpha = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ thoả mãn phương trình (3.17).

Vậy, phương trình đã cho có các họ nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 3.19. Giải phương trình $x = 2^{\frac{x^2-1}{3}}$.

Giải. Viết lại phương trình dưới dạng

$$2^{\frac{x^2-1}{3}} - x = 0.$$

Xét hàm số $f(x) = 2^{\frac{x^2-1}{3}} - x$. Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, và ta có

$$f'(x) = \frac{2x\ln 2}{3}.2^{\frac{x^2-1}{3}} - 1,$$

$$f''(x) = \frac{2\ln 2}{3}.2^{\frac{x^2-1}{3}} + \frac{4x^2\ln^2 2}{9}.2^{\frac{x^2-1}{3}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số lồi trên $\mathbb{R}$, vì thế theo hệ quả 2.1, phương trình đã cho nếu có nghiệm thì có không quá 2 nghiệm. Dễ thấy $f(1) = f(2) = 0$.

Do vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

Bài 3.20. Giải phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = x^2 + x + 1. \tag{3.19}$$

Giải. Điều kiện: $x \geq 0$.
Phương trình (3.19) $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{3x+1} - x^2 - x - 1 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3x+1} - x^2 - x - 1$ với $x \in [0; +\infty)$ ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - 2x - 1,$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{9}{4\sqrt{(3x+1)^3}} - 2 < 0, \forall x > 0.$$

Theo hệ quả 2.1, phương trình (3.19) có không quá 2 nghiệm. Thử trực tiếp ta thấy $x = 0, x = 1$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = 0, x = 1$.

Bài 3.21 (Đề thi học sinh giỏi TP Hà Nội năm học 1994 - 1995)**.** Bất phương trình

$$\sin(x+1)\sqrt[3]{\cos x} - \sin x\sqrt[3]{\cos(x+1)} < \sqrt[3]{\cos x.\cos(x+1)} \tag{3.20}$$

có nghiệm $x = 5(Radian)$ không? Tại sao?

Giải. Ta có

$$(3.20) \Leftrightarrow \frac{\sin(x+1)}{\sqrt[3]{\cos(x+1)}} - \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} < 1. \tag{3.21}$$

Đặt $f(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{\sqrt[3]{\cos(x+1)}} - \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$.
Xét hàm $g(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt[3]{\cos t}}$ trên đoạn $[x; x+1] \subset \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. Rõ ràng $g(t)$ liên tục và có đạo hàm $g'(t) = \dfrac{2\cos^2 t + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 t}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $\cos^2 t, \cos^2 t, 1$, ta có

$$2\cos^2 t + 1 = \cos^2 t + \cos^2 t + 1 \geq 3\sqrt[3]{\cos^4 t}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 t + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 t}} \geq 1.$$

Tức $g'(t) \geq 1, \forall t \in [x; x+1] \subset \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $g(t)$ trên $[x; x+1]$ ta có

$$\frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} = g'(c), (\text{với} \quad c \in (x; x+1)).$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+1)}{\sqrt[3]{\cos(x+1)}} - \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} = \frac{2\cos^2 c + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 c}} \geq 1.$$

Như vậy, $\forall x \in [x; x+1] \subset \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ thì $f(x) \geq 1$, mà $x = 5 \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, cho nên $x = 5(radian)$ không phải là nghiệm của bất phương trình (3.21)(cũng là bất phương trình (3.20)).

Vậy, bất phương trình đã cho không có nghiệm $x = 5(radian)$.

3.3 Sự phân bố nghiệm của đa thức và đạo hàm

Trong phần này chúng tôi quan tâm đến ứng dụng của Định lý Rolle và các hệ quả của nó trong sự phân bố các không điểm của đạo hàm các hàm giải tích, qua đó để xét sự phân bố nghiệm của hàm đa thức.

Định nghĩa 3.1. *Số thực x_0 là không điểm của hàm $f(x)$ nếu $f(x_0) = 0$. Khi $f(x)$ là đa thức và thỏa mãn $f(x_0) = 0$ thì x_0 còn gọi là nghiệm thực của đa thức ấy.*

Số phức $x_0 = a + ib, b \neq 0$ thỏa mãn $f(x_0) = 0$ thì x_0 được gọi là không điểm phức của hàm $f(x)$.

Định nghĩa 3.2. *Hàm $f(x)$ duy trì dấu trong khoảng $(a; b)$ nếu $f(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b)$ hoặc $f(x) < 0 \quad \forall x \in (a; b)$.*

Giả sử khoảng $(a;b)$ được chia thành $m+1$ khoảng con sao cho:

i) $f(x)$ không đồng nhất triệt tiêu trong một khoảng con nào.

ii) $f(x)$ duy trì một dấu cố định trong mỗi khoảng con.

iii) $f(x)$ trái dấu nhau trong mỗi cặp khoảng kề nhau.

Khi đó, hàm $f(x)$ có m lần đổi dấu trong khoảng $(a;b)$.

Ta phát biểu một dạng khác của định lý Rolle.

Định lý 3.3 (Định lý Rolle). *Nếu a, b là hai không điểm kề nhau của hàm $f(x)$ (nghĩa là $f(a) = f(b) = 0, f(x) \neq 0$ với $a < x < b$) thì trong khoảng $(a;b)$ hàm $f'(x)$ có một số lẻ các không điểm (do đó có ít nhất một không điểm).*

Để chứng minh định lý này ta sẽ sử dụng kết quả của bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.1. Giả sử giá trị của hàm $f(x)$ tại các điểm a và b khác 0. Khi đó khoảng $(a;b)$ chứa một số chẵn (hoặc một số lẻ) các không điểm của hàm ấy nếu $f(a)$ và $f(b)$ có cùng dấu (hoặc trái dấu nhau).

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ là hàm đa thức và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ là các không điểm của $f(x)$ trong khoảng $(a;b)$ với bội tương ứng là $k_1, k_2, \ldots, k_s$ và $a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s < b$. Khi đó

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_s)^{k_s}g(x),$$

trong đó $g(x) \neq 0, \forall x \in (a;b)$ và dấu của $g(x)$ không đổi trong khoảng $(a;b)$.

Do đó

$$f(b)g(b) = (b-\alpha_1)^{k_1}(b-\alpha_2)^{k_2}\ldots(b-\alpha_s)^{k_s}[g(b)]^2 > 0 \qquad (3.22)$$

và

$$f(a)g(a) = (a-\alpha_1)^{k_1}(a-\alpha_2)^{k_2}\ldots(a-\alpha_s)^{k_s}[g(a)]^2$$

suy ra

$$f(a)g(a)(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_s} > 0. \qquad (3.23)$$

Từ (3.22) và (3.23) suy ra

$$f(a)g(a)f(b)g(b)(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_s} > 0.$$

Do dấu của $g(x)$ không đổi trong khoảng $(a;b)$ nên

$$f(a)f(b)(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_s} > 0.$$

Ta xét các khả năng sau:

- Nếu $f(a)$ và $f(b)$ cùng dấu thì $(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_s} > 0$, suy ra $k_1 + k_2 + \cdots + k_s$ là một số chẵn. Nói cách khác, khoảng $(a;b)$ chứa một số chẵn các không điểm.

- Nếu $f(a)$ và $f(b)$ khác dấu thì $(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_s} < 0$, suy ra $k_1 + k_2 + \cdots + k_s$ là một số lẻ. Nói cách khác, khoảng $(a;b)$ chứa một số lẻ các không điểm.

Nhận xét rằng, khi thay đa thức $f(x)$ bởi một hàm giải tích thì kết quả bài toán trên vẫn không thay đổi.

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý trên.

Lấy $\varepsilon > 0$ đủ bé sao cho các khoảng $(a;a+\varepsilon), (b-\varepsilon;b)$ không chứa không điểm nào của $f'(x)$. Khi đó, số không điểm của $f'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ bằng số không điểm của $f'(x)$ trong khoảng $(a+\varepsilon;b-\varepsilon)$. Ta có

$$f(a+\varepsilon) = f(a+\varepsilon) - f(a) = \varepsilon f'(a+\varepsilon_1),$$

trong đó $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ và

$$-f(b-\varepsilon) = f(b) - f(b-\varepsilon) = \varepsilon f'(b-\varepsilon_2),$$

trong đó $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon$.Vì

$$\operatorname{sign} f(a+\varepsilon) = \operatorname{sign} f(b-\varepsilon) \neq 0$$

nên

$$\operatorname{sign} f'(a+\varepsilon) = -\operatorname{sign} f'(b-\varepsilon) \neq 0.$$

Theo bổ đề 3.1, hàm số $f'(x)$ chứa một số lẻ các không điểm trong khoảng $(a+\varepsilon;b-\varepsilon) \subset (a;b)$.

Hệ quả 3.1. Nếu trong khoảng $(a; b)$ hàm $f(x)$ có m không điểm thì $f'(x)$ có ít nhất $m - 1$ không điểm trong khoảng đó.

Giải. Nhận xét rằng, nếu tại điểm $x = x_1$, hàm $f(x)$ có không điểm bội bậc $t > 0$ $(t \in \mathbb{N})$ thì tại điểm đó $f'(x)$ có không điểm bội bậc $t - 1$.

Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là các không điểm của hàm $f(x)$ sao cho

$$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq b.$$

Chia đoạn $[x_1; x_k]$ thành k phần không giao nhau, trong đó gồm một điểm x_1 và $k - 1$ khoảng nửa mở $(x_1; x_2], (x_2; x_3], \ldots, (x_{k-1}; x_k]$. Khi chuyển từ $f(x)$ đến $f'(x)$ ta thấy:

Tại $x = x_1$ sẽ mất đi một không điểm (theo nhận xét trên). Trong các khoảng nửa mở$(x_1; x_2], (x_2; x_3], \ldots, (x_{k-1}; x_k]$ không mất đi một không điểm nào (theo định lý Rolle).

Do đó nếu trong khoảng $(a; b)$ hàm $f(x)$ có m không điểm thì trong khoảng đó hàm $f'(x)$ có ít nhất là $m - 1$ không điểm.

Nhận xét 3.5.

i) Kết quả bài toán trên vẫn đúng nếu thay khoảng $(a; b)$ bởi các nửa khoảng $(a; b], [a; b)$ hay bởi đoạn $[a; b]$ hoặc chỉ là một điểm $\{x_1\}$.

ii) Nếu hàm $f(x)$ là đa thức bậc n và có n nghiệm thực thì $f'(x)$ có $n - 1$ nghiệm thực.

Bài toán 3.1. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ thì $f'(x)$ có số lượng các không điểm trong khoảng $(a; +\infty)$ không ít hơn so với $f(x)$ trên khoảng ấy. Kết quả vẫn đúng nếu thay $+\infty$ bởi $-\infty$.

Giải. Nếu trong khoảng $(a; +\infty)$, $f(x)$ có số các không điểm là vô hạn. Khi đó theo định lý Rolle ta suy ra số các không điểm của $f'(x)$ trong khoảng ấy cũng là vô hạn.

Giả sử trong khoảng $(a; +\infty)$ hàm $f(x)$ có số các không điểm là hữu hạn và x_m là không điểm cuối cùng của hàm $f(x)$ trong khoảng ấy. Khi đó theo hệ quả 3.1 trong nửa khoảng $a < x \leq x_m$ hàm $f'(x)$ có ít hơn $f(x)$ tối đa là một không điểm.

Xét trên khoảng $(x_m; +\infty)$ ta có

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_{x_m}^{\infty} f'(x)dx = 0.$$

nên $f'(x)$ không thể giữ một dấu cố định trong khoảng $(x_m; +\infty)$. Vậy trên khoảng $(a; +\infty)$ hàm số $f'(x)$ có số các không điểm không ít hơn so với hàm số $f(x)$.

Chứng minh tương tự trong khoảng $(-\infty; a)$.

Bài toán 3.2. Giả sử hàm số $f(x)$ có n không điểm trong khoảng $(a; +\infty)$. Chứng minh rằng với mọi số thực α hàm số $\alpha f(x) + f'(x)$ có ít nhất $n-1$ không điểm trong khoảng đó. Hơn nữa, nếu thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x} f(x) = 0$ thì hàm đã nêu có ít nhất là n không điểm.

Giải. Xét hàm $g(x) = e^{\alpha x} f(x)$ trên khoảng $(a, +\infty)$.

Ta có $g'(x) = e^{\alpha x}[\alpha f(x) + f'(x)]$. Vì $f(x)$ có n không điểm trong khoảng $(a, +\infty)$ và $e^{\alpha x} > 0, \ \forall x \in (a, +\infty)$ nên $g(x)$ cũng có n không điểm trong khoảng đó. Theo hệ quả 3.1 thì trong khoảng $(a, +\infty)$ hàm

$$g'(x) = e^{\alpha x}[\alpha f(x) + f'(x)]$$

có không ít hơn $n-1$ không điểm trong khoảng ấy. Suy ra hàm số $\alpha f(x) + f'(x)$ có không ít hơn $n-1$ không điểm trong khoảng $(a, +\infty)$.

Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha x} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ và theo Bài toán 3.1 ta thu được số không điểm của hàm số $g'(x)$ trên khoảng $(a, +\infty)$ không ít hơn so với $g(x)$. Do đó số không điểm của hàm $\alpha f(x) + f'(x)$ có ít nhất là n điểm trên khoảng $(a, +\infty)$.

Bài toán 3.3. Nếu trong khoảng hữu hạn (a, b) hàm số $f(x)$ có n không điểm và thoả mãn một trong các điều kiện sau

(i) $\operatorname{sign} f(a) = \operatorname{sign} f'(a) \neq 0$,

(ii) $\operatorname{sign} f(b) = -\operatorname{sign} f'(b) \neq 0$.

Chứng minh rằng trong khoảng (a, b) hàm số $f'(x)$ có không ít hơn n không điểm.

Nếu cả hai điều kiện được thoả mãn thì trong khoảng (a, b) hàm số $f'(x)$ có không ít hơn $n+1$ không điểm.

Giải. Giả sử $\operatorname{sign} f(a) = \operatorname{sign} f'(a) \neq 0$ và $x_1, x_2, \ldots, x_l$ là những không điểm của hàm $f(x)$ thoả mãn

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_l.$$

Ta chia nửa khoảng $a < x \leq x_l$ thành các nửa khoảng con không giao nhau

$$(a, x_1], (x_1, x_2], \ldots, (x_{l-1}, x_l].$$

Với $\varepsilon > 0$ đủ bé thì

$$-f(x_1 - \varepsilon) = f(x_1) - f(x_1 - \varepsilon) = \varepsilon f'(x_1 - \mu),\ \ 0 < \mu < \varepsilon,$$

kết hợp với giả thiết ta suy ra

$$\operatorname{sign} f'(a) = \operatorname{sign} f(a) = \operatorname{sign} f(x_1 - \epsilon) = -\operatorname{sign} f'(x_1 - \mu) \neq 0.$$

Do đó theo bổ đề 3.1 ta suy ra trong khoảng $(a, x_1 - \mu) \subset (a, x_1)$ hàm $f'(x)$ có ít nhất một không điểm.

Tiếp theo, đối với các khoảng con khác, theo bổ đề 3.1, ta suy ra trong đoạn $[x_1, x_l]$ số nghiệm của hàm $f'(x)$ có ít hơn số nghiệm của $f(x)$ tối đa là một nghiệm.

Như vậy nếu trong khoảng (a, b) hàm $f(x)$ có n không điểm thoả mãn điều kiện $\operatorname{sign} f(a) = \operatorname{sign} f'(a) \neq 0$ thì trong khoảng đó hàm $f'(x)$ có không ít hơn n không điểm.

Tiếp theo, nếu $f(x)$ thoả mãn thêm điều kiện (ii), thì bằng lập luận tương tự như trên, ta thu được

$$f(x_l + \varepsilon) = f(x_l + \varepsilon) - f(x_l) = \varepsilon f'(x_l + \xi),$$

trong đó $\varepsilon > 0$ đủ bé và $0 < \xi < \varepsilon$. Suy ra

$$\operatorname{sign} f'(b) = -\operatorname{sign} f(b) = -\operatorname{sign} f(x_l + \varepsilon) = -\operatorname{sign} f'(x_l + \varepsilon).$$

Suy ra trong khoảng $(x_l + \varepsilon, b)$ hàm $f'(x)$ còn có thêm một không điểm. Do đó trong khoảng (a, b) hàm $f'(x)$ có không ít hơn $n+1$ không điểm.

3.4 Một bài toán liên quan đến khai triển Taylor-Gontcharov.

Như ta đã biết, mọi hàm giải tích đều khai triển được thành chuỗi lũy thừa (chuỗi Taylor) tại điểm tương ứng. Tuy nhiên, tồn tại những hàm số khả vi vô hạn (có đạo hàm mọi cấp) tại lân cận một điểm mà không khai triển được thành chuỗi lũy thừa tại điểm đó. Trong phần này, dựa vào định lý Rolle, ta cũng xây dựng được hàm số không khai triển được thành chuỗi Taylor-Gontcharov tương ứng theo dãy điểm phân biệt trong khoảng đã cho.

Trước hết ta xét hàm Dirichlet xác định như sau:

$$f_D(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{khi } \ x \neq 0, \\ 0, & \text{khi } \ x = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy $f_D^{(n)}(0) = 0, \forall n = 1, 2, 3, \ldots$ Vậy nên hàm $f_D(x)$ khả vi vô hạn tại 0 và đạo hàm mọi cấp tại 0 đều bằng 0.

Tuy nhiên hàm $f_D(x)$ không giải tích tại 0. Thật vậy, nếu hàm $f_D(x)$ giải tích tại 0 thì tại lân cận của 0, ta có khai triển Taylor:

$$f_D(x) = f_D(0) + \frac{f'_D(0)}{1!}x + \frac{f''_D(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_D^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad | x |< \varepsilon.$$

Điều này không thể xảy ra vì vế phải đồng nhất bằng 0.

Dựa vào định lý Rolle và một số mở rộng của nó ta sẽ chỉ ra sự tồn tại một hàm số $h(x)$ khả vi vô hạn trong $[0; 1]$, giải tích trong $(0; 1)$ và một dãy điểm $\{x_n\}$ trong $(0; 1)$ mà khai triển Taylor-Gontcharov dạng:

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x_0) + \frac{h'(x_1)}{1!}P_1(x) + \frac{h''(x_2)}{2!}P_2(x) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(x_n)}{n!}P_n(x), \quad | x |< \varepsilon \end{aligned}$$

không thực hiện được.

Xét hàm số

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{2x^2}}, & \text{khi} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{khi} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dễ kiểm tra rằng

$$g'(x) = \Big(-1 + \frac{1}{x^3} \Big) e^{-x-\frac{1}{2x^2}},$$

nên $g'(1) = 0$ và $\lim\limits_{x \to 0+} g'(x) = 0$. Bằng phương pháp quy nạp toán học, dựa vào nhận xét sau đây:

Ứng với mọi đa thức $Q(\frac{1}{x})$, ta đều có

$$\lim_{x \to 0+} Q\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

ta dễ dàng kiểm chứng

$$\lim_{x \to 0+} g^{(n)}(x) = 0, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Vậy nếu định nghĩa

$$h(x) = \begin{cases} g'(x), & \text{khi} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{khi} \quad x = 0. \end{cases}$$

thì $h(x)$ giải tích trong $(0, 1)$ và liên tục trong $[0, 1]$ và có tính chất $h(0) = h(1) = 0$, nên theo định lý Rolle, tồn tại $x_1 \in (0, 1)$ để $h'(x_1) = 0$.

Tiếp theo, áp dụng hệ quả 1.3, ta suy ra tồn tại dãy số dương (phân biệt) $\{x_n\}$ đơn điệu giảm trong $(0, 1)$ để $h^{(n)}(x_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vậy hàm $h(x)$ giải tích trong trong $(0, 1)$ và khả vi vô hạn trên $[0, 1]$ và một dãy điểm $\{x_n\}$ trong $(0, 1)$ tại đó $h^{(n)}(x_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Từ đây suy ra hàm $h(x)$ không khai triển được thành chuỗi Taylor-Gontcharov theo dãy điểm $\{x_n\}$ trong $(0, 1)$ vì nếu có khai triển như vậy thì từ điều kiện $h^{(n)}(x_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, suy ra $h(x) \equiv 0$ trong $(0, 1)$, điều này là vô lí.

3.5 Chứng minh bất đẳng thức.

Để chứng minh một số bất đẳng thức, ta có thể xét hàm số phụ và áp dụng trực tiếp các định lý và hệ quả đã nêu trong chương 1.

Bài 3.22. Cho a, b, c, d là bốn số dương bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}.$$

Giải. Do vai trò của a, b, c, d như nhau, nên ta có thể giả thiết

$$a \leq b \leq c \leq d.$$

Xét hàm số $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$. Rõ ràng $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$. Tacó

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)) \\ &= x^4 - (a + b + c + d)x^3 + (ad + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 \\ &- (abc + abd + acd + bcd)x + abcd. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f'(x) = 4x^3 - 3(a + b + c + d)x^2 + 2(ad + ac + ad + bc + bd + cd)x \\ - (abc + abd + acd + bcd). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Áp dụng định lý Rolle cho hàm số $f(x)$ trên các khoảng $(a; b), (b; c), (c; d)$, khi đó tồn tại $x_1 \in (a; b), x_2 \in (b; c), x_3 \in (c; d)$ sao cho

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = 0.$$

Chú ý rằng $f'(x)$ là một hàm bậc ba của x và có hệ số của số hạng có bậc cao nhất là 4 nên suy ra

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= 4x^3 - 4(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4)x - 4x_1x_2x_3. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Từ (3.24) và (3.25) ta thu được:

$$x_1x_2x_3 = \frac{1}{4}(abc + abd + acd + bcd), \tag{3.26}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 = \frac{1}{2}(ab + ac + ad + bc + bd + cd). \tag{3.27}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $x_1x_2 > 0, x_2x_3 > 0, x_3x_1 > 0$, ta có

$$\sqrt[3]{(x_1x_2x_3)^2} \leq \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{3}. \tag{3.28}$$

Thay (3.26) và (3.27) vào (3.28) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.
Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Bài 3.23. Chứng minh rằng với 2 số thực a, b bất kỳ ta luôn có

$$|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

Giải. Nếu $a = b$ thì đẳng thức xảy ra.

Nếu $a \neq b$, thì do vai trò của a và b như nhau, ta có thể giả sử $a < b$.

Xét hàm số $f(x) = \arctan x$, rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và ta có

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \forall x \in [a; b].$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Suy ra

$$\frac{|\arctan b - \arctan a|}{|b - a|} = \left|\frac{1}{1 + c^2}\right| \leq 1.$$

Hay ta có

$$|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|.$$

Bài 3.24. Cho $0 < a < b < c$ và $0 < q < p$. Chứng minh rằng:

$$c^p b^q + b^p a^q + a^p c^q \geq c^q b^p + b^q a^p + a^q c^p. \tag{3.29}$$

Giải. Xét hàm số

$$f(x) = x^p b^q + b^p a^q + a^p x^q - x^q b^p - b^q a^p - a^q x^p.$$

Khi đó bất đẳng thức (3.29) tương đương với $f(c) > 0$. Ta có $f(b) = 0$ và

$$\begin{aligned} f'(x) &= p(b^q - a^q)x^{p-1} + q(a^p - b^p)x^{q-1} \\ &= q(b^q - a^q)x^{q-1}\Big(\frac{p}{q}x^{p-q} - \frac{b^p - a^p}{b^q - a^q}\Big). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Áp dụng định lý Cauchy cho hai hàm x^p và x^q trên đoạn $[a; b]$, ta có

$$\frac{b^p - a^p}{b^q - a^q} = \frac{pm^{p-1}}{qm^{q-1}} = \frac{p}{q}m^{p-q} \quad \text{với} \quad a < m < b. \tag{3.31}$$

Từ (3.30) và (3.31) ta có

$$f'(x) = p(b^q - a^q)x^{q-1}(x^{p-q} - m^{p-q}) > 0, \quad \forall x > 0.$$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(b; c)$ nên

$$f(c) > f(b) = 0.$$

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 3.25. Cho hàm số $f(x) = \cos a_1 x + \cos a_2 x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Gọi $m(a_1, a_2) = \min f(x)$. Chứng minh rằng

$$m(a_1, a_2) < 0, \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_1, a_2 \neq 0.$$

Giải. Đặt $\quad g(x) = \dfrac{\sin a_1 x}{a_1} + \dfrac{\sin a_2 x}{a_2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$g'(x) = \cos a_1 x + \cos a_2 x = f(x).$$

Có thể giả thiết $0 < a_1 \leq a_2$ (do $\cos a_1 x$ và $\cos a_2 x$ là các hàm chẵn).
Nếu $a_1 = a_2$ thì $f(x) = 2\cos a_1 x$, ta có

$$f\Big(\frac{\pi}{a_1}\Big) = 2\cos\pi = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad m(a_1, a_2) \leq -2 < 0.$$

Nếu $0 < a_1 < a_2$. Ta có $\quad g(0) = 0$ và

$$g\Big(\frac{3\pi}{2a_1}\Big) = \frac{1}{a_1}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{a_2}\sin\frac{3\pi a_2}{2a_1}$$
$$= -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\sin\frac{3\pi a_2}{2a_1} \le -\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < 0.$$

Theo định lý Lagrange, $\exists \xi \in \Big(0; \dfrac{3\pi}{2a_1}\Big)$ sao cho

$$\frac{g\Big(\frac{3\pi}{2a_1}\Big) - g(0)}{\frac{3\pi}{2a_1}} = g'(\xi) = f(\xi) \ge m(a_1, a_2).$$

Do $\dfrac{g\Big(\frac{3\pi}{2a_1}\Big) - g(0)}{\frac{3\pi}{2a_1}} < 0$ nên $\quad m(a_1, a_2) < 0, \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Vậy $\quad m(a_1, a_2) < 0 \quad$ với mọi $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, và $a_1, a_2 \ne 0$.

Bài 3.26. Giả sử $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{4n^2} \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ và $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\frac{1}{3}}}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Với những giá trị nào của n ta có $S_1 < S_2$?

Giải. Xét hàm $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, (x \ge 1)$. Rõ ràng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[1; +\infty)$, và ta có $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Theo định lý Lagrange, $\exists c \in (k; k+1)$, $k \in \mathbb{N}$ sao cho

$$f(k+1) - f(k) = f'(c)$$
$$\Leftrightarrow (k+1)^{\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}c^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}.$$
$$\Leftrightarrow k^{-\frac{1}{2}} > 2\Big[(k+1)^{\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}}\Big].$$

Cho k chạy từ 1 đến $4n^2$ rồi cộng lại, ta được

$$S_1 = \sum_{k=1}^{4n^2} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} > 4n - 2. \tag{3.32}$$

Xét hàm $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, \quad (x \ge 1)$. Rõ ràng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[1; +\infty)$, và ta có $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

Theo định lý Lagrange, $\exists c \in (k; k+1)$ sao cho

$$\begin{aligned}
&f(k+1) - f(k) = f'(c) \\
\Leftrightarrow &(k+1)^{\frac{2}{3}} - k^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}c^{-\frac{1}{3}} > \frac{2}{3}(k+1)^{-\frac{1}{3}}. \\
\Leftrightarrow &2(k+1)^{-\frac{1}{3}} < 3\Big[(k+1)^{\frac{2}{3}} - k^{\frac{2}{3}}\Big].
\end{aligned}$$

Cho k chạy từ 0 đến $n-1$ và cộng lại, ta được

$$\begin{aligned}
&2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} < 3n^{\frac{2}{3}} < 3n < 8n - 4, \\
\Leftrightarrow &S_2 < 4n - 2. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Từ (3.32) và (3.33) ta có $S_1 > S_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Như vậy, không tồn tại $n \in \mathbb{N}$ để $S_1 < S_2$.

Bài 3.27. Chứng minh rằng

$$\sin e\left(\sqrt[3]{\cos(e-1)}\right) - \sin(e-1)\sqrt[3]{\cos e} > \sqrt[3]{\cos(e-1)\cos e}. \qquad (3.34)$$

Giải. Ta có $\pi > e$ và $e - 1 \approx 1,71828 > \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin e > 0, \quad \sin(e-1) > 0, \\ \cos e < 0, \quad \cos(e-1) < 0. \end{cases}$$

Khi đó

$$(3.34) \Leftrightarrow \frac{\sin e}{\sqrt[3]{\cos e}} - \frac{\sin(e-1)}{\sqrt[3]{\cos(e-1)}} > 1.$$

Đặt $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$, với điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Rõ ràng hàm $f(x)$ liên tục trên $[e-1, e] \subset \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ và có đạo hàm trên khoảng $(e-1; e)$. Theo định lý Lagrange, $\exists c \in (e-1; e)$ sao cho

$$f(e) - f(e-1) = f'(c). \qquad (3.35)$$

Mặt khác, ta có $f'(x) = \dfrac{2\cos^2 x + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $\cos^2 x, \cos^2 x, 1$ ta có

$$2\cos^2 x + 1 = \cos^2 x + \cos^2 x + 1 \geq 3\sqrt[3]{\cos^4 x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x + 1}{3\sqrt[3]{\cos^4 x}} \geq 1 \Leftrightarrow f'(x) \geq 1.$$

Dấu "=" không xảy ra với $x \in [e-1; e]$, do vậy

$$f'(c) > 1. \tag{3.36}$$

Từ (3.35) và (3.36) ta thu được $f(e) - f(e-1) > 1$,
hay $\dfrac{\sin e}{\sqrt[3]{\cos e}} - \dfrac{\sin(e-1)}{\sqrt[3]{\cos(e-1)}} > 1.$

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 3.28. Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ thì

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan\beta - \tan\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = \tan x$. Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $[\alpha; \beta]$, có đạo hàm trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Theo định lý Lagrange, $\exists c \in (\alpha; \beta)$ sao cho

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{1}{\cos^2 x}(\beta - \alpha). \tag{3.37}$$

Vì $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ nên $0 < \cos\beta < \cos c < \cos\alpha$.

Từ đó ta có $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} < \dfrac{1}{\cos^2 c} < \dfrac{1}{\cos^2 \beta}$,

Suy ra

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 c} < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}. \tag{3.38}$$

Từ (3.37) và (3.38) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 3.29. Chứng minh rằng với $n > 1 (n \in \mathbb{N})$ và $0 < a < b$ ta có

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a).$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = x^n$, với $x > 0$.
Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = nx^{n-1}$. Khi đó theo định lý Lagrange, $\exists c \in (a; b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

hay

$$b^n - a^n = nc^{n-1}(b - a) \tag{3.39}$$

Do $b - a > 0$ và $a < b < c$ nên ta có

$$na^{n-1}(b - a) < nc^{n-1}(b - a) < nb^{n-1}(b - a). \tag{3.40}$$

Từ (3.39) và (3.40) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 3.30. Cho $t > 0$ chứng minh bất đẳng thức

$$\left(1 + \frac{1}{t+1}\right)^{t+1} > \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t.$$

Giải. Xét hàm số

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x[\ln(x + 1) - \ln x], \quad \text{với} \quad x > 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x + 1) - \ln x + x\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln(x + 1) - \ln x - \frac{1}{x+1}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Xét hàm số $g(y) = \ln y$ trên đoạn $[x; x + 1]$. Rõ ràng $g(y)$ liên tục trên $[x; x + 1]$, có đạo hàm trên khoảng $(x; x + 1)$ và ta có $g'(y) = \dfrac{1}{y}$.
Theo định lý Lagrange, $\exists c \in (x; x + 1)$ sao cho

$$g(x + 1) - g(x) = g'(c)(x + 1 - x),$$

nghĩa là ta có $\quad \ln(x + 1) - \ln x = \dfrac{1}{c}$.

Vì $0 < x < c < x + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{x+1}$, do đó

$$\begin{aligned} &\ln(x + 1) - \ln x > \frac{1}{x+1} \\ \Leftrightarrow &\ln(x + 1) - \ln x - \frac{1}{x+1} > 0. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Từ (3.41) và (3.42) ta thu được $f'(x) > 0, \forall x > 0$ suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Như vậy, với $t > 0$ ta có $f(t+1) > f(t)$, hay ta có

$$(t+1)\ln\left(1+\frac{1}{x+1}\right) > t\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$$
$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{t+1}\right)^{t+1} > \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} \tag{3.43}$$

Do tính đồng biến của hàm $g(y) = \ln y$, nên từ (3.43) ta suy ra

$$\left(1+\frac{1}{t+1}\right)^{t+1} > \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét 3.6. Ta đã biết, nếu n là số tự nhiên, ta luôn có

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}. \tag{3.44}$$

Như vậy, bất đẳng thức trong bài trên là mở rộng của bất đẳng thức (3.44) (Từ các số tự nhiên ra một số dương tuỳ ý).

Với bất đẳng thức (3.44) ta có cách chứng minh rất ngắn gọn như sau:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho $n+1$ số gồm n số $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ và số 1, ta có

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$
$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3.31. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$x^n\sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}, \quad \forall x \in (0; 1).$$

Giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^{2n}(2n - 2nx) < \frac{1}{e}. \tag{3.45}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2n số dương x và số dương $2n-2nx$, ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt[2n+1]{x^{2n}(2n-2nx)} \le \frac{x + x + \cdots + x + 2n - 2nx}{2n+1}\\
\Leftrightarrow &x^{2n}(2n-2nx) \le \Big(\frac{x + x + \cdots + x + 2n - 2nx}{2n+1}\Big)^{2n+1}\\
\Leftrightarrow &x^{2n}(2n-2nx) \le \Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^{2n+1}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^{2n+1} < \frac{1}{e}. \tag{3.47}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
(3.47) \Leftrightarrow \ln\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^{2n+1} &< \ln e^{-1}\\
\Leftrightarrow (2n+1)[\ln 2n - \ln(2n+1)] &< -1\\
\Leftrightarrow \ln(2n+1) - \ln 2n &> \frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số $f(x) = \ln x$ trên đoạn $[2n; 2n+1]$, khi đó $\exists c \in (2n; 2n+1)$ sao cho

$$\ln(2n+1) - \ln 2n = f'(c) = \frac{1}{c} > \frac{1}{2n+1}.$$

Như vậy ta có bất đẳng thức (3.47).

Từ (3.46) và (3.47) ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 3.32. Giả sử $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ và

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)(x + a_4) = x^4 + 4P_1x^3 + 6P_2^2x^2 + 4P_3^3x + P_4^4.$$

($P_i > 0$ Với $i = 1, ..., 4$).

a) Tính P_1, P_2, P_3, P_4?

b) Chứng minh rằng $P_1 \ge P_2 \ge P_3 \ge P_4$.

Giải. a)Tính P_1, P_2, P_3, P_4.

Ta có

$$\begin{aligned}(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4 &+ (a_1+a_2+a_3+a_4)x^3\\ &+ (a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2\\ &+ (a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4.\end{aligned}$$

Đồng nhất thức các hệ số ta được

$$\begin{cases}4P_1 = a_1+a_2+a_3+a_4,\\ 6P_2^2 = a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4,\\ 4P_3^3 = a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4,\\ P_4^4 = a_1a_2a_3a_4.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}P_1 = \frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4),\\ P_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)},\\ P_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)},\\ P_4 = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.\end{cases}$$

b) Chứng minh rằng $P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_4$.

+) Theo định lý AM-GM ta có ngay $P_1 \geq P_4$.

+) CM: $P_1 \geq P_2$.

Đa thức $P(x) = x^4 + 4P_1x^3 + 6P_2^2x^2 + 4P_3^3x + P_4^4$ có 4 nghiệm, vì thế theo hệ quả 1.1 thì $P''(x)$ có ít nhất 2 nghiệm, mà ta có

$$P''(x) = 12x^2 + 24P_1x + 12P_2^2.$$

$P''(x)$ có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow P_1 \geq P_2$ (vì $P_1 > 0, P_2 > 0$).

+) CM: $P_2 \geq P_3$.

Ta có $P'(x) = 4(x^3 + 3P_1x^2 + 3P_2^2x + P_3^3)$.

Đặt $x = \dfrac{1}{t}$ thì ta có $P'(x) = \dfrac{4}{t^3}(1 + 3P_1t + 3P_2^2t^2 + P_3^3t^3)$. Dễ thấy đa thức $P'(x)$ có 3 nghiệm âm nên đa thức $Q(t) = (1+3P_1t+3P_2^2t^2+P_3^3t^3)$

cũng có 3 nghiệm, suy ra $Q'(t)$ có 2 nghiệm.
Mà $Q'(t) = 3(P_3^3 t^2 + 2P_2^2 t + P_1)$.

$$\begin{aligned} Q'(t)\text{có 2 nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow P_2^4 - P_3^3 P_1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow P_2^4 \geq P_3^3 P_1 \geq P_3^3 P_2 \quad (\text{vì} P_1 \geq P_2 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow P_2^3 \geq P_3^3 \Leftrightarrow P_2 \geq P_3. \end{aligned}$$

+) Theo định lý AM - GM ta dễ dàng chứng minh được $P_3 \geq P_4$.

Bài 3.33 (Olympic Nga). Cho phương trình

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.(a_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n)$$

có n nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng

$$(n-1)a_1^2 > 2na_0a_2.$$

Giải. Xét đa thức $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Rõ ràng $f(x)$ khả vi vô hạn lần trên $\mathbb{R}$. Vì $f(x)$ có n nghiệm phân biệt, nên theo hệ quả 1.1 thì
$f'(x)$ có ít nhất $n-1$ nghiệm,
$f''(x)$ có ít nhất $n-2$ nghiệm,
...
$f^{(n-2)}(x)$ có ít nhất 2 nghiệm.
Mà ta có $f^{(n-2)}(x) = \dfrac{n!}{2}a_0x^2 + (n-1)!a_1x + (n-2)!a_2$.

$$\begin{aligned} f^{(n-2)}(x)\text{có 2 nghiệm phân biệt} &\Leftrightarrow \Delta > 0 \\ &\Leftrightarrow [(n-1)!a_1]^2 - 2n!a_0(n-2)!a_2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (n-1)a_1^2 > 2na_0a_2. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Chương 4

Bài tập bổ sung

Bài 4.1. Chứng minh rằng với a, b, c tuỳ ý, phương trình

$$a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x = 0$$

luôn có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.
(Đề thi tuyển sinh ĐH khối A - ĐHQG - 1999).

Hướng dẫn giải. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}a\sin 3x + \frac{1}{2}b\sin 2x + c\sin x - \cos x.$$

và áp dụng định lý Rolle trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Bài 4.2. Chứng minh rằng nếu phương trình

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

thoả mãn hệ thức $\dfrac{a_n}{n+1} + \dfrac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \dfrac{a_1}{2} + a_0 = 0$ thì phương trình có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ và áp dụng định lý 3.1.

Bài 4.3. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm

$$\pi\arccos x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi x - 1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$$

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = \pi\Big(\arccos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) - \dfrac{\pi x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$ và áp dụng định lý Rolle trên đoạn $\Big[\dfrac{1}{\pi}; \dfrac{\pi}{4}\Big]$.

Bài 4.4. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn đồng thời các tính chất sau đây

i) $f(x)$ xác định và có đạo hàm cấp $(k-1)$ liên tục trên đoạn $[a;b], (1 \leq k \leq n)$.

ii) $f(x)$ có đạo hàm cấp k trên khoảng $(a;b)$.

iii) $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_k)$ với $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_k < b$.

Chứng minh rằng trong khoảng $(x_0; x_k)$ tồn tại ít nhất $(n-k+1)$ điểm ξ sao cho $f^{(k)}(\xi) = 0$, với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng định lý Rolle.

Bài 4.5. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(a) = f(b), f(x) \neq 0, \forall x \in (0 = a; b).$$

Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{x_n\}, x_n \in (a;b)$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e}-1)f(x_n)} = 2010.$$

Hướng dẫn giải. Với mỗi $n = 1, 2, 3, \ldots,$ xét hàm số

$$G_n(x) = exp\Big(-\frac{2010x}{n}\Big)f(x).$$

Bài 4.6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$. Giả sử $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại hai số α, β với $0 < \alpha < \beta < 1$ sao cho

$$f'(\alpha).f'(\beta) = 1.$$

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $g(x) = f(x) + x - 1$.

Bài 4.7. Chứng minh rằng phương trình

$$2(x^2 - x - 2)\cos 2x = (1-2x)\sin 2x$$

có ít nhất ba nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1; 2)$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = (x^2 - x - 2)\sin 2x$.

Bài 4.8. Giả sử $\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$a2^{2x} + b2^x + c = 0$$

luôn có nghiệm.

Hướng dẫn giải. Đặt $t = 2^x, t > 0$ và xét hàm số

$$f(t) = \frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct.$$

Bài 4.9. Giải phương trình $2^x - \log_2(x+1) - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = 2^x - \log_2(x+1) - 1$.

Bài 4.10. Giải phương trình

$$2^{x^2-x} + 12^{x^2-x} = 2.7^{x^2-x}.$$

Hướng dẫn giải. Viết lại phương trình dưới dạng

$$12^{x^2-x} - 7^{x^2-x} = 7^{x^2-x} - 2^{x^2-x}$$

Giả sử phương trình có nghiệm α, ta xét hàm số $f(t) = (t+5)^{\alpha^2-\alpha} - t^{\alpha^2-\alpha}$.

Bài 4.11. Xác định số nghiệm của phương trình $sinx = \dfrac{\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = 8\sin x - x$.

Bài 4.12. Cho $a - b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$a\sin x + 9b\sin 3x + 25c\sin 5x = 0$$

có ít nhất 4 nghiệm trên đoạn $[0; \pi]$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm $f(x) = a\sin x + b\sin 3x + c\sin 5x$ trên $[0; \pi]$.

Bài 4.13. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b phương trình

$$a(25\sin 5x - \sin x) + b(49\sin 7x - 9\sin 3x) = 0$$

có ít nhất 7 nghiệm trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = a\sin x + b\sin 3x - a\sin 5x - b\sin 7x$ trên $[0; 2\pi]$.

Bài 4.14. Cho $0 < a < b$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = \ln x$ trên đoạn $[a; b]$ và áp dụng định lý Lagrange.

Bài 4.15. Chứng minh rằng với mọi a, b ta có

$$|\sin a - \sin b| \leq |b - a|.$$

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = \sin x$ và áp dụng định lý Lagrange.

Bài 4.16. Cho $a < b < c$ chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} 3a &< a + b + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \\ &< a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} < 3c. \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ và áp dụng định lý Rolle.

Bài 4.17. Cho $0 < a < b$. Chứng minh rằng

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = \arctan x$ và áp dụng định lý Lagrange.

Bài 4.18. Cho $f(x) = a_1\sin b_1x + a_2\sin b_2x + \cdots + a_n\sin b_nx$.
Giả sử $|f(x)| \leq |\sin x|, \forall x \in [-1; 1]$. Chứng minh rằng

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| \leq 1.$$

Hướng dẫn giải. Xét hàm số

$$f(x) = a_1\sin b_1x + a_2\sin b_2x + \cdots + a_n\sin b_nx$$

và áp dụng định lý Lagrange.

Kết luận

Luận văn "Định lý Rolle và một số áp dụng" nhằm giới thiệu một số ứng dụng của Định lý Rolle trong tập số thực, chủ yếu nghiên cứu một số dạng toán thường gặp ở chương trình phổ thông, đã đạt được những kết quả chính như sau:

Phát biểu và chứng minh định lý Rolle, định lý Lagrange, định lý Cauchy và một số định lý mở rộng. Sử dụng định lý Lagrange để chứng minh tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số liên tục trên một khoảng, chứng minh một số tính chất của hàm số lồi, lõm khả vi bậc hai và bất đẳng thức Karamata. Tiếp theo giới thiệu một số bài toán cụ thể liên quan đến độ gần đều của tam giác có sử dụng các tính chất trên.

Nêu ứng dụng của định lý Rolle và các định lý mở rộng trong một số dạng toán đại số như giải phương trình và bất phương trình, biện luận số nghiệm của phương trình trên một khoảng, chứng minh bất đẳng thức. Phát biểu và chứng minh một số bài toán về sự phân bố nghiệm của đa thức và đạo hàm.

Ngoài ra, luận văn có đề cập đến một bài toán liên quan đến khai triển Taylor-Gontcharov. Dựa vào định lý Rolle và một số mở rộng của định lý Rolle xây dựng một hàm số giải tích trong khoảng $(0; 1)$, khả vi vô hạn trong đoạn $[0; 1]$ và một dãy điểm $\{x_k\}$ trong $(0; 1)$ mà khai triển Taylor-Gontcharov không thực hiện được.

Phần cuối của luận văn, tác giả giới thiệu một số bài tập tiêu biểu được lựa chọn từ các đề thi Olympic toán khu vực và Quốc tế, các kì thi Olympic sinh viên toàn quốc. Mỗi bài tập đều có hướng dẫn cách giải.

Tác giả cũng nhận thấy rằng một số vấn đề đặt ra trong nội dung của luận văn cần thêm nhiều thời gian và nỗ lực hơn nữa để tiếp tục hoàn chỉnh như tìm hiểu thêm các kiến thức về hàm giải tích, về khai triển Taylor-Gontcharov. Đặc biệt hệ thống các bài tập áp dụng cho chuyên đề này cần được sáng tác nhiều và phong phú hơn nữa. Ngoài ra, ứng dụng của định lý Rolle trong các bài toán hình học, mở rộng của định lý Rolle trong tập số phức,...cũng rất đa dạng và phong phú mà luận văn này chưa đề cập đến. Tác giả hy vọng trong thời gian tới sẽ tiếp tục được tìm hiểu, nghiên cứu những vấn đề đã nêu ở trên.

Mặc dù đã hết sức cố gắng và nghiêm túc trong qúa trình học tập và nghiên cứu khoa học nhưng do thời gian và khả năng có hạn, chắc chắn luận văn này còn có những thiếu sót. Tác giả mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của quý thày giáo, cô giáo và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Danh mục các công trình liên quan đến luận văn

[1] Nguyễn Thị Dương Kiều, "Một số hệ quả của định lý Rolle và áp dụng", Kỷ yếu Hội nghị Khoa học: Các chuyên đề toán Olympic, Hà Nội, 22-23/05.2010, 258-267.

[2] Nguyễn Văn Mậu- Nguyễn Thị Dương Kiều, "Nhận xét về khai triển Taylor -Gontcharov", Tạp chí Khoa học- Đại học Quy Nhơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Quý Dy, Nguyễn Văn Nho, Vũ Văn Thỏa, 2002, *Tuyển tập 200 bài thi vô địch toán- Giải tích,* NXB Giáo dục.

[2] Phan Huy Khải, 2000, *Toán nâng cao giải tích,* NXB Hà Nội.

[3] Đinh Thế Lục, Phạm Huy Điển, Tạ Duy Phượng, 2005, *Giải tích toán học hàm số một biến,* NXB ĐHQG Hà Nội.

[4] Nguyễn Văn Mậu, Đặng Huy Ruận, Nguyễn Thủy Thanh, 2002, *Phép tính vi phân và tích phân hàm một biến,* NXB ĐHQGHN

[5] Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn, 2006, *Các đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc,* NXB Giáo Dục.

[6] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Bất đẳng thức, định lí và áp dụng,* NXB Giáo Dục.

[7] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Các bài toán nội suy và áp dụng,* NXB Giáo Dục.

[8] Nguyễn Văn Mậu, *Phép tính vi phân và áp dụng,* NXB Giáo Dục

[9] Nguyễn Văn Mậu, 2004, *Một số vấn đề chọn lọc về tích phân,* NXB Giáo Dục.

[10] P.K.Sahoo, T.Riedel, *Mean Value theorems and Functional Equations,* World Scientific, River Edge, World Scientific 1998.

[11] Henri Cartan, 1961, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes,* Hermann, Paris.