

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Út

**ĐỒNG NHẤT THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC
TRONG TAM GIÁC**

**SOME IDENTITIES AND INEQUALITIES
OF TRIANGLES**

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Đàm Văn Nhĩ

Thái Nguyên - 2012

**Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên**

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Đàm Văn Nhĩ

Phản biện 1:
.....

Phản biện 2:
.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:

Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Ngày tháng năm 2012

**Có thể tìm hiểu tại
Thư viện Đại học Thái Nguyên**

Mục lục

Mục lục	1
Mở đầu	2
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị	4
1.1. Bất đẳng thức qua tam thức bậc hai	4
1.2. Bất đẳng thức Jensen	5
1.3. Bất đẳng thức Karamata, Schur, Muirheard	8
1.4. Một vài hàm tự chọn	12
Chương 2. Một số đồng nhất thức và bất đẳng thức trong tam giác	14
2.1. Đa thức bậc ba liên quan đến tam giác.	14
2.2. Một số bất đẳng thức trong tam giác	25
2.3. Một số bài toán nhận dạng tam giác	37
Chương 3. Trình bày một số kết quả của J.Liu [8] và của Klamkin [7].	43
3.1. Khai thác bài toán véc tơ trong mặt phẳng	43
3.2. Trình bày lại kết quả bài báo của J.Liu	51
3.2.1. Một số định lý	51
3.2.2. Một vài bổ đề	52
3.2.3. Chứng minh ba định lý trên	53
3.3. Trình bày bất đẳng thức của Klamkin	55
Kết luận	59
Tài liệu tham khảo	60

Mở đầu

Đồng nhất thức và bất đẳng thức trong tam giác là một chuyên mục hấp dẫn đối với những người quan tâm tới Hình sơ cấp. Đây là một mảnh đất đã được cày xới quá nhiều qua năm tháng. Vấn đề đặt ra: Làm thế nào để có đồng nhất thức và bất đẳng thức mới trong tam giác.

Tam giác là một hình quen thuộc đối với tất cả mọi người. Thông thường, khi xét bài toán hình học người ta thường phải dùng đến thước kẻ, compa và giải quyết bài toán ấy qua hình vẽ. Nhưng cách làm như vậy rất khó phát hiện ra hệ thức mới. Chúng ta càng khó xây dựng được bài toán với nhiều đại lượng của tam giác. Do có quá nhiều kết quả trong tam giác nên xuất hiện *câu hỏi thứ nhất*: Có thể xây dựng được kết quả mới hay không? Nhiều người sử dụng lượng giác, hình vẽ, phương pháp diện tích, v.v... để tạo ra kết quả. Theo chúng tôi, những cách xây dựng như vậy rất khó đưa ra hệ thức cho tam giác mà có nhiều thành phần tham gia. Rất tự nhiên, xuất hiện *câu hỏi thứ hai*: Xây dựng kết quả như thế nào? Bài toán đặt ra: Xây dựng đồng nhất thức và bất đẳng thức trong tam giác. Với luận văn này, chúng tôi mong muốn giải quyết được một phần nào đó thuộc bài toán trên.

Luận văn được chia ra làm ba chương.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.

Chương này tập trung trình bày về một số bất đẳng thức. Nó bao gồm các mục: Bất đẳng thức qua tam thức bậc 2, bất đẳng thức Jensen qua hàm lồi và bất đẳng thức Muirheard, Karamata. Ngoài ra, để phát hiện ra một số bất đẳng thức khác nữa cho tam giác chúng tôi đã chọn ra một số hàm tương ứng với mục đích đặt ra.

Chương 2. Một số đồng nhất thức và bất đẳng thức trong tam giác.

Đây là nội dung trọng tâm của luận văn. Nó bao gồm các mục sau: Mục

2.1 tập trung xây dựng một số đa thức bậc ba liên quan tam giác. Từ những đa thức này ta đã có thể phát hiện ra một số đồng nhất thức và bất đẳng thức mới trong tam giác. Mục 2.2 tập trung xây dựng và chứng minh lại một số bất đẳng thức trong tam giác qua việc sử dụng các kết quả ở Chương 1. Từ các kết quả đạt được chúng ta sẽ phát hiện ra những tam giác đặc biệt với điều kiện ban đầu đặt ra ở Mục 2.3.

Chương 3. Trình bày một số kết quả của J.Liu [8] và của Klamkin [7].

Chương này dành để trình bày việc khai thác một bài toán véc tơ trong mặt phẳng ở Mục 3.1. Mục 3.2 trình bày lại một số kết quả của J. Liu trong bài báo [8]. Mục 3.3 trình bày lại kết quả của Klamkin trong [7].

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS, TS Đàm Văn Nhĩ. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy, Cô giáo trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K4 Trường Đại học Khoa học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tuy nhiên do sự hiểu biết của bản thân, điều kiện thời gian và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những khiếm khuyết. Tác giả rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của các Thầy, Cô giáo và quý vị bạn đọc đóng góp ý kiến để luận văn được hoàn thành tốt hơn.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 10 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Thị Út

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Bất đẳng thức qua tam thức bậc hai

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$. Ta có các kết quả sau đây:

Định lý 1.1.1. $f(x) > 0$ với $\forall x$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

Định lý 1.1.2. $f(x) \geq 0$ với $\forall x$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

Định lý 1.1.3. $f(x) < 0$ với $\forall x$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

Định lý 1.1.4. $f(x) \leq 0$ với $\forall x$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

Định lý 1.1.5. $f(x) = 0$ có nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$. Khi đó: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ và $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$ Thông thường ta chọn $x_1 \leq x_2$.

Định lý 1.1.6. $x_1 < \alpha < x_2$ khi và chỉ khi $af(\alpha) < 0$.

Định lý 1.1.7. $\alpha < x_1 \leq x_2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ \alpha < \frac{-b}{2a}. \end{cases}$

Định lý 1.1.8. $x_1 \leq x_2 < \alpha$ khi và chỉ khi $\begin{cases} af(\alpha) > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ \alpha > \frac{-b}{2a}. \end{cases}$

1.2. Bất đẳng thức Jensen

Mục này trình bày Bất đẳng thức Jensen. Nó sẽ được sử dụng để chứng minh một số bất đẳng thức trong tam giác. Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức này.

Định nghĩa 1.2.1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm lồi, (xuống phía dưới), trong khoảng $(a; b)$ nếu với mọi $a < x_1, x_2 < b$ và mọi $\alpha \in (0; 1)$ luôn có bất đẳng thức:

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2).$$

Định nghĩa 1.2.2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm lõm, (lên phía trên), trong khoảng $(a; b)$ nếu với mọi $a < x_1, x_2 < b$ và mọi $\alpha \in (0; 1)$ luôn có bất đẳng thức:

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \leq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2).$$

Mệnh đề 1.2.1. Giả sử $y = f(x)$ xác định và liên tục trong $(a; b)$ với $a < b$. Hàm $y = f(x)$ là lồi trong khoảng $(a; b)$ khi và chỉ khi $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \text{ hoặc } \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0 \text{ với mọi } x_1, x, x_2 \in (a; b) \text{ thỏa mãn } x_1 < x < x_2.$$

Chứng minh. Giả sử $y = f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(a; b)$. Với $x_1, x, x_2 \in (a; b), x_1 < x < x_2$, có biểu diễn:

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2, f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2).$$

Như vậy có bất đẳng thức $(x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2) - (x_2 - x_1)f(x) \geq 0$

$$\text{hay biểu diễn dạng } \begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0. \text{ Điều ngược lại là hiển nhiên. } \square$$

Mệnh đề 1.2.2. Giả sử $y = f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm hữu hạn $f'(x)$. Khi đó $y = f(x)$ là hàm lồi nếu và chỉ nếu $f'(x)$ là hàm không giảm trong $(a; b)$.

Chứng minh. Giả sử $y = f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(a; b)$. Với $x_1, x, x_2 \in (a; b), x_1 < x < x_2$, có hai biểu diễn sau đây: $x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$ và $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$. Khi đó $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2)$. Như vậy $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Ngược lại, giả thiết $f'(x)$ là hàm không giảm trong $(a; b)$. Với $x_1, x, x_2 \in (a; b), x_1 < x < x_2$ ta có $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\alpha)$ và $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\beta)$, trong đó $x_1 < \alpha < x < \beta < x_2$. Vì $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ suy ra $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$. Vậy $y = f(x)$ là hàm lồi theo Mệnh đề 1.2.1. $\square$

Từ Mệnh đề 1.2.2 suy ra ngay kết quả dưới đây:

Định lý 1.2.1. *Giả thiết $y = f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng $(a; b)$. Giả sử $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ cũng liên tục và có $f''(x)$ hữu hạn trong khoảng $(a; b)$. Khi đó $y = f(x)$ là hàm lồi nếu và chỉ nếu $f''(x) \geq 0$ trong $(a; b)$.*

Định lý 1.2.2. [Jensen] *Nếu $y = f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(a; b)$ thì với mọi $a_1, \dots, a_n \in (a; b)$ và mọi số thực $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, n \geq 2$, ta luôn có bất đẳng thức dưới đây: $\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \dots + \alpha_n f(a_n) \geq f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n)$.*

Chứng minh. Quy nạp theo n . Với $n = 2$ kết luận hiển nhiên đúng theo định nghĩa. Giả sử kết luận đã đúng cho $n \geq 2$. Xét $n + 1$ điểm $a_1, \dots, a_n, a_{n+1} \in (a; b)$ và các số thực $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \geq 0, \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$ và $\alpha_{n+1} > 0$. Đặt $b_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}a_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}a_{n+1} \in (a; b)$. Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} & f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} a_{n+1}) \\ &= f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) b_n) \\ &\geq \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \dots + \alpha_{n-1} f(a_{n-1}) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) f(b_n). \end{aligned}$$

Vì $f(b_n) = f\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}a_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}a_{n+1}\right) \geq \frac{\alpha_n f(a_n)}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1} f(a_{n+1})}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}$
 nên $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(a_k) \geq \sum_{k=1}^{n+1} f(\alpha_k a_k)$. Như vậy định lý đã được chứng minh. $\square$

Chú ý: Đối với các hàm số lõm ta có dấu bất đẳng thức ngược lại.

Ví dụ 1.2.1. Giả thiết số nguyên $n \geq 2$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\prod_{k=1}^n \frac{3^k - 1}{3^{k-1}} \leq \left(3 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{2n \cdot 3^n}\right)^n.$$

Bài giải. Vì $f(x) = \ln x, x > 0$, là hàm lồi nên theo định lý 1.2.2 có
 $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln \frac{3^k - 1}{3^{k-1}} \right) \leq \ln \left[\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln \frac{3^k - 1}{3^{k-1}} \right) \right] = \ln \left(3 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{2 \cdot 3^n} \right)$. Từ
 đây suy ra bất đẳng thức $\prod_{k=1}^n \frac{3^k - 1}{3^{k-1}} \leq \left(3 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{2n \cdot 3^n} \right)^n$. $\square$

Hệ quả 1.2.1. Với $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0, \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ và $n \geq 2$, ta luôn có các bất đẳng thức dưới đây:

- (i) $\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \geq \prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k}.$
- (ii) $\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)^{\alpha_k} \geq \prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} + \prod_{k=1}^n b_k^{\alpha_k}.$
- (iii) $\prod_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{kj} \right)^{\alpha_k} \geq \sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^n a_{kj}^{\alpha_k}$ với mọi $a_{kj} \geq 0$.
- (iv) **[Cauchy]** $\sum_{k=1}^n a_k \geq n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}.$

Chứng minh. (i) Xét hàm lõm $f(x) = \ln x$. Theo Định lý Jensen ta có
 $\ln \left(\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln a_k \leq \ln \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \right)$. Do $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$.
 (ii) Do $\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{a_k}{a_k + b_k} \geq \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{a_k + b_k} \right)^{\alpha_k}, \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{b_k}{a_k + b_k} \geq \prod_{k=1}^n \left(\frac{b_k}{a_k + b_k} \right)^{\alpha_k}$
 theo (i) nên sau khi cộng hai vế được $1 \geq \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{a_k + b_k} \right)^{\alpha_k} +$

$\prod_{k=1}^n \left(\frac{b_k}{a_k + b_k} \right)^{\alpha_k}$. Qua quy đồng ta nhận được bất đẳng thức $\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)^{\alpha_k} \geq \prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} + \prod_{k=1}^n b_k^{\alpha_k}$.

(iii) Sử dụng (ii) để quy nạp theo m sẽ được (iii). Với $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$, từ (i) suy ra (iv). $\square$

1.3. Bất đẳng thức Karamata, Schur, Muirheard

Bộ n số thực $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ được gọi là bộ số không tăng. Đặt $|(a)| = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Trong tập hợp tất cả các bộ số không tăng $A = \{(a) = (a_k)\}$ ta định nghĩa quan hệ thứ tự: Giả sử $(a) = (a_k), (b) = (b_k)$ là hai bộ số không tăng. Định nghĩa

$(a) \geq (b)$ khi và chỉ khi $a_1 + \dots + a_k \geq b_1 + \dots + b_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$;

Còn nếu có k để $a_1 + \dots + a_k > b_1 + \dots + b_k$ thì ta viết $(a) > (b)$.

Định nghĩa 1.3.1. Giả sử có hai bộ số không tăng $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Bộ (a) được gọi là trội hơn (b) nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn: $\begin{cases} a_1 + \dots + a_k \geq b_1 + \dots + b_k \\ k = 1, 2, \dots, n-1; |(a)| = |(b)|. \end{cases}$

Mệnh đề 1.3.1. [Karamata] Giả sử $y = f(x)$ là một hàm lồi trên khoảng $(a; b)$ và các bộ không tăng $(a), (b)$ với $a_k, b_k \in (a; b)$ với $k = 1, 2, \dots, n$. Nếu bộ (a) trội hơn bộ (b) thì có bất đẳng thức $\sum_{k=1}^n f(a_k) \geq \sum_{k=1}^n f(b_k)$; còn khi $y = f(x)$ là hàm lõm thì $\sum_{k=1}^n f(a_k) \leq \sum_{k=1}^n f(b_k)$.

Chứng minh: Đặt $c_k = \delta_f(a_k, b_k) = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}, k = 1, 2, \dots, n$. Theo Mệnh đề 1.1.1, dãy (c_k) là dãy đơn điệu giảm bởi vì (a) và (b) là dãy không tăng. Đặt $A_k = \sum_{i=1}^k a_i, B_k = \sum_{i=1}^k b_i$ với $A_0 = B_0 = 0, k = 1, 2, \dots, n$.

Từ $|(a)| = |(b)|$ suy ra $A_n = B_n$. Biến đổi hiệu

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{k=1}^n f(a_k) - \sum_{k=1}^n f(b_k) = \sum_{k=1}^n (f(a_k) - f(b_k)) = \sum_{k=1}^n c_k(a_k - b_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n c_k(A_k - A_{k-1} - B_k + B_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n c_k(A_k - B_k) - \sum_{k=1}^n c_k(A_{k-1} - B_{k-1}) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} c_k(A_k - B_k) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}(A_k - B_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k - c_{k+1})(A_k - B_k).
 \end{aligned}$$

Vì $A_k \geq B_k$ và $c_k \leq c_{k+1}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Vậy $H \leq 0$. $\square$

Ví dụ 1.3.1. Với các số thực dương a, b, c luôn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2d}.$$

Bài giải. Không hạn chế có thể giả thiết $a \geq b \geq c \geq d > 0$. Khi đó

$$\text{có } \begin{cases} 2a \geq a+b \\ 2a+2b \geq a+b+b+c \\ 2a+2b+2c \geq a+b+b+c+c+d \\ 2a+2b+2c+2d = a+b+b+c+c+d+d+a. \end{cases} \quad \text{Từ đây suy ra}$$

($2a, 2b, 2c, 2d$) trội hơn bộ ($a+b, b+c, c+d, d+a$). Vì $y = \frac{1}{x}$ với $x > 0$ là hàm lồi nên ta có $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2d}$. Theo mệnh đề (1.3.1). $\square$

Ví dụ 1.3.2. Chứng minh rằng với ba số thực $x, y, z \in [-1; 1]$ thỏa mãn $x + y + z = \frac{1}{2}$ ta luôn có bất đẳng thức $x^{2012} + y^{2012} + z^{2012} \leq 2 + \frac{1}{2^{2012}}$.

Bài giải. Vì x, y, z bình đẳng nên có thể cho $1 \geq x \geq y \geq z \geq -1$. Hàm $y = x^{2012}$ là hàm lồi (xuống phía dưới) vì $f''(x) \geq 0$ trong $(-1; 1)$ theo định lý (1.2.1). Ta xây dựng bộ trội của (x, y, z) như sau:

$$\begin{cases} 1 \geq x \\ x + y = -z + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Vậy } (1, \frac{1}{2}, -1) \text{ là một bộ trội của } (x, y, z).$$

Theo mệnh đề (1.3.1). Ta có $x^{2012} + y^{2012} + z^{2012} \leq 2 + \frac{1}{2^{2012}}$. $\square$

Mệnh đề 1.3.2. [Schur] Với $\alpha, \beta > 0$ có $S_{(\alpha+2\beta,0,0)} + S_{(\alpha,\beta,\beta)} \geq 2S_{(\alpha+\beta,\beta,0)}$.

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh chính là bất đẳng thức dưới đây: $a^{\alpha+2\beta} + b^{\alpha+2\beta} + c^{\alpha+2\beta} + a^\alpha b^\beta c^\beta + a^\beta b^\alpha c^\beta + a^\beta b^\beta c^\alpha \geq a^{\alpha+\beta} b^\beta + a^{\alpha+\beta} c^\beta + b^{\alpha+\beta} a^\beta + b^{\alpha+\beta} c^\beta + c^{\alpha+\beta} a^\beta + c^{\alpha+\beta} b^\beta$, (*), với $a, b, c \geq 0$. Không hạn chế có thể giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$. Viết lại bất đẳng thức (*) thành

$$a^\alpha(a^\beta - b^\beta)(a^\beta - c^\beta) + b^\alpha(b^\beta - c^\beta)(b^\beta - a^\beta) + c^\alpha(c^\beta - a^\beta)(c^\beta - b^\beta) \geq 0.$$

Vì $c^\alpha(c^\beta - a^\beta)(c^\beta - b^\beta) \geq 0$ nên chỉ cần chứng minh $a^\alpha(a^\beta - b^\beta)(a^\beta - c^\beta) + b^\alpha(b^\beta - c^\beta)(b^\beta - a^\beta) \geq 0$, hay $a^\alpha(a^\beta - c^\beta) - b^\alpha(b^\beta - c^\beta) \geq 0$, nhưng bất đẳng thức này là hiển nhiên. $\square$

Ví dụ 1.3.3. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b$.

Bài giải. Bất đẳng thức có được từ Mệnh đề 1.3.2 với $\alpha = \beta = 1$. $\square$

Bổ đề 1.3.1. Nếu $\beta = T_{ij}(\alpha)$ thì có bất đẳng thức $M_\beta(a) \geq M_\alpha(a)$. Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = \dots = a_n$.

Chứng minh. Với mỗi cặp chỉ số $h, k, h < k$, hiệu $M_\beta(a) - M_\alpha(a)$ chứa số hạng dạng: $B = A(a_h^{\beta_i} a_k^{\beta_j} + a_h^{\beta_j} a_k^{\beta_i} - a_h^{\alpha_i} a_k^{\alpha_j} - a_h^{\alpha_j} a_k^{\alpha_i})$ với $A \geq 0$. Biến đổi hiệu $B = A(a_h^{\alpha_i+1} a_k^{\alpha_j-1} + a_h^{\alpha_j-1} a_k^{\alpha_i+1} - a_h^{\alpha_i} a_k^{\alpha_j} - a_h^{\alpha_j} a_k^{\alpha_i}) = A a_h^{\alpha_j-1} a_k^{\alpha_j-1} (a_h - a_k)(a_h^{\alpha_i-\alpha_j+1} - a_k^{\alpha_i-\alpha_j+1}) \geq 0$. Do vậy $M_\beta(a) \geq M_\alpha(a)$. Dấu bằng xảy ra khi từng $B = 0$ hay $a_h = a_k$ với mọi $h, k = 1, 2, \dots = n$. $\square$

Bổ đề 1.3.2. Nếu $(\beta) \geq (\alpha)$, $(\beta) \neq (\alpha)$ và $|(\alpha)| = |(\beta)|$, thì sau một số hữu hạn phép biến đổi tuyến tính T_{ij} sẽ chuyển (α) thành (β) .

Chứng minh. Vì $(\beta) \neq (\alpha)$ nên có chỉ số i nhỏ nhất để $\beta_i \neq \alpha_i$. Do bởi $(\beta) \geq (\alpha)$ nên $\beta_i > \alpha_i$. Từ $|(\alpha)| = |(\beta)|$ suy ra $\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) = 0$. Do $\beta_i > \alpha_i$ nên tồn tại j để $0 \leq \beta_j < \alpha_j$ và $i < j$. Tác động T_{ij} vào (α) ta nhận được $\gamma = T_{ij}(\alpha)$ với $\gamma_i = \alpha_i + 1, \gamma_j = \alpha_j - 1$, còn $\gamma_k = \alpha_k$ với mọi $k \neq i, j$. Như vậy $|\beta_i - \alpha_i| = |\beta_i - \gamma_i + 1| = |\beta_i - \gamma_i| + 1$ và $|\beta_j - \alpha_j| = |\beta_j - \gamma_j - 1| = |\beta_j - \gamma_j| + 1$. Từ hai hệ thức này suy ra $\sum_{k=1}^n |\beta_k - \gamma_k| =$

$\sum_{k=1}^n |\beta_k - \alpha_k| - 2$. Do vậy, khi tác động T_{ij} làm tổng $\sum_{k=1}^n |\beta_k - \alpha_k|$ giảm được 2 đơn vị, sau một số hữu hạn bước, ta có $\sum_{k=1}^n |\beta_k - \delta_k| = 0$ hay đã chuyển được (α) thành (β) . $\square$

Từ hai bổ đề trên ta suy ra ngay Bất đẳng thức Muirheard dưới đây:

Mệnh đề 1.3.3. [Muirheard] Với các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, xảy ra bất đẳng thức $M_\alpha(a) \geq M_\beta(a)$ khi và chỉ khi $\alpha \geq \beta$ và $|\alpha| = |\beta|$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi $\alpha = \beta$ và $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Chú ý rằng, khi vận dụng Bất đẳng thức Muirheard ta phải chọn bộ trội thế nào để nhanh có kết quả.

Ví dụ 1.3.4. Với ba số thực dương a, b, c chúng ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức tương đương với:

$abc[(a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc) + (b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc) + (c^3 + a^3 + abc)(a^3 + b^3 + abc)]$. Hay $a^6b^3 + a^6c^3 + b^6c^3 + b^6a^3 + c^6a^3 + c^6b^3 \geq 2[a^5b^2c^2 + a^2b^5c^2 + a^2b^2c^5]$. Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức $M_{(6,3,0)}(a) \geq M_{(5,2,2)}(a)$. $\square$

Ví dụ 1.3.5. Với ba số thực dương a, b, c, ta luôn có bất đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$. Nếu vế phải có một hoặc ba thừa số âm thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu vế phải chỉ có hai thừa số âm, chẳng hạn $b + c - a < 0, a + b - c < 0$ thì $2b = b + c - a + a + b - c < 0$: Mâu thuẫn. Ta chỉ cần xét trường hợp cả ba thừa số đều không âm. Đặt $x = b + c - a, y = c + a - b, z = a + b - c \geq 0$. Khi đó $2a = y + z, 2b = z + x, 2c = x + y$. Vậy $abc = \frac{1}{8}(x + y)(y + z)(z + x) \geq xyz = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$. $\square$

1.4. Một vài hàm tự chọn

Khảo sát hàm số $f(x) = x^\alpha - \alpha x$ với các kết quả sau đây:

Mệnh đề 1.4.1. Với $x \geq 0$ ta có các bất đẳng thức sau:

- (i) $x^\alpha \geq \alpha x + 1 - \alpha$ khi $\alpha > 1$.
- (ii) $x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha$ khi $0 < \alpha < 1$.

Mệnh đề 1.4.2. [Bernoulli]. Nếu $x \geq -1$ thì $(1+x)^n \geq 1+nx$ với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi $x = -1$ hoặc $n = 1$. Tổng quát, nếu $\alpha > 1$ và $x \geq -1$ thì $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x$.

Chứng minh. Với $n = 1$ ta có đẳng thức xảy ra. Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k \geq 1$ ta sẽ đi chứng minh bất đẳng thức đúng đến $n = k+1$. Thật vậy ta có $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$. $\square$

Ví dụ 1.4.1. Chứng minh rằng, nếu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ và $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ thì với mọi số thực $u_1, u_2, u_3 \geq 0$ có bất đẳng thức

$$u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} \leq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3.$$

Bài giải. Từ $x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha$ khi $0 < \alpha < 1$, theo Mệnh đề (1.4.1) và thay $x = \frac{p}{q}$ ta được $p^\alpha q^{1-\alpha} \leq \alpha p + (1-\alpha)q$, trong đó $p, q > 0$. Với $\beta = 1 - \alpha$ và $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$, có $p^\alpha q^\beta \leq \alpha p + \beta q$. Với $p = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_1, \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ và $q = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} u_2, \beta = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$, được $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} \leq \alpha_1 u_1 + \beta u_2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{\beta}{\alpha_2}$. Vì $\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{\beta}{\alpha_2} \leq \frac{\alpha_3}{\beta} u_2 + \frac{\alpha_2}{\beta} u_3$ nên $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} \leq \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$. $\square$

Ví dụ 1.4.2. Với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ chứng minh rằng $\sin x + \tan x > 2x$.

Chứng minh. Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ có $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq 2\sqrt{\cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} - 2 > 0$, chúng ta suy ra $f(x) > f(0) = 0$ hay $\sin x + \tan x - 2x > 0$. Vậy $\sin x + \tan x > 2x$. $\square$

Ví dụ 1.4.3. Cho các số a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + b + c = 8 \\ ab + bc + ca = 16 \end{cases}$. Chứng minh rằng $0 \leq a \leq \frac{16}{3}$.

Chứng minh. Từ giả thiết ta suy ra $\begin{cases} b + c = 8 - a \\ bc = 16 - a(8 - a) = a^2 - 8a + 16, \end{cases}$ nên b và c là nghiệm của phương trình ẩn t : $t^2 - (8 - a)t + (a^2 - 8a + 16) = 0$. Vì phương trình này có nghiệm nên $\Delta = (8 - a)^2 - 4(a^2 - 8a + 16) \geq 0$ hay $0 \leq a \leq \frac{16}{3}$. Tương tự ta có $0 \leq b \leq \frac{16}{3}$ và $0 \leq c \leq \frac{16}{3}$. $\square$

Hoàn toàn tương tự ta có bài toán sau: Cho a, b, c là ba số thỏa mãn hệ $\begin{cases} a + b + c = 10 \\ ab + bc + ca = 25. \end{cases}$ Khi đó $0 \leq a, b, c \leq \frac{20}{3}$.

Chương 2

Một số đồng nhất thức và bất đẳng thức trong tam giác

Mục này tập trung trình bày một phương pháp phát hiện ra các đồng nhất thức và bất đẳng thức trong tam giác qua phương trình đa thức bậc ba.

2.1. Đa thức bậc ba liên quan đến tam giác.

Cho $\triangle ABC$ với độ dài ba cạnh là a, b, c ; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R ; bán kính đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 ; nửa chu vi p và diện tích S . Ta sẽ chỉ ra a, b, c là ba nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ và r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$.

Mệnh đề 2.1.1. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu p là nửa chu vi; r và R là bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp. Khi đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình dưới đây:

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

Chứng minh. Từ $\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$ và $a = 2R \sin A$ ta suy ra hệ thức

$$a = 2R \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \text{ hay } a = 4R \frac{\frac{r}{p-a}}{1 + \left(\frac{r}{p-a}\right)^2} = 4Rr \frac{p-a}{r^2 + (p-a)^2}.$$

Như vậy, ta có quan hệ $a(a^2 - 2pa + p^2 + r^2) = 4Rr(p-a)$ hay $a^3 - 2pa^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4Rrp = 0$. Do đó a là một nghiệm của phương trình $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$.

Tương tự, b và c cũng là nghiệm của phương trình trên. $\square$

Mệnh đề 2.1.2. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu p là nửa chu vi; r và R là bán kính các đường tròn nội, ngoại

tiếp. Khi đó $\sin A, \sin B, \sin C$ là ba nghiệm của phương trình dưới đây:

$$x^3 - \frac{p}{R}x^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}x - \frac{rp}{2R^2} = 0.$$

Chứng minh. Vì $a = 2R \sin A$ và a lại là nghiệm của phương trình $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên thay a vào phương trình trên, ta có $8R^3 \sin^3 A - 8pR^2 \sin^2 A + (p^2 + r^2 + 4Rr) 2R \sin A - 4Rrp = 0$ hay $\sin^3 A - \frac{p}{R} \sin^2 A + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} \sin A - \frac{rp}{2R^2} = 0$. Như vậy $\sin A$ là một nghiệm của phương trình $x^3 - \frac{p}{R}x^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}x - \frac{rp}{2R^2} = 0$. Tương tự, $\sin B$ và $\sin C$ cũng là nghiệm của phương trình trên. $\square$

Mệnh đề 2.1.3. Cho $\triangle ABC$ với diện tích S và độ dài bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R . Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao. Khi đó h_a, h_b, h_c là ba nghiệm của phương trình bậc ba sau:

$$y^3 - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \frac{2S}{Rr}y - \frac{2S^2}{R} = 0.$$

Đặt $H_n = h_a^n + h_b^n + h_c^n$ với $n=1,2,\dots$ Khi đó ta có hệ thức liên hệ sau:

$$H_{n+3} - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}H_{n+2} + \frac{2S}{Rr}H_{n+1} - \frac{2S^2}{R}H_n = 0.$$

Bài giải. Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $\frac{2S}{a}, \frac{2S}{b}, \frac{2S}{c}$ là nghiệm của phương

trình $2S^2 - \frac{2S}{r}y + \frac{\frac{S^2}{r^2} + 4Rr + r^2}{2}y^2 - Ry^3 = 0$. Do vậy h_a, h_b, h_c là ba nghiệm của $y^3 - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \frac{2S}{Rr}y - \frac{2S^2}{R} = 0$. Vậy $H_{n+3} - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}H_{n+2} + \frac{2S}{Rr}H_{n+1} - \frac{2S^2}{R}H_n = 0$. $\square$

Mệnh đề 2.1.4. Cho $\triangle ABC$ với nửa chu vi p ; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R ; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Khi đó r_1, r_2, r_3 là nghiệm của phương trình $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$.

Chứng minh. Từ $\tan \frac{A}{2} = \frac{r_1}{p}$ và $a = 2R \sin A$ suy ra $a = 2R \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$.

Vậy $a = 4R \frac{\frac{r_1}{p}}{1 + \frac{r_1^2}{p^2}} = 4Rr_1 \frac{p}{r_1^2 + p^2}$. Bởi vì $r_1(p - a) = S = pr$ nên

chúng ta có quan hệ sau: $\frac{(r_1 - r)p}{r_1} = a = 4Rr_1 \frac{p}{r_1^2 + p^2}$ hay tương đương $(r_1 - r)(r_1^2 + p^2) = 4Rr_1^2$. Do vậy r_1 là nghiệm của phương trình $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$.

Tương tự, r_2, r_3 cũng là nghiệm của phương trình này. $\square$

Mệnh đề 2.1.5. Cho $\triangle ABC$ với nửa chu vi p ; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R . Khi đó $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 - \frac{4R + r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0$. Từ đây ta suy ra

$$(i) \quad \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{4R + r}{p}.$$

$$(ii) \quad \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1. \text{ Từ đây chúng ta suy ra hai bất đẳng thức } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3};$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

$$(iii) \quad \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{r}{p}.$$

Chứng minh. Vì $r_1 = p \tan \frac{A}{2}$ và r_1 lại là nghiệm của phương trình $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $p^3 \tan^3 \frac{A}{2} - (4R + r)p^2 \tan^2 \frac{A}{2} + p^2 p \tan \frac{A}{2} - p^2 r = 0$ hay $\tan^3 \frac{A}{2} - \frac{4R + r}{p} \tan^2 \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} - \frac{r}{p} = 0$. Như vậy $\tan \frac{A}{2}$ là một nghiệm của $x^3 - \frac{4R + r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0$. Tương tự $\tan \frac{B}{2}$ và $\tan \frac{C}{2}$

cũng là nghiệm của phương trình này. Các kết quả (i), (ii), (iii) được suy ra từ Định lý Viét. $\square$

Mệnh đề 2.1.6. Cho $\triangle ABC$ với nửa chu vi p ; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R . Khi đó ta có:

(i) $\cos A, \cos B, \cos C$ là ba nghiệm của phương trình đa thức dưới đây:

$$x^3 - \frac{R+r}{R}x^2 + \frac{-4R^2 + r^2 + p^2}{4R^2}x - \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2} = 0.$$

(ii) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$

(iii) $p = (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) = \frac{r^2}{2R^2}.$ Từ đó suy ra $p \leq \frac{1}{8}.$

(iv) Đặt $U = \sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A$ và $V = \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A$. Ta có $U - V \leq \frac{3}{2}.$

Chứng minh. (i) Ta biết $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương

trình $x^3 - \frac{4R+r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0$. Vì $\cos A = \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} - 1$

nên $\cos A + 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}}$. Xét hệ: $\begin{cases} y = \frac{2}{1 + x^2} \\ x^3 - \frac{4R+r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0. \end{cases}$ Từ

$\begin{cases} x^2 = \frac{2}{y} - 1 \\ x^3 - \frac{4R+r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = \frac{4R+r}{p} - \frac{2Ry}{p} \\ x^3 - \frac{4R+r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0 \end{cases}$

và nhận được $y \left(\frac{4R+r}{p} - \frac{2Ry}{p} \right)^2 + y - 2 = 0.$

Vậy $\cos A + 1, \cos B + 1, \cos C + 1$ là ba nghiệm của: $y^3 - \frac{4R+r}{p}y^2 +$

$\frac{(4R+r)^2 + p^2}{4R^2}y - \frac{p^2}{2R^2} = 0.$ Do đó $\cos A, \cos B, \cos C$ là ba nghiệm của

phương trình có được qua việc thay $y = x + 1$ vào phương trình bậc ba

$$x^3 - \frac{R+r}{R}x^2 + \frac{-4R^2 + r^2 + p^2}{4R^2}x - \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2} = 0.$$

(ii) Theo Định lý Viét chúng ta có $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R} = 1 + \frac{r}{R}$.

(iii) Từ phương trình trên có $p = (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) = \frac{r^2}{2R^2}$. Do $R \geq 2r$ nên $p \leq \frac{1}{8}$.

(iv) Theo Định lý Viét có $U = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}$, từ mệnh đề 2.1.2. Do vậy

$$U - V = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} - \frac{-4R^2 + r^2 + p^2}{4R^2} = \frac{4R^2 + 4Rr}{4R^2} = 1 + \frac{r}{R} \leq \frac{3}{2}.$$

□

Chú ý 2.1: Phương trình đa thức bậc 3 nhận $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ làm ba nghiệm là không có vì tam giác vuông sẽ không thỏa mãn.

Ví dụ 2.1.1. Cho $\triangle ABC$ với nửa chu vi p ; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r , R và bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Khi đó:

(i) $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$ và $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = p^2$.

(ii) $\left(\frac{r_1}{r} - 1\right)\left(\frac{r_2}{r} - 1\right)\left(\frac{r_3}{r} - 1\right) = 4\frac{R}{r}$.

Bài giải. (i) Từ r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên ta có $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$ và $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = p^2$.

(ii) Do bởi $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ nên khi lấy $x = r$ được $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$. Chia hai vế cho r^3 ta được $\left(\frac{r_1}{r} - 1\right)\left(\frac{r_2}{r} - 1\right)\left(\frac{r_3}{r} - 1\right) = 4\frac{R}{r}$. □

Ví dụ 2.1.2. Cho $\triangle ABC$ với bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Hãy tính tổng dưới đây:

$$2\frac{r_1 - rr_2 - rr_3 - r}{r_1 + rr_2 + rr_3 + r} + \frac{r_1 - rr_2 - r}{r_1 + rr_2 + r} + \frac{r_2 - rr_3 - r}{r_2 + rr_3 + r} + \frac{r_3 - rr_1 - r}{r_3 + rr_1 + r}.$$

Bài giải. r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$,

(1). Xét phép biến đổi $y = \frac{x - r}{x + r}$. Dễ thấy $y \neq 1$ và $x = \frac{r(y + 1)}{1 - y}$. Thay

x vào phương trình (1) ta nhận được phương trình đa thức bậc ba sau

$$(r^2 + 2Rr + p^2)y^3 + (2r^2 + 2Rr - 2p^2)y^2 + (r^2 - 2Rr + p^2)y - 2Rr = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này. Khi đó ta có hệ thức $2y_1y_2y_3 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{4Rr + r^2 - 2Rr + p^2}{r^2 + 2Rr + p^2} = 1$. $\square$

Ví dụ 2.1.3. Cho $\triangle ABC$ với bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Hãy tính tổng dưới đây:

$$T = 4 \frac{2r_1 - r}{r_1 + r} \frac{2r_2 - r}{r_2 + r} \frac{2r_3 - r}{r_3 + r} + \frac{2r_1 - r}{r_1 + r} \frac{2r_2 - r}{r_2 + r} + \frac{2r_2 - r}{r_2 + r} \frac{2r_3 - r}{r_3 + r} + \frac{2r_3 - r}{r_3 + r} \frac{2r_1 - r}{r_1 + r} - 2 \left(\frac{2r_1 - r}{r_1 + r} + \frac{2r_2 - r}{r_2 + r} + \frac{2r_3 - r}{r_3 + r} \right).$$

Bài giải. r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Xét phép biến đổi $y = \frac{2x - r}{x + r}$. Dễ thấy $y \neq 2$ và $x = \frac{r(y + 1)}{2 - y}$.

Thay x vào phương trình trên ta nhận được phương trình đa thức bậc ba sau $2(r^2 + 2Rr + p^2)y^3 + 3(r^2 - 3p^2)y^2 - 2(6Rr - 6p^2)y - (r^2 + 8Rr + 4p^2) = 0$. Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này. Khi đó ta có các hệ thức:

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = \frac{9p^2 - 3r^2}{r^2 + 2Rr + p^2}; \quad y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = \frac{6p^2 - 6Rr}{r^2 + 2Rr + p^2};$$

$$4y_1y_2y_3 = \frac{2r^2 + 16Rr + 8p^2}{r^2 + 2Rr + p^2}. \text{ Từ ba hệ thức này ta suy ra } T = 4y_1y_2y_3 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 - 2(y_1 + y_2 + y_3) = 5. \quad \square$$

Ví dụ 2.1.4. Cho $\triangle ABC$ với bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Chứng minh $\frac{4R}{r_1 - r} + \frac{4R}{r_2 - r} + \frac{4R}{r_3 - r} = 1 - 8\frac{R}{r} + \frac{r_1r_2r_3}{r^3}$. Từ đó chỉ ra bất đẳng thức $\frac{4R}{r_1 - r} + \frac{4R}{r_2 - r} + \frac{4R}{r_3 - r} \leq \frac{r_1r_2r_3}{r^3} - 15$.

Bài giải. Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên

$$\frac{1}{x - r_1} + \frac{1}{x - r_2} + \frac{1}{x - r_3} = \frac{3x^2 - 2(4R + r)x + p^2}{x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r}.$$

Khi cho $x = r$ được $\frac{1}{r_1 - r} + \frac{1}{r_2 - r} + \frac{1}{r_3 - r} = \frac{r^2 - 8Rr + p^2}{4Rr^2}$. Như vậy $\frac{4R}{r_1 - r} + \frac{4R}{r_2 - r} + \frac{4R}{r_3 - r} = 1 - 8\frac{R}{r} + \frac{r_1r_2r_3}{r^3}$ vì $p^2 = \frac{r_1r_2r_3}{r}$. Do $8\frac{R}{r} \geq 16$ nên $\frac{4R}{r_1 - r} + \frac{4R}{r_2 - r} + \frac{4R}{r_3 - r} \leq \frac{r_1r_2r_3}{r^3} - 15$. $\square$

Ví dụ 2.1.5. Cho $\triangle ABC$ với độ dài ba cạnh là a, b, c ; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R . Khi đó chúng ta có kết quả sau đây:

$$(a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr) = 2Rr(ab + bc + ca - 2Rr)^2.$$

Bài giải. Chúng ta biết a, b, c là ba nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$. Xét phép biến đổi $y = x^2 + 2Rr$. Đặt $T = p^2 + 3Rr + r^2$. Khử x để được phương trình đa thức bậc ba

$$y^3 - (4p^2 + 2Rr - 2T)y^2 + (T^2 - 2Rr)y - 2RrT^2 = 0.$$

Gọi y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của phương trình này, vì $ab + bc + ca = T + 2Rr$ nên $y_1 y_2 y_3 = 2RrT^2 = 2Rr(ab + bc + ca - 2Rr)^2$. $\square$

Ví dụ 2.1.6. Cho $\triangle ABC$ với độ dài ba cạnh là a, b, c ; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R ; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 ; nửa chu vi p và diện tích S . Khi đó chúng ta có đồng nhất thức sau: $\frac{(r_1 + r_2 + r_3 + r)^2}{S} = \frac{a^2 + p^2 + 4Rr + r^2}{S} \cdot \frac{b^2 + p^2 + 4Rr + r^2}{S} \cdot \frac{c^2 + p^2 + 4Rr + r^2}{S}$.

Bài giải. Chúng ta biết a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$. Xét phép biến đổi $y = x^2 + p^2 + 4Rr + r^2$. Xác định phương trình

nhận $y_1 = a^2 + p^2 + 4Rr + r^2$
 $y_2 = b^2 + p^2 + 4Rr + r^2$ làm ba nghiệm. Khử x từ hệ
 $y_3 = c^2 + p^2 + 4Rr + r^2$

$\begin{cases} x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0 \\ x^2 + p^2 + 4Rr + r^2 - y = 0. \end{cases}$ Ta có ngay hệ phương

trình $\begin{cases} x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0 \\ x^3 + p^2x + 4Rrx + r^2x - yx = 0 \end{cases}$ và như vậy được

$2px^2 - yx + 4Rrp = 0$ hay $2p(y - p^2 - r^2 - 4Rr) - yx + 4Rrp = 0$.

Giải ra $x = \frac{2py - 4Rrp - 2r^2p}{y}$. Do đó $\left(\frac{2py - 4Rrp - 2r^2p}{y}\right)^2 + p^2 +$

$4Rr + r^2 = y$ hay $y^3 - (p^2 + 4Rr + r^2)y^2 - (2py - 4Rrp - 2r^2p)^2 =$

0 . Phương trình này có ba nghiệm là y_1, y_2, y_3 . Do đó chúng ta có $y_1 y_2 y_3 = (4R + 2r)^2 r^2 p^2$. Từ hệ thức này ta suy ra đồng nhất

thức $(a^2 + p^2 + 4Rr + r^2)(b^2 + p^2 + 4Rr + r^2)(c^2 + p^2 + 4Rr + r^2) = (4R + 2r^2)^2 p^2$. Thay $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$ ta có đồng nhất thức cần chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.1.7. Cho $\triangle ABC$ với các đường cao h_a, h_b, h_c ; bán kính đường tròn nội tiếp r và bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Khi đó chúng ta có: $4 \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right) = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r^2}$.

Bài giải. Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$ cũng là ba nghiệm của $p^2rx^3 - p^2x^2 + (4R + r)x - 1 = 0$.

Như vậy $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{r^2} - 2 \frac{4R + r}{p^2r}$. Do bởi a, b, c là ba nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 = 4p^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$ và chúng ta nhận được $4 \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right) = \frac{2p^2 - 2r^2 - 8Rr}{p^2r^2} = \frac{2}{r^2} - 2 \frac{4R + r}{p^2r}$.

Từ hai hệ thức trên ta suy ra $4 \left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \right) = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r^2}$. $\square$

Ví dụ 2.1.8. Cho $\triangle ABC$ với độ dài ba cạnh là a, b, c ; nửa chu vi p và bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R . Chứng minh rằng:

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{p^2 + r^2}{2Rr} - 7.$$

Bài giải. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ thì $(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_3x_1)(x_3^2 - x_1x_2) = a_1^3a_3 - a_2^3$ hay $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} +$

$$\frac{(x_2 - x_3)^2}{x_2x_3} + \frac{(x_3 - x_1)^2}{x_3x_1} = \frac{a_1a_2}{a_3} - 9. \text{ Vì } a, b, c \text{ là ba nghiệm của}$$

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0 \text{ nên ta có } \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2p(p^2 + r^2 + 4Rr)}{4Rrp} - 9 \text{ suy ra } \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{p^2 + r^2}{2Rr} - 7. \quad \square$$

Ví dụ 2.1.9. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh là a, b, c ; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R ; bán kính đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 ; nửa chu vi p và diện tích S . Chứng minh rằng:

$$\frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1 r_2} + \frac{(r_2 - r_3)^2}{r_2 r_3} + \frac{(r_3 - r_1)^2}{r_3 r_1} = \frac{4R}{r} - 8.$$

Bài giải. r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Khi đó $\frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1 r_2} + \frac{(r_2 - r_3)^2}{r_2 r_3} + \frac{(r_3 - r_1)^2}{r_3 r_1} = \frac{(4R + r)p^2}{p^2r} - 9 = \frac{4R}{r} - 8. \quad \square$

Ví dụ 2.1.10. Cho $\triangle ABC$ với bán kính các đường tròn ngoại tiếp là R ; bán kính đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 ; nửa chu vi p . Chứng minh:

$$\left(\frac{r_1^2}{p^2} + 1\right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} + 1\right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} + 1\right) = \frac{16R^2}{p^2}.$$

Bài giải. r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Xác định phương trình nhận $y_1 = r_1^2 + p^2, y_2 = r_2^2 + p^2, y_3 = r_3^2 + p^2$ làm ba nghiệm. Khử x từ hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^2 + p^2 - y = 0 \end{cases}$ Ta có ngay hệ

$\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^3 + p^2x - yx = 0 \end{cases}$ và $(4R + r)x^2 - yx + p^2r = 0$ hay phương trình $(4R + r)(y - p^2) - yx + p^2r = 0$.

Đặt $T = 4R + r$. Khi đó $x = \frac{Ty - 4Rp^2}{y}$. Vậy $\frac{(Ty - 4Rp^2)^2}{y^2} + p^2 - y = 0$ hay $y^3 - (T^2 + p^2)y^2 + 8RTp^2y - 16R^2p^4 = 0$. Phương trình này có ba nghiệm y_1, y_2, y_3 . Do đó chúng ta có $\frac{(r_1^2 + p^2)(r_2^2 + p^2)(r_3^2 + p^2)}{p^6} = \frac{y_1 y_2 y_3}{p^6} = \frac{16R^2 p^4}{p^6}$. Ta suy ra đồng nhất thức $\left(\frac{r_1^2}{p^2} + 1\right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} + 1\right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} + 1\right) = \frac{16R^2}{p^2}. \quad \square$

Chú ý 2.2: Với $p = R(\sin A + \sin B + \sin C) = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ và $\frac{r_1}{p} = \tan \frac{A}{2}; \frac{r_2}{p} = \tan \frac{B}{2}; \frac{r_3}{p} = \tan \frac{C}{2}$. Ví dụ trên trở thành tầm thường nhưng cách chứng minh ở đây không sử dụng lượng giác.

Ví dụ 2.1.11. Cho $\triangle ABC$; bán kính các đường tròn ngoại tiếp là R ; bán kính đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 ; nửa chu vi p . Chứng minh :

$$(i) \left(\frac{r_1^2}{p^2} - 1 \right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} - 1 \right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} - 1 \right) = 4 \left[\frac{(2R + r)^2}{p^2} - 1 \right].$$

$$(ii) \left(\frac{r_1^2}{p^2} - 1 \right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} - 1 \right) + \left(\frac{r_2^2}{p^2} - 1 \right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} - 1 \right) + \left(\frac{r_3^2}{p^2} - 1 \right) \left(\frac{r_1^2}{p^2} - 1 \right) = 8 - 4 \frac{(2R + r)(r_1 + r_2 + r_3)}{p^2}.$$

Bài giải. (i) r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Xác định phương trình nhận $y_1 = r_1^2 - p^2, y_2 = r_2^2 - p^2, y_3 = r_3^2 - p^2$ làm ba nghiệm. Khử x từ hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^2 - p^2 - y = 0. \end{cases}$

Ta có ngay hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^3 - p^2x - yx = 0 \end{cases}$ và $(4R + r)x^2 - yx - 2p^2x + p^2r = 0$ hay hệ thức $(4R + r)(y + p^2) - (y + 2p^2)x + p^2r = 0$. Đặt $T = 4R + r$ khi đó $x = \frac{Ty + (T + r)p^2}{y + p^2}$. Vậy

$\frac{(Ty + (T + r)p^2)^2}{(y + 2p^2)^2} - p^2 - y = 0$ hay $y(y + 2p^2)^2 + p^2(y + 2p^2)^2 - (Ty + (T + r)p^2)^2 = 0$. Phương trình này có ba nghiệm y_1, y_2, y_3 . Do đó $\frac{(r_1^2 - p^2)(r_2^2 - p^2)(r_3^2 - p^2)}{p^6} = \frac{y_1 y_2 y_3}{p^6} = \frac{(4R + 2r)^2 p^4 - 4p^6}{p^6}$. Ta suy

$$\text{ra } \left(\frac{r_1^2}{p^2} - 1 \right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} - 1 \right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} - 1 \right) = 4 \left[\frac{(2R + r)^2}{p^2} - 1 \right].$$

(ii) Được suy ra từ hệ số của y bằng $8p^4 - 4(2R + r)(4R + r)p^2$. $\square$

Ví dụ 2.1.12. Cho $\triangle ABC$ với bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R ; bán kính đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{r_1^2}{p^2} + 1 \right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} + 1 \right) + \left(\frac{r_2^2}{p^2} + 1 \right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} + 1 \right) + \left(\frac{r_3^2}{p^2} + 1 \right) \left(\frac{r_1^2}{p^2} + 1 \right) = \frac{8R(r_1 + r_2 + r_3)}{p^2}.$$

Bài giải. Ta thấy $y_1 = r_1^2 + p^2, y_2 = r_2^2 + p^2, y_3 = r_3^2 + p^2$ là các nghiệm của $y^3 - ((4R + r)^2 + p^2)y^2 + 8R(4R + r)p^2y - 16R^2p^4 = 0$. Như vậy

$$\left(\frac{r_1^2}{p^2} + 1\right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} + 1\right) + \left(\frac{r_2^2}{p^2} + 1\right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} + 1\right) + \left(\frac{r_3^2}{p^2} + 1\right) \left(\frac{r_1^2}{p^2} + 1\right) \text{ đúng bằng } \frac{y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1}{p^4} = \frac{8R(4R+r)p^2}{p^4} = \frac{8R(r_1+r_2+r_3)}{p^2}. \quad \square$$

Ví dụ 2.1.13. Cho $\triangle ABC$ với bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R ; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Khi đó ta có:

$$\frac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \frac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \frac{1}{(r-r_3)(r-r_1)} = \frac{2R-r}{2Rr^2}.$$

Bài giải. Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $f(x) = x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$.

Lấy hai lần đạo hàm ta được $3x - 4R - r = (x-r_1) + (x-r_2) + (x-r_3)$.

Từ đây ta được $\frac{3x-4R-r}{f(x)} = \frac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} + \frac{1}{(x-r_2)(x-r_3)} + \frac{1}{(x-r_3)(x-r_1)}$. Cho $x = r$ ta có $\frac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \frac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \frac{1}{(r-r_3)(r-r_1)} = \frac{2R-r}{2Rr^2}$. Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.1.14. Cho $\triangle ABC$ với bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Chứng minh đồng nhất thức dưới đây:

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{r_1+r}{r_1-r} \cdot \frac{r_2+r}{r_2-r} \cdot \frac{r_3+r}{r_3-r} - 8.$$

Bài giải. Theo ví dụ (2.1.2) ở trên chúng ta đã biết $z_1 = \frac{r_1+r}{r_1-r}, z_2 =$

$\frac{r_2+r}{r_2-r}, z_3 = \frac{r_3+r}{r_3-r}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba sau đây:

$$r^2 + 2Rr + p^2 + (2r^2 + 2Rr - 2p^2)z + (r^2 - 2Rr + p^2)z^2 - 2Rrz^3 = 0.$$

Khi đó ta có hệ thức $z_1z_2z_3 = \frac{r^2 + 2Rr + p^2}{2Rr} = \frac{r^2 + p^2}{2Rr} + 1$. Mặt khác ta

lại có $\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{r^2 + p^2}{2Rr} - 7$ theo ví dụ (2.1.8). Vậy

chúng ta có: $\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{r_1+r}{r_1-r} \cdot \frac{r_2+r}{r_2-r} \cdot \frac{r_3+r}{r_3-r} - 8. \quad \square$

Chú ý 2.3: Cho đến nay chưa có đa thức bậc 4 với hệ tử là các đa thức của bán kính mặt cầu nội, ngoại tiếp r, R của tứ diện ABCD nhận bán kính các mặt cầu bàng tiếp r_1, r_2, r_3, r_4 làm nghiệm.

2.2. Một số bất đẳng thức trong tam giác

Ví dụ 2.2.1. Cho $\triangle ABC$ với độ dài ba cạnh là a, b, c và bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R . Khi đó ta có kết quả sau đây:

$$(a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr) \leq R^2(ab + bc + ca - 2Rr)^2.$$

Bài giải. Bởi vì chúng ta biết a, b, c là ba nghiệm của phương trình bậc ba sau $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$. Xét phép biến đổi $y = x^2 + 2Rr$. Đặt $T = p^2 + 3Rr + r^2$. Khử x để được phương trình $y^3 - (4p^2 + 2Rr - 2T)y^2 + (T^2 - 2Rr)y - 2RrT^2 = 0$. Vì $R \geq 2r$ nên ta có $(a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr) \leq R^2(ab + bc + ca - 2Rr)^2$. $\square$

Ví dụ 2.2.2. Cho $\triangle ABC$ với độ dài ba cạnh là a, b, c ; nửa chu vi tam giác là $p = \frac{a+b+c}{2}$ và bán kính đường tròn nội tiếp r . Hãy chứng minh:

$$(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) \geq 8p^3abc - (p^2 + 9r^2)^3.$$

Bài giải. Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ thì $(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_3x_1)(x_3^2 - x_1x_2) = a_1^3a_3 - a_2^3$ hay $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1x_2} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{x_2x_3} + \frac{(x_3 - x_1)^2}{x_3x_1} = \frac{a_1a_2}{a_3} - 9$. Do bởi a, b, c là ba nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 32p^4Rr - (p^2 + r^2 + 4Rr)^3$. Vì $4Rrp = abc$ và $R \geq 2r$ nên $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) \geq 8p^3abc - (p^2 + 9r^2)^3$. $\square$

Ví dụ 2.2.3. Cho $\triangle ABC$ với bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R ; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Khi đó ta có:

$$(i) \frac{1}{(r - r_1)(r - r_2)} + \frac{1}{(r - r_2)(r - r_3)} + \frac{1}{(r - r_3)(r - r_1)} \leq \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}.$$

$$(ii) \frac{1}{(r - r_1)(r - r_2)} + \frac{1}{(r - r_2)(r - r_3)} + \frac{1}{(r - r_3)(r - r_1)} \geq \frac{3}{4r^2}.$$

Bài giải. Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $f(x) = x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$. Lấy hai lần đạo hàm ta được $3x - 4R - r = (x - r_1) + (x - r_2) + (x - r_3)$. Từ đây ta được $\frac{3x - 4R - r}{f(x)} = \frac{1}{(x - r_1)(x - r_2)} + \frac{1}{(x - r_2)(x - r_3)} +$

$$\frac{1}{(x-r_3)(x-r_1)} \cdot \text{Cho } x = r \text{ có } \frac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \frac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \frac{1}{(r-r_3)(r-r_1)} = \frac{2R-r}{2Rr^2}.$$

(i) Do bởi $\frac{2R-r}{2Rr^2} \leq \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}$ nên (i) được chứng minh.

(ii) Vì $\frac{2R-r}{2Rr^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{2Rr} \geq \frac{3}{4r^2}$ nên (ii) được chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.2.4. Cho $\triangle ABC$ với nửa chu vi p ; bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Khi đó chúng ta có:

(i) $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}}.$

(ii) $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 9 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$

Bài giải. (i) Từ $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{4R}{p}$ và $\frac{p}{R} = \sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ suy ra bất đẳng thức sau $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \geq \frac{8}{3\sqrt{3}}.$

(ii) Được suy ra từ $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p} \geq \frac{9r}{p}$ và $R \geq 2r.$ $\square$

Ví dụ 2.2.5. Với mọi $\triangle ABC$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:

$$Q = \sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A - \cos A \cos B \cos C \leq \frac{17}{8}.$$

Bài giải. Từ $Q = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} - \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2} = \frac{4R^2 + 8Rr + 2r^2}{4R^2}$

do đó $Q \leq \frac{4R^2 + 4R^2 + \frac{R^2}{2}}{4R^2} = \frac{17}{8}.$ $\square$

Ví dụ 2.2.6. Đặt $b+c=2s > a$. Ta có các bất đẳng thức sau đây:

(i) $\max \left\{ \frac{3}{2}a, \frac{b+c}{2} \right\} \leq m_b + m_c \leq \sqrt{\frac{(b+c)^2}{4} + 2a^2}.$

(ii) $\frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}a - \frac{b+c}{2} \right| \leq m_b.$

Bài giải. Dựng hệ tọa độ (Oxy) để $B(-u; 0), C(u; 0), A(x; y)$, trong đó $a = 2u, y > 0$. Khi đó $2s = b + c = \sqrt{(x+u)^2 + y^2} + \sqrt{(x-u)^2 + y^2}$. Biến đổi $4s^2 = 2(x^2 + y^2 + u^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + u^2)^2 - 4u^2x^2}$ và như vậy: $(2s^2 - x^2 - y^2 - u^2)^2 = (x^2 + y^2 + u^2)^2 - 4u^2x^2$. Giả sử hai vế sẽ được $x^2 + y^2 + u^2 = s^2 + \frac{u^2}{s^2}x^2$ và $(s^2 - u^2)x^2 < (s^2 - u^2)s^2$ suy ra $|x| \leq s$ và $x^2 + y^2 + u^2 = s^2 + \frac{u^2}{s^2}x^2$.

(i) Ta có $m_b + m_c = \frac{1}{2}\sqrt{(3u+x)^2 + y^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(3u-x)^2 + y^2}$. Bình phương ta được $4(m_b + m_c)^2 = 2(x^2 + y^2 + 9u^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 9u^2)^2 - 36u^2x^2}$. Xét hàm số $f(x) = x^2 + y^2 + 9u^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 9u^2)^2 - 36u^2x^2}$ với $|x| \leq s$ hay $f(x) = \frac{u^2}{s^2}x^2 + s^2 + 8u^2 + \sqrt{\left(\frac{u^2}{s^2}x^2 + s^2 + 8u^2\right)^2 - 36u^2x^2}$.

Tính đạo hàm $f'(x) = \frac{2u^2}{s^2}x + \frac{\left(\frac{u^2}{s^2}x^2 + s^2 + 8u^2\right)\frac{2u^2}{s^2}x - 36u^2x}{\sqrt{\left(\frac{u^2}{s^2}x^2 + s^2 + 8u^2\right)^2 - 36u^2x^2}} =$

$$\frac{2u^2}{s^2}x \left(1 + \frac{f(x) - 18s^2}{\sqrt{\left(\frac{u^2}{s^2}x^2 + s^2 + 8u^2\right)^2 - 36u^2x^2}} \right).$$

Bởi vì $s^2 > u^2$ nên có $f(x) < \frac{u^2}{s^2}x^2 + 9s^2 + \sqrt{\left(\frac{u^2}{s^2}x^2 + 9s^2\right)^2 - 36u^2x^2}$ hay $f(x) < 18s^2$.

Qua bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra $f(x) \leq f(0) = 2(s^2 + 8u^2)$ và $f(x) \geq \min\{f(-s), f(s)\} = s^2 + 9u^2 + |9u^2 - s^2| = 2\max\{s^2, 9u^2\}$. Do $4(m_b + m_c)^2 = 2f(x)$ nên $\max\{3u, s\} \leq m_b + m_c \leq \sqrt{s^2 + 8u^2}$. Suy ra (i) được chứng minh.

(ii) Ta có $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{(3u+x)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + 9u^2 + 6ux}$ và như vậy $m_b = \sqrt{\frac{u^2}{s^2}x^2 + s^2 + 8u^2 + 6ux}$. Xét $g(x) = \frac{u^2}{s^2}x^2 + s^2 + 8u^2 + 6ux$

với $|x| \leq s$. Dễ dàng chỉ ra $g(x) \geq g(-s)$ và ta có $m_b \geq \frac{1}{2}|3u - s|$ hay $m_b \geq \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2}a - \frac{b+c}{2} \right|$. $\square$

Ví dụ 2.2.7. Với mọi $\triangle ABC$ luôn luôn có các bất đẳng thức sau đây:

$$(i) \frac{(b+c)^2 - a^2}{2(b+c)} \leq l_a \leq \frac{1}{2} \sqrt{(b+c)^2 - a^2}.$$

$$(ii) l_a \geq \frac{b+c-a}{2}.$$

Bài giải. (i) Từ $l_a = \sqrt{\frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}}$ suy ra $l_a = \sqrt{\frac{bc(s^2 - u^2)}{s^2}}$. Bởi vì $4bc = (b+c)^2 - (b-c)^2$ nên $s^2 - u^2 \leq bc \leq s^2$. Từ hai bất đẳng thức này ta suy ra $\frac{s^2 - u^2}{s^2} \leq l_a \leq \sqrt{s^2 - u^2}$. Do đó (i) được chứng minh.

$$(ii) \text{ Từ } l_a \geq \frac{(b+c)^2 - a^2}{2(b+c)} \text{ suy ra } l_a \geq \frac{b+c-a}{2}. \quad \square$$

Ví dụ 2.2.8. Với mọi $\triangle ABC$ luôn luôn có các bất đẳng thức sau đây:

$$(i) \frac{3}{4} \leq \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} \leq 1.$$

$$(ii) \frac{1}{2} \leq \frac{l_a + l_b + l_c}{a + b + c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [Trần Phương Mai].}$$

Bài giải. (i) Vì $m_a \leq \frac{b+c}{2}, m_b \leq \frac{c+a}{2}, m_c \leq \frac{a+b}{2}$ suy ra bất đẳng thức $m_a + m_b + m_c \leq a + b + c$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Từ $GB + GC \geq a, GC + GA \geq b, GA + GB \geq c$ suy ra ngay $\frac{3}{4}(m_a + m_b + m_c) \geq a + b + c$.

$$\text{Vậy } \frac{3}{4} \leq \frac{m_a + m_b + m_c}{a + b + c} \leq 1.$$

$$(ii) \text{ Từ } l_a \geq \frac{b+c-a}{2}, l_b \geq \frac{c+a-b}{2}, l_c \geq \frac{a+b-c}{2} \text{ nên sau khi cộng}$$

ba bất đẳng thức trên được $l_a + l_b + l_c \geq \frac{a+b+c}{2}$. Không hạn chế có thể coi $a \geq b, a \geq c$. Bởi vì $l_a + l_b + l_c \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{(b+c)^2 + 8a^2} \right)$ theo ví dụ (2.2.6) và (2.2.7)

nên ta phải chứng minh $l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{s^2 - u^2} + \sqrt{s^2 + 8u^2} \leq \sqrt{3}(s + u)$. Với $u \leq s \leq 2u$. Có thể coi $u = 1$ và chỉ ra $\sqrt{s^2 - 1} + \sqrt{s^2 + 8} \leq$

$\sqrt{3}(s+1)$ với $1 \leq s \leq 2$, điều này là hiển nhiên.

Tóm lại $\frac{1}{2} \leq \frac{l_a + l_b + l_c}{a + b + c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\square$

Tiếp theo là một số bất đẳng thức giữa các cạnh, đường cao và bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp.

Ví dụ 2.2.9. Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau đây: Khi $\triangle ABC$ nhọn thì $\frac{R}{r} \geq 2$ và khi $\triangle ABC$ không nhọn thì $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$.

Bài giải. Với $x = \sin \frac{A}{2}, y = \sin \frac{B}{2}, z = \sin \frac{C}{2}$ có $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Không hạn chế có thể giả thiết $\angle A \geq \angle B, \angle C$. Xét trường hợp $\triangle ABC$ nhọn. Khi đó $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\angle A}{2} < \frac{\pi}{4}$ và suy ra $\frac{1}{2} \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Từ $\frac{r}{R} = 4xyz$ suy ra $\frac{r}{R} \rightarrow 0$ khi $z \rightarrow 0$ và từ $1 = 2xyz + x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\sqrt{2x^3y^3z^3}$ suy ra $\frac{r}{R} = 4xyz \leq \frac{1}{2}$. Như vậy $R \geq 2r$. Xét trường hợp $\triangle ABC$ không nhọn. Khi đó $\frac{\pi}{2} > \frac{\angle A}{2} \geq \frac{\pi}{4}$ và như vậy $1 > x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Do bởi $1 - x^2 = y^2 + z^2 + 2xyz \geq 2yz + 2xyz$ nên $1 - x \geq 2yz$. Từ đây được

$$xyz \leq \frac{x(1-x)}{2} \leq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}.$$

Như vậy $\frac{r}{R} = 4xyz \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ hay $\frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$. $\square$

Ví dụ 2.2.10. Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau đây:

(i) $ab + bc + ca \geq 16Rr + 4r^2$.

(ii) $abc \geq 12\sqrt{3}Rr^2$.

(iii) $h_a + h_b + h_c \geq 8r + \frac{2r^2}{R}$.

Bài giải. (i) Ta đã biết a, b, c là nghiệm của phương trình: $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$. Do bởi $4(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 + 16Rr + 4r^2 \geq 3(ab + bc + ca) + 16Rr + 4r^2$. Nên $ab + bc + ca \geq 16Rr + 4r^2$.

(ii) Vì $abc = 4Rrp = 2Rr(a + b + c) \geq 6Rr\sqrt[3]{abc}$ nên $abc \geq 6\sqrt{6R^3r^3}$.

Do bởi $R \geq 2r$ theo ví dụ (2.2.9) nên $abc \geq 6\sqrt{3.4R^2r^4} = 12\sqrt{3}Rr^2$.

(iii) Do bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là ba nghiệm của $1 - 2px + (p^2 + r^2 + 4Rr)x^2 - 4Rrpx^3 = 0$ nên $h_a + h_b + h_c = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = \frac{2S(p^2 + r^2 + 4Rr)}{4Rrp} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$. Như vậy $h_a + h_b + h_c = \frac{4p^2 + 4r^2 + 16Rr}{8R} \geq \frac{48Rr + 12r^2 + 4r^2 + 16Rr}{8R} = \frac{8Rr + 2r^2}{R} \Leftrightarrow h_a + h_b + h_c \geq 8r + \frac{2r^2}{R}$. $\square$

Ví dụ 2.2.11. Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau đây:

(i) $2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2$.

(ii) $\frac{9}{2}R \geq m_a + m_b + m_c$.

(iii) [VMO 1991] Giả sử G là trọng tâm của $\triangle ABC$ và AG, BG, CG cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ ở A_1, B_1, C_1 tương ứng. Ta có bất đẳng thức: $\frac{3}{R} \leq \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} \leq \sqrt{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Bài giải. (i) Gọi M là trung điểm cạnh BC. Từ $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = 2AM^2 + 2MB.MC$ suy ra $b^2 + c^2 = 2AM^2 + 2MB.MC = 2m_a.AA_1 \leq 4Rm_a$. Như vậy $4Rm_a \geq b^2 + c^2$; $4Rm_b \geq c^2 + a^2$; $4Rm_c \geq a^2 + b^2$. Cộng ba bất đẳng thức trên ta được $2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2$.

(ii) Tại bởi $2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{9}.3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \geq \frac{4}{9}(m_a + m_b + m_c)^2$ nên $\frac{9}{2}R \geq m_a + m_b + m_c$.

(iii) Từ $2m_a.AA_1 = b^2 + c^2$ suy ra $2m_a.GA_1 = b^2 + c^2 - \frac{4}{3}m_a^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$. Vậy $\frac{1}{GA_1} = \frac{6m_a}{a^2 + b^2 + c^2}$ và được $\frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} = \frac{6(m_a + m_b + m_c)}{a^2 + b^2 + c^2}$. Theo (i) có $\frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} \geq \frac{3}{R}$. Dễ dàng có bất đẳng thức còn lại. $\square$

Ví dụ 2.2.12. Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau đây:

(i) $l_a + l_b + l_c \geq \frac{ab + bc + ca}{2R}$.

(ii) Giả sử I là giao điểm ba đường phân giác trong của $\triangle ABC$ và AI, BI, CI cắt đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ ở A_2, B_2, C_2 , tương ứng. Khi

đó ta có bất đẳng thức $AA_2 + BB_2 + CC_2 > a + b + c$.

(iii) $AA_2 + BB_2 + CC_2 \geq 6R\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$. Dấu bằng xảy ra khi $\triangle ABC$ đều.

(iv) $\frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} + \frac{1}{IC_2} \geq \frac{3}{R}$ và $\frac{a}{IA_2} + \frac{b}{IB_2} + \frac{c}{IC_2} \leq 3\sqrt{3}$.

Bài giải. (i) Gọi AI cắt BC tại K. Từ $\triangle ABK$ và $\triangle AA_2C$ đồng dạng suy ra $l_a \cdot AA_2 = bc$. Vì $AA_2 \leq 2R$ nên $2Rl_a \geq bc$. Từ đó suy ra bất đẳng thức $l_a + l_b + l_c \geq \frac{ab + bc + ca}{2R}$.

(ii) Tại bởi $A_2Bb + A_2Cc = AA_2a$ theo định lý Ptolemy và $A_2B = A_2C > \frac{a}{2}$ nên $AA_2a > (b+c)\frac{a}{2}$ hay $AA_2 > \frac{b+c}{2}$. Từ đây suy ra $AA_2 + BB_2 + CC_2 > a + b + c$.

(iii) Chúng ta có $\frac{IA}{l_a} \cdot \frac{IB}{l_b} \cdot \frac{IC}{l_c} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$. Như vậy $\frac{IA \cdot AA_2}{l_a \cdot AA_2} \cdot \frac{IB \cdot BB_2}{l_b \cdot BB_2} \cdot \frac{IC \cdot CC_2}{l_c \cdot CC_2} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$ và chúng ta suy ra hệ thức $AA_2 \cdot BB_2 \cdot CC_2 \cdot AI \cdot BI \cdot CI = \frac{a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}$.

Bởi vì $AI \cdot BI \cdot CI = 4Rr^2$ cho nên chúng ta có $AA_2 \cdot BB_2 \cdot CC_2 = \frac{a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a)}{4Rr^2(a+b+c)^3} \geq \frac{2a^3b^3c^3}{Rr^2(a+b+c)^3}$. Từ đây suy ra bất đẳng

thức $AA_2 + BB_2 + CC_2 \geq \frac{3}{r} \frac{abc}{a+b+c} \sqrt[3]{\frac{2r}{R}} = 6R\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$.

(iv) Chúng ta có $AI \cdot IA_2 = 2Rr$. Vậy $\frac{1}{IA_2} = \frac{IA}{2Rr}$. Tương tự có $\frac{1}{IB_2} = \frac{IB}{2Rr}$, $\frac{1}{IC_2} = \frac{IC}{2Rr}$. Do đó $\frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} + \frac{1}{IC_2} = \frac{IA + IB + IC}{2Rr}$ và

suy ra $\frac{1}{IA_2} + \frac{1}{IB_2} + \frac{1}{IC_2} \geq 3 \frac{\sqrt[3]{IA \cdot IB \cdot IC}}{2Rr} = 3 \frac{\sqrt[3]{4Rr^2}}{2Rr} = \frac{3}{\sqrt[3]{2R^2r}} \geq \frac{3}{R}$. Bởi

vì $\frac{1}{IA_2} = \frac{IA}{2Rr} = \frac{1}{2R \sin \frac{A}{2}}$ nên $\frac{a}{IA_2} = 2 \cos \frac{A}{2}$. Tương tự $\frac{b}{IB_2} = 2 \cos \frac{B}{2}$

và $\frac{c}{IC_2} = 2 \cos \frac{C}{2}$. Do đó $\frac{a}{IA_2} + \frac{b}{IB_2} + \frac{c}{IC_2} = 2 \cos \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{B}{2} + 2 \cos \frac{C}{2}$.

Như vậy $\frac{a}{IA_2} + \frac{b}{IB_2} + \frac{c}{IC_2} \leq 6 \cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$. $\square$

Ví dụ 2.2.13. Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$(h_a + h_b + h_c)^2 \leq \frac{3abc}{4R} \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

Bài giải. Vì $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{bc \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}} \leq \frac{bc \sin A}{\sqrt{2bc - 2bc \cos A}}$
 nên $h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{abc} \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{abc}{R}} \sqrt{\cot \frac{A}{2}}$. Dễ dàng
 có các bất đẳng thức $h_b \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{abc}{R}} \sqrt{\cot \frac{B}{2}}$; $h_c \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{abc}{R}} \sqrt{\cot \frac{C}{2}}$.
 Vậy $h_a + h_b + h_c \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{abc}{R}} \left(\sqrt{\cot \frac{A}{2}} + \sqrt{\cot \frac{B}{2}} + \sqrt{\cot \frac{C}{2}} \right)$.
 Chúng ta lại có $3 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = 3 \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$
 $\geq \left(\sqrt{\cot \frac{A}{2}} + \sqrt{\cot \frac{B}{2}} + \sqrt{\cot \frac{C}{2}} \right)^2$. Như vậy $(h_a + h_b + h_c)^2 \leq$
 $\frac{3abc}{4R} \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$. □

Ví dụ 2.2.14. Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau đây:
 $ab + bc + ca \leq \frac{9}{2}R^2 + 8Rr + 2r^2$. Trong trường hợp $\triangle ABC$ không tù ta
 có $ab + bc + ca \geq 4R^2 + 8Rr + 2r^2$.

Bài giải. Do bởi $4(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 + 16Rr + 4r^2$ nên
 nhận được $2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 16Rr + 4r^2 =$
 $4R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + 16Rr + 4r^2$. Vì $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$
 nên $2(ab + bc + ca) \leq 9R^2 + 16Rr + 4r^2$. Ta lại có $\sin^2 A + \sin^2 B +$
 $\sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C \geq 2$, khi $\triangle ABC$ không tù. Do đó
 $2(ab + bc + ca) \geq 8R^2 + 16Rr + 4r^2$ suy ra $ab + bc + ca \geq 4R^2 + 8Rr +$
 $2r^2$. □

Ví dụ 2.2.15. Cho $\triangle ABC$ với bán kính đường tròn ngoại, nội tiếp là R, r . Giả sử điểm M ở trong $\triangle ABC$ có khoảng cách đến ba cạnh là α, β, γ
 và $x = MA, y = MB, z = MC$. Khi đó ta luôn có: $\frac{r}{4R}xyz \geq \alpha\beta\gamma$.

Bài giải. Ta biết $y = \sin x$ với $0 < x < \pi$ là hàm lồi cho nên $\beta + \gamma = x (\sin A_1 + \sin A_2) \leq 2x \sin \frac{A}{2}$. Như vậy $x \sin \frac{A}{2} \geq \sqrt{\beta\gamma}$. Tương tự có $y \sin \frac{B}{2} \geq \sqrt{\gamma\alpha}$; $z \sin \frac{C}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$. Tóm lại $\alpha\beta\gamma \leq xyz \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = xyz \frac{r}{4R}$. $\square$

Ví dụ 2.2.16. Cho $\triangle ABC$ với bán kính đường tròn nội tiếp là r và chu vi $2p = 6$. Khi đó ta luôn có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{(4-a)(4-b)} + \frac{1}{(4-b)(4-c)} + \frac{1}{(4-c)(4-a)} \leq \frac{3}{6r^2 + 2}.$$

Bài giải. Vì a, b, c là nghiệm $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $f(x) = x^3 - 6x^2 + (9 + r^2 + 4Rr)x - 12Rr = (x-a)(x-b)(x-c)$. Lấy đạo hàm hai lần được $3x - 2p = (x-a) + (x-b) + (x-c)$. Từ đây suy ra $\frac{3x-2p}{f(x)} = \frac{1}{(x-a)(x-b)} + \frac{1}{(x-b)(x-c)} + \frac{1}{(x-c)(x-a)}$.

Cho $x = 4$ ta được $\frac{1}{(4-a)(4-b)} + \frac{1}{(4-b)(4-c)} + \frac{1}{(4-c)(4-a)} = \frac{3}{2 + 2r^2 + 2Rr}$. Vì $R \geq 2r$ suy ra $\frac{1}{(4-a)(4-b)} + \frac{1}{(4-b)(4-c)} + \frac{1}{(4-c)(4-a)} \leq \frac{3}{6r^2 + 2}$. $\square$

Ví dụ 2.2.17. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh a, b, c và bán kính đường tròn nội tiếp là r . Khi đó luôn có:

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \leq \frac{p^2}{4r^2} - \frac{27}{4}.$$

Bài giải. Vì a, b, c là nghiệm $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên dễ dàng có: $\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2(p^2 + r^2 + 4Rr)}{4Rr} - 9$.

Như vậy $\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2(p^2 + r^2)}{4Rr} - 7$. Bởi vì $R \geq 2r$ nên $\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \leq \frac{2(p^2 + r^2)}{8r} - 7 = \frac{p^2}{4r^2} - \frac{27}{4}$. $\square$

Ví dụ 2.2.18. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh a, b, c và bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R . Khi đó có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2Rr} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Bài giải. Như chúng ta biết a, b, c là ba nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ cho nên $f(x) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = (x - a)(x - b)(x - c)$. Lấy đạo hàm hai lần ta được: $3x - 2p = \frac{1}{(x - a)} + \frac{1}{(x - b)} + \frac{1}{(x - c)}$. Từ đây ta được $\frac{3x - 2p}{f(x)} = \frac{1}{(x - a)(x - b)} + \frac{1}{(x - b)(x - c)} + \frac{1}{(x - c)(x - a)}$. Cho $x = p$ ta có $\frac{1}{(p - a)(p - b)} + \frac{1}{(p - b)(p - c)} + \frac{1}{(p - c)(p - a)} = \frac{p}{r^2 p} = \frac{1}{r^2}$. Tóm lại $\frac{1}{4r^2} = \frac{1}{4(p - a)(p - b)} + \frac{1}{4(p - b)(p - c)} + \frac{1}{4(p - c)(p - a)} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Lại có $\frac{1}{2Rr} = \frac{2p}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ suy ra $\frac{1}{2Rr} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}$. $\square$

Ví dụ 2.2.19. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác không cân. Khi đó có bất đẳng thức: $T = \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(1 + a^2)} + \frac{1}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)(1 + b^2)} + \frac{1}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(1 + c^2)} \leq \frac{1}{8abc}$.

Bài giải. Biểu diễn $T(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} = \frac{Ax + A'}{x^2 + a^2} + \frac{Bx + B'}{x^2 + b^2} + \frac{Cx + C'}{x^2 + c^2}$. Tính A, A', B, B', C, C' và cho $x = 1$ ta nhận được biểu thức $T = \frac{1}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)} \leq \frac{1}{8abc}$. $\square$

Ví dụ 2.2.20. Ký hiệu r_1, r_2, r_3 là bán kính các đường tròn bàng tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:

- (i) $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 \geq 3\sqrt{3}S$.
- (ii) $4R + r \geq 3\sqrt{\sqrt{3}S}$.

Bài giải. (i) Chúng ta biết r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Như vậy $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = p^2$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \leq \sqrt{p \left(\frac{p - a + p - b + p - c}{3} \right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Do đó chúng ta có bất đẳng thức $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 \geq 3\sqrt{3}S$.

(ii) Vì $4R + r = r_1 + r_2 + r_3 \geq \sqrt{3(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)}$ nên nhận được bất đẳng thức $4R + r \geq 3\sqrt{\sqrt{3}S}$. $\square$

Ví dụ 2.2.21. Cho $\triangle ABC$ với bán kính đường tròn ngoại tiếp là R ; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 ; nửa chu vi p . Chứng minh:

$$\frac{25R^2}{p^2} \geq \left(\frac{r_1^2}{p^2} - 1\right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} - 1\right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} - 1\right) + 4 \geq \frac{100r^2}{p^2}.$$

Bài giải. Do $\left(\frac{r_1^2}{p^2} - 1\right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} - 1\right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} - 1\right) = 4 \left(\frac{(2R+r)^2}{p^2} - 1\right)$ theo ví dụ (2.1.11) và $R \geq 2r$ nên $\frac{25R^2}{p^2} \geq \left(\frac{r_1^2}{p^2} - 1\right) \left(\frac{r_2^2}{p^2} - 1\right) \left(\frac{r_3^2}{p^2} - 1\right) + 4 \geq \frac{100r^2}{p^2}$. $\square$

Ví dụ 2.2.22. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$(i) \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$(ii) \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Bài giải. Vì $y = \sin x$ với $0 < x < \pi$ là hàm lõm nên $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\sin A \sin B \sin C \leq \sin^3 \frac{A+B+C}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. $\square$

Ví dụ 2.2.23. Chứng minh rằng, trong số những tam giác cùng nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R thì tam giác đều có chu vi lớn nhất.

Bài giải. Chu vi tam giác bằng $2p = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \leq 3\sqrt{3}R$. Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều. $\square$

Ví dụ 2.2.24. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$(i) \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

$$(ii) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

$$(iii) \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$(iv) \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Bài giải. (i) Vì $y = \sin x$ với $0 < x < \pi$ là hàm lõm nên ta có bất đẳng thức $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{6} = \frac{3}{2}$.

(ii) Do $\sin \frac{A}{2} > 0$; $\sin \frac{B}{2} > 0$; $\sin \frac{C}{2} > 0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \left[\frac{1}{3} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \right]^3 \leq \left(\frac{1}{3} \right)^3 \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$.

(iii) Vì $y = \cos x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ là hàm lồi nên $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq 3 \cos \frac{A+B+C}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(iv) Vì $y = \tan x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ là hàm lồi nên $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 3 \tan \frac{A+B+C}{6} = \sqrt{3}$. $\square$

Chú ý 2.4: Từ ví dụ (2.2.22) và (2.2.24) sử dụng tính chất của hàm lồi và hàm lõm ta có thể giải quyết được các bài toán tương tự sau:

(i) Chứng minh rằng trong mọi $\triangle ABC$ có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

(ii) Chứng minh rằng trong mọi $\triangle ABC$ có $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$.

(iii) Chứng minh rằng trong mọi $\triangle ABC$ có $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(iv) Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ nhọn thì $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$.

(v) Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ nhọn thì $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$.
Đẳng thức xảy ra cho các trường hợp trên khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 2.2.25. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh:

$$(i) \sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

$$(ii) (a+b-c)^9 + (a-b+c)^9 + (-a+b+c)^9 \geq a^9 + b^9 + c^9.$$

Bài giải. Không hạn chế có thể giả thiết $a \geq b \geq c > 0$. Vì $a + b - c \geq a$, $a + b - c + a - b + c \geq a + b$ và $a + b - c + a - b + c - a + b + c = a + b + c$ nên $(a + b - c, a - b + c, -a + b + c) \geq (a, b, c)$. Bởi vì $y = \sqrt{x}$ với $x > 0$ là hàm số lõm và $y = x^9$ với $x > 0$ là hàm lồi nên theo Mệnh đề 1.3.1 ta có $\sqrt{a + b - c} + \sqrt{a - b + c} + \sqrt{-a + b + c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ và $(a + b - c)^9 + (a - b + c)^9 + (-a + b + c)^9 \geq a^9 + b^9 + c^9$. $\square$

Ví dụ 2.2.26. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$(1 + \sin A) \frac{1}{\sin B} (1 + \sin B) \frac{1}{\sin C} (1 + \sin C) \frac{1}{\sin A} \geq 8.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli cho tam giác ABC chúng ta có $(1 + \sin A) \frac{1}{\sin B} (1 + \sin B) \frac{1}{\sin C} (1 + \sin C) \frac{1}{\sin A} \geq \left(1 + \frac{\sin A}{\sin B}\right) \left(1 + \frac{\sin B}{\sin C}\right) \left(1 + \frac{\sin C}{\sin A}\right) \geq 2^3 = 8$. $\square$

Ví dụ 2.2.27. Cho tam giác ABC nhọn chúng ta luôn có:

- (i) $\sin A + \sin B + \sin C + \tan A \tan B \tan C > 2\pi$.
- (ii) $2^{\sin A} + 2^{\tan A} + 2^{\sin B} + 2^{\tan B} + 2^{\sin C} + 2^{\tan C} > 3\sqrt[3]{2^{\pi+3}}$.

Chứng minh. (i) Do tam giác ABC nhọn nên $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$. Khi đó

$$\text{theo ví dụ 1.4.2 thì } \begin{cases} \sin A + \tan A > 2A \\ \sin B + \tan B > 2B \\ \sin C + \tan C > 2C \end{cases} \quad \text{Cộng từng vế của 3 bất đẳng}$$

thức trên và kết hợp với $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ thì ta được (i).

(ii) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì $2^{\sin A} + 2^{\tan A} \geq 2\sqrt{2^{\sin A} 2^{\tan A}} > 2^{A+1}$. Tương tự cũng có $2^{\sin B} + 2^{\tan B} > 2^{B+1}$ và $2^{\sin C} + 2^{\tan C} > 2^{C+1}$.

Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta được $2^{\sin A} + 2^{\tan A} + 2^{\sin B} + 2^{\tan B} + 2^{\sin C} + 2^{\tan C} > 2^{A+1} + 2^{B+1} + 2^{C+1} \geq 3\sqrt[3]{2^{A+B+C+3}} = 3\sqrt[3]{2^{\pi+3}}$. $\square$

2.3. Một số bài toán nhận dạng tam giác

Bài toán 1: Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là a, b, c và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4p^2}{3}$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

Chứng minh. Vận dụng bất đẳng thức AM-GM cho sáu số $a, b, c, 1, 1, 1$, ta có $(2p)^2 = (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ hay $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4p^2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. $\square$

Bài toán 2: Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là a, b, c và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{2p}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh. Vận dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số, ta có $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9$ hay $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{2p}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. $\square$

Bài toán 3: Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh là a, b, c , nửa chu vi là p và diện tích là S . Chứng minh rằng: $p^2 \geq 3\sqrt{3}S$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh. Vận dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số $p - a, p - b, p - c$, ta có $p - a + p - b + p - c \geq 3\sqrt[3]{(p - a)(p - b)(p - c)} \Leftrightarrow p \geq 3\sqrt[3]{(p - a)(p - b)(p - c)} \Leftrightarrow p^3 \geq 27(p - a)(p - b)(p - c) \Leftrightarrow p^4 \geq 27p(p - a)(p - b)(p - c) \Leftrightarrow p^2 \geq 3\sqrt{3}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Leftrightarrow p^2 \geq 3\sqrt{3}S$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. $\square$

Bài toán 4: Tam giác ABC có tính chất gì nếu:

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài giải. Ta có: $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ tương đương với $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{A - B}{2} + \cos \frac{A + B}{2} \right) \cos \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A - B}{2} - \cos \frac{A + B}{2} \right) \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ hay $\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1$. Do đó $\cos \frac{A - B}{2} \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} - \left(1 - \sin^2 \frac{C}{2} \right) = 0$ ta được $\cos \frac{A - B}{2} \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) - \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) = 0$ tức là $\left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cos \frac{A - B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) = 0$ khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{C}{2} \\ \cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan \frac{C}{2} = 1 \\ \frac{A-B}{2} = \frac{C}{2} \\ \frac{A-B}{2} = -\frac{C}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\angle C}{2} = 45^\circ \\ \angle A = \angle B + \angle C \\ \angle B = \angle A + \angle C \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \angle C = 90^\circ \\ \angle A = 90^\circ \\ \angle B = 90^\circ \end{array} \right] \text{ Vậy tam giác ABC là tam giác vuông.}$$

□

Bài toán 5: Tam giác ABC có tính chất gì nếu: $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$.

Bài giải. Ta có $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$

$$\Leftrightarrow \sin A = 2 \sin B \cos C \Leftrightarrow \sin(B+C) = 2 \sin B \cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin B \cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin(B-C) = 0 \Leftrightarrow \angle B = \angle C.$$

Do vậy tam giác ABC cân tại A.

□

Bài toán 6: Nhận dạng tam giác ABC biết $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{3}{4}$.

Bài giải. Chúng ta thấy: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{3}{4}$ tương đương

$$\frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C = \frac{3}{4} \text{ hay } \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 C - 4\cos C \cos(A-B) + \cos^2(A-B) + \sin^2(A-B) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos C - \cos(A-B))^2 + \sin^2(A-B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos C = \cos(A-B) \\ \sin(A-B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle A = \angle B \\ \cos C = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle C = 60^\circ \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

□

Bài toán 7: Cho $\triangle ABC$ với nửa chu vi p; bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R; bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3 . Khi đó $\frac{81}{4}R^2 \geq r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\frac{r_1 r_2 r_3}{r} \geq 81r^2$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài giải. Do bởi $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)$ nên $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (4R + r)^2 - 2\frac{r_1r_2r_3}{r}$ hay $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\frac{r_1r_2r_3}{r} = (4R + r)^2$.
 Vậy $\frac{81}{4}R^2 \geq r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2\frac{r_1r_2r_3}{r} \geq 81r^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều. $\square$

Bài toán 8: Chứng minh rằng, trong mọi $\triangle ABC$ ta luôn có:

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} + \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài giải. Chúng ta xét hàm số $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2}$ với $x \in (0, \pi)$.

Có $f'(x) = \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$; $f''(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{4\cos^3 \frac{x}{2}} \left(4 - \cos^4 \frac{x}{2}\right) > 0$, với

$\forall x \in (0, \pi)$ chúng ta suy ra $f(x)$ là hàm lồi trên $(0, \pi)$.

Theo bất đẳng thức Jensen, ta có: $f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \leq \frac{1}{3}(f(A) + f(B) + f(C))$ suy ra $\sin \frac{A+B+C}{6} + \tan \frac{A+B+C}{6} \leq \frac{1}{3}\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}\right)$.

Tức là $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} + \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\angle A = \angle B = \angle C$ tức là $\triangle ABC$ đều. $\square$

Bài toán 9: Chứng minh rằng, trong mọi $\triangle ABC$ ta luôn có

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq 12.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ với $x \in (0, \pi)$. Ta có $f'(x) = \frac{-2\cos x}{\sin^3 x}$; $f''(x) = \frac{2\sin^2 x + 6\cos^2 x}{\sin^4 x} > 0$. Với $\forall x \in (0, \pi)$ suy ra $f(x)$ là hàm lồi trên $(0, \pi)$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen, chúng ta có

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \right) \text{ hay } \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq 12.$$

Đây là điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\angle A = \angle B = \angle C$ tức là $\triangle ABC$ đều. $\square$

Nhận xét 2.1: Với cách làm trên có thể xây dựng được bài toán: Chứng minh rằng trong mọi $\triangle ABC$ ta có $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq 4$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 10: Cho $\triangle ABC$ chứng minh $\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6$. Khi

nào đẳng thức xảy ra?

Bài giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ với $x \in (0, \pi)$. Ta có $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$; $f''(x) = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0$, với $\forall x \in (0, \pi)$. Suy ra $f(x)$ là hàm lồi trên $(0, \pi)$. Theo bất đẳng thức Jensen, ta có

$$\frac{1}{\sin \frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3}} \leq$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) \text{ hay } \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\angle A = \angle B = \angle C$ tức là $\triangle ABC$ đều. $\square$

Nhận xét 2.2: Hoàn toàn tương tự như ví dụ trên ta cũng có được kết quả tương tự sau: Chứng minh rằng trong $\triangle ABC$ ta luôn có $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 11: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Bài giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Có $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$; $f''(x) = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} > 0 \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ suy ra $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ là hàm lồi trên $(0, \frac{\pi}{2})$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có $\frac{1}{\cos \frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}}{3} \leq$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} \right) \text{ hay } \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\angle A = \angle B = \angle C$ tức là $\triangle ABC$ đều. $\square$

Nhận xét 2.3: Từ ví dụ trên suy ra được kết quả sau: Chứng minh rằng trong $\triangle ABC$ nhọn ta luôn có: $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq 6$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Bài toán 12: Chứng minh rằng, trong $\triangle ABC$ ta luôn có:

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \geq 4.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

Bài giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Có $f'(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$; $f''(x) = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x} > 0$ với $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Suy ra $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ là hàm lồi trên $(0, \frac{\pi}{2})$. Áp dụng bất đẳng thức Jensen,

$$\text{ta có } \frac{1}{\cos^2 \frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}}{3} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \right) \text{ hay } \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \geq 4.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\angle A = \angle B = \angle C$ tức là $\triangle ABC$ đều. $\square$

Chương 3

Trình bày một số kết quả của J.Liu [8] và của Klamkin [7].

Chương này chúng tôi vận dụng trình bày lại kết quả đã có trong bài báo và một số bài toán khác. Cụ thể các kết quả được suy ra từ bài toán sau đây:

3.1. Khai thác bài toán véc tơ trong mặt phẳng

Mệnh đề 3.1.1. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$ và điểm I thuộc mặt phẳng (ABC) . Khi đó:

(i) Nếu I thuộc miền tam giác ABC thì có đồng nhất thức

$$\vec{IA}.S_{IBC} + \vec{IB}.S_{ICA} + \vec{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(ii) Nếu I thuộc miền ngoài tam giác ABC và nằm trong góc $\angle A$ thì

$$-\vec{IA}.S_{IBC} + \vec{IB}.S_{ICA} + \vec{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(iii) Với tâm đường tròn nội tiếp I và tâm đường tròn bàng tiếp J ở trong góc $\angle A$ ta có các đồng nhất thức $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ và $-a\vec{JA} + b\vec{JB} + c\vec{JC} = \vec{0}$.

Chứng minh. (i) Đặt hệ tọa độ Ixy sao cho $I(0,0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ và $C(x_3, y_3)$. Diện tích các tam giác IBC, ICA, IAB được quy ước

$$\text{tính } 2S_{IBC} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, 2S_{ICA} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \text{ và } 2S_{IAB} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Do vậy $\vec{IA}.2S_{IBC} = (x_2y_3 - x_3y_2)(x_1, y_1)$; $\vec{IB}.2S_{ICA} = (x_3y_1 - x_1y_3)(x_2, y_2)$; $\vec{IC}.2S_{IAB} = (x_1y_2 - x_2y_1)(x_3, y_3)$. Bởi vì hai định thức

$$\text{sau triệt tiêu } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \text{ và } \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \text{ nên } \vec{IA}.S_{IBC} + \vec{IB}.S_{ICA} +$$

$$\vec{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(ii) Nếu I thuộc miền ngoài tam giác ABC và nằm trong góc $\angle A$ thì $S_{IBC} = -S_{ICB}$. Do vậy $-\vec{IA}.S_{IBC} + \vec{IB}.S_{ICA} + \vec{IC}.S_{IAB} = \vec{0}$.

(iii) Là hiển nhiên. $\square$

Hệ quả 3.1.1. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$. Gọi G, H, O và I là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC . Khi đó:

$$(i) \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$

$$(ii) \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}.$$

$$(iii) (a + b + c)\vec{OI} = a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}.$$

Chứng minh. (i) Được suy ra từ Mệnh đề 3.1.1.

(ii) Từ $\vec{0} = -3\vec{OG} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ suy ra $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

(iii) Từ $\vec{0} = -(a + b + c)\vec{OI} + a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}$, theo Mệnh đề 3.1.1 ta suy ra đồng nhất thức $(a + b + c)\vec{OI} = a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}$. $\square$

Ví dụ 3.1.1. Giả sử tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I, J là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $\angle A$ của tam giác. Khi đó có bất đẳng thức sau đây:

$$(i) aEA^2 + bEB^2 + cEC^2 \geq abc \text{ với điểm } E \text{ tùy ý.}$$

$$(ii) aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$$

$$(iii) -aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = abc.$$

(iv) $a(AH^2 + AK^2 - AJ^2) + b(BK^2 + BJ^2 - BH^2) + c(CJ^2 + CH^2 - CK^2) = 3abc$ khi J, H, K là tâm đường tròn bàng tiếp và ở trong góc $\angle A, \angle B, \angle C$, tương ứng, của tam giác.

Bài giải. (i) Từ bất đẳng thức $(a\vec{EA} + b\vec{EB} + c\vec{EC})^2 \geq 0$ ta suy ra

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^2EA^2 + b^2EB^2 + c^2EC^2 + 2ab\vec{EA}.\vec{EB} + 2bc\vec{EB}.\vec{EC} + 2ca\vec{EC}.\vec{EA} \\ &= a^2EA^2 + b^2EB^2 + c^2EC^2 + ab(EA^2 + EB^2 - c^2) \\ &\quad + bc(EB^2 + EC^2 - a^2) + ca(EC^2 + EA^2 - b^2). \end{aligned}$$

Giả ước cho $a + b + c$ được bất đẳng thức $aEA^2 + bEB^2 + cEC^2 \geq abc$.

(ii) Từ $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 3.1.1 ta suy ra

$$\begin{aligned} 0 &= a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\vec{IA}.\vec{IB} + 2bc\vec{IB}.\vec{IC} + 2ca\vec{IC}.\vec{IA} \\ &= a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - c^2) \\ &\quad + bc(IB^2 + IC^2 - a^2) + ca(IC^2 + IA^2 - b^2). \end{aligned}$$

Giả ước cho $a + b + c$ được đồng nhất thức $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.

(iii) Từ $-a\vec{JA} + b\vec{JB} + c\vec{JC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 3.1.1 ta suy ra:

$$\begin{aligned} 0 &= a^2JA^2 + b^2JB^2 + c^2JC^2 - 2ab\vec{JA}.\vec{JB} + 2bc\vec{JB}.\vec{JC} - 2ca\vec{JC}.\vec{JA} \\ &= a^2JA^2 + b^2JB^2 + c^2JC^2 - ab(JA^2 + JB^2 - c^2) \\ &\quad + bc(JB^2 + JC^2 - a^2) - ca(JC^2 + JA^2 - b^2). \end{aligned}$$

Giả ước cho $-a + b + c$ được đồng nhất thức $-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = abc$.

(iv) Như trên có các đồng nhất thức $-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = abc$, $aHA^2 - bHB^2 + cHC^2 = abc$ và $aKA^2 + bKB^2 - cKC^2 = abc$. Vậy $a(AH^2 + AK^2 - AJ^2) + b(BJ^2 - BH^2 + BK^2) + c(CJ^2 + CH^2 - CK^2) = 3abc$. $\square$

Ví dụ 3.1.2. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử G là trọng tâm; I, r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp; O, R là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và J là điểm tùy ý trong mặt phẳng (ABC) . Khi đó:

(i) $T = JA^2 + JB^2 + JC^2 = 3JG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$. Khi lấy $J \equiv O$ sẽ nhận được $3R^2 = 3OG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

(ii) $S = aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = (a + b + c)JI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$.

(iii) $S = aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = (a + b + c)(JI^2 + 2Rr)$. Đặc biệt có $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 2Rr(a + b + c)$.

(iv) (Euler) $OI^2 = R^2 - 2Rr$, (IMO1962), $= R^2 - \frac{abc}{a + b + c}$.

(v) $P = \sin(2A)JA^2 + \sin(2B)JB^2 + \sin(2C)JC^2 = \frac{abc}{2R^3}JO^2 + \frac{abc}{2R}$. Đặc biệt có $aIA^2 \cos A + bIB^2 \cos B + cIC^2 \cos C = abc\left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

Bài giải. (i) Ta có $T = (\vec{JG} + \vec{GA})^2 + (\vec{JG} + \vec{GB})^2 + (\vec{JG} + \vec{GC})^2$. Vậy $T = 3JG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3IG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

(ii),(iii) Vì $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề (3.1.1) nên được hệ thức:

$$\begin{aligned} S &= a(\vec{JI} + \vec{IA})^2 + b(\vec{JI} + \vec{IB})^2 + c(\vec{JI} + \vec{IC})^2 \\ &= (a + b + c)JI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta còn có

$$\begin{aligned} Q &= aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 4Rr^2 \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \\ &= 4Rr^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = 4Rr^2 \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\ &= 4Rr^2 \frac{\frac{a+b+c}{4R}}{\frac{8R}{r}} = (a+b+c)2Rr. \end{aligned}$$

Do đó $S = aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = (a+b+c)(JI^2 + 2Rr)$. Khi $J \equiv I$ nhận được đồng nhất thức $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 2Rr(a+b+c)$.

(iv) Từ (ii) có $(a+b+c)R^2 = (a+b+c)(OI^2 + 2Rr)$ hay $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

(v) Vì $\sin(2A)\vec{OA} + \sin(2B)\vec{OB} + \sin(2C)\vec{OC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề (3.1.1)

và $\sin(2A) + \sin(2B) + \sin(2C) = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{abc}{2R^3}$ nên nhận được $P = \frac{abc}{2R^3}JO^2 + \frac{abc}{2R}$. Khi $J \equiv I$ được $\sin(2A)IA^2 + \sin(2B)IB^2 + \sin(2C)IC^2 = \frac{abc}{2R^3}IO^2 + \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{2R^3}(R^2 - 2Rr) + \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{R} - \frac{rabc}{R^2}$. Từ đây suy ra $aIA^2 \cos A + bIB^2 \cos B + cIC^2 \cos C = abc\left(1 - \frac{r}{R}\right)$. $\square$

Ví dụ 3.1.3. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử I, K, r, r_a là tâm, bán kính đường tròn nội, bàng tiếp thuộc góc $\hat{A}$; O, R là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và J là điểm tùy ý trong mặt phẳng (ABC) . Khi đó:

(i) $-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = (-a + b + c)(JK^2 - 2Rr_a)$. Đặc biệt có

$$-\frac{-aKA^2 + bKB^2 + cKC^2}{-a + b + c} = 2Rr_a.$$

(ii) $OK^2 = R^2 + 2Rr_a$.

(iii) $IA.IB.IC = 4Rr^2, KA.KB.KC = 4Rr_a^2$.

Bài giải. (i) Vì $-a\vec{KA} + b\vec{KB} + c\vec{KC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 3.1.1 nên có: $-a(\vec{JK} + \vec{KA})^2 + b(\vec{JK} + \vec{KB})^2 + c(\vec{JK} + \vec{KC})^2 = (-a + b + c)JK^2 - aKA^2 + bKB^2 + cKC^2$. Mặt khác, biến đổi $-aKA^2 + bKB^2 +$

$$cKC^2 = 4Rr_a^2 \left(-\cot \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) = 4Rr_a^2 \frac{-\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} =$$

$$4Rr_a^2 \frac{a - b - c}{\frac{8R}{r_a}} = (a - b - c)2Rr_a. \text{ Vì } r_a(b + c - a) = \frac{abc}{2R} \text{ hay } r_a =$$

$$4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \text{ Do vậy ta nhận được } -aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = (-a + b + c)(JK^2 - 2Rr_a).$$

(ii) Từ (i), với $J \equiv O$, ta suy ra $(-a + b + c)R^2 = (-a + b + c)(OK^2 - 2Rr_a)$ hay $OK^2 = R^2 + 2Rr_a$.

(iii) Ta có đồng nhất thức $IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2$

$$\text{và } KA.KB.KC = \frac{r_a^3}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{r_a^3}{\frac{r_a}{4R}} = 4Rr_a^2. \quad \square$$

Ví dụ 3.1.4. Cho $\triangle ABC$ không vuông với $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử H là trực tâm; I, r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp; O, R là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và J là điểm tùy ý trong mặt phẳng (ABC) . Khi đó:

(i) $T = \tan A.JA^2 + \tan B.JB^2 + \tan C.JC^2 = \tan A \tan B \tan C.JH^2 + 4dt(ABC)$. Khi lấy $J \equiv O$ được $OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$.

(ii) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$.

(iii) Nếu ΔABC nhọn thì $\frac{\cot \frac{A}{2}}{\cos A} + \frac{\cot \frac{B}{2}}{\cos B} + \frac{\cot \frac{C}{2}}{\cos C} \geq \frac{a+b+c}{r}$; Còn khi ΔABC tù thì $\frac{\cot \frac{A}{2}}{\cos A} + \frac{\cot \frac{B}{2}}{\cos B} + \frac{\cot \frac{C}{2}}{\cos C} \leq \frac{a+b+c}{r}$.

Bài giải. (i) Bởi vì $\tan A \cdot \vec{H}\vec{A} + \tan B \cdot \vec{H}\vec{B} + \tan C \cdot \vec{H}\vec{C} = \vec{0}$ nên có:

$$\begin{aligned} T &= \tan A \cdot (\vec{J}\vec{H} + \vec{H}\vec{A})^2 + \tan B \cdot (\vec{J}\vec{H} + \vec{H}\vec{B})^2 + \tan C \cdot (\vec{J}\vec{H} + \vec{H}\vec{C})^2 \\ &= \tan A \tan B \tan C \cdot JH^2 + \tan A \cdot HA^2 + \tan B \cdot HB^2 + \tan C \cdot HC^2. \end{aligned}$$

Ta lại có $\tan A \cdot HA^2 + \tan B \cdot HB^2 + \tan C \cdot HC^2 = 4dt(ABC)$. Do vậy $T = \tan A \tan B \tan C \cdot JH^2 + 4dt(ABC)$.

Với $J \equiv O$, ta suy ra $OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$.

(ii) Từ Ví dụ và $OH = 3OG$ ta suy ra:

$$R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C) = OH^2 = 9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

hay $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$.

(iii) $\tan A \cdot IA^2 + \tan B \cdot IB^2 + \tan C \cdot IC^2 = \tan A \tan B \tan C \cdot IH^2 + 4 \cdot dt(ABC)$ khi $J \equiv I$. Bởi vì $4dt(ABC) = 2r(a + b + c)$ và

$$\tan A \cdot IA^2 + \tan B \cdot IB^2 + \tan C \cdot IC^2 = \frac{2r^2 \cot \frac{A}{2}}{\cos A} + \frac{2r^2 \cot \frac{B}{2}}{\cos B} + \frac{2r^2 \cot \frac{C}{2}}{\cos C}$$

nên khi ΔABC nhọn có $\frac{\cot \frac{A}{2}}{\cos A} + \frac{\cot \frac{B}{2}}{\cos B} + \frac{\cot \frac{C}{2}}{\cos C} \geq \frac{a+b+c}{r}$; Còn khi

$$\Delta ABC \text{ tù có } \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cos A} + \frac{\cot \frac{B}{2}}{\cos B} + \frac{\cot \frac{C}{2}}{\cos C} \leq \frac{a+b+c}{r}. \quad \square$$

Ví dụ 3.1.5. Cho ΔABC với độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$; với O, R là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Từ điểm K thuộc mặt phẳng (ABC) hạ $KM \perp BC, KN \perp CA, KP \perp AB$. Đặt $\alpha = KM, \beta = KN, \gamma = KP$. Khi đó ta có các kết quả dưới đây:

(i) (Euler's theorem for pedal triangles) $S_{MNP} = \frac{1}{4} \left| 1 - \frac{OK^2}{R^2} \right| S_{ABC}$ và $S_{MNP} = 0$ khi và chỉ khi K thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

- (ii) (Simson) Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi K thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC .
- (iii) (Steiner] Ba điểm M_1, N_1, P_1 thẳng hàng khi chúng là ba điểm đối xứng với điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC qua BC, CA, AB .
- (iv) Khi K là điểm thuộc miền ΔABC thì ta có các bất đẳng thức:

$$(iv.1) \quad \alpha\beta ab + \beta\gamma bc + \gamma\alpha ca \leq \frac{4S_{ABC}^2}{3}.$$

$$(iv.2) \quad \frac{\alpha}{a} \frac{\beta}{b} + \frac{\beta}{b} \frac{\gamma}{c} + \frac{\gamma}{c} \frac{\alpha}{a} \leq \frac{1}{4}.$$

$$(iv.3) \quad 2(\alpha + \beta + \gamma) \leq KA + KB + KC \quad (Erdos - Mordell].$$

$$(iv.4) \quad 6r \leq KA + KB + KC.$$

$$(iv.5) \quad \frac{4R}{r} \alpha\beta\gamma \leq KA.KB.KC, 8\alpha\beta\gamma \leq KA.KB.KC$$

$$x + y + z \leq KA \sin \frac{A}{2} + KB \sin \frac{B}{2} + KC \sin \frac{C}{2}.$$

$$(iv.6) \quad 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \leq \alpha KA + \beta KB + \gamma KC.$$

Bài giải. (i) Xét trường hợp K thuộc ΔABC . Theo Mệnh đề 3.1.1 có $\vec{KA}.\alpha a + \vec{KB}.\beta b + \vec{KC}.\gamma c = \vec{0}$. Do đó chúng ta có $R^2 = \frac{OA^2.S_{KBC} + OB^2.S_{KCA} + OC^2.S_{KAB}}{S_{ABC}} = OK^2 + KA^2.\frac{\alpha}{h_a} + KB^2.\frac{\beta}{h_b} + KC^2.\frac{\gamma}{h_c}$. Ta còn phải chỉ ra $T = KA^2.\frac{\alpha a}{2} + KB^2.\frac{\beta b}{2} + KC^2.\frac{\gamma c}{2} = 4R^2.S_{MNP}$. Đặt $x = BM, y = CN, z = AP$. Vì tứ giác $APKN$ nội tiếp trong đường tròn nên $\beta z + \gamma(b - y) = KA.NP = KA^2.\frac{a}{2R}$. Từ đây ta có các hệ thức: $KA^2.\frac{\alpha a}{2} = R[\alpha\beta z + \alpha\gamma(b - y)]$, $KB^2.\frac{\beta b}{2} = R[\gamma\beta x + \beta\alpha(c - z)]$, $KC^2.\frac{\gamma c}{2} = R[\gamma\alpha y + \gamma\beta(a - x)]$.

Vậy $T = R(\alpha\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) = 2R^2(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C)$ hay $T = 4R^2.S_{MNP}$. Trường hợp K nằm ngoài ΔABC xét tương tự.

(ii) Khi K thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì $OK = R$ và $S_{MNP} = 0$ theo (i). Như vậy M, N, P là ba điểm thẳng hàng.

(iii) Khi K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó M, N, P thẳng hàng. Do vậy M_1, N_1, P_1 thẳng hàng.

(iv.1) Từ $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S_{ABC}$ và $\alpha\beta ab + \beta\gamma bc + \gamma\alpha ca \leq \frac{1}{3}(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2$

ta suy ra $\alpha\beta ab + \beta\gamma bc + \gamma\alpha ca \leq \frac{4S_{ABC}^2}{3}$.

(iv.2) Từ (i) suy ra $\alpha\beta \sin C + \beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B = 2S_{MNP} \leq \frac{S_{ABC}}{2}$. Do vậy mà ta có $(\frac{\alpha\beta}{a} + \frac{\beta\gamma}{b} + \frac{\gamma\alpha}{c}).2S_{ABC} \leq \frac{S_{ABC}}{2}$ hay $\frac{\alpha\beta}{a} + \frac{\beta\gamma}{b} + \frac{\gamma\alpha}{c} \leq \frac{1}{4}$.

(iv.3) Gọi K' là điểm đối xứng điểm K qua phân giác trong góc $\hat{A}$. Ký hiệu khoảng cách từ B, C đến (AK') là u_1, u_2 tương ứng. Vì $u_1 + u_2 \leq a$ nên $aKA \geq u_1KA + u_2KA = b\gamma + c\beta$ hay $KA \geq \frac{b}{a}\gamma + \frac{c}{a}\beta$. Hoàn

toàn tương tự có $KB \geq \frac{c}{b}\alpha + \frac{a}{b}\gamma, KC \geq \frac{a}{c}\beta + \frac{b}{c}\alpha$. Từ đây suy ra $KA + KB + KC \geq (\frac{b}{a} + \frac{a}{b})\gamma + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c})\beta + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b})\alpha \geq 2(\alpha + \beta + \gamma)$.

(iv.4) Vì $KA + KB + KC + \alpha + \beta + \gamma \geq h_a + h_b + h_c \geq 9r$ nên $\frac{3}{2}(KA + KB + KC) \geq 9r$. Vậy $KA + KB + KC \geq 6r$.

(iv.5) Vì $\beta + \gamma \leq 2KA \sin \frac{A}{2}, \gamma + \alpha \leq 2KB \sin \frac{B}{2}, \alpha + \beta \leq 2KC \sin \frac{C}{2}$ nên $8KA.KB.KC \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$.

Vậy $KA.KB.KC \geq \frac{4R}{r}\alpha\beta\gamma$ và $KA \sin \frac{A}{2} + KB \sin \frac{B}{2} + KC \sin \frac{C}{2} \geq x + y + z$.

(iv.6) Vì $ah_a = a\alpha + b\beta + c\gamma$ và $KA + \alpha \geq h_a$ nên $a(KA + \alpha) \geq a\alpha + b\beta + c\gamma$ hay $aKA \geq b\beta + c\gamma$. Từ đây suy ra $\alpha KA \geq \alpha\beta \frac{b}{a} + \alpha\gamma \frac{c}{a}$. Tương tự ta còn có $\beta KB \geq \beta\alpha \frac{a}{b} + \beta\gamma \frac{c}{b}$ và $\gamma KC \geq \gamma\alpha \frac{a}{c} + \gamma\beta \frac{b}{c}$. Do vậy $\alpha KA + \beta KB + \gamma KC \geq \alpha\beta \frac{b}{a} + \alpha\gamma \frac{c}{a} + \beta\alpha \frac{a}{b} + \beta\gamma \frac{c}{b} + \gamma\alpha \frac{a}{c} + \gamma\beta \frac{b}{c} \geq 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$. $\square$

Ví dụ 3.1.6. Cho $\triangle ABC$ nhọn với trọng tâm G . Gọi M, N, P là chân các đường vuông góc hạ từ G xuống BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{9} < \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{4}.$$

Bài giải. Điểm G ở trong tam giác ABC . Do đó $OG < R$. Theo Định lý Euler về tam giác Pedal chúng ta có $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}|1 - \frac{OG^2}{R^2}| \leq \frac{1}{4}$. Lại có

$$OG = \frac{OH}{3} < \frac{R}{3}. \text{ Vậy } \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{OG^2}{R^2}\right) > \frac{1}{4} \left(1 - \frac{R^2}{9R^2}\right) = \frac{2}{9}. \quad \square$$

3.2. Trình bày lại kết quả bài báo của J.Liu

3.2.1. Một số định lý

Định lý 3.2.1. Giả sử P là một điểm tùy ý trong mặt phẳng chứa tam giác ABC . Ký hiệu chân các đường vuông góc hạ từ P xuống BC , CA , AB qua D, E, F , tương ứng. Khi đó ta có kết quả sau:

$$S_a R_1^3 + S_b R_2^3 + S_c R_3^3 \leqslant S R^3. \quad (3.1)$$

Ở đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và S_a, S_b, S_c, S_p lần lượt là diện tích các tam giác PBC, PCA, PAB và DEF ; R_1, R_2, R_3 là khoảng cách từ P đến 3 đỉnh A, B, C , tương ứng, của tam giác ABC . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Nếu P trùng với trọng tâm tam giác ABC thì $S_a = S_b = S_c = \frac{1}{3}S$, $R_1 = \frac{2}{3}m_a, R_2 = \frac{2}{3}m_b, R_3 = \frac{2}{3}m_c$ trong đó m_a, m_b, m_c là độ dài 3 đường trung tuyến của tam giác ABC .

Khi đó (3.1) trở thành: $m_a^3 + m_b^3 + m_c^3 \leqslant \frac{81}{8}R^3$.

Định lý 3.2.2. Giả sử P là một điểm tùy ý trong tam giác ABC . Ký hiệu R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC ; r_p là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác Pedal DEF của P đối với tam giác ABC . Thì $\frac{1}{2r_p} \geqslant \frac{1}{R} + \frac{1}{2r}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Định lý 3.2.3. Giả sử P là một điểm tùy ý trong tam giác ABC . Ký hiệu D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ P đến BC, CA, AB . r_p là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác DEF và $PA = R_1, PB = R_2, PC = R_3, PD = r_1, PE = r_2, PF = r_3$ thì: $R_1 + R_2 + R_3 \geqslant r_1 + r_2 + r_3 + 6r_p$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

3.2.2. Một vài bổ đề

Bổ đề 3.2.1. Cho $P(x, y, z)$ là điểm nằm trong tam giác ABC . Thì ta có: $(x + y + z)^2 PA^2 = (x + y + z)(yc^2 + zb^2) - (yza^2 + zxb^2 + xyc^2)$. Trong đó $a = BC, b = CA, c = AB$.

Bổ đề 3.2.2. Cho P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC thì ta có: $cr_2 + br_3 \leq aR_1$. Nếu $AO \cap BC = X$ (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P nằm trên đoạn AX .

Bổ đề 3.2.3. Cho P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC thì ta có:

$$R_1 \geq \frac{R_1^2}{2R} + \frac{2RS_p}{S}. \quad (3.2)$$

Đẳng thức xảy ra giống trong bổ đề (3.2.2).

Chứng minh. Ta có: $S_a = \frac{1}{2}ar_1; S_b = \frac{1}{2}br_2; S_c = \frac{1}{2}cr_3; S_a + S_b + S_c = S$. Theo (3.2.1) và (3.2.2) chúng ta có: $(S_a + S_b + S_c)^2 R_1^2 = (S_a + S_b + S_c)(S_b c^2 + S_c b^2) - (S_b S_c a^2 + S_c S_a b^2 + S_a S_b c^2)$

$$= \frac{1}{2}(br_2 c^2 + cr_3 b^2)S - \frac{1}{4}(bcr_2 r_3 a^2 + car_3 r_1 b^2 + abr_1 r_2 c^2)$$

$$= \frac{1}{2}bc(br_2 + cr_3)S - \frac{1}{4}abc(ar_2 r_3 + br_3 r_1 + cr_1 r_2)$$

$$\leq \frac{1}{2}abcR_1 S - \frac{1}{2}abcR(r_2 r_3 \sin A + r_3 r_1 \sin B + r_1 r_2 \sin C)$$

$$= \frac{1}{2}abcR_1 S - abcR(S_{\Delta PEF} + S_{\Delta PFD} + S_{\Delta PDE}) = \frac{1}{2}abc(R_1 S - 2RS_p).$$

Mặt khác ta có $S_a + S_b + S_c = S$ và $abc = 4SR$ nên $R_1 S - 2RS_p \geq \frac{SR_1^2}{2R}$ suy ra $R_1 \geq \frac{R_1^2}{2R} + \frac{2RS_p}{S}$. $\square$

Bổ đề 3.2.4. Cho P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC khi đó ta có: $S_a R_1 + S_b R_2 + S_c R_3 \geq 4RS_p$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Chứng minh. Từ điều kiện diện tích tứ giác nhỏ hơn hoặc bằng tích của hai đường chéo ta có: $S_b + S_c \leq \frac{1}{2}aR_1; S_c + S_a \leq \frac{1}{2}bR_2; S_a + S_b \leq \frac{1}{2}cR_3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $PA \perp BC; PB \perp CA; PC \perp AB$. Từ bất đẳng thức sau: $S_a + S_b + S_c = S$ suy ra $aR_1 + bR_2 + cR_3 \geq 4S$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là trực tâm tam giác ABC . Áp dụng bất đẳng thức trên cho tam giác DEF ta có $EF.r_1 + FD.r_2 + DE.r_3 \geq 4S_p$. Biết rằng $EF = \frac{aR_1}{2R}$; $ar_1 = 2S_a$; $br_2 = 2S_b$; $cr_3 = 2S_c$ suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . $\square$

Bổ đề 3.2.5. Cho P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC thì ta có: $aR_1^2 + bR_2^2 + cR_3^2 \geq abc$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Bất đẳng thức trên đã được M.K Lamkin tìm ra và đã khái quát thành $R_1^2 \sin A + R_2^2 \sin B + R_3^2 \sin C \geq 2S$ và tác giả đã chứng minh với bất kỳ đa giác $A_1, A_2, \dots, A_n$ và điểm P bất kỳ ta có: $\sum_{i=1}^n PA_i^2 \sin A_i \geq 2S$. Nếu có 2 điểm bất kỳ P, Q thì $\sum_{i=1}^n PA_i \cdot QA_i \sin A_i \geq 2S$.

Bổ đề 3.2.6. Cho P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}{r_1 + r_2 + r_3} \geq 2R. \quad (3.3)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều và P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Áp dụng Cosine Law, ta có $4S^2 R_1^2 = b^2 c^2 (r_2^2 + r_3^2) + bcr_2 r_3 (b^2 + c^2 - a^2)$. Sau đó ta sử dụng $abc = 4SR$ và $ar_1 + br_2 + cr_3 = 2S$. Ta có: $4S^2 (\sum R_1^2 - 2R \sum r_1) = \sum [b^2 c^2 (r_2^2 + r_3^2) + bcr_2 r_3 (b^2 + c^2 - a^2)] - abc \sum ar_1 \sum r_1$. Trong đó $\sum$ là tổng theo chu kỳ. Từ điều này ta được: $4S^2 (\sum R_1^2 - 2R \sum r_1) = \sum bcr_2 r_3 (b - c)^2 + \frac{1}{2} \sum a [c(r_3 + r_1) - b(r_1 + r_2)]^2$.

3.2.3. Chứng minh ba định lý trên

Chứng minh định lý 3.2.1

Chứng minh. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (3.2) với $S_a R_1$ ta được: $\frac{S_a R_1^3}{2R} + \frac{2RS_p S_a R_1}{S} \leq S_a R_1^2$. Tương tự ta có: $\frac{S_b R_2^3}{2R} + \frac{2RS_p S_b R_2}{S} \leq S_b R_2^2$

$$\begin{aligned} \frac{S_c R_3^3}{2R} + \frac{2RS_p S_c R_3}{S} &\leq S_c R_3^2. \text{ Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên ta} \\ \text{được } \frac{S_a R_1^3 + S_b R_2^3 + S_c R_3^3}{2R} + \frac{2RS_p}{S} (S_a R_1 + S_b R_2 + S_c R_3) \\ &\leq S_a R_1^2 + S_b R_2^2 + S_c R_3^2 = 4R^2 S_p. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mặt khác từ Bổ đề (3.2.4) ta có $S_a R_1 + S_b R_2 + S_c R_3 \geq 4RS_p$ nên (3.4) trở thành

$$\begin{aligned} 4R^2 S_p &\geq \frac{S_a R_1^3 + S_b R_2^3 + S_c R_3^3}{2R} + \frac{2RS_p}{S} (S_a R_1 + S_b R_2 + S_c R_3) \\ &\geq \frac{S_a R_1^3 + S_b R_2^3 + S_c R_3^3}{2R} + \frac{8R^2 S_p^2}{S} \\ &\Leftrightarrow S_a R_1^3 + S_b R_2^3 + S_c R_3^3 \leq \frac{8R^3 S_p^2 - 16R^3 S_p^2}{S} = 8R^3 \left(S_p - \frac{2S_p^2}{S} \right) \\ &= SR^3 - \frac{(S - 4S_p)^2 R^3}{S} \leq SR^3. \end{aligned}$$

Theo các điều kiện đẳng thức (3.2) thì đẳng thức trong (3.1) xảy ra khi và chỉ khi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $\square$

Chú ý 3.1: Bằng cách áp dụng bất đẳng thức của định lý 3.2.1 ta có bất đẳng thức tổng quát của bất đẳng thức (3.1) là $S_a R_1^k + S_b R_2^k + S_c R_3^k \leq SR^k$. Trong đó $0 < k \leq 3$. Ngoài ra chúng ta cũng có thể sử dụng bất đẳng thức Radon ta có thể chứng minh cho trường hợp $k < 0$ và dấu trong bất đẳng thức ngược lại.

Chứng minh định lý 3.2.2

Chứng minh. Theo bổ đề (3.2.3) ta có :

$$\begin{aligned} R_1 &\geq \frac{R_1^2}{2R} + \frac{2RS_p}{S} \Rightarrow aR_1 \geq \frac{1}{2R} aR_1^2 + \frac{2RS_p}{S} a. \\ R_2 &\geq \frac{R_2^2}{2R} + \frac{2RS_p}{S} \Rightarrow bR_2 \geq \frac{1}{2R} bR_2^2 + \frac{2RS_p}{S} b. \\ R_3 &\geq \frac{R_3^2}{2R} + \frac{2RS_p}{S} \Rightarrow cR_3 \geq \frac{1}{2R} cR_3^2 + \frac{2RS_p}{S} c. \end{aligned}$$

Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta được $aR_1 + bR_2 + cR_3 \geq \frac{1}{2R} (aR_1^2 + bR_2^2 + cR_3^2) + \frac{2RS_p}{S} (a + b + c)$. Mặt khác theo bổ đề (3.2.5)

ta có $aR_1^2 + bR_2^2 + cR_3^2 \geq abc$ nên $aR_1 + bR_2 + cR_3 \geq \frac{abc}{2R} + \frac{2RS_p}{S}(a + b + c)$. Hơn nữa $abc = 4SR$, $a + b + c = 2s$ và $S = sr$ suy ra $aR_1 + bR_2 + cR_3 \geq 2S + \frac{4R}{r}S_p$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Điều này có nghĩa là tam giác ABC đều và P là tâm đường tròn ngoại tiếp.

Từ đó ta có $\frac{aR_1 + bR_2 + cR_3}{8RS_p} \geq \frac{S}{4RS_p} + \frac{1}{2r}$ và $r_p = \frac{4RS_p}{aR_1 + bR_2 + cR_3}$.

Ta có $\frac{1}{r_p} \geq \frac{S}{4RS_p} + \frac{1}{2r}$ suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Chứng minh định lý 3.2.3

Chứng minh. Từ bổ đề (3.2.3) ta có $R_1 \geq \frac{R_1^2}{2R} + \frac{2RS_p}{S}$. Tương tự $R_2 \geq \frac{R_2^2}{2R} + \frac{2RS_p}{S}$; $R_3 \geq \frac{R_3^2}{2R} + \frac{2RS_p}{S}$. Cộng từng vế ta được: $R_1 + R_2 + R_3 \geq \frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}{2R} + \frac{6RS_p}{S}$. Từ bất đẳng thức $S_a + S_b + S_c = S \Rightarrow aR_1 + bR_2 + cR_3 \geq 4S$. suy ra $aR_1 + bR_2 + cR_3 \geq 4S$. Ta biết $\frac{S_p}{S} \geq \frac{r_p}{R}$. Vì vậy bất đẳng thức ở định lý (3.2.3) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $\square$

Chú ý 3.2: Từ bất đẳng thức ở định lý (3.2.3.) ta có: $\frac{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}{2R} + \frac{6RS_p}{S} = r_1 \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + r_2 \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + r_3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 \geq r_1 \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + r_2 \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + r_3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$.

Hơn nữa theo Erdos-Mordell ta có $R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$.

3.3. Trình bày bất đẳng thức của Klamkin

Định lý 3.3.1. Cho tam giác ABC tùy ý với độ dài các cạnh lần lượt là a, b, c và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng chứa tam giác. Với các số

thực x, y, z ta có:

$$(x + y + z) (xPA^2 + yPB^2 + zPC^2) \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2. \quad (3.5)$$

Chứng minh. Chúng ta có $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} \geq 0$ hay $(xPA^2 + yPB^2 + zPC^2) + (2xy\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2yz\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} + 2zx\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA}) \geq 0$. (*) Theo định lý hàm số Cosin ta có:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= 2PA.PB \cos(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}) = PA^2 + PB^2 - c^2, \\ 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PC} &= 2PB.PC \cos(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}) = PB^2 + PC^2 - a^2, \\ 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PA} &= 2PC.PA \cos(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}) = PC^2 + PA^2 - b^2. \end{aligned}$$

Thay các bất đẳng thức trên vào (*) ta được bất đẳng thức

$$(x + y + z) (xPA^2 + yPB^2 + zPC^2) \geq yza^2 + zxb^2 + xyc^2.$$

Đẳng thức trong (3.5) xảy ra khi và chỉ khi $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = 0$, tức là P là tâm tỉ cự của hệ điểm A, B, C. $\square$

Hệ quả 3.3.1. Trong tam giác ABC với G là trọng tâm, ta có các bất đẳng thức sau:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}. \quad (3.6)$$

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{4}{9} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2). \quad (3.7)$$

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2. \quad (3.8)$$

Chứng minh. Khi $x = y = z$, bất đẳng thức (3.5) trở thành

$$3(PA^2 + PB^2 + PC^2) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Suy ra bất đẳng thức (3.6). Tiếp theo ta biến đổi bất đẳng thức (3.6) như sau

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{9} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{9} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{9}.$$

Từ đây suy ra các bất đẳng thức (3.7) và (3.8). $\square$

Hệ quả 3.3.2. Trong tam giác ABC , ta có các bất đẳng thức:

$$\frac{PA^2}{a^2} + \frac{PB^2}{b^2} + \frac{PC^2}{c^2} \geq \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq 1. \quad (3.9)$$

$$\frac{PA^2}{b^2} + \frac{PB^2}{c^2} + \frac{PC^2}{a^2} \geq 1. \quad (3.10)$$

$$\frac{PA^2}{c^2} + \frac{PB^2}{a^2} + \frac{PC^2}{b^2} \geq 1. \quad (3.11)$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Klamkin với $x = \frac{1}{a^2}, y = \frac{1}{b^2}, z = \frac{1}{c^2}$ ta thu được bất đẳng thức (3.9). Nếu cho $x = \frac{1}{b^2}, y = \frac{1}{c^2}, z = \frac{1}{a^2}$ thì ta có bất đẳng thức (3.10), còn nếu cho $x = \frac{1}{c^2}, y = \frac{1}{a^2}, z = \frac{1}{b^2}$ ta sẽ có bất đẳng thức (3.11). $\square$

Hệ quả 3.3.3. Trong tam giác ABC , ta có các bất đẳng thức:

$$\frac{m_a^2}{a^2} + \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_c^2}{c^2} \geq \frac{9}{4}. \quad (3.12)$$

$$\frac{m_a m_b}{ab} + \frac{m_b m_c}{bc} + \frac{m_c m_a}{ca} \geq \frac{9}{4}. \quad (3.13)$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Klamkin với $P \equiv G, x = \frac{1}{a^2}, y = \frac{1}{b^2}, z = \frac{1}{c^2}$ ta thu được bất đẳng thức (3.12). Nếu cho $P \equiv G, x = \frac{a}{m_a}, y = \frac{b}{m_b}, z = \frac{c}{m_c}$, ta thu được bất đẳng thức (3.13). $\square$

Hệ quả 3.3.4. Trong tam giác ABC , ta có các bất đẳng thức sau

$$\frac{\cos^2 A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos^2 B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos^2 C}{\sin A \sin B} \geq 1. \quad (3.14)$$

$$4R^2 \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a + b + c}. \quad (3.15)$$

$$\frac{2R - r}{r} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}. \quad (3.16)$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Klamkin với $x = a, y = b, z = c$, $P \equiv H$ (H là trực tâm tam giác). Để ý rằng $HA = |2R \cos A|$, $HB = |2R \cos B|$, $HC = |2R \cos C|$ và sử dụng định lý hàm số sin ta có được bất đẳng thức (3.14). Sử dụng các biến đổi $HA^2 = 4R^2 \cos^2 A = 4R^2 (1 - \sin^2 A) = 4R^2 - a^2$, $HB = 4R^2 - b^2$, $HC = 4R^2 - c^2$, sau đó ta biến đổi sẽ được (3.15). Sử dụng công thức $abc = 4Rrp$ ta biến đổi bất đẳng thức (3.15) về bất đẳng thức (3.16). $\square$

Kết luận

Luận văn đã trình bày và đạt được một số kết quả sau:

1. Luận văn đã trình bày các bất đẳng thức cơ bản của tam thức bậc hai và định lý dấu tam thức bậc hai. Qua đây tác giả cũng đã sáng tác được một số bài toán dựa vào việc sử dụng định lý dấu tam thức bậc hai.
2. Trình bày một số bất đẳng thức nổi tiếng và chứng minh đầy đủ như: Bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Karamata.... Đặc biệt hơn là sự vận dụng của các định lý này vào chứng minh một số bất đẳng thức trong tam giác và có những bài toán khi giải bằng phương pháp khác thì gặp nhiều khó khăn.
3. Nhờ sử dụng phương trình đa thức bậc ba, qua các phép biến đổi đại số mà đã xây dựng được một số đồng nhất thức và bất đẳng thức trong tam giác. Bên cạnh đó còn phát hiện ra các kết quả khác nữa. Luận văn đã thể hiện rõ mối quan hệ khăng khít giữa đại số và hình học, giữa phương trình với các yếu tố trong tam giác như: góc, cạnh, diện tích, bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp, bàng tiếp, phân giác...
4. Luận văn đã khai thác được một số bài toán véc tơ trong mặt phẳng, các kết quả của J.Liu về tam giác Pedal và bất đẳng thức Klamkin.

Tài liệu tham khảo

- [1] Bộ giáo dục và đào tạo, *Tạp chí toán học và tuổi trẻ*, NXB Giáo dục.
- [2] Phan Đức Chính (2006), *Bất đẳng thức*, NXB Văn hoá Thông tin.
- [3] Vi Quốc Dũng (1995), *Những bài toán chọn lọc về các phương pháp chứng minh hình học phẳng*, NXB Đại học sư phạm Việt Bắc.
- [4] Phan Huy Khải (2001), *500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức (tập 1,2)*, NXB Hà Nội.
- [5] Nguyễn Văn Mậu (2006), *Bất đẳng thức*, NXB Giáo dục.
- [6] Tạ Duy Phượng (2004), *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*, NXB Giáo dục.
- [7] D.S Mitrinovic, J.E.Pecaric and V.Volenec (1989), *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht, Netherlands.
- [8] Jian Liu, "Some new inequalities for an interior point of a triangle ", *Journal of Mathematical Inequalities*, <http://dx.doi.org/10.7153/jmi-06-20>.