ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TẠ VĂN HOÀN

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

VÀ

MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: **PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP**
Mã số: **60.46.40**

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2011

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS ĐÀM VĂN NHỈ

Phản biện 1: PGS.TS LÊ THỊ THANH NHÀN
Phản biện 2: TS NGUYỄN MINH KHOA

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên
Ngày 22 tháng 11 năm 2011

Có thể tìm hiểu luận văn tại thư viện Đại học Thái Nguyên

Gía trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

và

Một số ứng dụng

Tạ Văn Hoàn
Khoa Toán ĐHKH Thái Nguyên
E-mail:tvhoanbs@gmail.com

Ngày 1 tháng 9 năm 2011

Mục lục

MỞ ĐẦU

Bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất hay tìm cực trị một biểu thức đã có từ lâu, nhưng luôn xuất hiện trong mọi lĩnh vực của toán học. Trong chương trình toán phổ thông, bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trải dài ở hầu hết các cấp học, có mặt ở tất cả các bộ môn Số học, Đại số, Giải tích, Hình học và Lượng giác. Đặc biệt, trong kỳ thi Đại học, Học sinh giỏi quốc gia và quốc tế thường có bài xác định cực trị một biểu thức nào đó. Bởi vậy, bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất là một trong số những bài toán được rất nhiều người thuộc nhiều lĩnh vực quan tâm đến.
Các bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất một biểu thức rất phong phú, đa dạng, đòi hỏi vận dụng nhiều kiến thức và vận dụng sao cho hợp lý, đôi khi rất độc đáo. Hơn nữa, bài toán xác định giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất còn liên quan đến sự đánh giá, tìm cái chặn hoặc xét xem biểu thức sẽ có tính chất gì khi nó đạt cực trị. Chính vì thế, phương pháp xác định giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất một biểu thức sẽ rất thiết thực đối với những ai muốn tìm hiểu sâu về toán sơ cấp.

Để đáp ứng nhu cầu học tập và giảng dạy môn toán ở bậc phổ thông, luận văn đã đặt vấn đề: Trình bày một số phương pháp tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất một biểu thức. Qua đó luận văn cũng đưa ra việc vận dụng các kết quả đạt được để giải quyết một số bài toán liên quan.

Nội dung của luận văn được chia ra làm ba chương.
Chương I dành để giới thiệu khái niệm và một vài phương pháp chứng minh bất đẳng thức với các ví dụ tương thích. ChươngII dành để trình bày về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Đây là chương trọng tâm giới thiệu về các phương pháp tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Cụ thể mục 2.1 tập trung giới thiệu một số bài toán chọn lọc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng phương pháp bất đẳng thức. Mục 2.2 giới thiệu điều kiện đạt cực trị của hàm đa thức hai biến bậc hai và các ví dụ liên quan. Mục 2.3 giới thiệu phương pháp đạo hàm tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đối với hàm một biến, hàm lồi, hàm nhiều biến và các sáng tác bài tập tương ứng. Mục 2.4 giới thiệu một số bài toán tìm cự trị bằng phương pháp tọa độ điểm, tọa độ véc tơ hoặc dựa vào tính đặc biệt của hình học. Mục 2.5 giới thiệu một số bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất qua vận dụng các hàm lượng giác và trình bày phương pháp sáng tác

một số bài toán cực trị trong tam giác qua đa thức bậc ba.
Chương III tập trung trình bày một vài ứng dụng các kết quả đạt được. Như chứng minh lại các bất đẳng thức cổ điển qua việc vận dụng khái niệm cực trị tiếp theo giới thiệu các ứng dụng bài toán cực trị trong việc giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi những thiếu xót nhất định và em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.
Luận văn đã được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.Ts. Đàm Văn Nhỉ. Em xin chân thành cám ơn thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn.

Em xin cảm ơn chân thành tới Trường Đại học Khoa Học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản.

Tiếp theo, em xin chân thành cảm ơn các thầy cô phản biện đã đọc và góp ý kiến cho luận văn để em hoàn thiện luận văn của mình.

Lời cuối xin chúc sức khỏe tất cả các thầy các cô, chúc thầy cô luôn hoàn thành tốt nhiệm vụ được giao.

Chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, Ngày 1 tháng 09 năm 2011.
Người thực hiện
Tạ Văn Hoàn

Chương 1

Phần chuẩn bị

1.1 Khái niệm và một vài tính chất của bất đẳng thức

Định nghĩa 1.1.1. Cho hai số thực a và b. a được gọi là *lớn hơn* b, ký hiệu $a > b$, nếu hiệu $a - b$ là một số dương; a được gọi là *lớn hơn hoặc bằng* b, ký hiệu $a \geqslant b$, nếu hiệu $a - b$ là một số không âm; a được gọi là *nhỏ hơn* b, ký hiệu $a < b$, nếu hiệu $a - b$ là một số âm; a được gọi là *nhỏ hơn hoặc bằng* b, ký hiệu $a \leqslant b$, nếu hiệu $a - b$ là một số không dương.
Giá trị tuyệt đối của a là $|a| = \begin{cases} a \text{ khi } a \geqslant 0 \\ -a \text{ khi } a < 0. \end{cases}$

Tính chất 1.1.2. *Với các số thực a, b, c và số tự nhiên n luôn có tính chất:*

$$
\begin{aligned}
a > b &\iff a - b > 0 \\
a > b &\iff a + c > b + c \\
a > b &\iff a^{2n+1} > a^{2n+1} \\
|a| > |b| &\iff a^{2n} > a^{2n} \\
a \geqslant b &\iff \left[\begin{smallmatrix} a=b \\ a>b. \end{smallmatrix}\right. \\
\text{Với } a > b,\ c > 0 &\iff ac > bc \\
c < 0 &\iff ac < bc. \\
a > b, b > c &\implies a > c. \\
|a| \leqslant \alpha &\iff \begin{cases} \alpha \geqslant 0 \\ -\alpha \leqslant a \leqslant \alpha. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Khi chứng minh bất đẳng thức, những đồng nhất thức thường được sử dụng:

Mệnh đề 1.1.3. *Với các số thực a, b, c, x, y, z và $d \neq 0$ có các đồng nhất thức sau đây:*

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *và* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

(ii) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$.

(iii) $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ *và* $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$.

(iv) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

(v) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ *và* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

(vi) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$.

(vii) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2$.

(viii) $|ab| = |a||b|, |\frac{a}{d}| = \frac{|a|}{|d|}$ *và* $|a| = |b|$ *khi và chỉ khi* $a = \pm b$.

Ba bổ đề dưới đây trình bày các bất đẳng thức thường được sử dụng sau này.

Bổ đề 1.1.4. *Với các số thực a, b, c, x, y, z và $d \neq 0$ có các kết quả sau:*

(i) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

(ii) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqslant (ax+by)^2$.

(iii) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqslant (ax+by+cz)^2$.

(iv) $||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Bài giải: (i) Bởi vì $(a-b)^2 \geqslant 0$ nên $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $a = b$.
(ii) Do bởi $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 \geqslant (ax+by)^2$ nên $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqslant (ax+by)^2$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.
(iii) Do $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqslant (ax+by+cz)^2$ nên $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqslant (ax+by+cz)^2$. Dấu = xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.
(iv) Ta luôn có $|a| \geqslant \pm a, |b| \geqslant \pm b$. Khi $a+b \geqslant 0$ thì $|a+b| = a+b \leqslant |a|+|b|$; còn khi $a+b < 0$ thì $|a+b| = -a-b \leqslant |a|+|b|$. Tóm lại $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Bởi

vì $|a| = |a+b+(-b)| \leqslant |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$ nên $|a| - |b| \leqslant |a+b|$. Tương tự $|b| = |a+b+(-a)| \leqslant |a+b| + |-a| = |a+b| + |a|$ nên $|b| - |a| \leqslant |a+b|$. Tóm lại $||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$. □

Bổ đề 1.1.5. *Với* $a, b, c, x, y, z, u, v, t \geqslant 0$ *luôn có các bất đẳng thức sau:*

(i) $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

(ii) $\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}$.

(iii) $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{uvt}$.

Bài giải: (i) Vì $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geqslant 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geqslant 4\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}$ nên $a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geqslant 4\sqrt[3]{abc}$ hay $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.
(ii) Nếu một trong ba số $a+x, b+y, c+z$ bằng 0, chẳng hạn $a + x = 0$, thì $a = x = 0$ và bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét $a+x, b+y, c+z \neq 0$:
Theo (i) ta có
$$\begin{cases} \dfrac{a}{a+x} + \dfrac{b}{b+y} + \dfrac{c}{c+z} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(a+x)(b+y)(c+z)}} \\ \dfrac{x}{a+x} + \dfrac{y}{b+y} + \dfrac{z}{c+z} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{(a+x)(b+y)(c+z)}} \end{cases}$$
và cộng vế theo vế được $3 \geqslant 3\dfrac{\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz}}{\sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)}}$. Từ đây suy ra (ii).
(iii) Vì $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{(a+x)(b+y)(c+z)} + \sqrt[3]{uvt}$ nên $\sqrt[3]{(a+x+u)(b+y+v)(c+z+t)} \geqslant \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{uvt}$. □

Bổ đề 1.1.6. *Cho ba số thực* $a, b, c \geqslant 0$. *Chứng minh các bất đẳng thức sau:*

(i) $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ab}$ *khi* $ab \geqslant 1$.

(ii) $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{1+c^2} \geqslant \dfrac{3}{1+abc}$ *khi* $a, b, c \geqslant 1$.

(iii) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \geqslant \dfrac{1}{1+ab}$.

(iv) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \leqslant \dfrac{2}{1+ab}$ *khi* $ab \leqslant 1$.

(v) $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} + \dfrac{1}{(1+c)^2} \leqslant \dfrac{3}{1+abc}$ *khi* $a, b, c \leqslant 1$.

(vi) $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}}$ *và* $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2}}$ *khi* $a,b,c \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài giải: (i) Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức $(ab-1)(a-b)^2 \geqslant 0$. Vậy $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ab}$ khi $ab \geqslant 1$.

(ii) Vì $a,b,c \geqslant 1$ nên từ $\begin{cases} \dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ab} \geqslant \dfrac{2}{1+abc} \\ \dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2} \geqslant \dfrac{2}{1+bc} \geqslant \dfrac{2}{1+abc} \\ \dfrac{1}{1+c^2}+\dfrac{1}{1+a^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ca} \geqslant \dfrac{2}{1+abc} \end{cases}$ ta suy ra $\dfrac{1}{1+a^2}+\dfrac{1}{1+b^2}+\dfrac{1}{1+c^2} \geqslant \dfrac{3}{1+abc}$.

(iii) Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức $(ab-1)^2+ab(a-b)^2 \geqslant 0$. Vậy $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2} \geqslant \dfrac{1}{1+ab}$.

(iv) là hiển nhiên qua quy đồng hai vế.

(v) Vì $a,b,c \leqslant 1$ nên từ $\begin{cases} \dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2} \leqslant \dfrac{2}{1+ab} \leqslant \dfrac{2}{1+abc} \\ \dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2} \leqslant \dfrac{2}{1+bc} \leqslant \dfrac{2}{1+abc} \\ \dfrac{1}{(1+c)^2}+\dfrac{1}{(1+a)^2} \leqslant \dfrac{2}{1+ca} \leqslant \dfrac{2}{1+abc} \end{cases}$ ta suy ra $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2} \leqslant \dfrac{3}{1+abc}$.

(vi) Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ với $x>0$ có $y' = -x(1+x^2)^{-3/2} < 0$. Vậy y đơn điệu giảm. Ta lại có $y" = 3x^2(1+x^2)^{-5/2} - (1+x^2)^{-3/2} = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{(1+x^2)^5}} \geqslant 0$ khi $x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và như vậy y là hàm lồi. Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}}$ và $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2}}$

khi $a, b, c \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\square$

Chú ý 1.1.7. *Khi* $ab > 1$ *sẽ không có (iv). Thật vậy, khi* $a = 2, b = 1$ *có* $ab = 2 > 1$ *và* $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{4} < \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{1+ab}$*; còn khi* $a = 9, b = 1$ *có* $ab = 9 > 1$ *và* $\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} = \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{2}{10} = \dfrac{2}{1+ab}$.

1.2 Một vài phương pháp chứng minh đơn giản

Bất đẳng thức cổ điển

Sử dụng Bất đẳng thức Cauchy hoặc Bất đẳng thức Bunhiakowski với 3 số hạng trong tổng hoặc tích, xem Bổ đề 1.1.4 và Bổ đề 1.1.5, để chứng minh bất đẳng thức mới.

Ví dụ 1.2.1. *Chứng minh rằng, với* $a, b, c \geqslant 0$ *ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Bài giải: Ta có $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$ và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}}$ theo Bất đẳng thức Cauchy. Vậy $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{9}{a+b+c}$. $\square$

Ví dụ 1.2.2. [Russia MO 2000] *Chứng minh rằng nếu* $a, b, c \geqslant 0$ *thỏa mãn* $a + b + c = 3$ *thì ta có bất đẳng thức* $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ca$.

Bài giải: Vì $ab + bc + ca = \dfrac{(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2} = \dfrac{9 - a^2 - b^2 - c^2}{2}$ nên chỉ cần chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geqslant 9$. Thật vậy, từ

$$a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geqslant 3a, b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b} \geqslant 3b, c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c} \geqslant 3c$$

suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geqslant 3(a + b + c) = 9$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Ví dụ 1.2.3. *Giả sử* $a, b, c > 0$. *Khi đó ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Bài giải: Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiakowski ta có ngay bất đẳng thức

$$(a+b+c)\Big(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\Big) \geqslant \Big(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\Big)^2.$$

Tương tự, ta lại có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ba+bc}+\frac{c^2}{ca+cb}$ $\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{3}{2}$. Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.4. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$T = \frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \geqslant 1.$$

Bài giải: Theo Bất đẳng thức Bunhiakowski ta có

$$[a^2(a+2b^2)+b^2(b+2c^2)+c^2(c+2a^2)]T \geqslant (a^2+b^2+c^2)^2.$$

Vậy $T \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$. Do đó chỉ cần chứng minh $(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ hay bất đẳng thức sau

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3+b^3+c^3.$$

Thật vậy, từ $3(a^3+b^3+c^3) = (a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geqslant (a^2+b^2+c^2)^2$ và $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a+b+c)^2 = 9$ suy ra $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2+b^2+c^2$. Do bởi $(a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2) \geqslant (a^3+b^3+c^3)^2$ nên $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3+b^3+c^3$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 1.2.5. *Giả sử $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d = abc+bcd+cda+dab$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$abc+bcd+cda+dab \geqslant \sqrt{\frac{a^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{d^2+1}{2}}.$$

Bài giải: Từ giả thiết suy ra $(a+b)(a+c)(a+d) = (a^2+1)(a+b+c+d)$. Vậy $\frac{a^2+1}{a+b} = \frac{(a+c)(a+d)}{a+b+c+d}$. Tương tự có các hệ thức khác và suy ra được

$$\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a} = \frac{(a+b+c+d)^2}{a+b+c+d} = a+b+c+d.$$

Lại có bất đẳng thức $2\big(a+b+c+d\big)\big(\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\big) \geqslant \big(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1}\big)^2$ theo Bất đẳng thức Bunhiakowski. Vậy $a+b+c+d \geqslant \sqrt{\frac{a^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{d^2+1}{2}}$. □

Ví dụ 1.2.6. *Chứng minh rằng, với $a, b, c, d > 0, abcd = 1$, ta luôn có*

$$(a+b+c+d)^6 \geqslant 2^8(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1).$$

Bài giải: Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2, d = t^2$ với $x, y, z, t > 0, xyxt = 1$. Ta sẽ chứng minh $(x^2+y^2+z^2+t^2)^6 \geqslant 2^8(x^4+1)(y^4+1)(z^4+1)(t^4+1)$. Vì $xyzt = 1$ nên bất đẳng thức này tương đương $(x^2+y^2+z^2+t^2)^6 \geqslant 2^8(x^3+yzt)(y^3+xzt)(z^3+xyt)(t^3+xyz)$. Theo Bất đẳng thức Cauchy có

$$4(x^3+yzt)(y^3+xzt) \leqslant (x^3+y^3+xzt+yzt)^2 = (x+y)^2(x^2-xy+y^2+zt)^2,$$

$$4(t^3+xyz)(z^3+xyt) \leqslant (z^3+t^3+xyz+xyt)^2 = (z+t)^2(z^2-zt+t^2+xy)^2.$$

Do bởi $4(x^2-xy+y^2+zt)(z^2-zt+t^2+xy) \leqslant (x^2+y^2+z^2+t^2)^2$ và $(x+y)(z+t) = xz+yt+xt+yz \leqslant x^2+y^2+z^2+t^2$ nên từ 4 bất đẳng thức này dễ dàng suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.7. [Mathlinks Contests] *Với $a, b, c > 0, abc = 1$, luôn có*

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geqslant 3.$$

Bài giải: Theo Bất đẳng thức Cauchy cho 3 số hạng trên, chỉ cần chứng minh

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant (a+1)(b+1)(c+1).$$

Thật vậy, với điều kiện $abc = 1$, bất đẳng thức trên tương đương với

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geqslant a+b+c+ab+bc+ca.$$

Theo Bất đẳng thức Cauchy với nhóm 5 số hạng ta có 3 bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} a^2b+a^2b+a^2c+a^2c+bc &\geqslant 5a \\ b^2a+b^2a+b^2c+b^2c+ac &\geqslant 5b \\ c^2b+c^2b+c^2a+c^2a+ab &\geqslant 5c \end{aligned}$$

và suy ra $2[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)] \geqslant 5(a+b+c)-(ab+bc+ca)$. Tương tự, theo Bất đẳng thức Cauchy với nhóm 5 số hạng có 3 bất đẳng thức

$$\begin{aligned} b^2a+b^2a+a^2b+a^2b+c &\geqslant 5ab \\ b^2c+b^2c+c^2b+c^2b+a &\geqslant 5bc \\ a^2c+a^2c+c^2a+c^2a+b &\geqslant 5ca \end{aligned}$$

và suy ra $2[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)] \geqslant 5(ab+bc+ca)-(a+b+c)$. Cộng hai bất đẳng thức cuối có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 1.2.8. *Chứng minh rằng, nếu $a, b, c \geqslant 0$ thì có bất đẳng thức sau đây:*

$$\frac{1}{b(b+a)}+\frac{1}{c(c+b)}+\frac{1}{a(a+c)} \geqslant \frac{9}{2(ab+bc+ca)}.$$

Bài giải: Chỉ cần chỉ ra $\dfrac{c(a+b)+ab}{b(b+a)}+\dfrac{a(b+c)+bc}{c(c+b)}+\dfrac{b(c+a)+ca}{a(a+c)} \geqslant \dfrac{9}{2}$ hay $\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a} \geqslant \dfrac{9}{2}$ và nó tương đương bất đẳng thức $\dfrac{c+b}{b}+\dfrac{b+a}{a}+\dfrac{a+c}{c}+\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a} \geqslant \dfrac{15}{2}$. Theo Bất đẳng thức Cauchy ta có $\dfrac{a+b}{4a}+\dfrac{a}{a+b} \geqslant 1, \dfrac{b+c}{4b}+\dfrac{b}{b+c} \geqslant 1, \dfrac{c+a}{4c}+\dfrac{c}{c+a} \geqslant 1$. Do đó $\dfrac{a+b}{4a}+\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b+c}{4b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c+a}{4c}+\dfrac{c}{c+a} \geqslant 3$. Mặt khác, còn có $\dfrac{3}{4}\Big(\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{b+c}{b}+\dfrac{c+a}{c}\Big)=\dfrac{3}{4}\Big(3+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\Big) \geqslant \dfrac{9}{2}$. Cộng hai bất đẳng thức trên lại ta có bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.9. *Chứng minh rằng, nếu $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$ thì ta có bất đẳng thức $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \leqslant 12$.*

Bài giải: Không làm mất tính chất tổng quát, có thể coi $a \geqslant b \geqslant c$. Khi đó $b^2-bc+c^2 \leqslant b^2, a^2-ac+c^2 \leqslant (a+c)^2, a^2-ab+b^2 \leqslant (a+c)^2-(a+c)b+b^2$. Ta sẽ chứng minh $M=b^2(a+c)^2((a+c)^2-(a+c)b+b^2) \leqslant 12$. Thật vậy, đặt $x=\dfrac{a-b+c}{2} \geqslant 0, s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3}{2}$. Khi đó $M=(s^2-x^2)^2(s^2+3x^2)$. Theo Bất đẳng thức Cauchy có $\dfrac{3}{2}(s^2-x^2)\dfrac{3}{2}(s^2-x^2)(s^2+3x^2) \leqslant \Big(\dfrac{4}{3}s^2\Big)^3 = 27$ và suy ra được $\dfrac{9}{4}M \leqslant 27$ hay $M \leqslant 12$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $c=0, s^2=9x^2$ hay $a=2, b=1, c=0$. □

Phương pháp tam thức bậc hai

Hàm đầu tiên được xét đến là một tam thức bậc hai $f(x) = ax^2+bx+c, a \neq 0$.

Mệnh đề 1.2.10. *Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của $f(x) = 0$. Khi đó có kết quả:*

$$\begin{cases} f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Mệnh đề 1.2.11. *Giả sử $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó có các kết quả:*

(i) *$f(x) > 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi* $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

(ii) *$f(x) \geqslant 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi* $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$

(iii) *$f(x) < 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi* $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

(iv) *$f(x) \leqslant 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi* $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leqslant 0. \end{cases}$

(v) *$f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và số thực $x_1 < \alpha < x_2$ khi và chỉ khi $af(\alpha) < 0$.*

Ví dụ 1.2.12. *Dãy (a_n) xác định bởi:* $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 6a_n + \sqrt{35a_n^2 + 2010}, n \geqslant 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng $a_{n+1} = 12a_n - a_{n-1}, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 2010}{a_{n-1}}$ với mọi $n \geqslant 1$.

Bài giải: Từ $\big(a_{n+1} - 6a_n\big)^2 = 35a_n^2 + 2010$ ta suy ra phương trình sau đây: $a_{n+1}^2 - 12a_na_{n+1} + a_n^2 - 2010 = 0$ với mọi $n \geqslant 0$. Thế $n+1$ qua n được $a_{n-1}^2 - 12a_na_{n-1} + a_n^2 - 2010 = 0$. Như vậy a_{n-1} và a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 12a_nx + a_n^2 - 2010 = 0$. Theo Định lý Viét về tổng và tích hai nghiệm suy ra được ngay $a_{n+1} = 12a_n - a_{n-1}, a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 2010}{a_{n-1}}$. $\square$

Ví dụ 1.2.13. *Cho các số thực* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ *với* $a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0$. *Khi đó* $\Big(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\Big)\Big(b_1^2 - b_2^2 - b_3^2\Big) \leqslant \Big(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3\Big)^2$.

Bài giải: Xét tam thức $f(x) = \Big(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\Big)x^2 - 2\Big(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3\Big)x + \Big(b_1^2 - b_2^2 - b_3^2\Big) = (a_1x - b_1)^2 - (a_2x - b_2)^2 - (a_3x - b_3)^2$. Từ giả thiết suy ra $a_1 \neq 0$ và $f\Big(\dfrac{b_1}{a_1}\Big) \leqslant 0$. Vậy $f(x) = 0$ có nghiệm và như thế $\Delta' \geqslant 0$. □

Ví dụ 1.2.14. *Chứng minh rằng với mọi số thực* x, y, z *và mọi tam giác* ABC *luôn có bất đẳng thức* $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$. *Từ đó chỉ ra* $\dfrac{1}{3}\cos A + \dfrac{1}{4}\cos B + \dfrac{1}{5}\cos C \leqslant \dfrac{5}{12}$.

Bài giải: Vì tam thức $f(x) = x^2 - 2x(y\cos C + z\cos B) + y^2 + z^2 - 2yz\cos A$ có $\Delta \leqslant 0$ nên $f(x) \geqslant 0$ với mọi số thực x, y, z và mọi tam giác ABC. Với $x = \dfrac{6}{\sqrt{6.8.10}}, y = \dfrac{8}{\sqrt{6.8.10}}$ và $z = \dfrac{10}{\sqrt{6.8.10}}$ ta có ngay bất đẳng thức $\dfrac{1}{3}\cos A + \dfrac{1}{4}\cos B + \dfrac{1}{5}\cos C \leqslant \dfrac{5}{12}$. □

Ví dụ 1.2.15. *Giả sử ba số* $a, b, c > 0$. *Hãy giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz = abc + a^2x + b^2y + c^2z \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

Bài giải: Hiển nhiên có $1 = \dfrac{abc}{4xyz} + \dfrac{a^2}{4yz} + \dfrac{b^2}{4zx} + \dfrac{c^2}{4xy}$. Đặt $\cos A = \dfrac{a}{2\sqrt{yz}}$, $\cos B = \dfrac{b}{2\sqrt{zx}}, \cos C = \dfrac{c}{2\sqrt{xy}}$. Từ hệ thức dưới đây suy ra A, B, C là ba góc một tam giác: $\begin{cases} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1 \\ 0 < \cos A, \cos B, \cos C < 1. \end{cases}$

Từ $a + b + c = x + y + z$ suy ra $x + y + z = 2\sqrt{yz}\cos A + 2\sqrt{zx}\cos B + 2\sqrt{xy}\cos C \leqslant x + y + z$ theo Ví dụ 1.2.14. Do vậy dấu = phải xảy ra hay

$$\frac{\sqrt{x}}{\sin A} = \frac{\sqrt{y}}{\sin B} = \frac{\sqrt{z}}{\sin C} \text{ hay } \frac{x}{\sin^2 A} = \frac{y}{\sin^2 B} = \frac{z}{\sin^2 C}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra $x = \dfrac{b+c}{2}, y = \dfrac{c+a}{2}, z = \dfrac{a+b}{2}$. □

Ví dụ 1.2.16. *Giả sử x_0 là nghiệm lớn của phương trình $x^2 + 2(a-3)x + a - 13 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của x_0 biết $a \geqslant 1$.*

Ví dụ 1.2.17. *Giả sử x_0 là nghiệm bé của phương trình $x^2+(a-3)x-2a-2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x_0 biết $a \leqslant -4$.*

Ví dụ 1.2.18. *Giả sử x_0 là nghiệm lớn của phương trình $x^2+2(a-b-3)x+a-b-13 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của x_0 biết $a \geqslant 2, b \leqslant 1$.*

Ví dụ 1.2.19. *Giải hệ phương trình sau:* $\begin{cases} y+2 = (3-x)^2 \\ (2z-y)(y+2) = 9+4y \\ x^2+z^2 = 4x \\ z \geqslant 0. \end{cases}$

Ví dụ 1.2.20. *Giải hệ phương trình sau:* $\begin{cases} y^3+3y^2 = x^2-3x+2 \\ (2-x)(3x-2z) = 3-z \\ y^2+z^2 = 6z \\ z \leqslant 3. \end{cases}$

Ví dụ 1.2.21. *Tìm tất cả các cặp $(x;y)$ biết*

$$4\left(3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\frac{x+y}{2} + 2\cos(x+y)\right) = 13 + 4\cos^2(x+y).$$

Ví dụ 1.2.22. *Tìm tất cả các cặp $(x;y)$ biết*

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2} + \frac{\sin^2(x-y)}{2}.$$

Ví dụ 1.2.23. *Tìm tất cả các giá trị của a để tồn tại duy nhất một cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn hệ phương trình sau:* $\begin{cases} 15x^2-11xy+2y^2 = -7 \\ 2a^2x+3ay < 0 \\ x < y. \end{cases}$

Phương pháp đánh giá

Để chứng minh $A \leqslant B$, ta chọn C và đánh giá $A \leqslant C$. Sau đó chỉ ra $C \leqslant B$.

Ví dụ 1.2.24. *Cho số nguyên $n > 1$. Chứng minh* $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$.

Bài giải: Với $n = 2, n = 3$, bất đẳng thức đúng là hiển nhiên. Với $n > 3$ có

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\Big) \\ &\leqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra $T < \dfrac{1}{4}$. □

Ví dụ 1.2.25. *Dãy (a_n) được cho như sau: $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 10, a_4 = 15, a_5 = 21, \ldots$. Xác định a_n theo n và chứng minh bất đẳng thức*

$$T = \Big(1 - \frac{1}{3}\Big)\Big(1 - \frac{1}{6}\Big)\Big(1 - \frac{1}{10}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{1}{a_n}\Big) < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}.$$

Bài giải: Từ $a_1 = 3 = a_0 + 2, a_2 = 6 = a_1 + 3, a_3 = 10 = a_2 + 4, a_4 = 15 = a_3 + 5, a_5 = 21 = a_4 + 6$ suy ra $a_n = a_{n-1} + n + 1$ và điều này dễ dàng có được qua qui nạp. Vậy $a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ và suy ra $1 - \dfrac{1}{a_k} = \dfrac{a_k - 1}{a_k} = \dfrac{(k+1)(k+2) - 2}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$. Như vậy $1 - \dfrac{1}{a_k} = \Big(1 - \dfrac{1}{k+1}\Big)\Big(1 + \dfrac{1}{k+2}\Big)$ và ta có được các phép biến đổi sau:

$$\begin{aligned} T &= \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{3}\Big)\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)\Big(1 + \frac{1}{4}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n+2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{4^2}\Big)\Big(1 - \frac{1}{5^2}\Big)\ldots\Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n+2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{3^2 - 1}{3^2}\Big)\Big(\frac{4^2 - 1}{4^2}\Big)\Big(\frac{5^2 - 1}{5^2}\Big)\ldots\Big(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{n+2}\Big) \\ &= \frac{2.3.4^2.5^2\ldots(n-1)^2n^2(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3^2.4^2.5^2\ldots(n-1)^2n^2(n+1)^2(n+2)} = \frac{n+3}{3(n+1)} \\ &< \frac{n+3}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Tóm lại $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ và nhận được bất đẳng thức $T < \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{n}$. □

Ví dụ 1.2.26. *Cho $0 < d \leqslant c \leqslant b \leqslant a$ và $a + b + c + d \leqslant 1$. Khi đó ta có*

$$1 \geqslant a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2.$$

Bài giải: Vì $1 \geqslant (a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \geqslant a^2+3b^2+5c^2+7d^2$ nên $1 \geqslant a^2+3b^2+5c^2+7d^2$. $\square$

Ví dụ 1.2.27. *Nếu $a, b, c \geqslant 0$ luôn thỏa mãn $a+b+c = abc$ thì có bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \geqslant 10$.*

Bài giải: Từ $abc = a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$, theo Bất đẳng thức Cauchy, ta suy ra $t = \sqrt[3]{(abc)^2} \geqslant 3$. Vì $T = a^2+b^2+c^2+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \geqslant 3\Big(\sqrt[3]{(abc)^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\Big)$, theo Bất đẳng thức Cauchy, nên $T \geqslant 3\big(t+\dfrac{1}{t}\big)$ với $t \geqslant 3$. Như vậy $T \geqslant 3\big(t+\dfrac{1}{t}\big) \geqslant 10$ tương đương với $(t-3)(3t-1) \geqslant 0$: đúng. $\square$

Ví dụ 1.2.28. *Giả sử các số thực a, b, c luôn thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 = 1$. Chứng minh rằng $T = abc + 2(1+a+b+c+ab+bc+ca) \geqslant 0$.*

Bài giải: Do $|a|, |b|, |c| \leqslant 1$, nên khi $abc \leqslant 0$ thì $T = 2(1+a)(1+b)(1+c) - abc \geqslant 0$; còn khi $abc > 0$ thì $T = (a+b+c+1)^2 + abc > 0$. $\square$

Ví dụ 1.2.29. *Cho ba số thực $a, b, c \geqslant 0$ và $a+b+c \leqslant 3$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:*

$$\frac{a+b}{2+a^2+b^2}+\frac{b+c}{2+b^2+c^2}+\frac{c+a}{2+c^2+a^2} \leqslant \frac{2}{2+a+b}+\frac{2}{2+b+c}+\frac{2}{2+c+a}.$$

Bài giải: Vì $2+a^2+b^2 = 1+a^2+1+b^2 \geqslant 2(a+b)$ nên ta được $\dfrac{a+b}{2+a^2+b^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Tương tự, $\dfrac{b+c}{2+b^2+c^2} \leqslant \dfrac{1}{2}, \dfrac{c+a}{2+c^2+a^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Như vậy có bất đẳng thức

$$\frac{a+b}{2+a^2+b^2}+\frac{b+c}{2+b^2+c^2}+\frac{c+a}{2+c^2+a^2} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Đặt $x = 1+a, y = 1+b, z = 1+c$. Khi đó $x, y, z > 0$ và $2x+2y+2z \leqslant 12$. Do đó $\begin{cases} 1+\dfrac{y+z}{x+y}+\dfrac{z+x}{x+y} \leqslant \dfrac{12}{x+y} \\ 1+\dfrac{z+x}{y+z}+\dfrac{x+y}{y+z} \leqslant \dfrac{12}{y+z} \\ 1+\dfrac{x+y}{z+x}+\dfrac{y+z}{z+x} \leqslant \dfrac{12}{z+x}. \end{cases}$ Cộng các bất đẳng thức, vế theo vế, được $12\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geqslant 3+\frac{y+z}{x+y}+\frac{x+y}{y+z}+\frac{z+x}{x+y}+\frac{x+y}{z+x}+\frac{x+z}{y+z}+\frac{y+z}{x+z} \geqslant 9$. Từ đây suy ra $\frac{2}{2+a+b}+\frac{2}{2+b+c}+\frac{2}{2+c+a}=\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x} \geqslant \frac{3}{2}$ và có được bất đẳng thức cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.30. *Chứng minh rằng với các số thực* $a, b, c \geqslant 1$ *có bất đẳng thức*

(i) $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geqslant \frac{3}{1+abc}$.

(ii) $\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1} \geqslant \frac{3}{2+abc}$.

Bài giải: (i) Do $a, b, c \geqslant 1$ nên $(a-1)(b-1)(c+1) \geqslant 0$ tương đương $1+abc \geqslant a+b-c+ac+bc-ab$. Tương tự, ta còn có:

$$1+abc \geqslant b+c-a+ac+ab-bc, 1+abc \geqslant c+a-b+bc+ab-ca.$$

Cộng ba bất đẳng thức, vế theo vế, ta được

$$3+3abc \geqslant ab+a+bc+b+ca+c.$$

Từ $\Big(3+3abc\Big)\Big(\frac{1}{ab+a}+\frac{1}{bc+b}+\frac{1}{ca+c}\Big) \geqslant$

$$\Big(ab+a+bc+b+ca+c\Big)\Big(\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\Big) \geqslant 9$$

hay $\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geqslant \frac{3}{1+abc}$.

(ii) Như trên có $\begin{cases} 2+abc \geqslant a+b-c+ac+bc-ab+1 \\ 2+abc \geqslant b+c-a+ac+ab-bc+1 \\ 2+abc \geqslant c+a-b+bc+ab-ca+1. \end{cases}$ Cộng ba bất đẳng thức, vế theo vế, ta được $6+3abc \geqslant ab+a+bc+b+ca+c+3$. Vì

$$\Big(6+3abc\Big)\Big(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\Big) \geqslant$$
$$\Big(ab+a+1+bc+b+1+ca+c+1\Big)$$
$$\Big(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}\Big) \geqslant 9$$

nên $\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1} \geqslant \frac{3}{2+abc}$. □

Phương pháp hình học

Mệnh đề 1.2.31. *Với các điểm A, B, C và các véctơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ta luôn có*

(i) $AB + BC \geqslant AC$.

(ii) $|\vec{x}||\vec{y}| \geqslant |\vec{x}\vec{y}| \geqslant \vec{x}\vec{y}$.

(ii) $|\vec{x}| + |\vec{y}| \geqslant |\vec{x} + \vec{y}|$.

(iii) $|\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{z}| \geqslant |\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}|$.

(iv) *Giả sử hai miền phẳng $(D_1), (D_2)$ với diện tích S_1 và S_2 tương ứng. Nếu (D_1) chứa trong (D_2) thì $S_1 \leqslant S_2$.*

Chứng minh: Hiển nhiên. □

Ví dụ 1.2.32. *Cho $|a + b + c| \geqslant 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:*

$$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geqslant \sqrt{3}.$$

Bài giải: Với $\vec{a} = \big(a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}b}{2}\big), \vec{b} = \big(b + \frac{c}{2}; \frac{\sqrt{3}c}{2}\big), \vec{c} = \big(c + \frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\big)$ ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \big(\frac{3}{2}(a + b + c); \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)\big)$. Do $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geqslant |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ suy ra $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geqslant \sqrt{3}$. □

Ví dụ 1.2.33. *Cho a, b, c thỏa mãn $0 \leqslant c \leqslant a, 0 \leqslant c \leqslant b$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leqslant \sqrt{ab}.$$

Bài giải: Bất đẳng thức hiển nhiên đúng khi $c = 0$. Khi $c > 0$, dựng hai tam giác vuông OAB và OAC cùng vuông góc ở O với cạnh chung $OC = \sqrt{c}$ và $OA = \sqrt{b - c}, OB = \sqrt{a - c}$ ở về hai phía khác nhau so với OC. Khi đó $BC = \sqrt{a}, AC = \sqrt{b}$. Từ $S_{OAC} + S_{OBC} = S_{ABC}$ suy ra $\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} = 2S_{ABC} \leqslant \sqrt{ab}$. □

Ví dụ 1.2.34. *Với $a, b, c, d \in [0; 1]$ ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} + d^{2006} \leqslant 2 + a^{2006}b + b^{2006}c + c^{2006}d + d^{2006}a.$$

Bài giải: Trên hình vuông $ABCD$ cạnh 1, lần lượt lấy các điểm M, N, P và Q trên các cạnh AB, BC, CD và DA sao cho $AQ = a, BM = b, CN = c$ và $DP = d$. Khi đó

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}a(1-b) + \frac{1}{2}b(1-c) + \frac{1}{2}c(1-d) + \frac{1}{2}d(1-a)\\&= S_{MAQ} + S_{NBM} + S_{PCN} + S_{QDP} \leqslant S_{ABCD} = 1.\end{aligned}$$

Vậy $a(1-b) + b(1-c) + c(1-d) + d(1-a) \leqslant 2$. Do $a, b, c, d \in [0; 1]$ nên $a(1-b)+b(1-c)+c(1-d)+d(1-a) \geqslant a^{2006}b+b^{2006}c+c^{2006}d+d^{2006}a$. Vậy$a^{2006} + b^{2006} + c^{2006} + d^{2006} \leqslant 2 + a^{2006}b + b^{2006}c + c^{2006}d + d^{2006}a$. □

Phương pháp lượng giác

Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức lượng giác để sử dụng những tính chất của các hàm số lượng giác. Tất nhiên, không phải bài toán nào cũng dùng phương pháp này. Sau đây là một số dấu hiệu và phép lượng giác hóa tương ứng thường được sử dụng:

Khi $x^2 + y^2 = r^2, r > 0$, thì ta đặt $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ \alpha \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

Khi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = r^2, a, b, r > 0$, thì ta đặt $\begin{cases} x = ra\cos\alpha \\ y = rb\sin\alpha \\ \alpha \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

Nếu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1, a, b > 0$, thì đặt $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ \alpha \in [0; 2\pi] \\ 0 \leqslant r \leqslant 1. \end{cases}$

Nếu $|x| \leqslant r$ thì đặt $x = r\cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$ hoặc $x = r\sin\alpha$ với $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Ví dụ 1.2.35. *Với hai số thực a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$ ta luôn có bất đẳng thức $2(a^3 - b^3) - 3(a - b) \leqslant 2$.*

Bài giải: Đặt $a = \sqrt{2}\cos u, b = \sqrt{2}\sin u$. Khi đó $2(a^3 - b^3) - 3(a - b) = 2\cos(3u - \frac{\pi}{4}) \leqslant 2$. □

Ví dụ 1.2.36. *Với hai số thực a và b thỏa mãn $a^2 + 4b^2 \leqslant 6a + 16b$ ta luôn có bất đẳng thức $3a - 8b \leqslant 18$.*

Bài giải: Từ $a^2 + 4b^2 \leqslant 6a + 16b$ suy ra $(a-3)^2 + 4(b-2)^2 \leqslant 5^2$. Đặt $a = 3 + r\cos u, b = 2 + \frac{1}{2}r\sin u$ với $r \in [0;5]$. Khi đó $3a - 8b = -7 + r(3\cos u - 4\sin u) = -7 + 5r\cos(u+\alpha) \leqslant -7 + 25 = 18$. □

Ví dụ 1.2.37. *Cho ba số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức*

$$T = \Big(\frac{1+ab}{a-b}\Big)^2 + \Big(\frac{1+bc}{b-c}\Big)^2 + \Big(\frac{1+ca}{c-a}\Big)^2 \geqslant 1.$$

Bài giải: Đặt $a = \tan\alpha, b = \tan\beta, c = \tan\gamma, \alpha, \beta, \gamma \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Khi đó

$$M = \cot^2(\alpha - \beta) + \cot^2(\beta - \gamma) + \cot^2(\gamma - \alpha).$$

Do $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0$ nên $\cot(\alpha-\beta)\cot(\beta-\gamma) + \cot(\beta - \gamma)\cot(\gamma-\alpha) + \cot(\gamma-\alpha)\cot(\alpha-\beta) = 1$. Từ đó suy ra $T \geqslant 1$. □

Ví dụ 1.2.38. *Chứng minh rằng* $\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{c-d}{c+d} + \frac{ad+bc}{ac-bd}\right| \geqslant \sqrt{3}$.

Bài giải: Đặt $M = \left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{c-d}{c+d} + \frac{ad+bc}{ac-bd}\right|$. Xét các trường hợp:

Khi $a = 0$ thì $M = \left|-1 + \frac{c-d}{c+d} - \frac{c}{d}\right| = \left|-\frac{c}{d} - 1 + \frac{\frac{c}{d}-1}{\frac{c}{d}+1}\right|$. Đặt $x = \frac{c}{d}+1$.

Ta có $M = \left|-x + \frac{x-2}{x}\right| = \frac{x^2+2-x}{|x|} \geqslant \frac{2\sqrt{2}|x| - |x|}{|x|} = 2\sqrt{2} - 1 > \sqrt{3}$.

Khi $c = 0$, hoàn toàn tương tự như trên, ta cũng có $M > \sqrt{3}$.

Khi $a, c \neq 0$, đặt $\dfrac{b}{a} = \tan\alpha$ và $\dfrac{d}{c} = \tan\beta$, ta có ngay

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}} = \frac{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\alpha} = \tan\Big(\frac{\pi}{4} - \alpha\Big)\\
y &= \frac{c-d}{c+d} = \frac{1-\dfrac{d}{c}}{1+\dfrac{d}{c}} = \frac{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan\beta}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\beta} = \tan\Big(\frac{\pi}{4} - \beta\Big)\\
z &= \frac{ad+bc}{ac+bd} = \frac{\dfrac{d}{c}+\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{b}{a}\dfrac{d}{c}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha+\beta).
\end{aligned}$$

Do bởi $\Big(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\Big) + \Big(\dfrac{\pi}{4} - \beta\Big) + (\alpha+\beta) = \dfrac{\pi}{2}$ nên $xy+yz+zx = 1$. Kết hợp với bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$ suy ra $M = |x+y+z| \geqslant \sqrt{3}$. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. □

Ví dụ 1.2.39. *Với ba số thực a, b, c ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$(ab+bc+ca-1)^2 \leqslant (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

Bài giải: Đặt $a = \tan u, b = \tan v, c = \tan w$ với $u, v, w \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$. Khi đó $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = \dfrac{1}{\cos^2 u}\dfrac{1}{\cos^2 v}\dfrac{1}{\cos^2 w}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\big(\sin u\sin v\cos w + \sin v\sin w\cos u + \sin w\sin u\cos v - \cos u\cos v\cos w\big)^2$$

$\leqslant 1$ hay $\big(\sin v\sin(u+w) - \cos v\cos(u+w)\big)^2 = \cos^2(u+v+w) \leqslant 1$. □

Ví dụ 1.2.40. *Với ba số thực a, b, c luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}} \geqslant \frac{|a-c|}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}}.$$

Bài giải: Đặt $a = \tan u, b = \tan v, c = \tan w$. Khi đó bất đẳng thức trở thành $|\sin(u-v)| + |\sin(v-w)| \geqslant |\sin(u-w)|$. Từ $|\sin(x+y)| = |\sin x\cos y + \sin y\cos x| \leqslant |\sin x| + |\sin y|$ dễ dàng suy ra $|\sin(u-w)| = |\sin(u-v+v-w)| \leqslant |\sin(u-v)| + |\sin(v-w)|$. □

Ví dụ 1.2.41. *Với dãy số thực* $a_0 = 1, a_1, \dots, a_n, a_{n+1} = n+1, n \geqslant 1$, *có*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{|a_i - a_{i+1}|}{\sqrt{a_i^2+1}\sqrt{a_{i+1}^2+1}} > \frac{2n}{3(n+2)}.$$

Bài giải: Với ba số a, b, c ta đặt $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$. Khi đó bất đẳng thức $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} + \dfrac{|b-c|}{\sqrt{b^2+1}\sqrt{c^2+1}} \geqslant \dfrac{|c-a|}{\sqrt{c^2+1}\sqrt{a^2+1}}$ tương đương $|\sin(x-y)| + |\sin(y-z)| \geqslant |\sin(x-z)|$. Từ $|\sin(u+v)| = |\sin u \cos v + \sin v \cos u| \leqslant |\sin u| + |\sin v|$ ta suy ra bất đẳng thức sau: $|\sin(x-z)| = |\sin(x-y+y-z)| \leqslant |\sin(x-y)| + |\sin(y-z)|$. Sử dụng kết quả này: $\dfrac{|a_1-a_2|}{\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_2^2+1}} + \dfrac{|a_2-a_3|}{\sqrt{a_2^2+1}\sqrt{a_3^2+1}} \geqslant \dfrac{|a_1-a_3|}{\sqrt{a_1^2+1}\sqrt{a_3^2+1}}$. Quy nạp theo n được $\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{|a_i - a_{i+1}|}{\sqrt{a_i^2+1}\sqrt{a_{i+1}^2+1}} \geqslant \dfrac{|a_0 - a_{n+1}|}{\sqrt{a_0^2+1}\sqrt{a_{n+1}^2+1}} \geqslant$ $\dfrac{n}{\sqrt{2n^2+4n+4}} > \dfrac{n}{\sqrt{2}(n+2)} > \dfrac{2n}{3(n+2)}$. □

Ví dụ 1.2.42. *Với số tự nhiên* n *ta xét dãy* $a_0 = 0, a_i > 0$ *với mọi* $i = 1, 2, \dots, n$ *thỏa mãn* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. *Chứng minh rằng*

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1+a_0+\cdots+a_{i-1}}\sqrt{a_i+\cdots+a_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

Bài giải: Theo Bất đẳng thức Cauchy ta có kết quả sau đây:

$$\sqrt{1+a_0+\cdots+a_{i-1}}\sqrt{a_i+\cdots+a_n} \leqslant \frac{1}{2}(1+a_0+\cdots+a_{i-1}+a_i+\cdots+a_n)$$

$= 1$. Vậy $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{\sqrt{1+a_0+\cdots+a_{i-1}}\sqrt{a_i+\cdots+a_n}} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{1} = 1$. Đặt $u_i = \arcsin(a_0+\cdots+a_{i-1}+a_i)$ với $i = 0, 1, \dots, n$. Khi đó có các hệ thức sau:

$$\begin{aligned}
a_i &= (a_0+\cdots+a_{i-1}+a_i) - (a_0+\cdots+a_{i-1}) = \sin u_i - \sin u_{i-1}\\
\cos u_{i-1} &= \sqrt{1-\sin^2 u_{i-1}} = \sqrt{1-(a_0+\cdots+a_{i-1})^2}\\
&= \sqrt{1+a_0+\cdots+a_{i-1}}\sqrt{a_i+\cdots+a_n}, i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Vậy $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{\sqrt{1 + a_0 + \cdots + a_{i-1}}\sqrt{a_i + \cdots + a_n}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\sin u_i - \sin u_{i-1}}{\cos u_{i-1}}$ hay $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2\cos\dfrac{u_i + u_{i-1}}{2}\sin\dfrac{u_i - u_{i-1}}{2}}{\cos u_{i-1}} < \sum\limits_{i=1}^{n} 2\sin\dfrac{u_i - u_{i-1}}{2}$. Vì $\sin x < x$ khi $x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$ nên $S < \sum\limits_{i=1}^{n}(u_i - u_{i-1}) = \dfrac{\pi}{2}$. □

Ví dụ 1.2.43. *Với số tự nhiên n ta xét dãy $a_0 = 0, a_i > 0$ với mọi số $i = 1, 2, \ldots, n$, và thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{1 + (a_0 + \cdots + a_{i-1})^2}\sqrt{1 + (a_0 + \cdots + a_i)^2}} < \frac{\pi}{4}.$$

Bài giải: Đặt $u_i = \arctan(a_0 + \cdots + a_{i-1} + a_i)$ với $i = 0, 1, \ldots, n$. Khi đó các góc $u_i \in [0; \dfrac{\pi}{4}]$ và có các hệ thức sau:

$$a_i = (a_0 + \cdots + a_{i-1} + a_i) - (a_0 + \cdots + a_{i-1}) = \tan u_i - \tan u_{i-1}$$

$\dfrac{1}{\cos u_i} = \sqrt{1 + \tan^2 u_i} = \sqrt{1 + (a_0 + \cdots + a_i)^2}, i = 1, \ldots, n$. Vậy $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{\sqrt{1 + (a_0 + \cdots + a_{i-1})^2}\sqrt{1 + (a_0 + \cdots + a_i)^2}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\tan u_i - \tan u_{i-1}}{\dfrac{1}{\cos u_{i-1}\cos u_i}}$

hay $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \sin(u_i - u_{i-1}) < \sum\limits_{i=1}^{n}(u_i - u_{i-1}) = u_n = \dfrac{\pi}{4}$. □

Ví dụ 1.2.44. *Với mọi tam giác ABC ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$\frac{1}{(1 + \sin A)^2} + \frac{1}{(1 + \sin B)^2} + \frac{1}{(1 + \sin C)^2} \leqslant \frac{3}{1 + \sin A \sin B \sin C}.$$

Bài giải: Suy ra từ Ví dụ 1.1.6. □

Ví dụ 1.2.45. *Cho ΔABC. Đặt $x = \tan\dfrac{A}{2}, y = \tan\dfrac{B}{2}, z = \tan\dfrac{C}{2}$. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau đây:*

(i) $\Big(1 + \dfrac{4x}{y+z}\Big)\Big(1 + \dfrac{4y}{z+x}\Big)\Big(1 + \dfrac{4z}{x+y}\Big) \geqslant \dfrac{27}{2}\Big(27x^2y^2z^2 + 1\Big).$

(ii) $\left(1+\dfrac{4x}{y+z}\right)\left(1+\dfrac{4y}{z+x}\right)\left(1+\dfrac{4z}{x+y}\right) \geqslant \left(1+2\sqrt[3]{\dfrac{2r}{R}}\right)^3.$

Bài giải: (i) Đặt $a = x+y+z, b = xy+yz+zx = 1, c = xyz$ và $T = \left(1+\dfrac{4x}{y+z}\right)\left(1+\dfrac{4y}{z+x}\right)\left(1+\dfrac{4z}{x+y}\right) = \dfrac{(a+3x)(a+3y)(a+3z)}{(a-x)(a-y)(a-z)}$. Vậy $T = \dfrac{a^3+3aa^2+9ba+27c}{a^3-aa^2+ba-c}$. Xét $T = \dfrac{4a^3+9a+27c}{a-c}$ với $a \geqslant \sqrt{3} = 9\dfrac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant 9c > 0$. Ta coi T là hàm của a và $a \geqslant 9c > 0$. Do $a > 1$ nên ta có

$$T'_a = 4\frac{2a^3-3a^2c-9c}{(a-c)^2} = 4\frac{a^2(2a-3c)-9c}{(a-c)^2} \geqslant 4\frac{15a^2c-9c}{(a-c)^2} > 0$$

và như vậy $T \geqslant T(9c) = \dfrac{4.3^6c^3+108c}{8c} = \dfrac{3^6}{2}c^2 + \dfrac{27}{2}$ và có bất đẳng thức.

(ii) Lại có $T = \left(1+\dfrac{4x}{y+z}\right)\left(1+\dfrac{4y}{z+x}\right)\left(1+\dfrac{4z}{x+y}\right) \geqslant \left(1+4\sqrt[3]{\dfrac{c}{a-c}}\right)^3 = \left(1+2\sqrt[3]{\dfrac{2r}{R}}\right)^3.$ □

Nếu coi T là hàm của $c > 0$ thì $T'_c > 0$ và có $T > T(0) = 9 + 4a^2 \geqslant 21$. Tuy bị chặn dưới, cũng dễ thấy T không có giá trị nhỏ nhất. Khi một trong các góc tam giác tiến tới π và hai góc còn lại tiến tới 0 thì $a \to +\infty$. Vậy T cũng không có giá trị lớn nhất. Chú ý rằng, ta còn có thể chứng minh $T > 25$, nhưng việc tìm ra số 25 hoàn toàn không tự nhiên.

Phương pháp hàm số

Ví dụ 1.2.46. *Chứng minh rằng nếu $x+y=1$ thì: $x^4+y^4 \geq \dfrac{1}{8}$.*

Bài giải: Từ $x+y=1$ suy ra $y = 1-x$ nên $x^4+y^4 = x^4+(1-x)^4$
Xét hàm số $f(x) = x^4+(1-x)^4$, đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 4(1-x)^3$, $f'(x) = 0$ khi $x = \dfrac{1}{2}$. Lập bảng biến thiên ta được $f(x) \geq \dfrac{1}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.
Vậy nếu $x+y=1$ thì $x^4+y^4 \geq \dfrac{1}{8}$. □

Ví dụ 1.2.47. *Với n là số nguyên dương lẻ không nhỏ hơn 3. Chứng minh rằng với mọi số thực $x \neq 0$, ta luôn có:*

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!})(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... - \frac{x^n}{n!}) < 1$$

.

Bài giải: Đặt $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, $g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ... - \frac{x^n}{n!}$, xét $F(x) = f(x).g(x)$. Ta đi chứng minh $F(x) < 1$ với mọi $x \neq 0$.
Ta có: $F'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$, với
$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x) - \frac{x^n}{n!}$.
$g'(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}) = -g(x) - \frac{x^n}{n!}$.
Suy ra $F'(x) = -\frac{x^n}{n!}[f(x) + g(x)] = -2\frac{x^n}{n!}\left[1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$. Như vậy ta có dấu $F(x)$ như sau: $\begin{cases} F'(x) > 0, x < 0 \\ F'(x) < 0, x > 0 \\ F'(x) = 0, x = 0 \end{cases}$
Lập bảng biến thiên ta được $F(x) < 1$, với mọi $x \neq 0$. □

Ví dụ 1.2.48. *Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ thì ta luôn có:*

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

Bài giải: Xét hàm số $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$, với $x > 0$ ta có:

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x; f''(x) = -x + \sin x; f''' = -1 + \cos x$$

Thấy $f''' = -1 + \cos x < 0$, với $x > 0$ suy ra $f''(x)$ nghịch biến với $x > 0$. Suy ra $f''(x) < f''(0)$ với $x > 0$ tương đương $f''(x) < 0$ với $x > 0$ tương đương $f'(x)$ nghịch biến với $x > 0$. Suy ra $f'(x) < f'(0)$ với $x > 0$ tương đương $f'(x) < 0$ với $x > 0$ tương đương $f(x)$ nghịch biến với $x > 0$. Suy ra $f(x) < f(0)$ với $x > 0$ tương đương $x - \frac{x^3}{6} - \sin x < 0$ với $x > 0$.

Vậy $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ với $x > 0$. □

Ví dụ 1.2.49. *Chứng minh rằng với $xy \neq 0$ ta luôn có*

$$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq -2$$

Bài giải: Đặt $f(x, y) = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
Ta viết lại hàm số dưới dạng
$f(x, y) = (\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2})^2 - 2 - (\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}) + (\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$
$= \left[(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2 - 2\right]^2 - 2 - \left[(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2 - 2\right] + (\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$.
Bằng cách đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, ta nhận thấy $|t| = \left|\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right| = \left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2$
Bài toán chuyển thành, chứng minh rằng: với $|t| \geq 2$, thì

$$F(t) = t^4 - 5t^2 + t - 4 \geq -2$$

.
Ta có thể viết lại $F(t) = (t^2 - 3)(t^2 - 2) + t - 2$
Do $|t| \geq 2$, nên $t^2 - 3 \geq 1, t^2 - 2 \geq 0$, nên ta có $F(t) \geq t^2 + t - 4$
Xét $g(t) = t^2 + t - 4$, có $g'(t) = 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$.
Lập bảng biến thiên ta được $g(t) \geq -2$ suy ra $F(t) \geq -2$ hay $f(x, y) \geq -2$.
Vậy với $xy \neq 0$ thì $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq -2$ □

Ví dụ 1.2.50. *Cho các số thực x,y thoả mãn điều kiện:* $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. *Chứng minh rằng:*

$$3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 \geq \frac{9}{16}$$

.

Bài giải: Đặt $f(x, y) = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$. Ta chứng minh $f(x, y) \geq \frac{9}{16}$. Thật vậy:
Kết hợp hai bất đẳng thức $(x + y)^3 + 4xy \geq 2; (x + y)^2 \geq 4xy$.
Suy ra: $(x + y)^3 + (x + y)^2 \geq 2 \Rightarrow x + y \geq 1$
$f(x, y) = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) -$

$2(x^2+y^2)+1 \geq \frac{3}{2}(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)+1.$

Suy ra: $f(x,y) \geq \frac{9}{4}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)+1.$

Đặt $t = x^2+y^2$, ta có $t \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2} \geq \frac{1}{2}.$

Khi đó $f(x,y) \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$. Xét $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ vơi $t \geq \frac{1}{2}$, ta có $f'(t) = \frac{9}{4}t - 2 > 0, \forall t \geq \frac{1}{2}$. Suy ra $f(t) \geq f(\frac{1}{2}) = \frac{9}{16}$

Vậy $f(x,y) \geq \frac{9}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$ □

1.3 Hàm lồi và Bất đẳng thức Jensen

Tiếp tục, ta sẽ xét hàm lồi và chứng minh Bất đẳng thức Jensen và hệ quả.

Định nghĩa 1.3.1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm lồi*, (xuống phía dưới), trong khoảng $(a;b)$ nếu với mọi $a < x_1, x_2 < b$ và mọi $\alpha \in (0;1)$ luôn có bất đẳng thức:

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \geqslant f\big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\big).$$

Định nghĩa 1.3.2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm lõm*, (lên phía trên), trong khoảng $(a;b)$ nếu với mọi $a < x_1, x_2 < b$ và mọi $\alpha \in (0;1)$ luôn có bất đẳng thức:

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \leqslant f\big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\big).$$

Mệnh đề 1.3.3. *Giả sử $y = f(x)$ xác định và liên tục trong $(a;b)$ với $a < b$. Hàm $y = f(x)$ là lồi trong khoảng $(a;b)$ khi và chỉ khi* $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ *hoặc* $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0$ *với mọi $x_1, x, x_2 \in (a;b)$ thỏa mãn $x_1 < x < x_2$.*

Chứng minh: Giả sử $y = f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(a;b)$. Với $x_1, x, x_2 \in (a;b), x_1 < x < x_2$, có biểu diễn

$$x = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2, f(x) \leqslant \frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

Như vậy có bất đẳng thức $(x_2-x)f(x_1)+(x_1-x_2)f(x)+(x-x_1)f(x_2) \geqslant 0$ hay biểu diễn dạng $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0$. Điều ngược lại là hiển nhiên. □

Mệnh đề 1.3.4. *Giả sử $y = f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm hữu hạn $f'(x)$. Khi đó $y = f(x)$ là hàm lồi nếu và chỉ nếu $f'(x)$ là hàm không giảm trong $(a;b)$.*

Chứng minh: Giả sử $y = f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(a;b)$. Với $x_1, x, x_2 \in (a;b), x_1 < x < x_2$, có hai biểu diễn sau đây: $x = \dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2$ và $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Khi đó $f'(x_1) = \lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \lim\limits_{x\to x_2} \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x_2} = f'(x_2)$. Như vậy $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. Ngược lại, giả thiết $f'(x)$ là hàm không giảm trong $(a;b)$. Với $x_1, x, x_2 \in (a;b), x_1 < x < x_2$ ta có $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\alpha)$ và $\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\beta)$, trong đó $x_1 < \alpha < x < \beta < x_2$. Vì $f'(\alpha) \leqslant f'(\beta)$ suy ra $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Vậy $y = f(x)$ là hàm lồi theo Mệnh đề 1.3.3. □

Từ Mệnh đề 1.3.4 suy ra ngay kết quả dưới đây:

Định lý 1.3.5. *Giả thiết $y = f(x)$ xác định và liên tục trong khoảng I. Giả sử $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ cũng liên tục và có $f"(x)$ hữu hạn trong khoảng I. Khi đó $y = f(x)$ là hàm lồi nếu và chỉ nếu $f"(x) \geqslant 0$ trong I.*

Định lý 1.3.6. [Jensen] *Nếu $y = f(x)$ là hàm lồi trong khoảng $(a;b)$ thì với mọi $a_1, \ldots, a_n \in (a;b)$ và mọi số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, n \geqslant 2$, ta luôn có bất đẳng thức dưới đây:*

$$\alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_n f(a_n) \geqslant f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n).$$

Chứng minh: Quy nạp theo n. Với $n = 2$ kết luận hiển nhiên đúng theo định nghĩa. Giả sử kết luận đã đúng cho $n \geqslant 2$. Xét $n+1$ điểm $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in$

$(a;b)$ và các số thực $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \geqslant 0, \sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$ và $\alpha_{n+1} > 0$. Đặt $b_n = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} a_n + \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} a_{n+1} \in (a;b)$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} & f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} a_{n+1}) \\ = \; & f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) b_n) \\ \geqslant \; & \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \cdots + \alpha_{n-1} f(a_{n-1}) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) f(b_n). \end{aligned}$$

Vì $f(b_n) = f(\dfrac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} a_n + \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} a_{n+1}) \geqslant \dfrac{\alpha_n f(a_n)}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} + \dfrac{\alpha_{n+1} f(a_{n+1})}{\alpha_n + \alpha_{n+1}}$ nên $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(a_k) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n+1} f(\alpha_k a_k)$. Như vậy định lý đã được chứng minh. □

Chú ý 1.3.7. *Đối với các hàm số lõm ta có dấu bất đẳng thức ngược lại.*

Ví dụ 1.3.8. *Chứng minh rằng, nếu $a, b, c \geqslant 1$ thì ta có*

$$T = \sqrt[3]{\frac{1}{(1+a)^8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{(1+b)^8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{(1+c)^8}} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{(1+\sqrt{abc})^8}}.$$

Bài giải: Vì $f(x) = \sqrt[3]{x^8}$ là hàm đơn điệu tăng, lồi và $a, b, c \geqslant 1$ nên có bất đẳng thức: $T \geqslant 3\sqrt[3]{\left[\dfrac{\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}}{3}\right]^8} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{(1+\sqrt{abc})^8}}$. □

Ví dụ 1.3.9. *Giả sử $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$T = \sqrt[3]{\frac{2}{a} + 9bc} + \sqrt[3]{\frac{2}{b} + 9ca} + \sqrt[3]{\frac{2}{c} + 9ab} \leqslant \sqrt[3]{\frac{6}{abc} + 27}.$$

Bài giải: Vì $f(x) = \sqrt[3]{x}, x > 0$, là hàm lõm nên theo Chú ý 1.3.7 có

$$\sqrt[3]{\frac{2}{a} + 9bc} + \sqrt[3]{\frac{2}{b} + 9ca} + \sqrt[3]{\frac{2}{c} + 9ab} \leqslant \frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} + 9(ab + bc + ca)}$$

hay $\sqrt[3]{\dfrac{2}{a} + 9bc} + \sqrt[3]{\dfrac{2}{b} + 9ca} + \sqrt[3]{\dfrac{2}{c} + 9ab} \leqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\Big(\dfrac{2}{abc} + 9\Big)(ab + bc + ca)}$.

Vì $1 = (a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$ nên $T \leqslant \sqrt[3]{\dfrac{6}{abc} + 27}$. □

Ví dụ 1.3.10. *Giả thiết số nguyên* $n \geqslant 2$. *Chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{3^k - 1}{3^{k-1}} \leqslant \Big(3 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{2n.3^n}\Big)^n.$$

Bài giải: Vì $f(x) = \ln x, x > 0$, là hàm lồi nên theo Định lý 1.3.6 có

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{3^k - 1}{3^{k-1}}\Big) \leqslant \ln\Big[\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k - 1}{3^{k-1}}\Big)\Big] = \ln\Big(3 - \frac{3}{2n} + \frac{3}{2.3^n}\Big).$$

Từ đây ta suy ra bất đẳng thức $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{3^k - 1}{3^{k-1}} \leqslant \Big(3 - \dfrac{3}{2n} + \dfrac{3}{2n.3^n}\Big)^n$. $\square$

Chương 2

Một số phương pháp tìm giá trị lớn nhất-nhỏ nhất

2.1 Phương pháp bất đẳng thức

Sử dụng các kết quả đã biết về bất đẳng thức để có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của biểu thức cần tìm.

Ví dụ 2.1.1. *Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = x + \sqrt{9 - x^2}$ *trên đoạn* $[-3; 3]$.

Bài giải: Vì $-3 \leqslant x \leqslant 3$ nên $T = x + \sqrt{9 - x^2} \geqslant x \geqslant -3$. Vậy $T_{nn} = -3$ khi $x = -3$. Theo Bất đẳng thức Bunhiakốpxki có $T = x + \sqrt{9 - x^2} \leqslant \sqrt{2(x^2 + 9 - x^2)} = 3\sqrt{2}$. Vậy $T_{ln} = 3\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. □

Ví dụ 2.1.2. *Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = 3x + \dfrac{1}{x^3}$ *với* $x > 0$.

Bài giải: Vì $T = 3x + \dfrac{1}{x^3} = x + x + x + \dfrac{1}{x^3} \geqslant 4$ theo Bất đẳng thức Cauchy nên $T_{nn} = 4$ khi $x = 1$. □

Ví dụ 2.1.3. *Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = a^4 + b^4 + c^4$ *khi* $ab + bc + ca = 1$.

Bài giải: Vì $3T = 3(a^4 + b^4 + c^4) \geqslant (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant (ab + bc + ca)^2 = 1$ theo Bất đẳng thức Bunhiakốpxki nên $T_{nn} = \dfrac{1}{3}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}},$. □

Ví dụ 2.1.4. *Giả sử* $x_1, \ldots, x_n > 0$ *và* $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$T = \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}.$$

Bài giải: Do bởi vai trò của $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bình đẳng nên có thể coi dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là dãy tăng. Khi đó $\dfrac{1}{\sqrt{1-x_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{1-x_2}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{1-x_n}}$ cũng là một dãy tăng. Theo Bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$nT = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_k}}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-x_k}}.$$

Từ $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1-x_k}}\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k}\Big) \geqslant n^2$ và $\sqrt{n\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x_k)} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k}$, theo Bất đẳng thức Bunhiakốpxki, suy ra $nT \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1-x_k}} \geqslant \dfrac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$ hay $T \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$. Dấu bằng xẩy ra khi $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$. Do đó $T_{nn} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$. □

Ví dụ 2.1.5. *Với* $a, b, c, d > 0$, *hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \sqrt[3]{\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^7} + \sqrt[3]{\Big(\frac{b}{b+c}\Big)^7} + \sqrt[3]{\Big(\frac{c}{c+d}\Big)^7} + \sqrt[3]{\Big(\frac{d}{d+a}\Big)^7}.$$

Bài giải: Đặt $x = \dfrac{b}{a}, y = \dfrac{c}{b}, z = \dfrac{d}{c}, t = \dfrac{a}{d}$. Khi đó $x, y, z, t > 0, xyzt = 1$, và $T = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^7}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+y)^7}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+z)^7}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+t)^7}}$. Theo Bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}
\frac{6}{\sqrt[3]{(1+x)^7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^7}} &\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{1}{\sqrt[3]{2^7(1+x)^{42}}}} = \frac{7}{\sqrt[3]{2}(1+x)^2}\\
\frac{6}{\sqrt[3]{(1+y)^7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^7}} &\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{1}{\sqrt[3]{2^7(1+y)^{42}}}} = \frac{7}{\sqrt[3]{2}(1+y)^2}\\
\frac{6}{\sqrt[3]{(1+z)^7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^7}} &\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{1}{\sqrt[3]{2^7(1+z)^{42}}}} = \frac{7}{\sqrt[3]{2}(1+z)^2}\\
\frac{6}{\sqrt[3]{(1+t)^7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^7}} &\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{1}{\sqrt[3]{2^7(1+t)^{42}}}} = \frac{7}{\sqrt[3]{2}(1+t)^2}
\end{aligned}$$

và như vậy $6T + \dfrac{4}{4\sqrt[3]{2}} \geqslant \dfrac{7}{\sqrt[3]{2}}\Big(\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+y)^2} + \dfrac{1}{(1+z)^2} + \dfrac{1}{(1+t)^2}\Big)$ hay $6T + \dfrac{4}{4\sqrt[3]{2}} \geqslant \dfrac{7}{\sqrt[3]{2}}\Big(\dfrac{1}{1+xy} + \dfrac{1}{1+zt}\Big) = \dfrac{7}{\sqrt[3]{2}}\Big(\dfrac{1}{1+xy} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xy}}\Big) = \dfrac{7}{\sqrt[3]{2}}.$

Tóm lại $T_{nn} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ khi $a = b = c = d > 0$. □

Ví dụ 2.1.6. *Tìm giá trị nhỏ nhất của* $T = \Big(\dfrac{a}{a+b}\Big)^3 + \Big(\dfrac{b}{b+c}\Big)^3 + \Big(\dfrac{c}{c+d}\Big)^3 + \Big(\dfrac{d}{d+a}\Big)^3$ *khi* $a, b, c, d > 0$.

Bài giải: Ta có $T = \dfrac{1}{(1+u)^3} + \dfrac{1}{(1+v)^3} + \dfrac{1}{(1+w)^3} + \dfrac{1}{(1+t)^3}$ với $u, v, w, t > 0$ và $uvwt = 1$. Vì $2\dfrac{1}{(1+x)^3} + \dfrac{1}{2^3} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{2^3(1+x)^6}} = \dfrac{3}{2(1+x)^2}, x > 0$, nên $2T + \dfrac{4}{2^3} \geqslant \dfrac{3}{2}\Big(\dfrac{1}{(1+u)^2} + \dfrac{1}{(1+v)^2} + \dfrac{1}{(1+w)^2} + \dfrac{1}{(1+t)^2}\Big) \geqslant \dfrac{3}{2}$ hay $T \geqslant \dfrac{1}{2}$. Do đó $T_{nn} = \dfrac{1}{2}$ khi $a = b = c = d > 0$. □

Ví dụ 2.1.7. *Giả sử các số thực* $x, y, z \geqslant 0, x + y + z = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \sqrt{x + \frac{(y-z)^2}{12}} + \sqrt{y + \frac{(z-x)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{12}}.$$

Bài giải: Trước hết sẽ chỉ ra, với $u = y - z, v = x - z, k = \dfrac{1}{12}$ luôn có

$$\sqrt{x + ku^2} + \sqrt{y + kv^2} \leqslant \sqrt{2(x + y) + k(u + v)^2}.$$

Bất đẳng thức này tương đương $2\sqrt{(x + ku^2)(y + kv^2)} \leqslant x + y + 2kuv$ hay

$$4(x + ku^2)(y + kv^2) \leqslant (x + y)^2 + 4k^2u^2v^2 + 4kuv(x + y).$$

Bất đẳng thức này tương đương $(x - y)^2 + 4kvx(u - v) + 4kuy(v - u) \geqslant 0$ hay $(x - y)^2 + 4k(u - v)(xv - yu) \geqslant 0$. Bất đẳng thức này tương đương $(x - y)^2(1 - 4k(x + y - z)) \geqslant 0$: đúng. Có thể coi $x \geqslant y \geqslant z$ và đánh giá

$$\begin{aligned} T &\leqslant \sqrt{2(x+y) + \frac{(x+y-2z)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{12}} \\ &= \sqrt{2(1-z) + \frac{(1-3z)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{12}} \\ &\leqslant \sqrt{2(1-z) + \frac{(1-3z)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(1-3z)^2}{12}} = \frac{5 - 3z + 1 + 3z}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

vì $0 \leqslant x - y \leqslant 1 - 3z$. Do vậy $T \leqslant \sqrt{3}$. Khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ thì dấu bằng xẩy ra và ta nhận được $T_{ln} = \sqrt{3}$. □

Ví dụ 2.1.8. *Giả sử các số thực $a, b, c > 0$ biến thiên thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2}.$$

Bài giải: Vì $\dfrac{3(a^3 + b^3)}{a^2 + ab + b^2} \geqslant a + b$, $\dfrac{3(b^3 + c^3)}{b^2 + bc + c^2} \geqslant b + c$ và $\dfrac{3(c^3 + a^3)}{c^2 + ca + a^2} \geqslant c + a$ nên $T \geqslant \dfrac{2(a + b + c)}{3} \geqslant 2\sqrt[3]{abc}$. Vậy $T_{nn} = 2$ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 2.1.9. *Giả sử các số thực $a, b, c \geqslant 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:* $\dfrac{1}{ab + a + 1} + \dfrac{1}{bc + b + 1} + \dfrac{1}{ca + c + 1} \geqslant \dfrac{3}{2 + abc}$ *và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $T = \dfrac{1}{ab + a + 1} + \dfrac{1}{bc + b + 1} + \dfrac{1}{ca + c + 1}$.

Bài giải: Vì $a, b, c \geqslant 1$ nên ta có $(a-1)(b-1)(c+1) \geqslant 0$. Như vậy $2+abc \geqslant a+b-c+ac+bc-ab+1$. Tương tự $2+abc \geqslant -a+b+c+ac+ab-bc+1$ và $2+abc \geqslant a-b+c+ab+bc-ac+1$. Cộng ba bất đẳng thức được $6+3abc \geqslant 3+a+b+c+ab+bc+ca$. Biến đổi

$$\begin{aligned}(6+3abc)T &= (6+3abc)(\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1})\\ &= [(ab+a+1)+(bc+b+1)+(ca+c+1)]\\ &\quad [\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}] \geqslant 9.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $T \geqslant \dfrac{3}{2+abc}$. Hiển nhiên $ab+a+1 \geqslant 3, bc+b+1 \geqslant 3$ và $ca+c+1 \geqslant 3$. Vậy $T \leqslant 1$. Khi đó $T_{ln} = 1$ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 2.1.10. *Giả sử các số thực $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh bất đẳng thức sau đây:* $\dfrac{1}{4+a-ab}+\dfrac{1}{4+b-bc}+\dfrac{1}{4+c-ca} \geqslant \dfrac{3}{3+abc}$ *và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = \dfrac{1}{4+a-ab}+\dfrac{1}{4+b-bc}+\dfrac{1}{4+c-ca}$.

Bài giải: Vì $a, b, c \geqslant 1$ nên ta có $(a-1)(b+1)(c+1) \geqslant 0$. Như vậy $3+abc \geqslant -a+b+c+bc-ab-ca+4$. Tương tự $3+abc \geqslant a-b+c+ca-ab-bc+4$ và $3+abc \geqslant a+b-c+ab-bc-ca+4$. Cộng ba bất đẳng thức được $9+3abc \geqslant 12+a+b+c-ab-bc-ca$. Biến đổi

$$\begin{aligned}(9+3abc)T &= (9+3abc)(\frac{1}{4+a-ab}+\frac{1}{4+b-bc}+\frac{1}{4+c-ca})\\ &= [(4+a-ab)+(4+b-bc)+(4+c-ca)]\\ &\quad [\frac{1}{4+a-ab}+\frac{1}{4+b-bc}+\frac{1}{4+c-ca}] \geqslant 9.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $T \geqslant \dfrac{3}{3+abc}$. Bởi vì $2 \leqslant 4+a(1-b) \leqslant 4$ nên $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{4+a-ab} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Từ đây suy ra $\dfrac{3}{4} \leqslant T \leqslant \dfrac{3}{2}$. Như vậy $T_{nn} = \dfrac{3}{4}$ khi $a = b = c = 1$ và $T_{ln} = \dfrac{3}{2}$ khi $a = b = c = 2$. □

Ví dụ 2.1.11. *Giả sử các số thực dương biến thiên a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = \Big(\dfrac{a}{b}+c\Big)\Big(\dfrac{b}{c}+a\Big)\Big(\dfrac{c}{a}+b\Big)$.

Bài giải: Dễ dàng chỉ ra, nếu $x, y, z, u, v, t \geqslant 0$ thì $(x+u)(y+v)(z+t) \geqslant \left(\sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{uvt}\right)^3$. Vậy $T \geqslant \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3 = 8$. Như vậy $T_{nn} = 8$ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Ví dụ 2.1.12. *Giả sử các số thực biến thiên a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a + b + c - abc$.*

Bài giải: Vì $2 = a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2bc$ nên $1 \geqslant bc$. Từ $(a + b + c - abc)^2 = [(b + c) + a(1 - bc)]^2 \leqslant [a^2 + (b + c)^2][1 + (1 - bc)^2]$ suy ra bất đẳng thức

$$T^2 \leqslant [2 + 2bc][2 - 2bc + b^2c^2] = 4 - 2b^2c^2(1 - bc) \leqslant 4.$$

Do vậy $T \leqslant 2$ và thấy ngay $T_{ln} = 2$ khi $b = c = 1, a = 0$, chẳng hạn. $\square$

Ví dụ 2.1.13. *Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức dưới đây:*

$$T = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}}.$$

Bài giải: Ta chọn số thực s sao cho $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geqslant \dfrac{a^s}{a^s + b^s + c^s}$ hay $\left(a^s + b^s + c^s\right)^2 \geqslant a^{2s-2}\left(a^2 + 8bc\right) = a^{2s} + 8a^{2s-2}bc$. Lại có

$$\begin{aligned}
&\left(a^s + b^s + c^s\right)^2 - a^{2s} = \left(b^s + c^s\right)\left(a^s + a^s + b^s + c^s\right) \\
\geqslant\ & 2\sqrt{b^sc^s}.4\sqrt[4]{a^{2s}b^sc^s} = 8a^{s/2}b^{3s/4}c^{3s/4}.
\end{aligned}$$

Chọn $s = \dfrac{4}{3}$ được $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geqslant \dfrac{a^{4/3}}{a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}}$. Tương tự chứng minh cho ba số hạng còn lại. Từ đó suy ra $T \geqslant 1$. Do như vậy $T_{nn} = 1$ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Ví dụ 2.1.14. *Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3 + 63cda}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3 + 63dab}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3 + 63abc}}.$$

Bài giải: Ta chọn số thực s sao cho $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} \geqslant \dfrac{a^s}{a^s + b^s + c^s + d^s}$ hay $\left(a^s + b^s + c^s + d^s\right)^3 \geqslant a^{3s-3}\left(a^3 + 63bcd\right) = a^{3s} + 63a^{3s-3}bcd$. Lại có

$$\begin{aligned}
&\left(a^s + b^s + c^s + d^s\right)^3 - a^{3s} \\
=\ & \left(b^s + c^s + d^s\right)\left[\left(a^s + b^s + c^s + d^s\right)^2 + a^s\left(a^s + b^s + c^s + d^s\right) + a^{2s}\right] \\
\geqslant\ & 3\sqrt[3]{b^sc^sd^s}.21\sqrt[21]{a^{15s}b^{9s}c^{9s}d^{9s}} = 63a^{5s/7}b^{16s/21}c^{16s/21}d^{16s/21}.
\end{aligned}$$

Chọn $s = \dfrac{21}{16}$ được $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} \geqslant \dfrac{a^{21/16}}{a^{21/16} + b^{21/16} + c^{21/16} + d^{21/16}}$. Tương tự chứng minh cho ba số hạng còn lại. Từ đó suy ra $T \geqslant 1$. Do như vậy $T_{nn} = 1$ khi $a = b = c = d = 1$. $\square$

2.2 Phương pháp đa thức hai biến bậc hai

Mệnh đề 2.2.1. *Xét đa thức $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g \in \mathbb{R}[x, y]$, trong đó a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. Khi đó với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ có biểu diễn $f(x, y) = au^2+2buv+cv^2+2(a\alpha+b\beta+d)u+2(b\alpha+c\beta+e)v+f(\alpha, \beta)$, ở đó $u = x - \alpha, v = y - \beta$.*

Chứng minh: Kiểm tra dễ dàng qua khai triển vế phải. $\square$

Bây giờ, xét hệ $\begin{cases} b\alpha + c\beta + e = 0 \\ a\alpha + b\beta + d = 0 \end{cases}$ với $D = b^2 - ac, D_1 = ae - bd$ và $D_2 = cd - be$. Khi $D \neq 0$, hệ phương trình chỉ có một nghiệm (α, β) và có thể biểu diễn $f(x, y) = au^2 + 2buv + cv^2 + f(\alpha, \beta)$. Xét các trường hợp:

(i) Trường hợp $ac - b^2 > 0$: Khi $a > 0$ thì $c > 0$ và $f(x, y) - f(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{a}\big[a^2u^2+2abuv+acv^2\big] = \dfrac{1}{a}\big[(au+bv)^2+(ac-b^2)v^2\big]$. Với $v = 0, u \to \infty$, thì $f(x, y) \to +\infty$ và $f(x, y)_{nn} = f(\alpha, \beta)$ khi $v = 0, au + bv = 0$. Khi $a < 0$ thì $c < 0$ và $f(x, y) - f(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{a}\big[a^2u^2 + 2abuv + acv^2\big] = \dfrac{1}{a}\big[(au+bv)^2+(ac-b^2)v^2\big]$. Với $v = 0$ và cho $u \to \infty$ thì $f(x, y) \to -\infty$ và $f(x, y)_{ln} = f(\alpha, \beta)$ khi $v = 0, au + bv = 0$.

(ii) Trường hợp $ac - b^2 < 0$: Khi $a, c > 0$ ta có $f(x, y) - f(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{a}\big[a^2u^2 + 2abuv + acv^2\big] = \dfrac{1}{a}\big[(au + bv)^2 + (ac - b^2)v^2\big]$. Với $au + bv = 0, v \to \infty$, thì $f(x, y) \to -\infty$ và với $v = 0, u \to \infty$, thì $f(x, y) \to +\infty$.

Khi $a < 0, c < 0$, và $f(x, y) - f(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{a}\big[a^2u^2 + 2abuv + acv^2\big] = \dfrac{1}{a}\big[(au + bv)^2 + (ac - b^2)v^2\big]$. Với $v = 0, u \to \infty$, thì $f(x, y) \to -\infty$ và với $au + bv = 0, v \to \infty$, thì $f(x, y) \to +\infty$.

Khi $ac < 0$ hoặc $ac = 0$ được xét tương tự và $f(x, y)$ không có giá trị lớn nhất cũng như nhỏ nhất.

(iii) Trường hợp $ac - b^2 = 0$: Khi đó a và c không thể đồng thời bằng 0. Không hạn chế có thể coi $a \neq 0$. Vậy $c = \dfrac{b^2}{a}$. Ta có

$$f(x, y) = a\big(x + \frac{b}{a}y\big)^2 + 2d(x + \frac{b}{a}y\big) + 2\frac{ae - bd}{a}y + g.$$

Nếu $D_1 = ae - bd = 0$ thì $f(x, y) = at^2 + 2dt + g$. Khi $a > 0$ thì $f(x, y)$ không có giá trị lớn nhất, nhưng có giá trị nhỏ nhất; Khi $a < 0$ thì $f(x, y)$ có giá trị lớn nhất, nhưng không có giá trị nhỏ nhất. Nếu $D_1 = ae - bd \neq 0$ thì $f(x, y) = at^2 + 2dt + g + 2\dfrac{ae - bd}{a}y$. Khi đó $f(x, y)$ không có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Tóm lại, chúng ta có kết quả dưới đây:

Mệnh đề 2.2.2. *Xét đa thức* $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g \in \mathbb{R}[x, y]$, *trong đó* a, b, c *thỏa mãn* $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. *Khi đó*

(i) *Nếu* $ac - b^2 > 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị lớn nhất, có giá trị nhỏ nhất* $f(x, y)_{nn} = f(\alpha, \beta)$ *khi* $a > 0$; *còn khi* $a < 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất* $f(x, y)_{ln} = f(\alpha, \beta)$.

(ii) *Nếu* $ac - b^2 < 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.*

(iii) *Nếu* $ac - b^2 = 0$: *Khi* $D_1 = ae - bd = 0$ *và* $a > 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị lớn nhất, nhưng có giá trị nhỏ nhất; Khi* $D_1 = ae - bd = 0$ *và* $a < 0$ *thì* $f(x, y)$ *có giá trị lớn nhất, nhưng không có giá trị nhỏ nhất. Khi* $D_1 = ae - bd \neq 0$ *thì* $f(x, y)$ *không có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*

Ví dụ 2.2.3. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của đa thức dưới đây:*

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 - 4x + 6y - 20.$$

Bài giải: Vì $ac - b^2 = -1 < 0$ nên theo Mệnh đề 2.2.2 đa thức $f(x, y)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. □

Ví dụ 2.2.4. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của đa thức dưới đây:*

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 14y^2 - 4x + 8y - 12.$$

Bài giải: Vì $ac - b^2 = 5 > 0$ nên theo Mệnh đề 2.2.2 đa thức $f(x, y)$ không có giá trị lớn nhất, nhưng có giá trị nhỏ nhất. hệ $\begin{cases} 3\alpha + 14\beta + 4 = 0 \\ \alpha + 3\beta - 2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\alpha = 8, \beta = -2$. Khi đó $f(x, y) - f(8, -2) = u^2 + 6uv + 14v^2 \geqslant 0$ theo Mệnh đề 2.2.1. Vậy $f(x, y)_{nn} = f(8, -2) = -36$. $\square$

Ví dụ 2.2.5. *Với* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 > 0$ *hãy xác định giá trị nhỏ nhất của đa thức* $f(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k x + b_k y + c_k)^2$.

Bài giải: Biểu diễn $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g \in \mathbb{R}[x, y]$, trong đó $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 > 0$, $b = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$, $c = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$, $d = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k c_k$, $e = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k c_k$ và $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 > 0$. Như trên, biểu diễn $f(x, y) = au^2 + 2buv + cv^2 + f(\alpha, \beta)$. Vì $ac - b^2 = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2) - (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \geqslant 0$ và $a > 0$ nên $f(x, y)_{nn} = f(\alpha, \beta)$, trong đó α, β là nghiệm của hệ $\begin{cases} b\alpha + c\beta + e = 0 \\ a\alpha + b\beta + d = 0. \end{cases}$ $\square$

Ví dụ 2.2.6. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức* $T = a + 2b + 1$ *biết hai số* a, b *biến thiên, nhưng luôn luôn thỏa mãn phương trình:*

$$a^2 + 4ab + 10b^2 + 8a + 16b + 15 = 0.$$

Bài giải: Hiển nhiên $(a+2b+3)(a+2b+5)+6b^2 = 0$. Vậy $(a+2b+3)(a+2b+5) \leqslant 0$ hay $\begin{cases} a + 2b + 3 \leqslant 0 \\ a + 2b + 5 \geqslant 0. \end{cases}$ Từ đó suy ra $-4 \leqslant a + 2b + 1 \leqslant -2$. Vậy $T_{nn} = -4$ khi $a = -5, b = 0$; $T_{ln} = -2$ khi $a = -3, b = 0$. $\square$

2.3 Phương pháp đạo hàm

2.3.1 Hàm một biến

Giả sử phải tìm cực trị của hàm $y = f(x)$ trên một miền D. Tính $f'(x)$ và dựa vào tính tăng-giảm của hàm số qua đạo hàm để có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số.

Ví dụ 2.3.1. *Cho ba số thực $a, b, c > 0$ biến thiên thỏa mãn $a + b + c \geqslant 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{a^3}{b+c} + \dfrac{b^3}{c+a} + \dfrac{c^3}{a+b}$.*

Bài giải: Vì $T = \dfrac{(b+c+c+a+a+b)T}{2(a+b+c)} \geqslant \dfrac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{2(a+b+c)}$ theo Bất đẳng thức Bunhiakốpxki nên $T \geqslant \dfrac{\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)^2}{2(a+b+c)}$. Xét hàm $y = \sqrt{x^3} - \dfrac{3}{2}x$ trên $(0; +\infty)$. Dễ dàng chỉ ra $\sqrt{x^3} - \dfrac{3}{2}x \geqslant y_{min} = y(1) = -\dfrac{1}{2}$. Như vậy $\sqrt{x^3} \geqslant \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$. Từ đây suy ra $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3} \geqslant \dfrac{3}{2}\big(a+b+c-1\big) > 0$. Ta nhận được $T \geqslant \dfrac{9}{8}\dfrac{(a+b+c-1)^2}{a+b+c}$. Xét hàm $z = \dfrac{(t-1)^2}{t}$ với $t = a+b+c \geqslant 3$. Vì $z' = \dfrac{t^2-1}{t^2} > 0$ nên z đồng biến. Vậy $T \geqslant \dfrac{9}{8}\dfrac{(3-1)^2}{3} = \dfrac{3}{2}$. Tóm lại $T_{nn} = \dfrac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 2.3.2. *Giả sử $a, b, c \in [\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{2}]$. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \dfrac{a}{a^3+1} + \dfrac{b}{b^3+1} + \dfrac{c}{c^3+1}$.*

Bài giải: Hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ có $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-2x^3}{(1+x^3)^2} \\ f"(x) = \dfrac{6x^2(x^3-2)}{(1+x^3)^3} \end{cases}$ là đơn điệu giảm và lõm trên $[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt[3]{2}]$. Như vậy $T \leqslant 3f\big(\dfrac{a+b+c}{3}\big)$. Vì $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ nên $T \leqslant \sqrt[3]{4}$. Vậy $T_{ln} = \sqrt[3]{4}$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. □

Ví dụ 2.3.3. *Giả sử dãy các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ với $a_1a_2\ldots a_n = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{\sqrt{a_1^n}}{1+a_2} + \dfrac{\sqrt{a_2^n}}{1+a_3} + \cdots + \dfrac{\sqrt{a_{n-1}^n}}{1+a_n} + \dfrac{\sqrt{a_n^n}}{1+a_1}$.*

Bài giải: Vì $T(1+a_2+1+a_3+\cdots+1+a_n+1+a_1) \geqslant \big(\sqrt{a_1^n}+\sqrt{a_2^n}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}^n}+\sqrt{a_n^n}\big)^2$ nên $T \geqslant \dfrac{\big(\sqrt{a_1^n}+\sqrt{a_2^n}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}^n}+\sqrt{a_n^n}\big)^2}{n+a_1+\cdots+a_n}$. Xét hàm số $y = \sqrt{x^n} - \dfrac{n}{2}x$ với $x > 0$. Dễ dàng chỉ ra $\sqrt{x^n} \geqslant \dfrac{n}{2}x + 1 - \dfrac{n}{2}$. Như vậy $\sqrt{a_1^n}+\sqrt{a_2^n}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}^n}+\sqrt{a_n^n} \geqslant \dfrac{n}{2}\big(a_1+a_2+\cdots+a_n\big) - \dfrac{n^2}{2} + n$. Vì $t = a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = n$ nên $T \geqslant \dfrac{\big(\frac{n}{2}(t-n)+n\big)^2}{n+t}$ hay $T \geqslant \dfrac{n^2}{4}\dfrac{\big(t-n+2\big)^2}{n+t}$ với $t \geqslant n$. Vì $y = \dfrac{\big(t-n+2\big)^2}{n+t}$ với $t \geqslant n$ là đồng biến nên $T \geqslant y_{nn} = y(n) = \dfrac{n}{2}$. Vậy $T_{nn} = \dfrac{n}{2}$ khi $a_1 = \cdots = a_n = 1$. $\square$

Ví dụ 2.3.4. *Giả sử dãy các số thực biến thiên $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ thỏa mãn hệ thức $a_1a_2\ldots a_n = 1$. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \frac{a_1^2}{1+a_2+a_3} + \frac{a_2^2}{1+a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{1+a_n+a_1} + \frac{a_n^2}{1+a_1+a_2}.$$

Bài giải: Vì $T(1+a_2+a_3+1+a_3+a_4+\cdots+1+a_{n-1}+a_n+1+a_n+a_1+1+a_1+a_2) \geqslant \big(a_1+a_2+\cdots+a_n\big)^2$ nên $T \geqslant \dfrac{\big(a_1+a_2+\cdots+a_n\big)^2}{n+2\big(a_1+a_2+\cdots+a_n\big)}$. Xét hàm số $y = \dfrac{x^2}{2x+n}$ với $x = a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n$ có $y' = \dfrac{2x^2+6x}{\big(2x+3\big)^2} > 0$. Dễ dàng chỉ ra $y \geqslant \dfrac{n}{3}$. Dấu bằng xẩy ra khi $a_1 = \cdots = a_n = 1$. Vậy $T_{nn} = \dfrac{n}{3}$ khi $a_1 = \cdots = a_n = 1$. $\square$

Ví dụ 2.3.5. *Giả sử ba số thực $a, b, c \in [0; 2]$ thỏa mãn $a+b+c = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 4(ab+bc+ca) - 3abc$.*

Bài giải: Vì vai trò a, b, c bình đẳng nên có thể coi $a \geqslant b \geqslant c$. Vậy $2 \geqslant a \geqslant \dfrac{4}{3}$. Biểu diễn $T = 4a(b+c) + bc(4-3a) \geqslant 4a(b+c) + \dfrac{(b+c)^2}{4}(4-3a)$ hay $T \geqslant 4a(4-a) + \dfrac{(4-a)^2}{4}(4-3a)$. Xét hàm số $y = \dfrac{(4-a)(3a^2+16)}{4}$ với

$2 \geqslant a \geqslant \dfrac{4}{3}$ và $y' = -\dfrac{(3a-4)^2}{4} \leqslant 0$. Dễ dàng chỉ ra $T \geqslant y \geqslant 14$. Dấu bằng xẩy ra khi $a = 2, b = c = 1$. Tóm lại $T_{nn} = 14$ khi $a = 2, b = c = 1$. □

2.3.2 Hàm lồi

Bằng cách chọn một hàm lồi (lõm) tương ứng để từ đó xác định được giá trị lớn nhất-nhỏ nhất của biểu thức.

Ví dụ 2.3.6. *Giả sử $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Xác định giá trị lớn nhất của biểu thức sau:*

$$T = \sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} - \frac{1}{abc}.$$

Bài giải: Vì $f(x) = \sqrt[3]{x}, x > 0$, là hàm lõm nên theo Chú ý 1.3.7 có

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leqslant \frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 6(a+b+c)}$$

hay $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{c} + 6a} \leqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc} + 6(a+b+c)}$. Vì $1 = (ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$ nên $T \leqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\dfrac{3}{abc}} - \dfrac{1}{abc}$. Vì $1 = ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}$ nên $1 \geqslant 27(abc)^2$. Từ đây suy ra $T \leqslant 0$. Vậy $T_{ln} = 0$ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

Ví dụ 2.3.7. *Sử dụng $f(x) = \sqrt[3]{x^{2012}}$ với $x \geqslant 0$ để tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \sqrt[3]{\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^{2012}} + \sqrt[3]{\left(b + \dfrac{1}{b}\right)^{2012}} + \sqrt[3]{\left(c + \dfrac{1}{c}\right)^{2012}} + \sqrt[3]{\left(d + \dfrac{1}{d}\right)^{2012}}$ khi $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 1$.*

Bài giải: Vì $f(x) = \sqrt[3]{x^{2012}}$ với $x \geqslant 0$ là hàm lồi và đơn điệu tăng nên có bất đẳng thức: $T \geqslant 4\sqrt[3]{\left[\dfrac{a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} + d + \frac{1}{d}}{4}\right]^{2012}} \geqslant 4\sqrt[3]{\left[\dfrac{17}{4}\right]^{2012}}$.
Vậy $T_{nn} = 4\sqrt[3]{\left[\dfrac{17}{4}\right]^{2012}}$ khi $a = b = c = d = \dfrac{1}{4}$. □

Ví dụ 2.3.8. *Sử dụng hàm lồi $f(x) = x^2$ với $x \geqslant 0$ để tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \Big(\dfrac{a}{a+b}\Big)^4 + \Big(\dfrac{b}{b+c}\Big)^4 + \Big(\dfrac{c}{c+d}\Big)^4 + \Big(\dfrac{d}{d+a}\Big)^4$ khi $a, b, c, d > 0$.*

Bài giải: Hiển nhiên $T = \Big(\dfrac{1}{1+u}\Big)^4 + \Big(\dfrac{1}{1+v}\Big)^4 + \Big(\dfrac{1}{1+w}\Big)^4 + \Big(\dfrac{1}{1+t}\Big)^4$ với $u, v, w, t > 0$ và $uvwt = 1$. Với $x_1 = \Big(\dfrac{1}{1+u}\Big)^2$, $x_2 = \Big(\dfrac{1}{1+v}\Big)^2$, $x_3 = \Big(\dfrac{1}{1+w}\Big)^2$ và $x_4 = \Big(\dfrac{1}{1+t}\Big)^2$ ta có

$$T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant 4\Big[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\Big]^2.$$

Như vậy có $T \geqslant 4\Bigg[\dfrac{\dfrac{1}{(1+u)^2} + \dfrac{1}{(1+v)^2} + \dfrac{1}{(1+w)^2} + \dfrac{1}{(1+t)^2}}{4}\Bigg]^2$ hay $T \geqslant 4\Bigg[\dfrac{\dfrac{1}{1+uv} + \dfrac{1}{1+wt}}{4}\Bigg]^2 = \dfrac{1}{4}$. Do đó $T_{nn} = \dfrac{1}{4}$ khi $a = b = c = d > 0$. □

Ví dụ 2.3.9. *Sử dụng hàm lồi $f(x) = \sqrt[3]{x^{2012}}$ với $x \geqslant 0$ để tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \sqrt[3]{\Big(\dfrac{a}{a+1}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{b}{b+1}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{c}{c+1}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{d}{d+1}\Big)^{2012}}$ khi $a, b, c, d \in (0; 1)$ và $abcd = \dfrac{1}{100}$.*

Bài giải: Biến đổi $T = \sqrt[3]{\Bigg(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}\Bigg)^{2012}} + \sqrt[3]{\Bigg(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{b}}\Bigg)^{2012}} + \sqrt[3]{\Bigg(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{c}}\Bigg)^{2012}} + \sqrt[3]{\Bigg(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{d}}\Bigg)^{2012}}$. Đặt $x_1 = \dfrac{1}{a}, x_2 = \dfrac{1}{b}, x_3 = \dfrac{1}{c}, x_4 = \dfrac{1}{d}$. Khi đó ta có $T = \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+x_1}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+x_2}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+x_3}\Big)^{2012}} + \sqrt[3]{\Big(\dfrac{1}{1+x_4}\Big)^{2012}}$ với $x_1x_2x_3x_4 = 100, x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 1$. Vì $f(x) = \sqrt[3]{x^{2012}}$ với $x \geqslant 0$ là hàm lồi và đơn điệu tăng nên có các bất đẳng thức sau đây:

$$\begin{aligned} T &\geqslant 4\sqrt[3]{\Big[\frac{\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}+\frac{1}{1+x_4}}{4}\Big]^{2012}} \\ &\geqslant 4\sqrt[3]{\Big[\frac{\frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}}+\frac{2}{1+\sqrt{x_3x_4}}}{4}\Big]^{2012}} \geqslant 4\sqrt[3]{\Big[\frac{1}{1+\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}}\Big]^{2012}}. \end{aligned}$$

Vậy $T_{nn} = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{10}\right)^{2012}}}$ khi $a = b = c = d = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. □

Ví dụ 2.3.10. *Giả sử dãy các số thực* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *thỏa mãn* $a_1 \leqslant a_2\sqrt{3}, a_2 \leqslant a_3\sqrt{3}, \ldots, a_{n-1} \leqslant a_n\sqrt{3}, a_n \leqslant a_1\sqrt{3}$. *Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T = \dfrac{a_1^3}{a_2^3 + a_1^2a_2} + \dfrac{a_2^3}{a_3^3 + a_2^2a_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}^3}{a_n^3 + a_{n-1}^2a_n} + \dfrac{a_n^3}{a_1^3 + a_n^2a_1}$.

Bài giải: $T = \dfrac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3}{1+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2} + \dfrac{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3}{1+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2} + \cdots + \dfrac{\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^3}{1+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2} + \dfrac{\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^3}{1+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^2}$.

Hàm số $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ với $x > 0$ có $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{3x^2+x^4}{(1+x^2)^2} \\ f"(x) = \dfrac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} \end{cases}$ là đơn điệu tăng và lồi trên $(0; \sqrt{3}]$. Như vậy $T \geqslant nf\Big(\dfrac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}}{n}\Big)$. Vì $\dfrac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}}{n} \geqslant 1$ nên $T \geqslant \dfrac{n}{2}$. Vậy $T_{ln} = \dfrac{n}{2}$ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n > 0$. □

Ví dụ 2.3.11. *Khi* $a, b, c \geqslant 1$ *biến thiên luôn thỏa mãn* $abc = 64$, *hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \sqrt[3]{\Big(\frac{1}{1+a}\Big)^8} + \sqrt[3]{\Big(\frac{1}{1+b}\Big)^8} + \sqrt[3]{\Big(\frac{1}{1+c}\Big)^8}.$$

Bài giải: Vì $f(x) = \sqrt[3]{x^8}$ là hàm đơn điệu tăng, lồi và $a, b, c \geqslant 1$ nên có : $T \geqslant 3\sqrt[3]{\left[\dfrac{\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c}}{3}\right]^8} \geqslant \dfrac{3}{\sqrt[3]{\left[1+\sqrt{abc}\right]^8}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{5^8}}$. Vậy $T_{nn} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{5^8}}$ khi $a = b = c = 4$. □

2.3.3 Hàm nhiều biến

Xét biểu thức như một hàm nhiều biến để có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của nó.

Ví dụ 2.3.12. *Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm $z = x^3 + y^3 - 3xy$ trong miền $D : 0 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 2$.*

Bài giải: Trước tiên, tìm điểm dừng: $z'_x = 3x^2 - 3y = 0, z'_y = 3y^2 - 3x = 0$. Giải ra được hai điểm dừng $O(0;0)$ và $M(1;1)$. Khi đó $z_O = 0, z_M = -1$. Tiếp theo, xét hàm trên biên miền D :

(i) Khi $x = 0$ có $z = y^3$ với $-1 \leqslant y \leqslant 2$. Khi đó $z_{ln,x=0} = 8$ tại $(0;2)$, $z_{nn,x=0} = -1$ tại $(0;-1)$.

(ii) Khi $x = 2$ có $z = y^3 - 6y + 8$ với $-1 \leqslant y \leqslant 2$. Khi đó $z_{ln,x=2} = 13$ tại $(2;-1)$, $z_{nn,x=2} = 8 - 4\sqrt{2}$ tại $(2;\sqrt{2})$.

(iii) Khi $y = -1$ có $z = x^3 + 3x - 1$ với $0 \leqslant x \leqslant 2$. Khi đó $z_{ln,y=-1} = 13$ tại $(2;-1)$, $z_{nn,y=-1} = -1$ tại $(0;-1)$.

(iv) Khi $y = 2$ có $z = x^3 - 6x + 8$ với $0 \leqslant x \leqslant 2$. Khi đó $z_{ln,y=2} = 8$ tại $(0;2)$, $z_{nn,y=2} = 8 - 4\sqrt{2}$ tại $(\sqrt{2};2)$.

Vậy $z_{nn} = -1$ tại $(1;1)$ $z_{ln} = 13$ tại $(2;-1)$. □

Ví dụ 2.3.13. *Trong mặt phẳng (Oxy) cho ba điểm $A_1(a_1, b_1), A_2(a_2, b_2)$ và $A_3(a_3, b_3)$ không thẳng hàng. Với điểm $M(x, y)$ hãy xác định giá trị nhỏ nhất của tổng $T(M) = MA_1 + MA_2 + MA_3$.*

Bài giải: Hiển nhiên $T(x,y) = \sum_{k=1}^{3} \sqrt{(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2}$. Đạo hàm riêng ta có
$$\begin{cases} T'_x(x.y) = \sum_{k=1}^{3} \dfrac{x-a_k}{\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}} = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 \\ T'_y(x.y) = \sum_{k=1}^{3} \dfrac{y-b_k}{\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}} = \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 \end{cases}$$
Với α_k là góc giữa đường thẳng MA_k tạo với trục Ox. Chú ý rằng, tại A_k đạo hàm riêng có thể không tồn tại. Xác định điểm dừng: Giải hệ
$$\begin{cases} \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0 \\ \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 = 0. \end{cases}$$
Nhân phương trình đầu với $\sin\alpha_2$ và phương trình thứ hai với $\cos\alpha_2$, sau đó đem trừ vế theo vế, được $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin(\alpha_2 - \alpha_3)$ hay $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3$. Tương tự cũng có $\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_1$. Từ đây suy ra góc giữa 2 trong số ba đường thẳng MA_1, MA_2, MA_3 sẽ phải bằng $\frac{2\pi}{3}$ và M là điểm giao giữa cung chứa góc $\frac{2\pi}{3}$ dựng trên cạnh $\Delta A_1A_2A_3$.

Nếu $\Delta A_1A_2A_3$ không có góc $\frac{2\pi}{3}$ thì các cung chứa góc trên cắt nhau tại điểm M ở trong tam giác nhìn ba cạnh tam giác dưới cùng một góc $\frac{2\pi}{3}$. Ta lại có
$$\begin{aligned} A_1A_2^2 &= A_1M^2 + A_2M^2 - 2MA_1.MA_2\cos\angle A_1MA_2 \\ &= A_1M^2 + A_2M^2 + MA_1.MA_2 > \Big(MA_2 + \frac{1}{2}MA_1\Big)^2. \end{aligned}$$
Vậy $A_1A_2 > MA_2 + \frac{1}{2}MA_1$. Tương tự $A_1A_3 > MA_3 + \frac{1}{2}MA_1$. Từ đây suy ra $A_1A_2 + A_1A_3 > MA_1 + MA_2 + MA_3$ hay $T(A_1) > T(M)$. Tương tự $T(A_2), T(A_3) > T(M)$. Như vậy $T(M)$ là nhỏ nhất.

Nếu $\Delta A_1A_2A_3$ có góc $\frac{2\pi}{3}$ thì không có điểm dừng M. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $T(M) = \min\{T(A_1), T(A_2), T(A_3)\}$. □

2.4 Phương pháp hình học

Ví dụ 2.4.1. *Giả sử các số thực* a, b, c, d, x, y, z, t *thỏa mãn hệ* $a+b+c+d = 2, ax + by + cz + dt = 6.$ *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = \sqrt{16a^2 + a^2x^2} + \sqrt{16b^2 + b^2y^2} + \sqrt{16c^2 + c^2z^2} + \sqrt{16d^2 + d^2t^2}.$$

Bài giải: Xét $\vec{u} = (4a; ax), \vec{v} = (4b; by), \vec{w} = (4c; cz), \vec{\delta} = (4d; dt)$. Khi đó $T = |\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}+\vec{\delta}| = \sqrt{16(a + b + c + d)^2 + (ax + by + cz + dt)^2} = 10.$ Do vậy $T_{nn} = 10$ khi $a = b = c = d = \dfrac{1}{2}, x = y = z = t = 3.$ □

Ví dụ 2.4.2. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số dưới đây:*

$$y = \sqrt{5x^2 + 20}+\sqrt{5x^2 - 32x + 64}+\sqrt{5x^2 - 40x + 100}+\sqrt{5x^2 - 8x + 16}.$$

Bài giải: Xét $\vec{u} = (5x; 10), \vec{v} = (16 - 5x; 8), \vec{w} = (20 - 5x; 10), \vec{z} = (5x - 4; 8)$. Khi đó $\sqrt{5}y = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| + |\vec{z}| \geqslant |\vec{u} + \vec{w}| + |\vec{v} + \vec{z}|$ và như thế $\sqrt{5}y \geqslant 20\sqrt{2} + 20$. Do vậy $y_{nn} = 4\sqrt{10} + 4\sqrt{5}$ với $x = 2$. □

Ví dụ 2.4.3. *Giả sử các số thực* $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ *thỏa mãn hệ sau:*

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + y_1^2 - 2y_1 + 4 = 0 \\ x_2^2 - 4x_2 + y_2^2 - 2y_2 + 4 = 0 \\ x_3^2 - 4x_3 + y_3^2 - 2y_3 + 4 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x_1(y_2 - y_3) + x_2(_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$.

Bài giải: Hiển nhiên ba điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ nằm trên đường tròn $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ và $|S| = 2S_{ABC} \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Vậy $S_{ln} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ khi tam giác ABC đều và định hướng ngược chiều quay kim đồng hồ. □

Ví dụ 2.4.4. *Giả sử các số thực* $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ *thỏa mãn hệ sau đây:*

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + y_1^2 - 4y_1 - 1 = 0 \\ x_2^2 - 4x_2 + y_2^2 - 4y_2 - 1 = 0 \\ x_3^2 - 4x_3 + y_3^2 - 4y_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}+$

$$\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

Bài giải: Hiển nhiên ba điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ nằm trên đường tròn $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ và $T = AB + BC + CA$ nên $T \leqslant \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. Vậy $T_{ln} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ khi tam giác ABC đều. □

Ví dụ 2.4.5. *Với các số thực a và b hãy tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$T = \sqrt{a^2+4} + \sqrt{a - 2ab + b^2 + 1} + \sqrt{b^2 - 6b + 10}.$$

Bài giải: Trong mặt phẳng (Oxy) xét $O(0;0), A(a;2), B(b;3)$ và $C(3;4)$. Từ $OA + AB + BC \geqslant OC = 5$ theo Mệnh đề 1.2.31 suy ra $T \geqslant 5$. Dê dàng suy ra $T_{nn} = 5$. □

Ví dụ 2.4.6. *Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leqslant 3$ hãy tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$T = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}}.$$

Bài giải: Với ba véctơ $\vec{x} = (a; \frac{1}{a}), \vec{y} = (b; \frac{1}{b}), \vec{z} = (c; \frac{1}{c})$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geqslant \sqrt{\big(a+b+c\big)^2 + \big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\big)^2}.$$

Do bởi $\big(a+b+c\big)\big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\big) \geqslant 9$ nên $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geqslant \dfrac{9}{a+b+c}$. Từ đây suy ra $T \geqslant \sqrt{\big(a+b+c\big)^2 + \dfrac{81}{\big(a+b+c\big)^2}} = \sqrt{t + \dfrac{81}{t}}$ với $t = (a+b+c)^2 \leqslant 9$. Vì $y = t + \dfrac{81}{t}$ với $0 < t \leqslant 9$ đơn điệu giảm nên $T \geqslant \sqrt{9 + \dfrac{81}{9}} = 3\sqrt{2}$. Vậy $T_{nn} = 3\sqrt{2}$. □

Ví dụ 2.4.7. *Với các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 100$ hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức dưới đây:*

$$T = \sqrt{200 - 12a - 16c} + \sqrt{200 - 12b - 16d} + \sqrt{200 - 2ab - 2cd}.$$

Bài giải: Hai điểm $B(a;c)$ và $C(b;d)$ thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính 10. Với điểm $A(6;8)$ cũng thuộc đường tròn này ta có $AB + AC + BC \leqslant 30\sqrt{3}$ hay $\sqrt{200 - 12a - 16c} + \sqrt{200 - 12b - 16d} + \sqrt{200 - 2ab - 2cd} \leqslant 30\sqrt{3}$. Do đó $T_{ln} = 30\sqrt{3}$. □

Ví dụ 2.4.8. *Với các số thực $a, b, c \in [0; 1]$, hãy tìm giá trị lớn nhất của*

(i) $T = a + b + c - ab - bc - ca.$

(ii) $P = a^3 + b^3 + c^3 - (a^3b + b^3c + c^3a).$

Bài giải: (i) Trên các cạnh của tam giác đều ABC với $BC = 1$ lấy $M \in BC, N \in CA, P \in AB$ với $BM = a, CN = b, AP = c$. Từ $S_{CMN} + S_{ANP} + S_{BMP} \leqslant S_{ABC}$ suy ra $b(1 - a) + c(1 - b) + a(1 - c) \leqslant 1$ hay $a + b + c - ab - bc - ca \leqslant 1$. Do đó $T_{ln} = 11$.
(ii) Như trên có $a^3 + b^3 + c^3 \leqslant a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + 1 \leqslant a^3b + b^3c + c^3a + 1$. Do đó $P_{ln} = 1$. □

Ví dụ 2.4.9. *Với các số thực $a, b, c, d \in [0; 2]$, hãy tìm giá trị lớn nhất của*

$$T = 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a^2b + b^2c + c^2d + d^2a).$$

Bài giải: Vì $a, b, c, d \in [0; 2]$ nên $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 \leqslant a^2b.2 + b^2c.2 + c^2d.2 + d^2a.2$ hay $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 \leqslant 2(a^2b + b^2c + c^2d + d^2a)$. Ta chỉ ra:

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leqslant 32 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2.$$

Hiển nhiên $a^2, b^2, c^2, d^2 \in [0; 4]$. Dựng hình vuông $ABCD$ với $AB = 4$. Lấy M, N, P, Q thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA, tương ứng sao cho $AM = a^2, BN = b^2, CP = c^2, DQ = d^2$. Từ $S_{MBN} + S_{NCP} + S_{PDQ} + S_{QAM} \leqslant S_{ABCD}$ suy ra $4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \leqslant 32 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2$. Như vậy $T \leqslant 16$. Dấu = xẩy ra khi $a = c = 2, b = d = 0$, chẳng hạn. Do đó $T_{ln} = 16$. □

Ví dụ 2.4.10. *Giả sử các số thực $a, b, c, x, y, z \geqslant 0$ thỏa mãn $a + b + c = p, x + y + z = q$ không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$T = ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Bài giải: Ta chỉ ra $T \geqslant \dfrac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z)$. Xét $\vec{u} = (a, b, c), \vec{v} = (x, y, z)$ và $\vec{w} = (1, 1, 1)$. Bất đẳng thức trở thành $\vec{u}.\vec{v} + |\vec{u}||\vec{v}| \geqslant \dfrac{2}{3}(\vec{u}.\vec{w})(\vec{v}.\vec{w})$ hay $\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} + 1 \geqslant 2\dfrac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$. Ký hiệu α, β, γ là góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$, giữa $\vec{v}$

và $\vec{w}$, giữa $\vec{w}$ và $\vec{u}$. Bất đẳng thức trên chính là $\cos\alpha + 1 \geqslant 2\cos\beta\cos\gamma$. Vì ba véctơ chung gốc tạo thành một tam diện nên $\beta + \gamma \geqslant \alpha$. Do đó $\cos\alpha + 1 \geqslant \cos(\beta+\gamma) + 1 \geqslant \cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma) = 2\cos\beta\cos\gamma$ và như thế bất đẳng thức được chứng minh. Như vậy $T \geqslant \frac{2}{3}pq$. Dấu = xảy ra kh $a = c = \frac{p}{3}, x = z = \frac{q}{3}$. Do đó $T_{nn} = \frac{2}{3}pq$. □

2.5 Một số bài cực trị trong tam giác

2.5.1 Sử dụng hàm lượng giác

Ví dụ 2.5.1. *Với mọi tam giác ABC hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \Big(\frac{1}{(1+\sin A)^2} + \frac{1}{(1+\sin B)^2} + \frac{1}{(1+\sin C)^2}\Big)\Big(1 + \sin A\sin B\sin C\Big).$$

Bài giải: $T_{ln} = 3$ được suy ra từ Ví dụ 1.1.6. □

Ví dụ 2.5.2. *Với mọi tam giác nhọn ABC hãy tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$T = \tan A\tan B\tan C.$$

Bài giải: Từ $\tan A = -\tan(B+C)$ suy ra $\tan A\tan B\tan C = \tan A + \tan B + \tan C \geqslant 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$. Vậy $\tan A\tan B\tan C \geqslant 3\sqrt{3}$. Do đó $T_{nn} = \sqrt{3}$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.3. *Với mọi tam giác nhọn ABC hãy tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$T = \frac{\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

Bài giải: Ta có $\dfrac{\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C}{\tan A + \tan B + \tan C} = \dfrac{\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C}{\tan A\tan B\tan C}$. Vì $\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C \geqslant 3\sqrt[3]{\tan^5 A\tan^5 B\tan^5 C}$ nên ta có ngay bất đẳng thức $\dfrac{\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geqslant 3\sqrt[3]{\tan^2 A\tan^2 B\tan^2 C} \geqslant 9$ theo Ví dụ 2.5.4. Do đó $T_{nn} = 9$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.4. *Với mọi tam giác nhọn ABC hãy tìm giá trị lớn nhất của*

$$T = \frac{1}{1+\tan A+\tan B} + \frac{1}{1+\tan B+\tan C} + \frac{1}{1+\tan C+\tan A}.$$

Bài giải: Đặt $a = \tan A, b = \tan B, c = \tan C$. Ta đã chứng minh được: $\dfrac{3\big(a+b+c\big)}{a+b+c+2\big(ab+bc+ca\big)} \geqslant \dfrac{1}{1+a+b} + \dfrac{1}{1+b+c} + \dfrac{1}{1+c+a}$. Như vậy $T = \dfrac{1}{1+a+b} + \dfrac{1}{1+b+c} + \dfrac{1}{1+c+a} \leqslant \dfrac{3}{1+2\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}}$. Do bởi $a+b+c = abc$ nên $T \leqslant \dfrac{3}{1+2\dfrac{ab+bc+ca}{abc}}$. Vì $(ab+bc+ca)^2 \geqslant 3abc(a+b+c) = 3(abc)^2$ nên $\dfrac{ab+bc+ca}{abc} \geqslant \sqrt{3}$. Bởi vậy $T \leqslant \dfrac{3}{1+2\sqrt{3}}$. Do đó $T_{ln} = 9$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.5. *Với mọi tam giác ABC hãy tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$T = \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2}.$$

Bài giải: Từ $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2\dfrac{B}{2} + \tan^2\dfrac{C}{2} \geqslant \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$ suy ra $\tan^2\dfrac{A}{2} + \tan^2\dfrac{B}{2} + \tan^2\dfrac{C}{2} \geqslant 1$. Do đó $T_{nn} = 1$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.6. *Với ΔABC, đặt $x = \tan\dfrac{A}{2}, y = \tan\dfrac{B}{2}, z = \tan\dfrac{C}{2}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau đây:*

$$T = \Big(\frac{1}{1+x+y} + \frac{1}{1+y+z} + \frac{1}{1+z+x}\Big)\frac{x+y+z+2}{x+y+z}.$$

Bài giải: Ta có $xy + yz + zx = 1$. Ta đã chứng minh được bất đẳng thức $\dfrac{1}{1+x+y} + \dfrac{1}{1+y+z} + \dfrac{1}{1+z+x} \leqslant \dfrac{3\big(x+y+z\big)}{x+y+z+2\big(xy+yz+zx\big)}$. Như vậy $T \leqslant 3$. Do đó $T_{ln} = 3$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.7. *Cho ΔABC. Đặt $x = \tan\dfrac{A}{2}, y = \tan\dfrac{B}{2}, z = \tan\dfrac{C}{2}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau đây:*

$$T = \Big(1 + \frac{4x}{y+z}\Big)\Big(1 + \frac{4y}{z+x}\Big)\Big(1 + \frac{4z}{x+y}\Big)\frac{1}{27x^2y^2z^2+1}.$$

Bài giải: Đặt $a = x + y + z, b = xy + yz + zx = 1, c = xyz$ và $P = \Big(1 + \dfrac{4x}{y+z}\Big)\Big(1 + \dfrac{4y}{z+x}\Big)\Big(1 + \dfrac{4z}{x+y}\Big) = \dfrac{(a+3x)(a+3y)(a+3z)}{(a-x)(a-y)(a-z)}$. Vậy $P = \dfrac{a^3 + 3aa^2 + 9ba + 27c}{a^3 - aa^2 + ba - c}$. Xét $P = \dfrac{4a^3 + 9a + 27c}{a-c}$ với $a \geqslant \sqrt{3} = 9\dfrac{1}{3\sqrt{3}} \geqslant 9c > 0$. Ta coi P là hàm của a và $a \geqslant 9c > 0$. Do bởi $a > 1$ nên có

$$P'_a = 4\frac{2a^3 - 3a^2c - 9c}{(a-c)^2} = 4\frac{a^2(2a-3c) - 9c}{(a-c)^2} \geqslant 4\frac{15a^2c - 9c}{(a-c)^2} > 0$$

và như vậy $P \geqslant T(9c) = \dfrac{4.3^6c^3 + 108c}{8c} = \dfrac{3^6}{2}c^2 + \dfrac{27}{2}$ và có bất đẳng thức. $T \geqslant \dfrac{27}{2}$. Do đó $T_{nn} = \dfrac{27}{2}$ khi ΔABC đều. □

2.5.2 Sử dụng nghiệm đa thức bậc ba

Mục này giới thiệu một phương pháp phát hiện ra các cực trị trong tam giác qua phương trình đa thức bậc ba.

Cho ΔABC với độ dài cạnh là a, b, c, bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R, bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3, nửa chu vi p và diện tích S. Ta sẽ chỉ ra a, b, c là ba nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ và r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của phương trình $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$.

Mệnh đề 2.5.8. *Cho ΔABC với độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu p là nửa chu vi, r và R là bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp. Khi đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình dưới đây:*

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

Chứng minh: Từ $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a}$ và $a = 2R\sin A$ suy ra $a = 2R\dfrac{2\tan\dfrac{A}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{A}{2}}$ hay $a = 4R\dfrac{\dfrac{r}{p-a}}{1 + \Big(\dfrac{r}{p-a}\Big)^2} = 4Rr\dfrac{p-a}{r^2 + (p-a)^2}$. Như vậy, ta có quan hệ

$a(a^2-2pa+p^2+r^2) = 4Rr(p-a)$ hay $a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4Rrp = 0$. Do đó a là một nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$. Tương tự, b và c cũng là nghiệm của phương trình này. □

Mệnh đề 2.5.9. *Cho ΔABC với độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Ký hiệu p là nửa chu vi, r và R là bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp. Khi đó $\sin A, \sin B$ và $\sin C$ là ba nghiệm của phương trình sau đây:*

$$x^3 - \frac{p}{R}x^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}x - \frac{rp}{2R^2} = 0.$$

Chứng minh: Vì $a = 2R\sin A$ và a là nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $8R^3\sin^3 A - 8pR^2\sin^2 A + (p^2+r^2+4Rr)2R\sin A - 4Rrp = 0$ hay $\sin^3 A - \frac{p}{R}\sin^2 A + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}\sin A - \frac{rp}{2R^2} = 0$. Như vậy $\sin A$ là một nghiệm của $x^3 - \frac{p}{R}x^2 + \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}x - \frac{rp}{2R^2} = 0$. Tương tự $\sin B$ và $\sin C$ cũng là nghiệm của phương trình này. □

Mệnh đề 2.5.10. *Cho ΔABC với diện tích S và độ dài bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao. Khi đó h_a, h_b, h_c là ba nghiệm của phương trình đa thức bậc ba sau đây:*

$$y^3 - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \frac{2S}{Rr}y - \frac{2S^2}{R} = 0.$$

Đặt $H_n = h_a^n + h_b^n + h_c^n$ với $n = 1, 2, \ldots$. Khi đó ta có hệ thức liên hệ sau:

$$H_{n+3} - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}H_{n+2} + \frac{2S}{Rr}H_{n+1} - \frac{2S^2}{R}H_n = 0.$$

Bài giải: Vì a, b, c là ba nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0$ nên $\frac{2S}{a}, \frac{2S}{b}, \frac{2S}{c}$ là nghiệm của $2S^2 - \frac{2S}{r}y + \frac{\frac{S^2}{r^2} + 4Rr + r^2}{2}y^2 - Ry^3 = 0$. Do vậy h_a, h_b, h_c là ba nghiệm của phương trình đa thức bậc ba sau đây:

$$y^3 - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}y^2 + \frac{2S}{Rr}y - \frac{2S^2}{R} = 0.$$

Vậy $H_{n+3} - \frac{S^2 + 4Rr^3 + r^4}{2Rr^2}H_{n+2} + \frac{2S}{Rr}H_{n+1} - \frac{2S^2}{R}H_n = 0.$ □

Mệnh đề 2.5.11. *Cho* ΔABC *với nửa chu vi* p, *bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp* r, R *và bán kính các đường tròn bàng tiếp là* r_1, r_2, r_3. *Khi đó* $r_1, r_2.r_3$ *là ba nghiệm của phương trình* $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$.

Chứng minh: Từ $\tan\frac{A}{2} = \frac{r_1}{p}$ và $a = 2R\sin A$ suy ra $a = 2R\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}}$ hay $a = 4R\dfrac{\frac{r_1}{p}}{1 + \frac{r_1^2}{p^2}} = 4Rr_1\dfrac{p}{r_1^2 + p^2}$. Bởi vì $r_1(p - a) = S = rp$ nên ta có quan hệ $\dfrac{(r_1 - r)p}{r_1} = a = 4Rr_1\dfrac{p}{r_1^2 + p^2}$ hay $(r_1 - r)(r_1^2 + p^2) = 4Rr_1^2$. Do đó r_1 là một nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Tương tự, r_2 và r_3 cũng là nghiệm của phương trình này. $\square$

Mệnh đề 2.5.12. *Cho* ΔABC *với nửa chu vi* p, *bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp* r, R. *Khi đó* $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ *là ba nghiệm của phương trình* $x^3 - \frac{4R + r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0$. *Từ đây suy ra*

(i) $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \dfrac{4R + r}{p}$.

(ii) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$. *Từ đây suy ra hai bất đẳng thức* $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}, \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

(iii) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \dfrac{r}{p}$.

Chứng minh: Vì $r_1 = p\tan\frac{A}{2}$ và r_1 là nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $p^3\tan^3\frac{A}{2} - (4R + r)p^2\tan^2\frac{A}{2} + p^2p\tan\frac{A}{2} - p^2r = 0$ hay $\tan^3\frac{A}{2} - \frac{4R + r}{p}\tan^2\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2} - \frac{r}{p} = 0$. Như vậy $\tan\frac{A}{2}$ là một nghiệm của $x^3 - \frac{4R + r}{p}x^2 + x - \frac{r}{p} = 0$. Tương tự $\tan\frac{B}{2}$ và $\tan\frac{C}{2}$ cũng là nghiệm của phương trình này. Kết quả (i), (ii) và (iii) được suy ra qua Định lý Viét. $\square$

Mệnh đề 2.5.13. *Cho* ΔABC *với nửa chu vi* p, *bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp* r, R. *Khi đó ta có*

(i) $\cos A, \cos B, \cos C$ *là ba nghiệm của phương trình đa thức dưới đây:*

$$x^3 - \frac{R+r}{R}x^2 + \frac{-4R^2+r^2+p^2}{4R^2}x - \frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2} = 0.$$

(ii) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}.$

(iii) $P = (1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) = \dfrac{r^2}{2R^2}$. *Từ đó suy ra* $P \leqslant \dfrac{1}{8}.$

(iv) *Đặt* $U = \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A$ *và* $V = \cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A$. *Ta có* $U - V \leqslant \dfrac{3}{2}.$

Chứng minh: (i) Ta biết $\tan\dfrac{A}{2}, \tan\dfrac{B}{2}. \tan\dfrac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 - \dfrac{4R+r}{p}x^2 + x - \dfrac{r}{p} = 0$. Vì $\cos A = \dfrac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}} = \dfrac{2}{1+\tan^2\frac{A}{2}} - 1$ nên $\cos A + 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$. Xét hệ: $\begin{cases} y = \dfrac{2}{1+x^2} \\ x^3 - \dfrac{4R+r}{p}x^2 + x - \dfrac{r}{p} = 0. \end{cases}$ Từ $\begin{cases} x^2 = \dfrac{2}{y} - 1 \\ x^3 - \dfrac{4R+r}{p}x^2 + x - \dfrac{r}{p} = 0 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = \dfrac{4R+r}{p} - \dfrac{2Ry}{p} \\ x^3 - \dfrac{4R+r}{p}x^2 + x - \dfrac{r}{p} = 0 \end{cases}$ và nhận được $y\Big(\dfrac{4R+r}{p} - \dfrac{2Ry}{p}\Big)^2 + y - 2 = 0$. Vậy $\cos A+1, \cos B+1, \cos C+1$ là ba nghiệm của $y^3 - \dfrac{4R+r}{R}y^2 + \dfrac{(4R+r)^2+p^2}{4R^2}y - \dfrac{p^2}{2R^2} = 0$. Do đó $\cos A, \cos B, \cos C$ là ba nghiệm của phương trình có được qua việc thay $y = x+1 : x^3 - \dfrac{R+r}{R}x^2 + \dfrac{-4R^2+r^2+p^2}{4R^2}x - \dfrac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2} = 0.$

(ii) Theo Định lý Viét có $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{R+r}{R} = 1 + \dfrac{r}{R}.$

(iii) Từ phương trình trên có $P = (1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) = \dfrac{r^2}{2R^2}$. Do $R \geqslant 2r$ nên $P \leqslant \dfrac{1}{8}$.

(iv) Theo Định lý Viét có $U = \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}$, xem Mệnh đề 2.5.9. Do vậy $U - V = \dfrac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2} - \dfrac{-4R^2 + r^2 + p^2}{4R^2} = \dfrac{4R^2 + 4Rr}{4R^2} = 1 + \dfrac{r}{R} \leqslant \dfrac{3}{2}$. □

Chú ý 2.5.14. *Phương trình đa thức bậc 3 nhận* $\tan A, \tan B, \tan C$ *làm ba nghiệm là không có vì tam giác vuông sẽ không thỏa mãn.*

Ví dụ 2.5.15. *Giả sử* ΔABC *thay đổi. Đặt* $x = \sin A, y = \sin B, z = \sin C$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = 4(xy + yz + zx) + (x + y + z).$$

Bài giải: Vì a, b, c, là nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $ab + bc + ca + (a + b + c)R = 2R^2 + 4pR + p^2 + r^2 + 4Rr$. Vì $a + b + c = 8R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} \leqslant 3\sqrt{3}R$ nên $ab + bc + ca + (a + b + c)R \leqslant (11 + 6\sqrt{3})R^2$ hay $4(xy + yz + zx) + (x + y + z) \leqslant 11 + 6\sqrt{3}$. Vậy $T_{ln} = 11 + 6\sqrt{3}$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.16. *Cho* ΔABC *với bán kính các đường tròn ngoại tiếp là* R, *bán kính các đường tròn bàng tiếp là* r_1, r_2, r_3, *nửa chu vi* p. *Chứng minh rằng* $\Big(\dfrac{r_1^2}{p^2} - 1\Big)\Big(\dfrac{r_2^2}{p^2} - 1\Big)\Big(\dfrac{r_3^2}{p^2} - 1\Big) = 4\Big[\dfrac{(2R + r)^2}{p^2} - 1\Big]$.

Bài giải: r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Xác định phương trình nhận $y_1 = r_1^2 - p^2, y_2 = r_2^2 - p^2, y_3 = r_3^2 - p^2$ làm ba nghiệm. Khử x từ hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^2 - p^2 - y = 0. \end{cases}$ Ta có ngay hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^3 - p^2x - yx = 0 \end{cases}$ và $(4R + r)x^2 - yx - 2p^2x + p^2r = 0$ hay phương trình $(4R + r)(y + p^2) - (y + 2p^2)x + p^2r = 0$. Đặt $T = 4R + r$. Khi đó $x = \dfrac{Ty + (T + r)p^2}{y + p^2}$. Vậy $\dfrac{(Ty + (T + r)p^2)^2}{(y + 2p^2)^2} - p^2 - y = 0$ hay $y(y + 2p^2)^2 + p^2(y + 2p^2)^2 - \big(Ty + (T + r)p^2\big)^2 = 0$. Phương trình này có ba nghiệm là y_1, y_2, y_3. Do đó $\dfrac{(r_1^2-p^2)(r_2^2-p^2)(r_3^2-p^2)}{p^6} = \dfrac{y_1y_2y_3}{p^6} = \dfrac{(4R+2r)^2p^4-4p^6}{p^6}$. Từ hệ thức cuối cùng ta suy ra được đồng nhất thức $\Big(\dfrac{r_1^2}{p^2}-1\Big)\Big(\dfrac{r_2^2}{p^2}-1\Big)\Big(\dfrac{r_3^2}{p^2}-1\Big) = 4\big[\dfrac{(2R+r)^2}{p^2}-1\big]$. □

Ví dụ 2.5.17. *Cho ΔABC với bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R, bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3. Khi đó ta luôn có:*

(i) $\dfrac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \dfrac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \dfrac{1}{(r-r_3)(r-r_1)} = \dfrac{2R-r}{2Rr^2}$.

(ii) $\dfrac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \dfrac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \dfrac{1}{(r-r_3)(r-r_1)} \leqslant \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{R^2}$.

(iii) *Đặt* $T = \dfrac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \dfrac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \dfrac{1}{(r-r_3)(r-r_1)}$. *Xác định giá trị nhỏ nhất của T khi r không đổi.*

Bài giải: Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r=0$ nên $f(x)=x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$. Lấy hai lần đạo hàm được $3x-4R-r=(x-r_1)+(x-r_2)+(x-r_3)$. Từ đây được $\dfrac{3x-4R-r}{f(x)} = \dfrac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} + \dfrac{1}{(x-r_2)(x-r_3)} + \dfrac{1}{(x-r_3)(x-r_1)}$. Cho $x=r$ có $\dfrac{1}{(r-r_1)(r-r_2)} + \dfrac{1}{(r-r_2)(r-r_3)} + \dfrac{1}{(r-r_3)(r-r_1)} = \dfrac{2R-r}{2Rr^2}$. Vậy có (i) và do bởi $\dfrac{2R-r}{2Rr^2} \leqslant \dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{R^2}$ nên có (ii) và vì $\dfrac{2R-r}{2Rr^2} = \dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{2Rr} \geqslant \dfrac{3}{4r^2}$ nên $T \geqslant \dfrac{3}{4r^2}$. Dấu = xẩy ra khi ΔABC đều và như thế $T_{nn} = \dfrac{3}{4r^2}$. □

Ví dụ 2.5.18. *Cho ΔABC với bán kính đường tròn nội tiếp là r và chu vi $2p=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức dưới đây:*

$$T = \frac{1}{(4-a)(4-b)} + \frac{1}{(4-b)(4-c)} + \frac{1}{(4-c)(4-a)}.$$

Bài giải: Vì a, b, c, là nghiệm của $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4Rrp=0$ nên $f(x)=x^3-6x^2+(9+r^2+4Rr)x-12Rr=(x-a)(x-b)(x-c)$. Lấy

hai lần đạo hàm được $3x - 2p = (x - a) + (x - b) + (x - c)$. Từ đây được $\dfrac{3x - 2p}{f(x)} = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)} + \dfrac{1}{(x-b)(x-c)} + \dfrac{1}{(x-c)(x-a)}$. Cho $x = 4$ có $\dfrac{1}{(4-a)(4-b)} + \dfrac{1}{(4-b)(4-c)} + \dfrac{1}{(4-c)(4-a)} = \dfrac{3}{2 + 2r^2 + 2Rr}$. Vì $R \geqslant 2r$ suy ra $\dfrac{1}{(4-a)(4-b)} + \dfrac{1}{(4-b)(4-c)} + \dfrac{1}{(4-c)(4-a)} \leqslant \dfrac{3}{6r^2 + 2}$.
Dấu = xẩy ra khi $R = 2r$ hay tam giác ABC đều. Do vậy $T_{ln} = \dfrac{3}{4}$. □

Ví dụ 2.5.19. *Cho ΔABC với độ dài cạnh a, b, c và bán kính đường tròn nội tiếp là r. Hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} - \frac{p^2}{4r^2}.$$

Bài giải: Vì a, b, c, là nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên dễ dàng có $\dfrac{(a-b)^2}{ab} + \dfrac{(b-c)^2}{bc} + \dfrac{(c-a)^2}{ca} = \dfrac{2(p^2 + r^2 + 4Rr)}{4Rr} - 9$.
Như vậy $\dfrac{(a-b)^2}{ab} + \dfrac{(b-c)^2}{bc} + \dfrac{(c-a)^2}{ca} = \dfrac{2(p^2 + r^2)}{4Rr} - 7$. Bởi vì $R \geqslant 2r$ nên $\dfrac{(a-b)^2}{ab} + \dfrac{(b-c)^2}{bc} + \dfrac{(c-a)^2}{ca} \leqslant \dfrac{2(p^2 + r^2)}{8r^2} - 7 = \dfrac{p^2}{4r^2} - \dfrac{27}{4}$. Do vậy $T_{ln} = -\dfrac{27}{4}$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.20. *Cho ΔABC với bán kính đường tròn nội tiếp là r không đổi và độ dài cạnh a, b, c. Hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Bài giải: Vì a, b, c, là nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $f(x) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = (x - a)(x - b)(x - c)$.
Lấy hai lần đạo hàm được $3x - 2p = (x - a) + (x - b) + (x - c)$. Từ đây được $\dfrac{3x - 2p}{f(x)} = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)} + \dfrac{1}{(x-b)(x-c)} + \dfrac{1}{(x-c)(x-a)}$. Cho $x = p$ có $\dfrac{1}{(p-a)(p-b)} + \dfrac{1}{(p-b)(p-c)} + \dfrac{1}{(p-c)(p-a)} = \dfrac{p}{r^2p} = \dfrac{1}{r^2}$. Tóm lại $\dfrac{1}{4r^2} = \dfrac{1}{4(p-a)(p-b)} + \dfrac{1}{4(p-b)(p-c)} + \dfrac{1}{4(p-c)(p-a)} \geqslant \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.
Do vậy $T_{ln} = \dfrac{1}{4r^2}$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.21. *Giả sử ΔABC thay đổi. Ký hiệu độ dài cạnh là a, b, c và bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$T = \frac{ab + bc + ca + (a + b + c)r + r^2}{R^2}.$$

Bài giải: Vì a, b, c, là nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ nên $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = \dfrac{3x^2 - 4px + p^2 + r^2 + 4Rr}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. Với $x = -r$ có

$$\frac{1}{a+r} + \frac{1}{b+r} + \frac{1}{c+r} = \frac{4r^2 + 4pr + p^2 + 4Rr}{(r+a)(r+b)(r+c)}.$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức $\dfrac{1}{a+r} + \dfrac{1}{b+r} + \dfrac{1}{c+r} \leqslant \dfrac{\big(\frac{39}{4} + 3\sqrt{3}\big)R^2}{(r+a)(r+b)(r+c)}$ hay $ab + bc + ca + (a + b + c)r + r^2 \leqslant \big(\dfrac{39}{4} + 3\sqrt{3}\big)R^2$. Vậy $T_{ln} = \dfrac{39}{4} + 3\sqrt{3}$ khi ΔABC đều. $\square$

Ví dụ 2.5.22. *Cho ΔABC với độ dài ba cạnh a, b, c và bán kính các đường tròn nội, ngoại tiếp là r, R. Hãy xác định giá trị*

(i) *lớn nhất của tích $T = (a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr)$ khi R không thay đổi.*

(ii) *nhỏ nhất của tích $T = (a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr)$ khi r không thay đổi.*

Bài giải: (i) Ta có $T = 2Rr(ab + bc + ca - 2Rr)^2$ theo Ví dụ 2.5.22. Vì $4p^2 \geqslant 3(ab + bc + ca)$ và $4p^2 \leqslant 27R^2$ nên $T \leqslant 2Rr(9R^2 - 2Rr)^2$. Như vậy $T \leqslant R^3.2r(9R - 2r)^2$. Xét hàm số $y = x(9R - x)^2$ với $0 < x \leqslant R$. Vì $y' > 0$ nên $y \leqslant 64R^3$. Vậy $T \leqslant 64R^6$ và $T_{ln} = 64R^6$ khi ΔABC đều.
(ii) Bởi vì $T = (a^2 + 2Rr)(b^2 + 2Rr)(c^2 + 2Rr) \geqslant \big(\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 2Rr\big)^3$ và do bởi $\dfrac{abc}{2R} = r(a + b + c) \geqslant 3r\sqrt[3]{abc}$ nên $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geqslant 6Rr$ và như thế $T \geqslant 8^3R^3r^3 \geqslant 8^4r^6$. Do đó $T_{nn} = 4^6r^6$ khi ΔABC đều. $\square$

Ví dụ 2.5.23. *Ký hiệu r_1, r_2, r_3 là bán kính các đường tròn bàng tiếp tam giác ABC. Khi R không thay đổi, hãy xác định giá trị lớn nhất của tổng $T = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$.*

Bài giải: Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = p^2$. Vì $p = R(\sin A + \sin B + \sin C) \leqslant 3R\sin\dfrac{A+B+C}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}R}{2}$ nên $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 \leqslant \dfrac{27R^2}{4}$. Vậy $T_{ln} = \dfrac{27R^2}{4}$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.24. *Cho ΔABC với bán kính các đường tròn ngoại tiếp là R, bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3, nửa chu vi p. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của tích*

$$T = \Big(\frac{r_1^2}{p^2} + 1\Big)\Big(\frac{r_2^2}{p^2} + 1\Big)\Big(\frac{r_3^2}{p^2} + 1\Big).$$

Bài giải: r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$. Xác định phương trình nhận $y_1 = r_1^2 + p^2, y_2 = r_2^2 + p^2, y_3 = r_3^2 + p^2$ làm ba nghiệm. Khử x từ hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^2 + p^2 - y = 0. \end{cases}$ Ta có ngay hệ $\begin{cases} x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0 \\ x^3 + p^2x - yx = 0 \end{cases}$ và $(4R + r)x^2 - yx + p^2r = 0$ hay phương trình $(4R + r)(y - p^2) - yx + p^2r = 0$. Đặt $T = 4R + r$. Khi đó $x = \dfrac{Ty - 4Rp^2}{y}$. Vậy $\dfrac{(Ty - 4Rp^2)^2}{y^2} + p^2 - y = 0$ hay $y^3 - (T^2 + p^2)y^2 + 8RTp^2y - 16R^2p^4 = 0$. Phương trình này có ba nghiệm là y_1, y_2, y_3. Do đó $\dfrac{(r_1^2 + p^2)(r_2^2 + p^2)(r_3^2 + p^2)}{p^6} = \dfrac{y_1y_2y_3}{p^6} = \dfrac{16R^2p^4}{p^6}$. Từ hệ thức cuối suy ra đồng nhất thức $\Big(\dfrac{r_1^2}{p^2} + 1\Big)\Big(\dfrac{r_2^2}{p^2} + 1\Big)\Big(\dfrac{r_3^2}{p^2} + 1\Big) = \dfrac{16R^2}{p^2} \geqslant \dfrac{64}{27}$. Vậy $T_{nn} = \dfrac{64}{27}$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.25. *Cho ΔABC với bán kính của đường tròn nội tiếp là r, của các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3, nửa chu vi p. Xác định giá trị nhỏ nhất của*

(i) $T = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{p^2}$.

(ii) $P = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{r^2}$.

Bài giải: (i) Vì r_1, r_2, r_3 là ba nghiệm của $x^3 - (4R+r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$ nên $\dfrac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{p^2} \geqslant \dfrac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{p^2} = 1$. Vậy $T_{nn} = 1$ khi ΔABC đều.
(ii) Do bởi $\dfrac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{r^2} \geqslant \dfrac{1}{3r^2}\big(r_1+r_2+r_3\big)^2 = \dfrac{1}{3r^2}\big(4R+r\big)^2 \geqslant \dfrac{1}{3r^2}\big(8r+r\big)^2$ nên $P \geqslant 27$. Do đó $P_{nn} = 27$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.26. *Cho tam giác đều ABC với độ dài cạnh BC bằng 1. Giả sử điểm M ở trong tam giác và $MA = x, MB = y, MC = z > 0$. Gọi r_1, r_2, r_3 là bán kính đường tròn nội tiếp trong tam giác MBC, MCA, MAB tương ứng. Tìm giá trị lớn nhất của $T = r_1r_2r_3\big(1 + 2\sqrt[3]{xyz}\big)^3$.*

Bài giải: Gọi khoảng cách từ M đến BC, CA, AB là $u, v, t \geqslant 0$. Bởi vì $r_1(1+y+z) = 2S_{MBC} = u.1 = u$ nên $u \geqslant r_1(1+2\sqrt{yz})$. Tương tự $v \geqslant r_2(1+2\sqrt{zx})$ và $t \geqslant r_3(1+2\sqrt{xy})$. Do vậy $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = u+v+t \geqslant 3\sqrt[3]{uvt} \geqslant 3\sqrt[3]{r_1r_2r_3(1+2\sqrt{yz})(1+2\sqrt{zx})(1+2\sqrt{xy})}$ hay được $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{r_1r_2r_3}(1+2\sqrt[3]{xyz})$. Tóm lại $\dfrac{1}{24\sqrt{3}} \geqslant r_1r_2r_3\big(1+2\sqrt[3]{xyz}\big)^3$. Do đó $T_{ln} = \dfrac{1}{24\sqrt{3}}$ khi M là tâm tam giác đều ABC. □

Ví dụ 2.5.27. *Giả sử ΔABC có độ dài hai cạnh $AB = c, AC = b$ không đổi và $\angle A \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Gọi M và N là trung điểm của AB và AC, tương ứng; I là tâm đường tròn nội tiếp trong ΔABC. Giả sử IM cắt tia (AC) tại C_1 và IN cắt tia (AB) tại B_1. Xác định giá trị lớn nhất của $T = AB_1.AC_1$.*

Bài giải: Đặt $BC = a, AB_1 = x, AC_1 = y$ và ký hiệu r là bán kính đường tròn nội tiếp trong ΔABC. Từ $S_{AMC_1} = \dfrac{AM}{AB}\dfrac{AC_1}{AC}S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{b}rp$, $S_{AIC_1} = \dfrac{yr}{2}$ và $S_{AIM} = \dfrac{cr}{4}$ suy ra $\dfrac{1}{2}\dfrac{y}{b}rp - \dfrac{yr}{2} = S_{AMC_1} - S_{AIC_1} = S_{AIM} = \dfrac{cr}{4}$ hay $(a-b+c)y = bc$. Tương tự $(a+b-c)x = bc$. Như vậy $(a+b-c)(a-b+c)xy = b^2c^2$ hay $(a^2-b^2-c^2+2bc)xy = b^2c^2$. Từ đây suy ra $4xy\sin^2\dfrac{A}{2} = bc$. Vì $\angle A \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin^2\dfrac{A}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Do vậy mà $2xy \geqslant bc$. Tóm lại $T_{nn} = \dfrac{bc}{2}$ khi $A = \dfrac{\pi}{2}$. □

Ví dụ 2.5.28. *Giả sử ΔABC thay đổi nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và có đường tròn nội tiếp tâm I thay đổi với bán kính r. Gọi H là trực tâm và G là trọng tâm ΔABC. Khi đó hãy:*

(i) *Chứng minh rằng luôn có số thực k để $MA^2 + ka^2 = MB^2 + kb^2 = MC^2 + kc^2$ với mỗi $M \in (HO)$ và $a = BC, b = CA, c = AB$.*

(ii) *Chứng minh rằng $T = IH + IG \geqslant 2\sqrt{\dfrac{2r}{3}(R - 2r)}$. Chỉ ra giá trị nhỏ nhất của $T = IH + IG$ không tồn tại khi $R \neq 2r$.*

Bài giải: (i) Đặt $u = \angle BHG, v = \angle AHG$. Khi đó $AH\cos v - BH\cos u = \dfrac{-a^2 + b^2}{3HG}$. Hiển nhiên $AH^2 - BH^2 = -a^2 + b^2$. Với mỗi $M \in (HO)$ ta có

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= AH^2 - BH^2 - 2HM.(AH\cos v - BH\cos u) \\ &= b^2 - a^2 - 2HM.\frac{-a^2 + b^2}{3HG} = \Big(\frac{2HM}{3HG} - 1\Big)(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Với $k = \Big(\dfrac{1 - 2HM}{3HG}\Big)$ ta được $MA^2 + ka^2 = MB^2 + kb^2$. Tương tự $MA^2 + ka^2 = MC^2 + kc^2$. Tóm lại $MA^2 + ka^2 = MB^2 + kb^2 = MC^2 + kc^2$.
(ii) Gọi E là trung điểm HO. Ta có $IO^2 = d^2 = R^2 = 2Rr$ theo Hệ thức Euler. Vì đường tròn nội tiếp tiếp xúc trong với đường tròn 9-điểm bán kính $\dfrac{R}{2}$ theo Định lý Feuerbach nên $IE = \dfrac{R}{2} - r$. Dễ dàng kiểm tra

$$3\vec{IG} = 4\vec{IE} - \vec{IH} = 2\vec{IE} + \vec{IO}, \vec{IH} = 2\vec{IE} - \vec{IO}.$$

Do vậy $\vec{IH}.\vec{IG} = \dfrac{1}{3}\Big(2\vec{IE}+\vec{IO}\Big)\Big(2\vec{IE}-\vec{IO}\Big) = -\dfrac{2r}{3}(R-2r)$ hay $IH.IG = \dfrac{2r}{3}(R - 2r)$. Từ đây suy ra $T = IH + IG \geqslant 2\sqrt{\dfrac{2r}{3}(R - 2r)}$. Dấu $=$ xẩy ra khi $IH = IG$ hay $R = 2r$: mâu thuẫn. $\square$

Ví dụ 2.5.29. *Giả sử điểm M ở trong hay trên cạnh hình vuông $ABCD$ với độ dài cạnh bằng $\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm $F(M) = MA + MB + MC + MD$.*

Bài giải: Hiển nhiên $MA + MC \geqslant AC$ và $MB + MD \geqslant BD$. Như vậy $F(M) \geqslant 4$. Do đó $F(M)_{nn} = 4$ khi M là tâm hình vuông. Dựng hệ tọa độ (Oxy) với $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$ và $D(0;-1)$. Giả sử $(x;y)$ với $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$. Khi đó ta có $F(x,y) = \sqrt{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2}$. Vì $F(x,y) = F(\pm x, \pm y)$ và $F(x,y) = F(y,x)$ nên khi đặt $x = r\cos u, y = r\sin u$ với $r \in [0;1], u \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Ta có $F = \sqrt{1+r^2+2r\cos u} + \sqrt{1+r^2+2r\sin u} + \sqrt{1+r^2-2r\cos u} + \sqrt{1+r^2-2r\sin u}$. Coi F là hàm của r, u cố định. Lấy đạo hàm theo r, có

$$\begin{aligned} F'_r &= \frac{r+\cos u}{\sqrt{1+r^2+2r\cos u}} + \frac{r-\cos u}{\sqrt{1+r^2-2r\cos u}} \\ &+ \frac{r+\sin u}{\sqrt{1+r^2+2r\sin u}} + \frac{r-\sin u}{\sqrt{1+r^2-2r\sin u}}. \end{aligned}$$

Nếu $r \geqslant \cos u$ thì $\frac{r+\cos u}{\sqrt{1+r^2+2r\cos u}} + \frac{r-\cos u}{\sqrt{1+r^2-2r\cos u}} \geqslant 0$; Còn nếu $r < \cos u$ thì ta vẫn có $\frac{r+\cos u}{\sqrt{1+r^2+2r\cos u}} + \frac{r-\cos u}{\sqrt{1+r^2-2r\cos u}} > 0$ qua biến đổi tương đương. Tương tự có $\frac{r+\sin u}{\sqrt{1+r^2+2r\sin u}} + \frac{r-\sin u}{\sqrt{1+r^2-2r\sin u}} \geqslant 0$. Vậy F là hàm đơn điệu tăng của r và ta nhận được $F \leqslant G(N)$, trong đó O, M, N thẳng hàng và N thuộc cạnh AB. Tóm lại đã chỉ ra được $F(M) \leqslant G(N)$, trong đó O, M, N thẳng hàng và N thuộc cạnh AB. Vậy để $F(M)$ lớn nhất cần M thuộc cạnh hình vuông, chẳng hạn $M \in AB$. Đặt $MA = x$. Khi đó $MC + MD = \sqrt{2 + (\sqrt{2} - a)^2} + \sqrt{2 + a^2} = g(a)$ với $a \in [0; \sqrt{2}]$. Khảo sát hàm số $g(a)$ có $g(a) \leqslant 2 + \sqrt{2}$. Vậy $F(M) \leqslant 2 + 2\sqrt{2}$. Dấu bằng xẩy ra khi M trùng một đỉnh hình vuông. Vậy $F(M)_{ln} = 2 + 2\sqrt{2}$. □

Ví dụ 2.5.30. *Giả sử điểm I chạy trên đường tròn (E) với bán kính 1. Tam giác đều ABC và hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong cùng đường tròn (E). Khi đó $T = IA + IB + IC < 3\sqrt{2}$ và $P = IM + IN + IP + IQ < 4\sqrt{2}$. Tìm P_{ln}.*

Bài giải: Vì tâm tam giác đều hay hình vuông đều là trọng tâm của nó nên $IA^2 + IB^2 + IC^2 = 6$. Từ $\Big(IA + IB + IC\Big)^2 \leqslant 3[IA^2 + IB^2 + IC^2]$ ta suy ra $IA + IB + IC \leqslant 3\sqrt{2}$. Vì IA, IB, IC không thể bằng nhau nên $IA + IB + IC < 3\sqrt{2}$. Tương tự có $IM^2 + IN^2 + IP^2 + IQ^2 = 8$. Từ $\Big(IM + IN + IP + IQ\Big)^2 \leqslant 4[IM^2 + IN^2 + IP^2 + IQ^2]$ ta suy ra

$IM + IN + IP + IQ \leqslant 4\sqrt{2}$. Vì IM, IN, IP, IQ không thể bằng nhau nên $IM+IN+IP+IQ < 4\sqrt{2}$. Do tính đối xứng của hình vuông nên ta chỉ cần xét $A(1;0), B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$ và $I(\cos 2t; \sin 2t)$ với $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Khi đó $P = 2[(\sqrt{2}+1)\cos t + \sin t] \leqslant \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+1}\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$ hay $P \leqslant 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Dấu $=$ xẩy ra khi $\dfrac{\cos t}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sin t}{1}$ hay $\cos t = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}, \sin t = \dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+4}}$. Vậy $P_{ln} = 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. □

Ví dụ 2.5.31. *Cho đường tròn tâm O bán kính 1. Kẻ hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau. Một điểm M chạy trên cung nhỏ AB của đường tròn. Giả sử MD cắt AC tại E, còn MC cắt BD tại F. Khi đó hãy*

(i) *Xác định giá trị nhỏ nhất của $CE + DF$ và của EF.*

(ii) *Chứng minh tứ giác $DEFC$ không thể ngoại tiếp một đường tròn khi $M \neq A, B$, và tứ giác $DEFC$ nội tiếp trong một đường tròn nếu và chỉ nếu M là trung điểm cung AB.*

Bài giải: (i) Đặt $u = \angle ACM, v = \angle BDM$. Ta có $u + v = \dfrac{\pi}{4}$ và như vậy $1 = \tan(u+v)$ hay $\tan u + \tan v + \tan u \tan v = 1$. Từ đây suy ra $CE.DF = (1+\tan v)(1+\tan u) = 2$. Vì $CE + DF \geqslant 2\sqrt{CE.DF} = 2\sqrt{2}$ nên $CE + DF$ nhỏ nhất là bằng $2\sqrt{2}$ khi M là trung điểm cung AB. Đặt $OE = x, OF = y$. Khi đó $x, y \geqslant 0$ và $x + y + xy = 1$. Từ đây suy ra $1 \geqslant xy + 2\sqrt{xy}$ và như vậy $0 \leqslant t = xy \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$. Vì $T = EF^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (1-t)^2 - 2t = 1 + t^2 - 4t$ với $0 \leqslant t \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$ nên $T' < 0$ và như thế T là hàm đơn điệu giảm. Do đó $T \geqslant 6 - 4\sqrt{2}$ và $T_{nn} = 6 - 4\sqrt{2}$ khi M là trung điểm cung AB.
(ii) Nếu tứ giác $DEFC$ ngoại tiếp một đường tròn thì $DE + CF = CD + EF$ hay $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2}$. Vậy $(1-x^2)(1-y^2) = 0$: mâu thuẫn. Nếu tứ giác $DEFC$ nội tiếp trong một đường tròn thì $DE.CF + CD.EF = CE.DF$ hay $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2} = 2$. Từ đây có $3 + x^2 + y^2 = x^2y^2 + 4\sqrt{2(x^2+y^2)}$ hay $3 + (1-xy)^2 - 2xy = x^2y^2 + 4\sqrt{2((1-xy)^2 - 2xy)}$. Vậy $x^2y^2 - 6xy + 1 = 0$. Do $0 \leqslant xy \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$ nên $xy = 3 - 2\sqrt{2}$ hay M là trung điểm cung AB. Ngược lại, kết quả đúng. □

Ví dụ 2.5.32. *Cho đường tròn (E) bán kính bằng 1. Giả sử ΔABC ngoại tiếp đường tròn (E) có bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$T = \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} + \frac{1}{(1-r_2)(1-r_3)} + \frac{1}{(1-r_3)(1-r_1)}.$$

Bài giải: Do $T \geqslant \dfrac{3}{4}$ theo Ví dụ 2.5.17 nên $T_{nn} = \dfrac{3}{4}$ khi ΔABC đều. □

Ví dụ 2.5.33. *Cho ΔABC trong mặt phẳng (P) với $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử hình chóp $SABC$ có độ dài đường cao $SH = h$ không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh P của hình chóp $SABC$.*

Bài giải: Ký hiệu độ dài đại số từ chân H của đường cao SH đến BC, CA, AB là x, y, z. Khi đó $ax + by + cz = 2s = 2rp$, trong đó s là diện tích tam giác ABC. Vậy $2P = a\sqrt{x^2+h^2} + b\sqrt{y^2+h^2} + c\sqrt{z^2+h^2}$. Từ $2P = \sqrt{a^2x^2+a^2h^2} + \sqrt{b^2y^2+b^2h^2} + \sqrt{c^2z^2+c^2h^2}$ suy ra $2P \geqslant \sqrt{(ax+by+cz)^2+(a+b+c)^2h^2} = \sqrt{4r^2p^2+4p^2h^2} = 2p\sqrt{r^2+4h^2}$. Dấu = xẩy ra khi $x = y = z = r$. Tóm lại $P_{nn} = p\sqrt{r^2+4h^2}$ khi H là tâm đường tròn nội tiếp trong ΔABC. □

Chương 3

Một số ứng dụng vào giải bài toán liên quan

3.1 Xây dựng lại một số bất đẳng thức cổ điển

Xây dựng lại một số bất đẳng thức qua hàm một biến

Một phương pháp rất thông dụng có thể xây dựng bất đẳng thức là tìm cực trị của một hàm $f(x)$ nào đó bằng cách khảo sát dấu $f'(x)$ để biết f_{nn} hoặc f_{ln}. Sau đó chọn giá trị đặc biệt cho x.

Bắt đầu bằng việc xét hàm $f(x) = x^\alpha - \alpha x$ với $x \geqslant 0$ và $0 < \alpha < 1$. Từ $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = 0$ có $x = 1$ và khảo sát dấu $f'(x)$ suy ra $f(x) \leqslant f_{ln} = f(1) = 1 - \alpha$ hay $f(x) = x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$. Với $x = \dfrac{p}{q}, p, q > 0$, ta được $p^\alpha q^{1-\alpha} \leqslant \alpha p + (1-\alpha)q$. Đặt $a = \alpha, b = 1 - \alpha$. Khi đó ta có bất đẳng thức:

Mệnh đề 3.1.1. *Với $p, q > 0$ và $a, b \geqslant 0, a + b = 1$ ta có $p^a q^b \leqslant ap + bq$.*

Đặt $p_1 = p, a_1 = a$ và $q = p_2^{\frac{a_2}{b}} p_3^{\frac{a_3}{b}}$ với $0 < a_2 < b$ và $a_2 + a_3 = b$. Lại có:

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \leqslant a_1 p_1 + b p_2^{\frac{a_2}{b}} p_3^{\frac{a_3}{b}} \leqslant a_1 p_1 + b\Big(\frac{a_2}{b} p_2 + \frac{a_3}{b} p_3\Big) = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

với $a_1, a_2, a_3 > 0$ và $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Tiếp tục như vậy, bằng quy nạp suy ra được kết quả sau đây:

Mệnh đề 3.1.2. *Giả thiết $p_k > 0$ và $a_k \geqslant 0$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Khi đó ta có $\prod\limits_{k=1}^{n} p_k^{a_k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k p_k$.*

Khi lấy $a_k = \dfrac{1}{n}$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ ta được Bất đẳng thức Cauchy dưới đây:

Hệ quả 3.1.3. [Cauchy] *Nếu* $p_1, p_2, \ldots, p_n \geqslant 0$ *thì* $n\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} p_k} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} p_k.$

Tiếp tục vận dụng Mệnh đề 3.1.1, đặt $a_1 = a, b_1 = b$ và $p_1 = p^a, q_1 = q^b$ ta có $p_1q_1 \leqslant a_1p_1^{\frac{1}{a_1}} + b_1q_1^{\frac{1}{b_1}}$ với $a_1, b_1 > 0$ và $a_1 + b_1 = 1$. Tương tự, nếu $p_k, q_k \geqslant 0$ và $a_k, b_k > 0, a_k + b_k = 1$, với $k = 1, 2, \ldots, n$ luôn có $p_kq_k \leqslant a_kp_k^{\frac{1}{a_k}} + b_kq_k^{\frac{1}{b_k}}$. Cộng n bất đẳng thức này lại được hệ quả sau đây:

Hệ quả 3.1.4. *Nếu* $p_k, q_k \geqslant 0$ *và* $a_k, b_k > 0, a_k + b_k = 1$, *với* $k = 1, 2, \ldots, n$ *thì ta luôn có* $\sum\limits_{k=1}^{n} p_kq_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_kp_k^{\frac{1}{a_k}} + \sum\limits_{k=1}^{n} b_kq_k^{\frac{1}{b_k}}.$

Mệnh đề 3.1.5. [Cauchy-Holder] *Nếu* $a, b > 0, a+b = 1$, *và các* $A_k, B_k \geqslant 0$ *với* $k = 1, 2, \ldots, n$ *thì ta có* $\prod\limits_{k=1}^{n} A_kB_k \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^{\frac{1}{a}}\right)^a \left(\sum\limits_{k=1}^{n} B_k^{\frac{1}{b}}\right)^b.$

Chứng minh: Với $a_k = a, b_k = b$ và $p_k = \dfrac{A_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^{\frac{1}{a}}\right)^a}, q_k = \dfrac{B_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} B_k^{\frac{1}{a}}\right)^a}$ đem thay vào bất dẳng thức trong Hệ quả 3.1.4 ta nhận được Bất đẳng thức Cauchy-Holder: $\prod\limits_{k=1}^{n} A_kB_k \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^{\frac{1}{a}}\right)^a \left(\sum\limits_{k=1}^{n} B_k^{\frac{1}{b}}\right)^b.$ □

Với $a = b = \dfrac{1}{2}$ ta có được Bất đẳng thức Bunhiakopwski:

Hệ quả 3.1.6. [Bunhiakopwski] *Ta có* $\sum\limits_{k=1}^{n} p_kq_k \leqslant \sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} q_k^2\right)}$ *với mọi số thực* p_k, q_k.

Tiếp theo, xét hàm $f(x) = x^\alpha - \alpha x$ với $x \geqslant 0$ và $\alpha > 1$. Từ $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = 0$ có $x = 1$ và khảo sát dấu $f'(x)$ suy ra $f(x) \geqslant f_{nn} = f(1) = 1 - \alpha$ hay $x^\alpha - \alpha x \geqslant 1 - \alpha$. Đặt $x = 1 + y, y \geqslant -1$. Khi đó ta có bất đẳng thức:

Mệnh đề 3.1.7. [Bernoulli] *Với $\alpha > 1$ và $y \geqslant -1$ ta có $(y+1)^\alpha \geq \alpha y + 1$.*

Ví dụ 3.1.8. *Chứng minh rằng, nếu $a_k \in (0; 1]$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ thì ta có bất đẳng thức: $\Big(1 + a_1\Big)^{\dfrac{1}{a_2}}\Big(1 + a_2\Big)^{\dfrac{1}{a_3}}\cdots\Big(1 + a_n\Big)^{\dfrac{1}{a_1}} \geqslant 2^n$.*

Bài giải: Theo Bất đẳng thức Bernoulli và Bất đẳng thức Cauchy ta có ngay

$$\Big(1 + a_1\Big)^{\dfrac{1}{a_2}}\Big(1 + a_2\Big)^{\dfrac{1}{a_3}}\cdots\Big(1 + a_n\Big)^{\dfrac{1}{a_1}} \geqslant \Big(1 + \frac{a_1}{a_2}\Big)\Big(1 + \frac{a_2}{a_3}\Big)\cdots\Big(1 + \frac{a_n}{a_1}\Big).$$

Vậy $\Big(1 + a_1\Big)^{\dfrac{1}{a_2}}\Big(1 + a_2\Big)^{\dfrac{1}{a_3}}\cdots\Big(1 + a_n\Big)^{\dfrac{1}{a_1}} \geqslant 2^n$. $\square$

Ví dụ 3.1.9. *Chứng minh rằng, nếu $a_k > 0$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ thì ta có bất đẳng thức: $T = \big(\sum\limits_{k \neq 1} a_k\big)^{a_1} + \big(\sum\limits_{k \neq 2} a_k\big)^{a_2} + \cdots + \big(\sum\limits_{k \neq n} a_k\big)^{a_n} > n - 1$. Đặc biệt, nếu $a, b, c > 0$ thì $(b + c)^a + (c + a)^b + (a + b)^c > 2$.*

Bài giải: Nếu mọi $a_k \geqslant 1$ thì $T > n - 1$. Nếu tồn tại k để $a_k \geqslant 1$, chẳng hạn $a_1 \geqslant 1$, thì mỗi $\big(\sum\limits_{k \neq i > 1} a_k\big)^{a_i} > 1$ và như vậy $T > n - 1$. Cuối cùng là xét trường hợp $0 < a_k < 1$ với mọi k. Sử dụng kết quả $a^b > \dfrac{a}{a+b}$ khi $0 < b < 1$ ta có $T > \dfrac{\sum\limits_{k \neq 1} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \dfrac{\sum\limits_{k \neq 2} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} + \cdots + \dfrac{\sum\limits_{k \neq n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = n - 1$. $\square$

Xét thêm ba hàm sau đây: Hàm thứ nhất $f(x) = e^x - x$ Vì $f'(x) = e^x - 1$ nên có ngay bảng xét dấu

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & \text{khi } \ x > 0 \\ = 0 & \text{khi } \ x = 0 \\ < 0 & \text{khi } \ x < 0. \end{cases}$$

Như vậy $f(x) \geqslant f_{nn} = f(0) = 1$ và suy ra bất đẳng thức dưới đây:

Mệnh đề 3.1.10. *Ta có* $e^x \geqslant x + 1$ *khi* $x \geqslant 0$.

Ví dụ 3.1.11. *Giả thiết đa thức* $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ *có* n *nghiệm thực, trong đó* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} > 0$. *Chứng minh rằng* $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n < e^{a_1}$. *Từ đây suy ra, nếu* $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \geqslant e^{a_1}$ *thì* $f(x)$ *không thể có* n *nghiệm đều thực.*

Bài giải: Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ là n nghiệm thực của $f(x) = 0$. Dễ dàng thấy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < 0$ và $f(x) = \prod\limits_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$. Vậy $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n > 0$ và $f(1) = \prod\limits_{k=1}^{n}(1 - \alpha_k)$. Vì $e^x > 1 + x$ khi $x > 0$ nên $f(1) = \prod\limits_{k=1}^{n}(1 - \alpha_k) < e^{-\alpha_1}e^{-\alpha_2}\ldots e^{-\alpha_n} = e^{a_1}$. □

Xét hàm thứ hai $g(x) = xe^{-x}$ với $x \geqslant 0$. Vì $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ nên có ngay bảng xét dấu

$$g'(x)\begin{cases} > 0 \ \text{khi} \ \ x < 1 \\ = 0 \ \text{khi} \ \ x = 1 \\ < 0 \ \text{khi} \ \ 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Như vậy $g(x) \leqslant g_{ln} = g(1) = \dfrac{1}{e}$ và suy ra bất đẳng thức dưới đây:

Mệnh đề 3.1.12. *Ta có* $xe^{-x} \leqslant \dfrac{1}{e}$ *khi* $x \geqslant 0$.

Ví dụ 3.1.13. *Giả thiết các số* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. *Khi đó* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_ke^{-a_k} \leqslant \dfrac{n}{e}$.

Bài giải: Theo Mệnh đề 3.1.12 ta có $\sum\limits_{k=1}^{n} a_ke^{-a_k} \leqslant n\dfrac{1}{e} = \dfrac{n}{e}$. □

Xét hàm thứ ba $h(x) = \sin x + \tan x - 2x$ trong $[0; \dfrac{\pi}{2})$. Vì $h'(x) = \cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 2 > 0$ khi $x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$ nên $h(x)$ đồng biến trong $[0; \dfrac{\pi}{2})$ với $h_{nn} = g(0)$. Từ đây suy ra bất đẳng thức dưới đây:

Mệnh đề 3.1.14. *Ta luôn có bất đẳng thức* $\sin x + \tan x > 2x$ *khi* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 3.1.15. *Giả sử tam giác* ABC *nhọn với các góc được đo bằng rađian. Khi đó* $\sin A + \sin B + \sin C + \tan A \tan B \tan C > 2\pi$.

Bài giải: Theo Mệnh đề 3.1.13 ta có các bất đẳng thức dưới đây:

$$\begin{aligned}\sin A + \tan A &> 2A\\ \sin B + \tan B &> 2B\\ \sin C + \tan C &> 2C.\end{aligned}$$

Vì $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ nên sau khi cộng ba bất đẳng thức trên ta được $\sin A + \sin B + \sin C + \tan A \tan B \tan C > 2\pi$. □

Xây dựng lại một số bất đẳng thức qua hàm nhiều biến

Bây giờ ta chứng minh lại một vài kết quả qua đạo hàm của hàm nhiều biến.

Mệnh đề 3.1.16. *Diện tích S_{n+1} của đa giác lồi $n+1$ cạnh nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R không vượt quá $\dfrac{(n+1)R^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n+1}$ hay nói một cách khác: Trong số những đa giác lồi nội tiếp trong cùng một đường tròn thì đa giác đều có diện tích lớn nhất.*

Chứng minh: Đặt $x_k = \angle A_k O A_{k+1}$ với quy ước $A_{n+2} \equiv A_1$. Khi đó ta có $2S_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} R^2 \sin x_k$. Xét $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = 2\pi \\ f = \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n + \sin x_{n+1} \\ 0 < x_k < 2\pi, k = 1, 2, \ldots, n+1. \end{cases}$

Từ hệ này suy ra hệ

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2\pi - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ f = \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n - \sin(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ 0 < x_k < 2\pi, k = 1, 2, \ldots, n+1. \end{cases}$$

Xác định điểm dừng qua hệ phương trình $\begin{cases} \cos x_1 - \cos(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ \cos x_2 - \cos(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ \ldots \\ \cos x_n - \cos(x_1 + \cdots + x_n) = 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = 2\pi \\ 0 \leqslant x_k \leqslant 2\pi, k = 1, 2, \ldots, n+1. \end{cases}$

Như vậy được điểm dừng $M(\dfrac{2\pi}{n+1}, \ldots, \dfrac{2\pi}{n+1})$ và $f(M) = (n+1)\sin\dfrac{2\pi}{n+1}$.

Bằng quy nạp theo n và so sánh với giá trị của hàm xét trên biên với phương trình $x_k = 0$ ta dễ dàng chỉ ra được $S_{n+1} \leqslant \dfrac{(n+1)R^2}{2} \sin \dfrac{2\pi}{n+1}$. □

Hoàn toàn tương tự ta còn có kết quả sau đây:

Mệnh đề 3.1.17. *Trong số những đa giác lồi nội tiếp trong cùng một đường tròn thì đa giác đều có chu vi lớn nhất.*

Ví dụ 3.1.18. *Trong số những tam giác (tứ giác lồi) nội tiếp trong cùng một đường tròn thì tam giác đều (hình vuông) có diện tích và chu vi lớn nhất.*

Chú ý rằng, nhiều khi sử dụng đạo hàm lời giải bài toán sẽ trở lên dài dòng và phức tạp. Trước khi chuyển sang phần tiếp theo ta xét thêm một ví dụ sau đây để thấy rằng, nhiều bài toán sẽ có lời giải ngắn gọn khi ta khéo biến đổi:

Ví dụ 3.1.19. *Giả sử $M(\alpha; \beta; \gamma)$ trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn $(Oxyz)$, ở đó $a, b, c > 0$. Hãy xác định mặt phẳng qua M cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất.*

Bài giải: Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$ với $a, b, c > 0$. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$. Vì (ABC) đi qua M nên $\dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{\beta}{b} + \dfrac{\gamma}{c} = 1$ hay $abc = \alpha bc + \beta ca + \gamma ab$. Từ $abc = \alpha bc + \beta ca + \gamma ab \geqslant 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma(abc)^2}$, theo Bất đẳng thức Cauchy, ta suy ra $abc \geqslant 27\alpha\beta\gamma$. Vậy $(V_{OABC})_{nn} = \dfrac{9\alpha\beta\gamma}{2}$ khi $a = 3\alpha, b = 3\beta, c = 3\gamma$ và khi đó $(ABC) : \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} + \dfrac{z}{\gamma} = 3$. □

3.2 Giải phương trình và bất phương trình

Vấn đề tồn tại nghiệm của hệ có điều kiện hoặc xác định giá trị tham số để hệ có nghiệm thường liên quan chặt chẽ đến việc tìm cực trị của một hàm số. Một vài mối liên hệ được biểu hiện qua các kết quả sau đây:

Mệnh đề 3.2.1. *Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a; b]$ với $m = f_{nn}, M = f_{ln}$. Khi đó*

(i) *$f(x) = u$ có nghiệm thuộc $[a; b]$ khi và chỉ khi $m \leqslant u \leqslant M$.*

(ii) *$f(x) \leqslant u$ có nghiệm thuộc $[a; b]$ khi và chỉ khi $m \leqslant u$ và $f(x) \leqslant u$ không có nghiệm thuộc $[a; b]$ khi và chỉ khi $u < m$.*

(iii) *$f(x) \geqslant u$ có nghiệm thuộc $[a;b]$ khi và chỉ khi $u \leqslant M$ và $f(x) \geqslant u$ không có nghiệm thuộc $[a;b]$ khi và chỉ khi $u > M$.*

Mệnh đề 3.2.2. *Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a;b]$ với $m = f_{nn}, M = f_{ln}$. Khi đó*

(i) *Mọi $x \in [a;b]$ đều là nghiệm của $f(x) \leqslant u$ khi và chỉ khi $u \geqslant M$.*

(ii) *Mọi $x \in [a;b]$ đều là nghiệm của $f(x) \geqslant u$ khi và chỉ khi $u \leqslant m$.*

Ví dụ 3.2.3. *Giải phương trình* $\sqrt{9x^2-1} + \sqrt{6x-1} = 1$.

Bài giải: Điều kiện $x \geqslant \dfrac{1}{3}$. Vậy $1 = \sqrt{9x^2-1} + \sqrt{6x-1} \geqslant \sqrt{6x-1} \geqslant \sqrt{6.\dfrac{1}{3} - 1} = 1$. Do đó phương trình có đúng một nghiệm $x = \dfrac{1}{3}$. □

Ví dụ 3.2.4. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{14-y} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{y-2} + \sqrt{14-x} = 2\sqrt{6}. \end{cases}$

Bài giải: Điều kiện $2 \leqslant x, y \leqslant 14$. Cộng hai phương trình, vế với vế, được

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{14-x} + \sqrt{y-2} + \sqrt{14-y} = 4\sqrt{6}.$$

Xét hàm $f(t) = \sqrt{t-2} + \sqrt{14-t}$ trên $[2;14]$. Hàm liên tục này nhận giá trị lớn nhất $f_{ln} = 2\sqrt{6}$ tại $t = 8$. Vậy hệ phương trình có đúng một nghiệm $x = y = 8$. □

Ví dụ 3.2.5. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \sqrt{x-3} + \sqrt{13-y} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{y-3} + \sqrt{13-z} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{z-3} + \sqrt{13-x} = 2\sqrt{5}. \end{cases}$

Bài giải: Điều kiện $3 \leqslant x, y, z \leqslant 13$. Cộng hai phương trình, vế với vế, được

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{13-x} + \sqrt{y-3} + \sqrt{13-y} + \sqrt{z-3} + \sqrt{13-z} = 6\sqrt{5}.$$

Xét hàm $f(t) = \sqrt{t-3} + \sqrt{13-t}$ trên $[3;13]$. Hàm liên tục này nhận giá trị lớn nhất $f_{ln} = 2\sqrt{5}$ tại $t = 8$. Vậy hệ phương trình có đúng một nghiệm $x = y = z = 8$. □

Ví dụ 3.2.6. *Giải hệ bất phương trình* $\begin{cases} 3y \geqslant x^2 \\ 4x - 9 \geqslant y \\ 2x^2 + 3y^2 = 2349. \end{cases}$

Bài giải: Ta có $4x - 9 \geqslant y \geqslant \frac{x^2}{3}$. Vậy $x^2 - 12x + 27 \leqslant 0$ hay $3 \leqslant x \leqslant 9$. Từ đây suy ra $y > 0$ và $2349 = 2x^2 + 3y^2 \leqslant 2x^2 + 3(4x - 9)^2 = f(x)$. Khảo sát hàm $f(x) = 50x^2 - 216x + 243$ với $3 \leqslant x \leqslant 9$. Vì $f(x)$ đồng biến trên $[3; 9]$ nên $f_{ln} = f(9) = 2349$. Như vậy $x = 9, y = 27$. □

Ví dụ 3.2.7. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x + y + z + xy + yz + zx = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$

Bài giải: Với $t = x+y+z$ có $3(xy+yz+zx) \leqslant t^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2) = 9$. Như vậy $9 \geqslant t^2 \geqslant 3(6 - t)$. Từ đây suy ra $t = 3$. Tóm lại $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$
Dễ dàng suy ra $x = y = z = 1$. □

Ví dụ 3.2.8. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2(x^3 - y^3) - 3(x - y) = 2. \end{cases}$

Bài giải: Đặt $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t$ với $t \in [0; 2\pi]$. Khi đó ta có

$$2 = 2(x^3 - y^3) - 3(x - y) = \sqrt{2}(\cos 3t + \sin 3t) = 2\cos(3t - \frac{\pi}{4}) \leqslant 2.$$

Như vậy dấu = phải xẩy ra hay $3t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ với $k = 0, 1, 2$. Từ đây suy ra nghiệm của hệ đã cho. □

Ví dụ 3.2.9. *Xác định giá trị của tham số m để $x+3 = m\sqrt{x^2 + 1}$ có nghiệm.*

Bài giải: Ta có $y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}} = m$. Dễ dàng có $-1 < y \leqslant \sqrt{10}$. Vậy phương trình $x + 3 = m\sqrt{x^2 + 1}$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \leqslant \sqrt{10}$. □

Ví dụ 3.2.10. *Giải phương trình :* $\sqrt[4]{1 - x} + \sqrt[4]{1 + x} + \sqrt[4]{1 - x} = 3$

Bài giải: Điều kiện phương trình $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 + x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$ hay $-1 \leq x \leq 1$.
Đặt $f(x) = \sqrt[4]{1 - x} + \sqrt[4]{1 + x} + \sqrt[4]{1 - x}$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$\sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt[4]{(1-x)(1+x)} \leq \dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2}$; $\sqrt[4]{1+x} \leq \dfrac{1+\sqrt{1+x}}{2}$; $\sqrt[4]{1-x} \leq \dfrac{1+\sqrt{1-x}}{2}$. Do đó $f(x) = \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} \leq 1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \leq 1 + \dfrac{1+(1+x)+1+(1-x)}{2} = 3.$

Suy ra $f(x) \leq 3$ với mọi $-1 \leq x \leq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x} \\ \sqrt{1-x} = 1 \\ \sqrt{1+x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trinh có nghiệm duy nhất là $x = 0$. □

Ví dụ 3.2.11. *Giải phương trình sau:*

$$\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{2-\sin^2 x} = 3$$

Bài giải: Đặt $f(x) = \sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} + \sin x\sqrt{2-\sin^2 x}$.
Theo bất đẳng thức Bunhiacowski ta có:
$(\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x}) \leq \left[\sin^2 x + (2-\sin^2 x)\right](1+1)$.
Suy ra: $\sin x + \sqrt{2-\sin^2 x} \leq 2$.
Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có: $|\sin x|\sqrt{2-\sin^2 x} \leq \dfrac{\sin^2 x + (2-\sin^2 x)}{2}$.
Suy ra: $\sin x\sqrt{2-\sin^2 x} \leq 1$, do đó $f(x) \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2-\sin^2 x} \\ |\sin x| = \sqrt{2-\sin^2 x} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2-\sin^2 x}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin^2 x = 2-\sin^2 x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \sin x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in Z)$ □

Ví dụ 3.2.12. *Giải phương trình:*

$$\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$$

Bài giải: Đặt $f(x) = \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = \sqrt{3(x-1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 9}$, do đó $f(x) \geq 5, \forall x \in D = \{x : 4 - 2x - x^2 \geq 0\}$.
Đặt $g(x) = 4 - 2x - x^2 = -(x+1)^2 + 5$, do đó $g(x) \leq 5$.
Khi đó phương trình đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} f(x) = 5 \\ g(x) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$
Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình. □

Ví dụ 3.2.13. *Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm:*

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$$

Bài giải: Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương $-3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = m$,(1)

Xét $f(x) = -3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$, với $x \geq 1$ suy ra $0 \leq t < 1$. Khi đó $f(x)$ với $x \geq 1$ tương đương với $g(t) = -3t^2 + 2t$ với $0 \leq t < 1$. Ta khảo sát $g(t)$ với $0 \leq t \leq 1$ thu được $g_{nn} = g(1) = -1$ và $g_{ln} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $f_{ln} = \dfrac{1}{3}$ và $f(x) > -1$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $-1 < m \leq \dfrac{1}{3}$ □

Ví dụ 3.2.14. *Xác định m để phương trình sau có nghiệm:*

$$m(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

Bài giải: Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$
Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ với $-1 \leq x \leq 1$ thì $0 \leq t \leq \sqrt{2}$
Phương trình đã cho trở thành $m(t+2) = -t^2 + t + 2$, vì $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ nên phương trình tương đương với phương trình $\dfrac{-t^2 + t + 2}{t+2} = m$

Đặt $f(t) = \dfrac{-t^2 + t + 2}{t+2}$. Do $f(t)$ liên tục với $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Bằng phương pháp khảo sát hàm số ta thu được $f_{\ln} = f(0) = 1; f_{nn} = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$.
Vậy để phương trình có nghiệm thì $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$ □

Ví dụ 3.2.15. *Tìm a để bất phương trình sau*

$$\sqrt{(a+2)x - a} = |x+1|\,.$$

Có ngiệm đúng với mọi $0 \leq x \leq 2$.

Bài giải: Bình phương hai vế ta đưa bất phương trình về dạng tuương đương sau:

$$x^2 + 1 \le a(x-1), (1)$$

Ta thấy $x = 1$ không phải là nghiệm của (1) do đó (1) tương đương với hệ:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+1}{x-1} \ge a, 0 \le x < 1(I) \\ \dfrac{x^2+1}{x-1} \le a, 1 < x \le 2(II) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ với $0 \le x \le 2$. Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.
Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$
Lập bảng biến thiên ta thu được:
Với $0 \le x < 1$ ta được: $f_{ln} = f(0) = -1$ và $f_{nn} = -\infty$, suy ra $a \le -1$
Với $1 < x \le 1$ ta được: $f_{nn} = f(2) = 5$ và $f_{ln} = +\infty$, suy ra $a \ge 5$
Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi $0 \le x \le 2$ thì $a \le -1$ hoặc $a \ge 5$. □

Ví dụ 3.2.16. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$

Bài giải: Dễ thấy nghiệm của hệ là $x = y = z = 0$.
Nếu một trong ba ẩn số x, y, z nhận giá trị khác 0 thì hai ẩn kia cũng nhận giá trị khác 0. Nhân các vế của hệ ta được:

$$\begin{aligned} &\frac{8x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = xyz \\ &\Leftrightarrow \frac{8xyz}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = 1 \\ &\Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) = 8xyz \\ &\Leftrightarrow (x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})(z+\frac{1}{z}) = 8 \end{aligned}$$

Đặt $P = (x+\dfrac{1}{x})(y+\dfrac{1}{y})(z+\dfrac{1}{z}) = 8$, ta có $\max\limits_{x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0} P = 8$. Dấu bằng xảy

ra khi $x = y = z = 1$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x, y, z) = (0, 0, 0); (1, 1, 1)$ □

Ví dụ 3.2.17. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:*
$\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m \\ x^2 + x - y = 1 - 2m \end{cases}$ *với* $(x, y) \in R$

Bài giải: Từ hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 - (y+2)x^2 + xy = m, (1) \\ x^2 + x - y = 1 - 2m, (2) \end{cases}$
Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 rồi công với (1)ta được:

$$4x^3 - (2y+4)x^2 + 2xy + x^2 + x - y = 1$$
$$\Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 + x^2 + x - 1 = y(2x^2 - 2x + 1)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{4x^3 - 3x^2 + x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$
$$\Leftrightarrow y = 2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

Thay vào (2) ta có: $2m = -x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2x^2 - 2x + 1)} = 1 - \frac{1}{2}(2x^2 - 2x + 1) - \frac{3}{2(2x^2 - 2x + 1)}$
Xét $f(x) = -\frac{1}{2}(2x^2 - 2x + 1) - \frac{3}{2(2x^2 - 2x + 1)}$, đặt $t = 2x^2 - 2x + 1$, với $t \geq \frac{1}{2}$. Khi đó $f(x)$ tương đương với $g(t) = 1 - \frac{1}{2}(t + \frac{3}{t})$, với $t \geq \frac{1}{2}$.
Bằng phương pháp khảo sát ta tìm được $g_{\ln} = 1 - \sqrt{3}; g_{nn} = -\infty$ hay $f_{\ln} = 1 - \sqrt{3}; f_{nn} = -\infty$.
Vậy để phương trình có nghiệm thì $2m \leq 1 - \sqrt{3}$ hay $m \leq \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ □

Kết luận

Trong luận văn này, chúng tôi đã trình bày được những vấn đề cơ bản sau:

(1) Nhắc lại định nghĩa, một số tính chất của bất đẳng thức. Trình bày lại một số phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức cùng một số ví dụ tương thích từng phương pháp.

(2) Nhắc lại khái niệm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất và một số kết quả liên quan. Trình bày được một số phương pháp cơ bản để xác định giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất một biểu thức hay một hàm số. Chọn lọc và sáng tác được một số bài toán tương ứng.

(3) Trình bày phương pháp sáng tác một số bài toán cực trị trong tam giác qua đa thức bậc ba.

(4) Vận dụng khái niệm cực trị vào việc chứng minh lại một số bất đẳng thức cổ điển và giải hệ phương trình hay bất phương trình.

Tuy đã hết sức cố gắng nhưng do thời gian có hạn nên luận văn vẫn không thể tránh khỏi những sai xót và hạn chế nhất định, rất mong được sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Doãn Minh Cương (chủ biên), *Toán ôn thi đại học*, Hà Nội 2003.

[2] Nguyễn Đễ (chủ biên), *Các bài toán đại số hay và khó*, NXB Giáo Dục 1996.

[3] Lê Hồng Đức cùng tập thể giáo viên trường THPT Quốc Tế NEWTON- Hà Nội, *Phương pháp chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số*, Hà Nội 1995.

[4] Trần Văn Hạo (chủ biên), *Chuyên đề bất đẳng thức luyện thi đại học*, NXB Giáo Dục 2005.

[5] Phan Huy Khải, *Các phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất*, Hà Nội 1995.

[6] Phan Huy Khải, *Toán nâng cao lượng giác lớp 11*, Hà Nội 1999.

[7] Võ Đại Mau- Võ Đại Hoài Đức (chủ biên), *Các phương pháp đặc biệt tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số*, NXB Giáo Dục 2000.

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn ngày 22 tháng 11 năm 2011 và đã chỉnh sửa với các ý kiến đóng góp của các thầy, cô trong hội đồng.

Thái Nguyên, ngày 24 tháng 11 năm 2011
Xác nhận của cán bộ hướng dẫn khoa học

PGS.TS Đàm Văn Nhỉ