

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Phùng Thị Oanh

HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH GÓC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Lời nói đầu	3
1 Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản	6
1.1 Biến đổi tuyến tính góc dạng 1	7
1.2 Biến đổi tuyến tính góc dạng 2	17
1.3 Biến đổi tuyến tính góc dạng 3	28
1.4 Biến đổi tuyến tính góc dạng 4	32
1.5 Biến đổi tuyến tính góc dạng 5	38
2 Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng tổng quát	45
2.1 Một số biến đổi tuyến tính dạng tổng quát	45
2.2 Một số bài toán khác	49
Kết luận	56
Các công trình có liên quan	57
Tài liệu tham khảo	58

LỜI NÓI ĐẦU

Những bài toán liên quan đến các hệ thức trong tam giác thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi, các đề thi Đại học. Số lượng các hệ thức trong tam giác trong các tài liệu dành cho học sinh phổ thông là rất lớn, vì vậy học sinh dễ bị choáng ngợp, cảm thấy khó khăn khi giải dạng bài toán này. Học sinh thường không biết bắt đầu từ đâu vì không thấy được mối liên hệ giữa các hệ thức lượng giác. Do đó cần có các phương pháp giúp học sinh phân loại và thấy được mối quan hệ giữa các hệ thức lượng giác trong tam giác. Như vậy số lượng các hệ thức lượng giác trong tam giác cần chứng minh sẽ giảm đi một cách đáng kể. Một trong các phương pháp phân loại và tạo ra hệ thức lượng giác trong tam giác là *phương pháp biến đổi tuyến tính góc*. Ý tưởng của phương pháp biến đổi tuyến tính góc là (xem [9]): Sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc để tạo ra tam giác mới $A_1B_1C_1$ từ tam giác ABC . Từ một hệ thức đã biết cho tam giác $A_1B_1C_1$ ta sẽ có một hệ thức mới trong tam giác ABC .

Dạng tổng quát của phép biến đổi tuyến tính góc là:

$$\begin{aligned} A_1 &= k_{11}A + k_{12}B + k_{13}C + \lambda_1\pi, \\ B_1 &= k_{21}A + k_{22}B + k_{23}C + \lambda_2\pi, \\ C_1 &= k_{31}A + k_{32}B + k_{33}C + \lambda_3\pi, \\ A_1 + B_1 + C_1 &= \pi, A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0. \end{aligned}$$

Hệ bốn phương trình và ba bất đẳng thức trên chứa 12 hệ số k_{ij}, λ_i ($i, j = 1, 2, 3$). Do đó, bằng cách chọn các bộ hệ số, ta sẽ có rất nhiều phép biến đổi tuyến tính góc. Các phép biến đổi tuyến tính góc được khai thác trong luận văn là:

- 1) $A_1 = \frac{\pi - A}{2}, B_1 = \frac{\pi - B}{2}, C_1 = \frac{\pi - C}{2}$ ($\triangle A_1B_1C_1$ nhọn),
- 2) $A_1 = \pi - 2A, B_1 = \pi - 2B, C_1 = \pi - 2C$ (với $\triangle ABC$ nhọn),

- 3) $A_3 = \frac{A}{2}, B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi + C}{2}$ ($\triangle A_3B_3C_3$ tù có góc $C_3 > \frac{\pi}{2}$),
 4) $A_4 = 2A, B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi$ (với $\triangle ABC$ tù có $C > \frac{\pi}{2}$),
 5) $A_5 = \frac{\pi}{2} - A, B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C, \dots$

Nội dung chính của luận văn gồm hai chương:

Chương 1 Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản

Chương 1 đưa ra một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản nhằm tạo mới các hệ thức lượng giác trong tam giác. Các hệ thức trong tam giác được lựa chọn từ các đề thi học sinh giỏi, các tạp chí Toán học, các đề thi Đại học và sáng tạo những bài mới từ những bài đã có.

Chương 2 Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng tổng quát.

Chương 2 xét các phép biến đổi tuyến tính góc dạng không đối xứng và sáng tạo ra những bài mới dựa trên những bài đã có. Một số phần trong nội dung luận văn đã được đưa vào trong [3] và được thông báo trong [1], [2]. Tất cả các bài tập đều được giải chi tiết trong [3]. Hy vọng Luận văn cũng cung cấp cho các Thầy giáo, các em học sinh một tài liệu về các hệ thức lượng trong tam giác theo phương pháp biến đổi tuyến tính góc, và thông qua đó, học sinh có thể sáng tạo ra nhiều hệ thức mới. Tác giả luận văn cũng hi vọng sẽ tiếp tục bổ sung và hoàn thiện thêm đề tài này trong quá trình giảng dạy toán ở trường phổ thông.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS-TS Tạ Duy Phượng. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới người Thầy rất nghiêm khắc và tận tụy với công việc, đã truyền thụ những kiến thức cũng như kinh nghiệm cho tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu đề tài. Tác giả xin cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo sau Đại học cùng các Thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy và hướng dẫn khoa học cho lớp Cao học Toán K3 Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, các thầy cô tổ Toán - Tin trường Phổ thông Vùng cao Việt Bắc, bạn bè đồng nghiệp cùng gia đình đã tạo điều kiện giúp đỡ, khích lệ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Để hoàn thành luận văn này, tác giả đã tập trung học tập và nghiên cứu một cách nghiêm túc trong suốt khóa học. Tuy nhiên, do hạn chế về

thời gian, cũng như trình độ hiểu biết nên trong quá trình thực hiện không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo của các thầy cô giáo và những góp ý của bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên 2011
Phùng Thị Oanh

Chương 1

Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản

Trong đại dương mênh mông các đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác trong tam giác (và cả trong đại dương các sách về lượng giác hiện nay), chúng ta thường quan sát thấy những “cặp bài trùng”, tức là chúng có vẻ rất giống nhau. Thí dụ, với mọi tam giác ta luôn có:

1) (Vô địch Cộng hoà dân chủ Đức, 1965)

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}; \quad (1.1)$$

2) (Đại học An ninh, 1996, Khối A)

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}; \quad (1.2)$$

3)

$$\cos \frac{A+3B}{4} + \cos \frac{B+3C}{4} + \cos \frac{C+3A}{4} \leq \frac{3}{2}; \quad (1.3)$$

4)

$$\cos \frac{\pi+A}{4} + \cos \frac{\pi+B}{4} + \cos \frac{\pi+C}{4} \leq \frac{3}{2}; \quad (1.4)$$

.....

Giải thích như thế nào về sự giống nhau của các bất đẳng thức trên? Có lẽ có nhiều cách giải thích. Với mỗi cách nhìn, ta có thể phát hiện ra những qui luật ẩn tàng bên trong sự giống nhau về vẻ ngoài của các hệ

thức. Trong luận văn này, chúng tôi cố gắng giải thích sự giống nhau của những cặp bài trùng ấy dựa trên nhận xét sau đây: Thực chất các hệ thức lượng giác trên giống nhau là bởi vì chúng có thể nhận được từ nhau qua một biến đổi đại số, cụ thể là phép biến đổi tuyến tính của góc.

Chương 1 xét một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng cơ bản.

1.1 Biến đổi tuyến tính góc dạng 1

$$A_1 = \frac{A + (n-1)B}{n}, B_1 = \frac{B + (n-1)C}{n}, C_1 = \frac{C + (n-1)A}{n}.$$

Mệnh đề 1.1. Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Khi ấy

$$A_1 = \frac{A + (n-1)B}{n}, B_1 = \frac{B + (n-1)C}{n}, C_1 = \frac{C + (n-1)A}{n}$$

với $n = 2, 3, \dots$ cũng là ba góc một tam giác.

Chứng minh Thật vậy, vì A, B, C là ba góc của tam giác nên

$$0 < A, B, C < \pi \text{ và } A + B + C = \pi.$$

$$\text{Suy ra } 0 < A_1 = \frac{A + (n-1)B}{n} < \frac{\pi + (n-1)\pi}{n} < \pi.$$

Tương tự, $0 < B_1, C_1 < \pi$ và

$$A_1 + B_1 + C_1 = \frac{A + (n-1)B}{n} + \frac{B + (n-1)C}{n} + \frac{C + (n-1)A}{n} = \pi$$

Chứng tỏ A_1, B_1, C_1 là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 1.2. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Khi ấy

$$A_1 = \frac{A + (n-1)C}{n}, B_1 = \frac{B + (n-1)A}{n}, C_1 = \frac{C + (n-1)B}{n}$$

với $n = 2, 3, \dots$ cũng là ba góc của một tam giác.

Mệnh đề 1.3. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Khi ấy

$$A_1 = \frac{B + (n-1)C}{n}, B_1 = \frac{C + (n-1)A}{n}, C_1 = \frac{A + (n-1)B}{n}$$

với $n = 2, 3, \dots$ cũng là ba góc của một tam giác.

Với $n = 2$ ta có

Hệ quả 1.1. Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Khi ấy $A_1 = \frac{B+C}{2}, B_1 = \frac{C+A}{2}, C_1 = \frac{A+B}{2}$ cũng là ba góc của một tam giác.

Chú ý 1.1. Vì $A_1 = \frac{B+C}{2} = \frac{\pi-A}{2}$ nên $0 < A_1 = \frac{\pi-A}{2} < \frac{\pi}{2}$ và phép biến đổi tuyến tính góc $A_1 = \frac{B+C}{2}, B_1 = \frac{C+A}{2}, C_1 = \frac{A+B}{2}$ cũng là phép biến đổi tuyến tính góc $A_2 = \frac{\pi-A}{2}, B_2 = \frac{\pi-B}{2}, C_2 = \frac{\pi-C}{2}$ và $A_2B_2C_2$ là tam giác có ba góc nhọn.

Nhận xét 1.1. Vì $A_1 = \frac{\pi-A}{2}$ nên $\sin A_1 = \sin \frac{\pi-A}{2} = \cos \frac{A}{2}$
 $(\cos A_1 = \sin \frac{A}{2}, \tan A_1 = \cot \frac{A}{2}, \cot A_1 = \tan \frac{A}{2})$. Như vậy, từ một hệ thức chứa $\sin A_1, \sin B_1, \sin C_1$ (tương ứng, chứa $\cos A_1, \cos B_1, \cos C_1$; $\tan A_1, \tan B_1, \tan C_1$; $\cot A_1, \cot B_1, \cot C_1$ đúng cho tam giác $A_1B_1C_1$ ta sẽ suy ra một hệ thức chứa $\cos \frac{A}{2}, \cos \frac{B}{2}, \cos \frac{C}{2}$ (tương ứng, chứa $\sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \sin \frac{C}{2}, \cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}, \tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$) đúng cho tam giác ABC .

Sử dụng Nhận xét 1.1, từ một hệ thức lượng giác trong tam giác đã biết, ta có thể tạo ra ngay một (một số) hệ thức lượng giác khác mà không phải chứng minh theo cách truyền thống (biến đổi lượng giác). Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng với mọi tam giác ta luôn có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Chứng minh Ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \cos A - \cos B - \cos C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2\cos(B+C) - 2\cos B - 2\cos C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2\cos B \cos C - 2\sin B \sin C - 2\cos B - 2\cos C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin^2 B + \cos^2 B + \sin^2 C + \cos^2 C + 2\cos B \cos C - 2\sin B \sin C - 2\cos B - 2\cos C \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài toán 1.2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$\begin{aligned} & \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{2} - \sin \frac{A}{2} - \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3 - 2 \sin \frac{\pi - (B+C)}{2} - 2 \sin \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3 - 2 \cos \frac{B+C}{2} - 2 \sin \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 1 + \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \\ & - 2(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}) - 2 \sin \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2})^2 + (1 - \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2})^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Đặt $A_1 = \frac{\pi - A}{2}, B_1 = \frac{\pi - B}{2}, C_1 = \frac{\pi - C}{2}$. Khi ấy A_1, B_1, C_1 là ba góc của một tam giác. Do đó Bài 1.1 đúng cho tam giác $A_1B_1C_1$. Vì $\cos A_1 = \sin \frac{A}{2}, \cos B_1 = \sin \frac{B}{2}, \cos C_1 = \sin \frac{C}{2}$ nên ta có:

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = \cos A_1 + \cos B_1 + \cos C_1 \leq \frac{3}{2}, \text{ (đpcm) .}$$

Lời bình: Chứng minh 2 (biến đổi tuyến tính góc) rất đơn giản và gần như không đòi hỏi kiến thức gì, ngoài công thức quan hệ lượng giác của hai góc phụ nhau.

Bài toán 1.3. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC có ba góc nhọn ta có

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{1}{3}(\tan A \tan B \tan C).$$

Chứng minh Không mất tổng quát, giả sử $\frac{\pi}{2} > A \geq B \geq C > 0$. Do tính đồng biến của hàm số tan và tính nghịch biến của hàm số cos trên khoảng

$(0; \frac{\pi}{2})$ ta có $\tan A \geq \tan B \geq \tan C$ và $0 < \cos A \leq \cos B \leq \cos C$. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev (xem, thí dụ, [8], trang 37) ta được

$$\begin{aligned} & (\tan A + \tan B + \tan C)(\cos A + \cos B + \cos C) \\ & \geq 3(\tan A \cos A + \tan B \cos B + \tan C \cos C) = 3(\sin A + \sin B + \sin C) \\ & \Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ (xem, thí dụ, [8], Bài 371). Do đó

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leq \frac{\tan A \tan B \tan C}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Bài toán 1.4. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{3} \left(\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \right)$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \geq \frac{C}{2}$. Khi ấy do

$\frac{\pi}{2} > \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} > 0$ và hàm số $\sin$ đồng biến, còn hàm số $\cot$ nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$ nên ta có

$$\cot \frac{A}{2} \leq \cot \frac{B}{2} \leq \cot \frac{C}{2} \text{ và } \sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \geq \sin \frac{C}{2} > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev (xem, thí dụ, [8], trang 37) ta có

$$\begin{aligned} & \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \\ & \geq 3 \left(\cot \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \\ & = 3 \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \\ & \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \leq \frac{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}}{3} \end{aligned}$$

Mặt khác, $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$ (xem, thí dụ, [8], Bài 395). Suy ra

$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = \frac{1}{3} \left(\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \right)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Đặt $A_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_1 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_1 = \frac{\pi - C}{2}$. Khi ấy $\sin A_1 = \cos \frac{A}{2}$, $\cos A_1 = \sin \frac{A}{2}$, $\tan A_1 = \cot \frac{A}{2}$, nên áp dụng Bài 1.3 cho tam giác $A_1B_1C_1$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}} &= \frac{\sin A_1 + \sin B_1 + \sin C_1}{\cos A_1 + \cos B_1 + \cos C_1} \\ &\leq \frac{\tan A_1 \tan B_1 \tan C_1}{3} = \frac{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}}{3} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài toán 1.5. Có nhận xét gì về tam giác ABC biết

$$\tan A \tan B \tan C = 3(\cot A + \cot B + \cot C)?$$

Giải Ta có

$$\begin{aligned} \tan A \tan B \tan C &= 3(\cot A + \cot B + \cot C) \\ \Leftrightarrow \frac{\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A}{\tan A \tan B \tan C} &= \frac{\tan A \tan B \tan C}{3} \\ \Leftrightarrow 3(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A) &= (\tan A \tan B \tan C)^2. \end{aligned}$$

Vì $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ nên hệ thức trên có thể viết

$$3(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A) = (\tan A + \tan B + \tan C)^2$$

$$\Leftrightarrow (\tan A - \tan B)^2 + (\tan B - \tan C)^2 + (\tan C - \tan A)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan A = \tan B = \tan C \text{ hay } ABC \text{ là tam giác đều.}$$

Bài toán 1.6 (Tuyển tập đề thi Olympic 30-4, năm 2007).

Cho tam giác ABC có p , R , r tương ứng là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương:

- (1) $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = 3(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2})$;
 (2) $\sqrt{3r(4R+r)} = p$

Và có nhận xét gì về dạng của tam giác ABC khi có (1) hoặc (2).

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Ta đã biết (xem, thí dụ, [8], các Bài 330, 294, 304, 395c):

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \quad (1.5)$$

$$r = \frac{S}{p} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \quad (1.6)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \quad (1.7)$$

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}. \quad (1.8)$$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 3rR(4 + \frac{r}{R}) = p^2 \Leftrightarrow 4 + \frac{r}{R} = \frac{p^2}{3rR}. \quad (1.9)$$

Từ (5) ta có

$$\begin{aligned} 2\left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right) &= (1 + \cos A) + (1 + \cos B) + (1 + \cos C) \\ \Leftrightarrow 2\left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right) &= 4 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Từ (1.5), (1.6), (1.9) và (1.10) ta có

$$\begin{aligned} 4 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= 4 + \frac{r}{R} = \frac{16R^2 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{12R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\ \Leftrightarrow 2\left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right) &= \frac{4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}}{3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{2}{3} \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{A+C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{2}{3} \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \\
&\Leftrightarrow 2 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) = \frac{2}{3} \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \\
&\Leftrightarrow 3 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

Vậy (2) $\Leftrightarrow$ (1). Nếu có (2) hoặc (1) thì ABC là tam giác đều.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Đặt $A_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_1 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_1 = \frac{\pi - C}{2}$ thì A_1, B_1, C_1 là ba góc của tam giác. Vậy $\tan A_1 \tan B_1 \tan C_1 = 3(\cot A_1 + \cot B_1 + \cot C_1)$, suy ra $A_1 B_1 C_1$ là tam giác đều, hay ABC là tam giác đều.

Bài toán 1.7. Cho tam giác ABC không vuông, chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}
&3 \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C - 5(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) \\
&\leq 9 + \tan^2 A \tan^2 B + \tan^2 B \tan^2 C + \tan^2 C \tan^2 A
\end{aligned}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned}
&4 \tan^2 A \tan^2 B \tan^2 C - 4(\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C) - 8 \\
&\leq (1 + \tan^2 A)(1 + \tan^2 B)(1 + \tan^2 C) \\
&\Leftrightarrow 4 \left(\frac{1}{\cos^2 A} - 1 \right) \left(\frac{1}{\cos^2 B} - 1 \right) \left(\frac{1}{\cos^2 C} - 1 \right) \\
&- 4 \left(\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} - 3 \right) - 8 \leq \frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} - 4 \left(\frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 B \cos^2 C} + \frac{1}{\cos^2 A \cos^2 C} \right) \\
&\leq \frac{1}{\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi tam giác ABC (xem, thí dụ, [8], Bài 274). Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Bài toán 1.8. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\begin{aligned} & 3\left(\cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2}\right) - 5\left(\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2}\right) \\ & \leq 9 + \cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \cot^2 \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} & 4\cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2} - 4\left(\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2}\right) - 8 \\ & \leq \left(1 + \cot^2 \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cot^2 \frac{B}{2}\right)\left(1 + \cot^2 \frac{C}{2}\right) \\ & \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} - 1\right) \\ & - 4\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} - 3\right) - 8 \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} \\ & \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} - 4\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2}}\right) \\ & \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} \\ & \Leftrightarrow \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi tam giác ABC (xem, thí dụ, [8], Bài 293). Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Đặt $A_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_1 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_1 = \frac{\pi - C}{2}$. Khi đó $\tan A_1 = \cot \frac{A}{2}$,
 $\tan B_1 = \cot \frac{B}{2}$, $\tan C_1 = \cot \frac{C}{2}$. Áp dụng Nhận xét 1.1 ta được

$$3 \tan^2 A_1 \tan^2 B_1 \tan^2 C_1 - 5(\tan^2 A_1 + \tan^2 B_1 + \tan^2 C_1) \\ \leq 9 + \tan^2 A_1 \tan^2 B_1 + \tan^2 B_1 \tan^2 C_1 + \tan^2 C_1 \tan^2 A_1$$

Vì bất đẳng thức trên đúng cho tam giác $A_1 B_1 C_1$ theo Bài 1.7 nên Bài 1.8 đúng cho tam giác ABC .

Bài toán 1.9. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \tan A + 1$$

thì tam giác ABC có một góc bằng 45°

Chứng minh (Biến đổi lượng giác) Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sin C}{\cos A \cos B} &= \tan A + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin C}{\cos A \cos B} &= \frac{\sin A + \cos A}{\cos A} \\ \Leftrightarrow \sin C &= \sin A \cos B + \cos A \cos B \\ \Leftrightarrow \sin C &= \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)] + \cos A \cos B \\ \Leftrightarrow \sin C - \sin(A - B) &= 2 \cos A \cos B \\ \Leftrightarrow \sin(A + B) - \sin(A - B) &= 2 \cos A \cos B \\ \Leftrightarrow 2 \cos A \sin B &= 2 \cos A \cos B \\ \Leftrightarrow \sin B &= \cos B \Leftrightarrow \tan B = 1 \Leftrightarrow B = 45^\circ + k180^\circ. \end{aligned}$$

Vì B là góc trong tam giác ABC nên $k = 0$. Suy ra $B = 45^\circ$.

Bài toán 1.10. Chứng minh ABC là tam giác vuông nếu

$$\frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} + 1.$$

Chứng minh 1 Ta có

$$\frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} + 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{B-A}{2} + \sin \frac{B+A}{2} \right] + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B-A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) - \sin \left(\frac{B}{2} - \frac{A}{2} \right) = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} = 1 \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{2} + k2\pi.
\end{aligned}$$

Vì B là góc trong tam giác ABC nên $B = \frac{\pi}{2}$, hay ABC là tam giác vuông.

Chứng minh 2 Đặt $A_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_1 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_1 = \frac{\pi - C}{2}$. Vì

$$\cos A_1 = \sin \frac{A}{2}, \cos B_1 = \sin \frac{B}{2}, \sin C_1 = \cos \frac{C}{2}, \tan C_1 = \cot \frac{C}{2} \text{ nên}$$

$$\frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{\sin C_1}{\cos A_1 \cos B_1} = \tan A_1 + 1$$

Theo Bài 1.9 thì tam giác $A_1B_1C_1$ có $B_1 = \frac{\pi}{4}$.

Vậy tam giác ABC có góc $B = \frac{\pi}{2}$ hay tam giác ABC là vuông đỉnh B.

Kết luận: Các ví dụ trên cho thấy, chỉ nhờ *một phép biến đổi tuyến tính góc* đơn giản $A_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_1 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_1 = \frac{\pi - C}{2}$ và *một nhận xét đơn giản* (Nhận xét 1.1), từ một hệ thức đã được chứng minh, ta có thể dễ dàng tạo ra và chứng minh một hệ thức mới trong tam giác. Có thể tạo ra rất nhiều hệ thức khác nhờ sử dụng biến đổi tuyến tính góc dạng $A_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_1 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_1 = \frac{\pi - C}{2}$. Dưới đây là một số Bài tập tương tự. Tất cả các bài này đã được giải trong [3].

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Bài toán 1.11. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{1}{1 + \sqrt{\sin A}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\sin B}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\sin C}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}}.$$

Bài toán 1.12. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{1}{1 + \sqrt{\cos \frac{A}{2}}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\cos \frac{B}{2}}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\cos \frac{C}{2}}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}}.$$

Bài toán 1.13 (Tuyển tập đề thi Olympic 30-4, năm 2007).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng

$$\frac{\tan^5 A + \tan^5 B + \tan^5 C}{\tan A + \tan B + \tan C} \geq 9.$$

Bài toán 1.14. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\frac{\cot^5 \frac{A}{2} + \cot^5 \frac{B}{2} + \cot^5 \frac{C}{2}}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} \geq 9.$$

Bài toán 1.15 (Đề thi học sinh giỏi PTTH toàn quốc, 1998).

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $\tan A, \tan B, \tan C$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + p = 0 (q \neq 1)$.

Chứng minh: $-p \leq -3\sqrt{3}; q > 1$.

Bài toán 1.16. Cho tam giác ABC có $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + p = 0 (q \neq 1)$.

Chứng minh: $-p \leq -3\sqrt{3}; q > 1$.

1.2 Biến đổi tuyến tính góc dạng 2

$$A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C.$$

Mệnh đề 1.4. Nếu A, B, C là ba góc nhọn của một tam giác thì

$A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$ cũng là ba góc của tam giác.

Chứng minh

Thật vậy, vì A, B, C là ba góc nhọn của tam giác nên $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$

và $A + B + C = \pi$. Suy ra $0 < A_2, B_2, C_2 < \pi$ và $A_2 + B_2 + C_2 = \pi$.

Chứng tỏ A_2, B_2, C_2 là ba góc của một tam giác.

Nhận xét 1.2. Vì $\cos A_2 = \cos(\pi - 2A) = -\cos 2A$ nên từ một hệ thức chứa $\cos A_2, \cos B_2, \cos C_2$ của tam giác $A_2B_2C_2$ ta có một hệ thức chứa $\cos 2A, \cos 2B, \cos 2C$ của tam giác ABC có ba góc nhọn.

Dựa trên Mệnh đề 1.4 và Nhận xét 1.2, ta dễ dàng tạo ra một hệ thức lượng giác mới trong tam giác có ba góc nhọn từ một hệ thức đã biết cho tam giác có ba góc bất kì. Các ví dụ dưới đây minh họa điều đó.

Bài toán 1.17.

Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đây đúng với mọi tam giác ABC

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}.$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Với mọi tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} & \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + \frac{3}{2} \\ &= 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + (2 \cos^2 C - 1) + \frac{3}{2} \\ &= 2 \cos^2 C - 2 \cos C \cos(A-B) + \frac{1}{2} \\ &= 2 \left(\cos^2 C - \cos C \cos(A-B) + \frac{1}{4} \cos^2(A-B) \right) + \frac{1}{2} \sin^2(A-B) \\ &= 2 \left(\cos C - \frac{1}{2} \cos(A-B) \right)^2 + \frac{1}{2} \sin^2(A-B) \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos C - \frac{1}{2} \cos(A-B) = 0$ và $\sin(A-B) = 0$ hay $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Vậy ABC là tam giác đều.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Nếu thêm điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn thì $A_2 = \pi - 2A$, $B_2 = \pi - 2B$, $C_2 = \pi - 2C$ cũng là ba góc của một tam giác. Áp dụng Nhận xét 1.2 và Bài 1.1 cho tam giác $A_2B_2C_2$ ta được

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -\cos A_2 - \cos B_2 - \cos C_2 \geq -\frac{3}{2}.$$

Lời bình Như vậy, bằng phép biến đổi tuyến tính góc $A_1 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_1 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_1 = \frac{\pi - C}{2}$, và $A_2 = \pi - 2A$, $B_2 = \pi - 2B$, $C_2 = \pi - 2C$

từ Bài toán 1.1 ta đã sáng tạo và chứng minh rất ngắn gọn hai bài toán mới là Bài 1.2 (Chương 1, mục 1.1) và bài 1.15 (Chương 2, mục 1.2). Tuy nhiên, không phải với tam giác nào ta cũng áp dụng được phương pháp biến đổi góc cụ thể nào đó. Thí dụ, phép biến đổi tuyến tính góc $A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$ đòi hỏi thêm điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn.

Bài toán 1.18. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Chứng minh Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} \geq \frac{2}{\sin A \sin B};$$

$$\frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{2}{\sin B \sin C};$$

$$\frac{1}{\sin^2 C} + \frac{1}{\sin^2 A} \geq \frac{2}{\sin A \sin C};$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq \frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin A \sin C}$$

$$= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A \sin B \sin C}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin A \sin B \sin C}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right)}{8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin A = \sin B = \sin C$, tức là $A = B = C$ hay ABC là tam giác đều.

Nhận xét 1.3. Vì $\sin A_2 = \sin(\pi - 2A) = \sin 2A$, $\sin B_2 = \sin 2B$, $\sin C_2 = \sin 2C$; $\sin \frac{A_2}{2} = \cos A$, $\sin \frac{B_2}{2} = \cos B$, $\sin \frac{C_2}{2} = \cos C$, nên từ một hệ thức của tam giác $A_2B_2C_2$ chứa $\sin A_2, \sin B_2, \sin C_2, \sin \frac{A_2}{2}, \sin \frac{B_2}{2}, \sin \frac{C_2}{2}$ ta suy ra một hệ thức chứa $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C, \cos A, \cos B, \cos C$ của tam giác ABC

Bài toán 1.19 (Thi Đại học, Khối A, 2001).

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều nếu

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} = \frac{1}{2 \cos A \cos B \cos C}.$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} \geq \frac{2}{\sin 2A \sin 2B};$$

$$\frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} \geq \frac{2}{\sin 2B \sin 2C};$$

$$\frac{1}{\sin^2 2C} + \frac{1}{\sin^2 2A} \geq \frac{2}{\sin 2A \sin 2C}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} \geq \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}$$

$$= \frac{1}{4 \sin A \sin B \sin C} = \frac{1}{8 \sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C} = \frac{1}{2 \cos A \cos B \cos C}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2A = \sin 2B = \sin 2C$ hay ABC là tam giác đều.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Do về trái dương nên dấu bằng chỉ có thể xảy ra khi tam giác có ba góc nhọn. Đặt $A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$. Khi ấy $A_2B_2C_2$ là ba góc của một tam giác. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} &\geq \frac{1}{2 \cos A \cos B \cos C}. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 A_2} + \frac{1}{\sin^2 A_2} + \frac{1}{\sin^2 A_2} &\geq \frac{1}{2 \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{B_2}{2} \sin \frac{C_2}{2}} \end{aligned}$$

Theo Bài 1.18, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A_2B_2C_2$ là tam giác đều. Vậy đẳng Bài 1.19 xảy ra khi và chỉ khi ABC là tam giác đều.

Bài toán 1.20. Chứng minh rằng ABC là tam giác đều nếu

$$\frac{4}{3}(\sin^3 \frac{A}{2} + \sin^3 \frac{B}{2} + \sin^3 \frac{C}{2}) + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{3}{4}$$

Chứng minh Ta có (xem, thí dụ, [8], Bài 304):

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C). \text{ Do đó} \\ \frac{4}{3}(\sin^3 \frac{A}{2} + \sin^3 \frac{B}{2} + \sin^3 \frac{C}{2}) + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}(\sin^3 \frac{A}{2} + \sin^3 \frac{B}{2} + \sin^3 \frac{C}{2}) + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{3} \sin^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos x = \frac{4}{3} \sin^3 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, với $x \in (0; \pi)$

Đặt $X = \sin \frac{x}{2}$ với $x \in (0; \pi)$. Khi ấy

$$f(X) = \frac{4}{3}X^3 - X^2 + \frac{1}{2}, 0 < X = \sin \frac{x}{2} \leq 1.$$

$$f'(X) = 4X^2 - 2X = 2X(2X - 1) = 0 \Leftrightarrow X_1 = 0, X_2 = \frac{1}{2}.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(X) = \frac{4}{3}X^3 - X^2 + \frac{1}{2}$ trên đoạn $[0; 1]$ ta được

$$f(X) \geq f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{12} \text{ với mọi } 0 < X = \sin \frac{x}{2} \leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{\pi}{3}$, suy ra

$$\frac{4}{3}(\sin^3 \frac{A}{2} + \sin^3 \frac{B}{2} + \sin^3 \frac{C}{2}) + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C) \geq \frac{5}{4} \text{ với mọi } x \in (0; \pi)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ hay tam giác ABC đều.

Nhận xét 1.4. Vì $\cos A = \cos \frac{\pi - A_2}{2} = \sin \frac{A_2}{2}$, $\cos B = \sin \frac{B_2}{2}$, $\cos C = \sin \frac{C_2}{2}$ nên từ một hệ thức chứa $\sin \frac{A_2}{2}$, $\sin \frac{B_2}{2}$, $\sin \frac{C_2}{2}$ của tam giác $A_2B_2C_2$ ta suy ra một hệ thức chứa $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ của tam giác có ba góc nhọn A , B , C .

Bài toán 1.21 (Tuyển tập đề thi Olympic 30 – 4, năm 2007).

Tính các góc của tam giác ABC có ba góc nhọn biết:

$$\frac{4}{3}(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C) + 2 \cos A \cos B \cos C = \frac{3}{4}$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Ta có (xem, thí dụ, [8], Bài 254):

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$. Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C) + 2 \cos A \cos B \cos C &= \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C) - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Tương tự Bài 1.20, xét hàm $f(X) = \frac{4}{3}X^3 - X^2 + \frac{1}{2}$ với $X = \cos x$,

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, $1 > X > 0$ (do tam giác ABC có ba góc nhọn), ta có

$$f(X) = \frac{4}{3}X^3 - X^2 + \frac{1}{2} \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}.$$

$$\frac{4}{3}(\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C) - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geq \frac{5}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Tam giác ABC có ba góc nhọn nên $A_2 = \pi - 2A$, $B_2 = \pi - 2B$, $C_2 = \pi - 2C$

là ba góc của một tam giác. Áp dụng Nhận xét 1.4 ta suy ra:

$$(13.2) \Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(\sin^3 \frac{A_2}{2} + \sin^3 \frac{B_2}{2} + \sin^3 \frac{C_2}{2}\right) + 2 \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{B_2}{2} \sin \frac{C_2}{2} = \frac{3}{4}.$$

Theo Bài 1.20, tam giác $A_2B_2C_2$ đều. Suy ra ABC cũng là tam giác đều.

Bài toán 1.22. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C \leq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Chứng minh Ta có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C \leq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C - \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos^2 C) - \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 C - \sqrt{2} \cos(A - B) \cos C + \frac{1}{2} \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 C - \sqrt{2} \cos(A - B) \cos C + \frac{1}{2} \cos^2(A - B) + \frac{1}{2}(1 - \cos^2(A - B)) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos C - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(A - B)\right)^2 + \frac{1}{2}(1 - \cos^2(A - B)) \geq 0.$$

Bất đẳng thức đúng với mọi tam giác ABC .

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos(A - B) = 1 \\ \cos C = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{\pi}{4} \\ A = B = \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$

Nhận xét 1.5. Vì $\sin A_2 = \sin(\pi - 2A) = \sin 2A$, $\sin B_2 = \sin 2B$, $\sin C_2 = \sin 2C$ nên từ một hệ thức chứa $\sin A_2, \sin B_2, \sin C_2$ của tam giác $A_2B_2C_2$ ta có một hệ thức chứa $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ của tam giác ABC có ba góc nhọn.

Bài toán 1.23. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\sin^2 2A + \sin^2 2B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 2C \leq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \quad (13.2)$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Với mọi tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} & \sin^2 2A + \sin^2 2B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 2C - \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos^2 2C) - \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos(2A + 2B) \cos(2A - 2B) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 2C - \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 2C - \cos 2C \cos(2A - 2B) - \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos^2 2C + \sqrt{2} \cos 2C \cos 2(A - B) + \frac{1}{2} \cos^2 2(A - B) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - \cos^2 2(A - B)) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos 2C + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2(A - B) \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1 - \sin^2 2(A - B)) \leq 0.
\end{aligned}$$

Vậy Bài (13.2) đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \sin 2(A - B) = 0 \\ \cos 2C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{3\pi}{8} \\ A = B = \frac{5\pi}{16} \end{cases}$$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Nếu thêm điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn thì $A_2 = \pi - 2A$,

$B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$ cũng là ba góc của tam giác.

Áp dụng Nhận xét 1.5 và Bài 1.22 ta có:

$$\sin^2 2A + \sin^2 2B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 2C = \sin^2 A_2 + \sin^2 B_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C_2 \leq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $C_2 = \frac{\pi}{4}$ và $A_2 = B_2 = \frac{3\pi}{8}$, tức là

$$C = \frac{\pi - C_2}{2} = \frac{3\pi}{8} \text{ và } A = B = \frac{\pi - B_2}{2} = \frac{5\pi}{16}$$

Bài toán 1.24. Chứng minh rằng tam giác ABC cân nếu ba góc của nó thỏa mãn hệ thức

$$\sin A = 2 \sin B \cos C.$$

Chứng minh (Biến đổi lượng giác)

$$\sin A = 2 \sin B \cos C \Leftrightarrow \sin A = \sin(B + C) + \sin(B - C)$$

$$\Leftrightarrow \sin(B - C) = 0$$

Vì $0 \leq |B - C| < \pi$, nên $B - C = 0$. Vậy tam giác ABC cân đỉnh A.

Bài toán 1.25. Chứng minh rằng tam giác ABC cân nếu ba góc của nó thỏa mãn hệ thức

$$\sin 2A = -2 \sin 2B \cos 2C.$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Ta có $\sin 2A = -\sin(2B - 2C) + \sin 2A$, suy ra $B = C$.

Vậy tam giác ABC cân đỉnh A .

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Nếu thêm điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn thì $A_2 = \pi - 2A$, $B_2 = \pi - 2B$, $C_2 = \pi - 2C$ cũng là ba góc của tam giác. Khi đó hệ thức $\sin 2A = -2 \sin 2B \cos 2C$ trở thành $\sin A_2 = 2 \sin B_2 \cos C_2$. Theo Bài 1.24 tam giác $A_2B_2C_2$ cân đỉnh A_2 . Do đó tam giác ABC cân đỉnh A .

Nhận xét 1.6.

Vì $A_2 = \pi - 2A = B + C - A$ nên phép biến đổi $A_2 = \pi - 2A$, $B_2 = \pi - 2B$, $C_2 = \pi - 2C$ cũng là phép biến đổi $A_3 = B + C - A$, $B_3 = C + A - B$, $C_3 = A + B - C$. Để $A_3B_3C_3$ là ba góc của một tam giác thì $A_3 = B + C - A > 0$ hay $A_3 = B + C - A = \pi - 2A > 0$, $A < \frac{\pi}{2}$. Tương tự, $B < \frac{\pi}{2}$, $C < \frac{\pi}{2}$. Vậy để phép biến đổi $A_3 = B + C - A$ có nghĩa thì ABC phải là tam giác có ba góc nhọn.

Bài toán 1.26. Chứng minh rằng tam giác ABC cân khi và chỉ khi

$$\sin(B + C - A) = 2 \sin(C + A - B) \cos(A + B - C).$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác) Ta có

$$\sin(B + C - A) = 2 \sin(C + A - B) \cos(A + B - C)$$

$$\Leftrightarrow \sin(B + C) \cos A - \sin A \cos(B + C) = \sin(2C - 2B) + \sin 2A$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A = \sin(2C - 2B) + \sin 2A$$

$$\Leftrightarrow \sin(2C - 2B) = 0, \text{ suy ra } B = C. \text{ Vậy tam giác } ABC \text{ cân đỉnh } A.$$

Chứng minh 2 Nếu thêm điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn thì $A_3 = B + C - A$, $B_3 = C + A - B$, $C_3 = A + B - C$ cũng là ba góc của một tam giác. Hệ thức $\sin(B + C - A) = 2 \sin(C + A - B) \cos(A + B - C)$ tương đương với $\sin A_2 = 2 \sin B_2 \cos C_2$. Theo Bài 1.24, tam giác $A_2B_2C_2$ là cân đỉnh A_2 , suy ra tam giác ABC cân đỉnh A .

Bài toán 1.27 (ĐH Mở địa chất năm 1998).

Cho tam giác ABC thoả mãn

$$2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \sin \frac{A}{2}$$

Chứng minh $A = \frac{\pi}{3}$.

Chứng minh Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} + \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{B+C}{2} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Nhận xét 1.7. Nếu tam giác ABC có ba góc nhọn thì $A_2 = \pi - 2A$,

$B_2 = \pi - 2B$, $C_2 = \pi - 2C$ cũng là ba góc của tam giác. Ta có:

$\sin A_2 = \sin 2A$, $\sin B_2 = \sin 2B$, $\sin C_2 = \sin 2C$ và $\cos \frac{A_2}{2} = \sin A$,
 $\cos \frac{B_2}{2} = \sin B$, $\sin \frac{A_2}{2} = \cos A$. Từ một hệ thức chứa $\cos \frac{B_2}{2}$, $\cos \frac{C_2}{2}$, $\sin \frac{A_2}{2}$,
 $\sin A_2$, $\sin B_2$, $\sin C_2$ của tam giác $A_2B_2C_2$ ta có một hệ thức chứa $\sin B$, $\sin C$,
 $\cos A$, $\sin 2A$, $\sin 2B$, $\sin 2C$ của tam giác ABC .

Bài toán 1.28. Chứng minh $\triangle ABC$ có $A = \frac{\pi}{3}$ nếu

$$2 \sin B \sin C = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A} \cos A.$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$\begin{aligned} 2 \sin B \sin C &= \frac{1}{2} + \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A} \cos A \\ \Leftrightarrow 2 \sin B \sin C &= \frac{1}{2} + \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin A \cos A} \cos A \\ \Leftrightarrow 2 \sin B \sin C &= \frac{1}{2} + \cos B \cos C + \sin B \sin C \\ \Leftrightarrow \cos(B+C) &= -\frac{1}{2}, \text{ suy ra } A = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Nếu thêm điều kiện tam giác ABC có ba góc nhọn thì $A_2 = \pi - 2A$, $B_2 = \pi - 2B$, $C_2 = \pi - 2C$ cũng là ba góc của tam giác $A_2B_2C_2$. Do $\sin A_2 = \sin 2A$, $\sin B_2 = \sin 2B$, $\sin C_2 = \sin 2C$ nên

$$2 \sin B \sin C = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2B + \sin 2C}{2} \cos A$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{B_2}{2} \cos \frac{C_2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2A}{\sin B_2 + \sin C_2} \sin \frac{A_2}{2}.$$

Áp dụng Bài 1.27 và Nhận xét 1.7 suy ra tam giác $A_2B_2C_2$ có $A_2 = \frac{\pi}{3}$.
 Vậy tam giác ABC có $A = \frac{\pi}{3}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài toán 1.29 (Viện ĐH Mở Hà Nội, Khối D, 2000).

Tính các góc của tam giác ABC biết

$$\sin^2 A - \sin^2 B + \cos^2 B - \cos B = -\frac{1}{2}.$$

Bài toán 1.30. Tính các góc của tam giác ABC biết

$$\sin^2(B+C-A) - \sin(B+C-A) + \cos^2(C+A-B) - \cos(C+A-B) = -\frac{1}{2}.$$

Bài toán 1.31 (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ).

Chứng minh rằng nếu

$$\tan^2 \frac{A}{2} - \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} - \left(\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \right)^2 = \frac{26}{27}.$$

thì ABC là tam giác đều.

Bài toán 1.32. Chứng minh rằng nếu

$$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C - (\cot A \cot B \cot C)^2 \geq \frac{26}{27}.$$

thì ABC là tam giác đều.

Bài toán 1.33. Chứng minh rằng với mọi tam giác ta có

$$\left(\cos \frac{A}{2} \right)^{2 \cos \frac{B}{2}} + \left(\cos \frac{B}{2} \right)^{2 \cos \frac{C}{2}} + \left(\cos \frac{C}{2} \right)^{2 \cos \frac{A}{2}} > 2.$$

Bài toán 1.34. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn.

a) Chứng minh

$$(\sin A)^{2\sin B} + (\sin B)^{2\sin C} + (\sin C)^{2\sin A} > 2.$$

b) Bất đẳng thức trên còn đúng không khi tam giác ABC vuông? vì sao?

Bài toán 1.35. Chứng minh với mọi tam giác ABC ta có

$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} + 1} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} + 1} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + 1} + (1 - \cos \frac{A}{2})(1 - \cos \frac{B}{2})(1 - \cos \frac{C}{2}) \leq 1.$$

Bài toán 1.36 (Tuyển tập Olympic 30-4, năm 2003).

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có

$$\frac{\sin A}{\sin B + \sin C + 1} + \frac{\sin B}{\sin A + \sin C + 1} + \frac{\sin C}{\sin B + \sin A + 1} + (1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \leq 1.$$

1.3 Biến đổi tuyến tính góc dạng 3

$$A_3 = \frac{A}{2}, B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi + C}{2}$$

Mệnh đề 1.5. Nếu A, B, C là ba góc của tam giác ABC thì $A_3 = \frac{A}{2}$,

$B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi + C}{2}$ cũng là ba góc của tam giác tù $A_3B_3C_3$ với

$$\frac{\pi}{2} < C_3 = \frac{\pi + C}{2} < \pi.$$

Chứng minh Vì A, B, C là ba góc của tam giác nên

$$0 < A_3, B_3, C_3 < \pi \text{ và } A_3 + B_3 + C_3 = \pi.$$

Hơn nữa $\frac{\pi}{2} < C_3 = \frac{\pi + C}{2} < \pi$. Chứng tỏ tam giác $A_3B_3C_3$ có góc C_3 tù.

Nhận xét 1.8. Vì $C_3 = \frac{\pi + C}{2}$ nên $\sin C_3 = \sin \frac{\pi + C}{2} = \cos \frac{C}{2}$,

$\cos C_3 = -\sin \frac{C}{2}, \tan C_3 = -\cot \frac{C}{2}, \cot C_3 = -\tan \frac{C}{2}$. Từ một hệ thức chứa $\sin A_3, \sin B_3, \sin C_3$ (tương ứng chứa $\cos A_3, \cos B_3, \cos C_3; \tan A_3,$

$\tan B_3, \tan C_3; \cot A_3, \cot B_3, \cot C_3$) đúng cho tam giác tù $A_3B_3C_3$ (hoặc tam giác $A_3B_3C_3$ bất kì) ta sẽ suy ra một hệ thức chứa $\sin \frac{A}{2}, \sin \frac{B}{2}, \cos \frac{C}{2}$ (tương ứng chứa $\cos \frac{A}{2}, \cos \frac{B}{2}, -\sin \frac{C}{2}; \tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, -\cot \frac{C}{2}; \cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$) đúng cho tam giác ABC bất kì.

Bài toán 1.37. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} < \frac{3}{2}$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$\begin{aligned} & \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} < \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & 3 - 2 \cos \frac{A}{2} - 2 \cos \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow & 3 - 2 \sin \frac{B+C}{2} - 2 \cos \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow & 3 - 2 \left(\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) - 2 \cos \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} > 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \right)^2 + \left(1 + \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

luôn đúng vì dấu bằng không xảy ra.

$$\begin{aligned} & \text{Thật vậy, } \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow & \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{\pi - B}{2} \Rightarrow C = \pm(\pi - B). \text{ Vô lí.} \end{aligned}$$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Đặt $A_3 = \frac{A}{2}, B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}$. Khi ấy A_3, B_3, C_3 là ba góc của tam giác tù $A_3B_3C_3$. Ta đã biết hệ thức $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ (xem Bài 1.1) đúng cho tam giác $A_3B_3C_3$ bất kì. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A_3, B_3, C_3 là tam giác đều nên ở đây dấu đẳng thức không xảy ra vì A_3, B_3, C_3 là tam giác tù.

Vì $\cos A_3 = \cos \frac{A}{2}, \cos B_3 = \cos \frac{B}{2}, \cos C_3 = -\sin \frac{C}{2}$ nên ta có:

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} = \cos A_3 + \cos B_3 + \cos C_3 < \frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 1.38. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\begin{aligned} & 3\left(\tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2}\right) - 5\left(\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2}\right) \\ & < 9 + \tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \tan^2 \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} & 4 \tan^2 \frac{A}{2} \tan^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2} - 4\left(\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2}\right) - 8 \\ & < \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2}\right) \left(1 + \tan^2 \frac{B}{2}\right) \left(1 + \cot^2 \frac{C}{2}\right) \\ & \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} - 1\right) \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} - 1\right) \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} - 1\right) \\ & - 4\left(\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} - 3\right) - 8 < \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} \\ & < \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}} \\ & \Leftrightarrow \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} > \frac{3}{4}. \\ & \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{2} + \frac{1 + \cos B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} > \frac{3}{4} \\ & \Leftrightarrow \sin^2 \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A+B}{2} + \frac{1}{4} > 0 \text{ với mọi tam giác } ABC. \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức đã cho luôn đúng với mọi tam giác ABC .

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Đặt $A_3 = \frac{A}{2}, B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi + C}{2}$. Khi đó $\tan A_3 = \tan \frac{A}{2}, \tan B_3 = \tan \frac{B}{2}, \tan C_3 = -\cot \frac{C}{2}$. Áp dụng Nhận xét 1.8 ta được

$$\begin{aligned} & 3 \tan^2 A_3 \tan^2 B_3 \tan^2 C_3 - 5(\tan^2 A_3 + \tan^2 B_3 + \tan^2 C_3) \\ & < 9 + \tan^2 A_3 \tan^2 B_3 + \tan^2 B_3 \tan^2 C_3 + \tan^2 C_3 \tan^2 A_3 \end{aligned}$$

Vì bất đẳng thức trên đúng cho tam giác $A_3 B_3 C_3$ theo Bài 1.7 nên Bài 1.38 đúng cho tam giác ABC .

Bài toán 1.39. Cho tam giác ABC thỏa mãn: $2A + 3B = \pi$

Chứng minh rằng các cạnh tương ứng thỏa mãn bất đẳng thức $a + b \leq \frac{5}{4}c$.

Chứng minh Theo giả thiết $2A + 3B = \pi$ nên $A = \frac{\pi}{2} - \frac{3B}{2}$. Suy ra $C = \pi - (A + B) = \frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}$. Do đó $\sin A = \cos \frac{3B}{2}$, $\sin C = \cos \frac{B}{2}$.

Theo định lý hàm số sin ta có

$$a + b \leq \frac{5}{4}c \Leftrightarrow \sin A + \sin B \leq \frac{5}{4} \sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{3B}{2} + \sin B \leq \frac{5}{4} \cos \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 \frac{B}{2} - 3 \cos \frac{B}{2} + 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4} \cos \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{B}{2} - 3 + 2 \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4} \quad (\text{do } \cos \frac{B}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 \frac{B}{2}) - 3 + 2 \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{B}{2} + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow (2 \sin \frac{B}{2} - \frac{1}{2})^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy $a + b \leq \frac{5}{4}c$

Bài toán 1.40. Cho tam giác ABC thỏa mãn $2A + 2B = 2\pi$.

Chứng minh rằng $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4} \cos \frac{C}{2}$. (*)

Chứng minh 1

Theo giả thiết $2A + 2B = 2\pi$. nên $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{3B}{4}$, suy ra $\frac{C}{2} = \frac{B}{4}$.

Do đó $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{3B}{4}$, $\cos \frac{C}{2} = \cos \frac{B}{4}$. Ta có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4} \cos \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{3B}{4} + \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4} \cos \frac{B}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^3 \frac{B}{4} - 3 \cos \frac{B}{4} + 2 \cos \frac{B}{4} \sin \frac{B}{4} \leq \frac{5}{4} \cos \frac{B}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{B}{4} - 3 + 2 \sin \frac{B}{4} \leq \frac{5}{4} \quad (\text{do } \cos \frac{B}{4} > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 \frac{B}{4}) - 3 + 2 \sin \frac{B}{4} \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{B}{4} - 2 \sin \frac{B}{4} + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \sin \frac{B}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0. \text{ Vậy } \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4} \cos \frac{C}{2}.$$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

$$\text{Đặt } A_3 = \frac{A}{2}, B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi + C}{2}.$$

Khi ấy $\sin A_3 = \sin \frac{A}{2}, \sin B_3 = \sin \frac{B}{2}, \sin C_3 = \cos \frac{C}{2}$. Ta có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4} \cos \frac{C}{2} \Leftrightarrow \sin A_3 + \sin B_3 \leq \frac{5}{4} \sin C_3.$$

Theo Bài 1.39, tam giác $A_3B_3C_3$ thỏa mãn hệ thức $2A_3 + 3B_3 = \pi$ thì $\sin A_3 + \sin B_3 \leq \frac{5}{4} \sin C_3$.

Vậy tam giác ABC thỏa mãn $2A + 3B = 2\pi$ thì $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \leq \frac{5}{4} \cos \frac{C}{2}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài toán 1.41 (ĐH Cần thơ năm 2000).

Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $5 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1$.

Chứng minh $3 \sin C = 2(\sin A + \sin B)$.

Bài toán 1.42. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $5 \tan A \tan B = 1$

Chứng minh $-3 \sin 2C = 2(\sin 2A + \sin 2B)$.

Bài toán 1.43. Cho tam giác ABC .

Chứng minh rằng nếu $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

thì ABC là tam giác vuông.

Bài toán 1.44. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

1.4 Biến đổi tuyến tính góc dạng 4

$$A_4 = 2A, B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi.$$

Mệnh đề 1.6. Nếu ABC là tam giác tù (với $C > \frac{\pi}{2}$) thì $A_4 = 2A$,

$B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi$ cũng là ba góc của tam giác.

Chứng minh Vì A, B, C là ba góc của tam giác ABC tù (với $\frac{\pi}{2} < C < \pi$)

nên, $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$. Do đó $0 < A_4 = 2A < \pi, 0 < B_4 = 2B < \pi$,
 $0 < C_4 = 2C - \pi$. Hơn nữa, $A_4 + B_4 + C_4 = 2A + 2B + (2C - \pi) = \pi$.
 Chứng tỏ A_4, B_4, C_4 là ba góc của một tam giác.

Nhận xét 1.9. Vì $C_4 = 2C - \pi, C > \frac{\pi}{2}$ nên $\sin C_4 = -\sin 2C$,
 $\cos C_4 = -\cos 2C, \tan C_4 = \tan 2C, \cot C_4 = \cot 2C$. Như vậy, từ một hệ
 thức chứa, $\sin A_4, \sin B_4, \sin C_4$ (tương ứng chứa $\cos A_4, \cos B_4, \cos C_4$,
 $\tan A_4, \tan B_4, \tan C_4, \cot A_4, \cot B_4, \cot C_4$) đúng cho tam giác ABC ta sẽ
 suy ra một hệ thức chứa $\sin 2A, \sin 2B, -\sin 2C$, (tương ứng chứa $\cos 2A$,
 $\cos 2B, -\cos 2C, \tan 2A, \tan 2B, \tan 2C, \cot 2A, \cot 2B, \cot 2C$) đúng cho
 tam giác ABC từ.

Bài toán 1.45. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leq \frac{3}{2}$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$\begin{aligned} & \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C - \frac{3}{2} \\ &= 2 \cos(A+B) \cos(A-B) - (2 \cos^2 C - 1) - \frac{3}{2} \\ &= -2 \cos^2 C - 2 \cos C \cos(A-B) - \frac{1}{2} \\ &= -2 \left(\cos C + \frac{1}{2} \cos(A-B) \right)^2 - \frac{1}{2} (1 - \cos^2(A-B)) \leq 0 \end{aligned}$$

đúng với mọi tam giác ABC .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = \frac{\pi}{6}$ và $C = \frac{2\pi}{3}$.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc) Với giả thiết phụ là góc C tù.

Đặt $A_4 = 2A, B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi$. Khi ấy A_4, B_4, C_4 là ba góc của
 một tam giác. Vì $\cos A_4 = \cos 2A, \cos B_4 = \cos 2B, \cos C_4 = -\cos 2C$ và
 Bài 1.1 đúng cho tam giác ABC nên ta có:

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = \cos A_4 + \cos B_4 + \cos C_4 \leq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A_4 B_4 C_4$ là tam giác đều, hay ABC là tam
 giác cân với $A = B = \frac{\pi}{6}$ và $C = \frac{2\pi}{3}$.

Bài toán 1.46. Cho tam giác ABC thoả mãn

$$2 \cos B \sin C = \frac{1}{2} + \frac{\sin 2B - \sin 2C}{\sin 2A} \sin A$$

Chứng minh tam giác ABC có $A = \frac{\pi}{6}$ hoặc $A = \frac{5\pi}{6}$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác) Ta có

$$\begin{aligned} 2 \cos B \sin C &= \frac{1}{2} + \frac{\sin 2B - \sin 2C}{\sin 2A} \sin A \\ \Leftrightarrow 2 \cos B \sin C &= \frac{1}{2} + \frac{2 \cos(B+C) \sin(B-C)}{2 \sin A \cos A} \sin A \\ \Leftrightarrow 2 \cos B \sin C &= \frac{1}{2} - \sin B \cos C + \cos B \sin C \\ \Leftrightarrow \sin(B+C) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin A = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC có $A = \frac{\pi}{6}$ hoặc $A = \frac{5\pi}{6}$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Giả sử tam giác ABC có góc C tù. Đặt $A_4 = 2A, B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi$.

Vì $\sin A_4 = \sin 2A, \sin B_4 = \sin 2B, \sin C_4 = -\sin 2C, \sin \frac{A_4}{2} = \sin A,$

$\cos \frac{B_4}{2} = \cos B, \cos \frac{C_4}{2} = \sin C$, nên

$$\begin{aligned} 2 \cos B \sin C &= \frac{1}{2} + \frac{\sin 2B - \sin 2C}{\sin 2A} \sin A \\ \Leftrightarrow 2 \cos \frac{B_4}{2} \cos \frac{C_4}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{\sin B_4 + \sin C_4}{\sin A_4} \sin \frac{A_4}{2} \end{aligned}$$

Theo Bài 1.27, tam giác $A_4B_4C_4$ có $A_4 = \frac{\pi}{3}$.

Do đó tam giác ABC có góc $A = \frac{\pi}{6}$.

Nhận xét Lời giải đã bị mất nghiệm $A = \frac{5\pi}{6}$ vì ngay từ đầu chúng ta đã giả thiết góc C tù.

Bài toán 1.47 (Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, 2000).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cos 3A + \cos 3B - \cos 3C$

trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác.

Giải Vì A, B, C là ba góc của tam giác nên

$$\cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos \frac{3}{2}(\pi - C) = -\sin \frac{3C}{2}. \text{ Ta có:}$$

$$\begin{aligned}
P &= 2 \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) - \left(1 - \sin^2 \frac{3C}{2}\right) \\
&= 2 \sin^2 \frac{3C}{2} - 2 \sin \frac{3C}{2} \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 \\
&= 2 \left(\sin \frac{3C}{2} - \frac{1}{2} \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \cos^2 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
&= 2 \left(\sin \frac{3C}{2} - \frac{1}{2} \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \right)^2 + \frac{1}{2} \sin^2 3\left(\frac{A-B}{2}\right) - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = -\frac{3}{2}$ khi $\begin{cases} \sin 3\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0 \\ \sin \frac{3C}{2} = \frac{1}{2} \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases}$

Từ $\sin 3\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0$ suy ra $\frac{3(A-B)}{2} = k\pi \Leftrightarrow A = B$ hoặc $A = B \pm \frac{2\pi}{3}$

Thay $A = B$ vào đẳng thức còn lại của hệ ta được $\sin \frac{3C}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3C}{2} = \frac{\pi}{6}$
 hoặc $\frac{3C}{2} = \frac{5\pi}{6}$, suy ra $C = \frac{\pi}{9}$ hoặc $C = \frac{5\pi}{9}$

Thay $A = B \pm \frac{2\pi}{3}$ vào đẳng thức còn lại của hệ ta được $\sin \frac{3C}{2} = -\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{3C}{2} = \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow C = \frac{7\pi}{9}$ hoặc $\frac{3C}{2} = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow C = \frac{11\pi}{9}$. Nghiệm này loại do $A = B \pm \frac{2\pi}{3}$ và $A + B = \frac{2\pi}{9}$ không thỏa mãn.

Vậy $P_{\min} = -\frac{3}{2}$ khi $A = B = \frac{2\pi}{9}, C = \frac{5\pi}{9}$ hoặc $A = B = \frac{4\pi}{9}, C = \frac{\pi}{9}$.

Bài toán 1.48. Tính các góc của tam giác ABC có góc C tù biết

$$\cos 6A + \cos 6B + \cos 6C = -\frac{3}{2}$$

Giải

Cách 1 (Biến đổi lượng giác)

$$\cos 6A + \cos 6B + \cos 6C = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 3(A+B) \cos 3(A-B) + 2 \cos^2 3(A+B) - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 3(A+B) + 2 \cos 3(A+B) \cos 3(A-B) + \frac{1}{2} = 0$$

Vì $\Delta' = \cos^2 3(A-B) - 1 \leq 0$ nên với mọi tam giác ABC ta có

$$2 \cos^2 3(A+B) + 2 \cos 3(A+B) \cos 3(A-B) + \frac{1}{2} \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cos^2 3(A - B) = 1 \text{ và } \cos 3(A + B) = -\frac{\cos 3(A - B)}{2}$$

$$\cos 3(A - B) = \pm 1 \text{ và } \cos 3(A + B) = \mp \frac{1}{2}$$

$$\text{Giải ra ta được } A = B = \frac{\pi}{9}, C = \frac{7\pi}{9} \text{ hoặc } A = B = \frac{2\pi}{9}, C = \frac{5\pi}{9}$$

Cách 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Vì tam giác ABC có góc C tù. Đặt $A_4 = 2A, B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi$.

Ta có $\cos 3A_4 = \cos 6A, \cos 3B_4 = \cos 6B, \cos 3C_4 = -\cos 6C$.

$$\text{Khi đó: } \cos 6A + \cos 6B + \cos 6C = \cos 3A_4 + \cos 3B_4 - \cos 3C_4 = -\frac{3}{2}$$

Theo Bài 1.47, tam giác $A_4B_4C_4$ có $A_4 = B_4 = \frac{2\pi}{9}, C_4 = \frac{5\pi}{9}$ hoặc

$$A_4 = B_4 = \frac{4\pi}{9}, C_4 = \frac{\pi}{9}. \text{ Suy ra tam giác } ABC \text{ có } A = B = \frac{\pi}{9}, C = \frac{7\pi}{9}$$

$$\text{hoặc } A = B = \frac{2\pi}{9}, C = \frac{5\pi}{9}.$$

Bài toán 1.49 (Đại học Thủy lợi, 1988).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

Giải Ta có:

$$M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = \frac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} - 1$$

Do đó để tìm cực đại của M ta tìm cực tiểu của

$$P = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

Ta có:

$$P = \cos^2 A + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \frac{1 + \cos 2C}{2} = \cos^2 A + \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) + 1$$

$$= \cos^2 A + \cos(B+C) \cos(B-C) + 1 = (\cos^2 A - \cos A \cos(B-C) + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}$$

$$\text{Vì } \Delta = \cos^2(B-C) - 1 \leq 0 \text{ nên } \cos^2 A - \cos A \cos(B-C) + \frac{1}{4} \geq 0 \text{ với}$$

$$\text{mọi tam giác } ABC. \text{ Vậy } P \geq \frac{3}{4}.$$

$$\text{Nếu } A = B = C = \frac{\pi}{3} \text{ thì } P = \frac{3}{4} \text{ khi đó } M \text{ đạt cực đại bằng } 3.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} \leq 3 \text{ với mọi tam giác } ABC.$$

Bài toán 1.50. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có

$$M = \frac{\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C}{\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C} \leq 3.$$

Chứng minh (Biến đổi lượng giác)

$$M = \frac{\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C}{\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C} = \frac{3}{\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C} - 1$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C &= \cos^2 2A + \cos 2A \cos 2(B - C) + 1 \\ &= (\cos 2A + \frac{1}{2} \cos 2(B - C))^2 + \frac{1}{4}(1 - \cos^2(B - C)) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vậy $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C \leq \frac{3}{4}$, suy ra

$$M = \frac{\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C}{\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C} \leq 3.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} \sin 2(B - C) = 0 \\ \cos 2A = -\frac{1}{2} \cos(B - C) \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

Nhận xét 1.10. Phương pháp biến đổi tuyến tính góc không phải lúc nào cũng hữu hiệu trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức. Với Bài 1.50 ta không thể giả thiết tam giác ABC có góc C tù để dùng biến đổi tuyến tính góc dạng $A_4 = 2A, B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi$ vì cực đại đạt bằng 3 khi tam giác ABC đều. Mặc dù về hình thức, ta vẫn có thể sử dụng biến đổi áp dụng Bài 1.49:

$$M = \frac{\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C}{\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C} = \frac{\sin^2 A_4 + \sin^2 B_4 + \sin^2 C_4}{\cos^2 A_4 + \cos^2 B_4 + \cos^2 C_4}$$

Tuy nhiên, phép biến đổi này là không hợp lí vì trường hợp C tù không xảy ra.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài toán 1.51. Tam giác ABC có các góc thỏa mãn hệ thức

$$\frac{-\sin 2C}{\sin 2B} = 2 \cos 2A$$

Chứng minh $A = B$

Bài toán 1.52. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos A + \cos B - \cos C + 1 = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Bài toán 1.53. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cos B \cos C.$$

Bài toán 1.54. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có:

Bài toán 1.55 (ĐH khối D, 2000). Chứng minh rằng

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

Bài toán 1.56. Với A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C + 1} = -\tan A \tan B \tan C.$$

1.5 Biến đổi tuyến tính góc dạng 5

$$A_5 = \frac{\pi}{2} - A, B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$$

Mệnh đề 1.7. Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác có ba góc nhọn (tam giác ABC vuông tại C ; tam giác ABC có góc C tù) thì

$A_5 = \frac{\pi}{2} - A, B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$ cũng là ba góc của tam giác tù (tam giác vuông tại C_5 ; tam giác có ba góc nhọn).

Chứng minh Vì $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$ là ba góc nhọn của một tam giác nên

$$0 < A_5 = \frac{\pi}{2} - A < \pi, 0 < B_5 = \frac{\pi}{2} - B < \pi, \frac{\pi}{2} < C_5 = \pi - C < \pi$$

Hơn nữa, $A_5 + B_5 + C_5 = \left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \left(\frac{\pi}{2} - B\right) + (\pi - C)$ nên A_5, B_5, C_5 cũng là ba góc của tam giác $A_5B_5C_5$.

Nhận xét 1.11. Vì $A_5 = \frac{\pi}{2} - A, B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$ nên

$\sin A_5 = \cos A, \sin B_5 = \cos B, \sin C_5 = \sin C$. Như vậy, từ một hệ thức

chứa $\sin A_5, \sin B_5, \sin C_5$ (tương ứng chứa $\cos A_5, \cos B_5, \cos C_5, \tan A_5, \tan B_5, \tan C_5, \cot A_5, \cot B_5, \cot C_5$) đúng cho tam giác $A_5B_5C_5$ từ ta sẽ suy ra một hệ thức chứa $\cos A, \cos B, \sin C$, (tương ứng chứa $\sin A, \sin B, -\cos C, \cot A, \cot B, -\tan C, \tan A, \tan B, -\cot C$) đúng cho tam giác ABC có ba góc nhọn (tam giác ABC vuông hoặc tù).

Bài toán 1.57. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\sin A + \sin B - \cos C \leq \frac{3}{2}$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$\begin{aligned} & \sin A + \sin B - \cos C - \frac{3}{2} \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1 \right) - \frac{3}{2} \\ &= -2 \cos^2 \frac{C}{2} + 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2} \\ &= -2 \left(\cos \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

đúng với mọi tam giác ABC .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin \frac{A-B}{2} = 0 \\ \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Đại lượng $\sin A + \sin B - \cos C$ đạt giá trị lớn hơn khi góc C tù. Vì vậy có thể coi A, B là hai góc nhọn của tam giác ABC . Khi ấy $A_5 = \frac{\pi}{2} - A$, $B_5 = \frac{\pi}{2} - B$, $C_5 = \pi - C$ là ba góc của một tam giác. Ta có:

$$\sin A + \sin B - \cos C = \cos A_5 + \cos B_5 + \cos C_5 \leq \frac{3}{2}$$

đúng với tam giác ABC

Bài toán 1.58. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C \leq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác) Ta có

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 A + \cos^2 B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \\
 &= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \\
 &= \cos(A+B) \cos(A-B) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C - \frac{3\sqrt{2}}{4} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 C - \cos C \cos(A-B) - \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos C + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(A-B) \right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - \cos^2(A-B)) \leq 0
 \end{aligned}$$

đúng với mọi tam giác ABC .

Vậy $\cos^2 A + \cos^2 B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C \leq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $C = \frac{3\pi}{4}, A = B = \frac{\pi}{8}$.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Coi A, B là hai góc nhọn của tam giác ABC . Khi ấy $A_5 = \frac{\pi}{2} - A$, $B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$ là ba góc của tam giác tù. Ta có:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C = \sin^2 A_5 + \sin^2 B_5 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 C_5 \leq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Vì Bài 1.22 đúng cho tam giác $A_5 B_5 C_5$ nên Bài 1.58 đúng cho tam giác ABC .

Bài toán 1.59. Chứng minh rằng trong tam giác ABC

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{125}{64}.$$

Chứng minh Không mất tính tổng quát có thể coi

$$C = \min(A, B, C) \Rightarrow 0 < C \leq \frac{\pi}{3}.$$

Ta có

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B) = \left(1 + \frac{1 + \cos 2A}{2}\right) \left(1 + \frac{1 + \cos 2B}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(9 + 3(\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2A \cos 2B) \\
&= \frac{1}{4}\left(9 - 6 \cos C \cos(A - B) + \frac{1}{2}(\cos 2(A + B) + \cos 2(A - B))\right) \\
&= \frac{1}{4}(9 - 6 \cos C \cos(A - B) + \cos^2 C + \cos^2(A - B) - 1)
\end{aligned}$$

Ta có: $-6 \cos C \cos(A - B) + \cos^2(A - B) - 1 \geq -6 \cos C$ vì:

$$-6 \cos C \cos(A - B) + \cos^2(A - B) - 1 + 6 \cos C$$

$$= (\cos(A - B) - 1)(\cos(A - B) + 1 - 6 \cos C)$$

Mặt khác $\cos(A - B) - 1 \leq 0$ và $\cos(A - B) + 1 - 6 \cos C < 0$ do $0 < C \leq \frac{\pi}{3}$

và hàm $y = \cos x$ nghịch biến trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos(A - B) = 1$. Vậy

$$\begin{aligned}
&(9 - 6 \cos C \cos(A - B) + \cos^2 C + \cos^2(A - B) - 1) \\
&\geq 9 + \cos^2 C - 6 \cos C = (3 - \cos C)^2 > 0
\end{aligned}$$

Suy ra

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B) \geq \frac{1}{4}(9 - 6 \cos C + \cos^2 C) = \frac{1}{4}(3 - \cos C)^2.$$

Vậy

$$(1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{1}{4}(3 - \cos C)^2(1 + \cos^2 C). \quad (1.11)$$

Dấu đẳng thức xảy ra trong (1.11) khi và chỉ khi $\cos(A - B) = 1 \Leftrightarrow A = B$.

Xét hàm số $f(x) = (3 - x)^2(1 + x)^2$, với $\frac{1}{2} \leq x = \cos x < 1$. Ta có

$f'(x) = 2(x - 3)(x - 1)(2x - 1)$. Vì $\frac{1}{2} \leq x < 1$ nên $f'(x) \geq 0$. Vậy

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{125}{16} \quad (1.12)$$

Dấu bằng trong (1.12) xảy ra khi và chỉ khi $\cos C = \frac{1}{2}$.

$$\text{Do đó } (1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{125}{64}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng trong (1.11) và (1.12) xảy ra. Vậy đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài toán 1.60. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{125}{64}.$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát có thể coi $C = \min(A, B, C) \Rightarrow 0 < C \leq \frac{\pi}{3}$.

Ta có

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B) = \left(1 + \frac{1 - \cos 2A}{2}\right) \left(1 + \frac{1 - \cos 2B}{2}\right) \\ = \frac{1}{4}(9 + 6 \cos C \cos(A - B) + \cos^2 C + \cos^2(A - B) - 1)$$

Ta có: $6 \cos C \cos(A - B) + \cos^2(A - B) - 1 \geq -6 \cos C$ vì:

$$6 \cos C \cos(A - B) + \cos^2(A - B) - 1 + 6 \cos C \\ = (\cos(A - B) + 1)(\cos(A - B) - 1 + 6 \cos C)$$

Mặt khác $\cos(A - B) + 1 \geq 0$ và $\cos(A - B) - 1 + 6 \cos C > 0$ do $0 < C \leq \frac{\pi}{3}$

và hàm $y = \cos x$ nghịch biến trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos(A - B) = 1$.

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B) \geq \frac{1}{4}(9 - 6 \cos C + \cos^2 C) = \frac{1}{4}(3 - \cos C)^2.$$

Vậy

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{1}{4}(3 - \cos C)^2(1 + \cos^2 C). \quad (1.13)$$

Dấu đẳng thức xảy ra trong (1.13) khi và chỉ khi $A = B$ và

$$(3 - \cos C)^2(1 + \cos^2 C) \geq \frac{125}{16} \quad (1.14)$$

Dấu bằng trong (1.14) xảy ra khi và chỉ khi $\cos C = \frac{1}{2}$.

$$\text{Do đó } (1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \cos^2 C) \geq \frac{125}{64}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng trong (1.13) và (1.14) xảy ra. Vậy đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Coi $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$ là hai góc nhọn. Khi ấy $A_5 = \frac{\pi}{2} - A$,

$B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$ là ba góc nhọn của một tam giác tù. Do đó

$$(1 + \sin^2 A)(1 + \sin^2 B)(1 + \cos^2 C) \\ = (1 + \cos^2 A_5)(1 + \cos^2 B_5)(1 + \cos^2 C_5) \geq \frac{125}{64}.$$

Bài toán 1.61.

Cho tam giác ABC thỏa mãn: $\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0$.

Chứng minh rằng tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^0 hoặc 120^0 .

Chứng minh Ta có

$$\sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3C \cos(3A - 3B) + 2 \sin 3C \cos 3C = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3C (\cos(3A - 3B) - \cos(3A + 3B)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin 3A \sin 3B \sin 3C = 0.$$

Vậy tam giác ABC có ít nhất một góc bằng 60^0 hoặc 120^0 .

Bài toán 1.62.

Cho tam giác ABC thỏa mãn: $\sin 6A + \sin 6B - \sin 6C = 0$.

Chứng minh rằng tam giác có hoặc góc $C = \frac{\pi}{3}$ hoặc góc $C = \frac{2\pi}{3}$ hoặc ít nhất một góc $A = \frac{\pi}{6}$ hoặc $B = \frac{\pi}{6}$.

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác) Ta có

$$\cos 3(A + B) = \cos 3(\pi - C) = -\cos 3C. \text{ Do đó}$$

$$\sin 6A + \sin 6B - \sin 6C = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3C \cos(3A - 3B) - 2 \sin 3C \cos 3C = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3C (\cos(3A - 3B) + \cos(3A + 3B)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin 3C \cos 3B \cos 3A = 0.$$

Vậy tam giác có hoặc góc $C = \frac{\pi}{3}$ hoặc góc $C = \frac{2\pi}{3}$ hoặc ít nhất một góc $A = \frac{\pi}{6}$ hoặc $B = \frac{\pi}{6}$.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Coi A, B là hai góc nhọn của tam giác ABC . Khi ấy $A_5 = \frac{\pi}{2} - A$,

$B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$ là ba góc của tam giác.

Ta có $\sin 6A_5 = \sin 6A, \sin 6B_5 = \sin 6B, \sin 6C_5 = -\sin 6C$.

Suy ra $\sin 6A + \sin 6B - \sin 6C = \sin 6A_5 + \sin 6B_5 + \sin 6C_5 = 0$.

Theo Bài 1.61 suy $A_5 B_5 C_5$ có ít nhất một góc bằng $\frac{\pi}{3}$ hoặc $\frac{2\pi}{3}$. Tương ứng, tam giác ABC có ít nhất góc $A = \frac{\pi}{6}$ hoặc $B = \frac{\pi}{6}$ (nếu $A_5 = \frac{\pi}{3}$ hoặc $B_5 = \frac{\pi}{3}$) hoặc $C = \frac{\pi}{3}$ hoặc $C = \frac{2\pi}{3}$ (khi $C_5 = \frac{2\pi}{3}$ hoặc $C_5 = \frac{\pi}{3}$).

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài toán 1.63. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có:

$$\sin A + \sin B - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos C \leq \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Bài toán 1.64. Chứng minh rằng tam giác ABC đều nếu:

$$8 \cos A \cos B \cos C = 1.$$

Bài toán 1.65. Tìm các góc của tam giác ABC biết:

$$8 \sin A \sin B \cos C = -1.$$

Bài toán 1.66. Nhận dạng tam giác ABC nhọn, biết:

$$2\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B}\right) = \sqrt{3}(\tan A + \tan B) + 2$$

Bài toán 1.67. Tính các góc của tam giác ABC từ biết:

$$2\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B}\right) = \sqrt{3}(\cot A + \cot B) + 2$$

Kết luận: Qua năm phép biến đổi tuyến tính góc dạng đối xứng trong Chương I ta thấy, từ một đẳng thức ta có thể tìm ra năm đẳng thức mới với chứng minh rất đơn giản *nhờ phép biến đổi tuyến tính góc*. Đồng thời biến đổi tuyến tính cũng giúp học sinh luyện tập thành thạo các phép biến đổi lượng giác.

Chương 2

Một số phép biến đổi tuyến tính góc dạng tổng quát

Ta có thể thay thế các bất đẳng thức (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), ... bởi các bất đẳng thức trong tam giác với vế trái là các biểu thức dạng tổng quát

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C; \quad (2.1)$$

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2}; \quad (2.2)$$

$$x \cos \frac{A+3B}{4} + y \cos \frac{B+3C}{4} + z \cos \frac{C+3A}{4}; \quad (2.3)$$

$$x \cos \frac{\pi+A}{4} + y \cos \frac{\pi+B}{4} + z \cos \frac{\pi+C}{4}; \quad (2.4)$$

.....

Khi đó các đẳng thức, bất đẳng thức nêu ở trong Chương I là các trường hợp riêng của các đẳng thức, bất đẳng thức trên.

Ý tưởng cơ bản của phép biến đổi tuyến tính góc trong tam giác đã được trình bày và minh họa qua nhiều ví dụ, bài tập trong Chương I. Trong Chương II, chúng tôi phát biểu và chứng minh một số hệ thức lượng giác nhờ sử dụng các phép *biến đổi tuyến tính góc có dạng tổng quát*.

2.1 Một số biến đổi tuyến tính dạng tổng quát

Bài toán 2.1. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$yz \cos A + zx \cos B + xy \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh (Biến đổi lượng giác)

Ta có

$$\begin{aligned}
 &yz \cos A + zx \cos B + xy \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz \cos A + zx \cos B + xy \cos C) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos(B + C) - 2zx \cos B - 2xy \cos C \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2yz(\cos B \cos C - \sin B \sin C) - 2zx \cos B - 2xy \cos C \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (z^2 \sin^2 B + y^2 \sin^2 C - 2yz \sin B \sin C) + \\
 &\quad (x^2 + z^2 \cos^2 B + y^2 \cos^2 C - 2xz \cos B - 2xy \cos C + 2yz \cos B \cos C) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (z \sin B - y \sin C)^2 + (x - z \cos B - y \cos C)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.} \\
 &\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{x}{\sin A} = \frac{y}{\sin B} = \frac{z}{\sin C}.
 \end{aligned}$$

Nhận xét 2.1. Cho $x = y = z = 1$, ta có bất đẳng thức

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}. \quad (2.5)$$

Bài toán 2.2. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$yz \sin \frac{A}{2} + zx \sin \frac{B}{2} + xy \sin \frac{C}{2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$\begin{aligned}
 &yz \sin \frac{A}{2} + zx \sin \frac{B}{2} + xy \sin \frac{C}{2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos \frac{B+C}{2} - 2zx \sin \frac{B}{2} - 2xy \sin \frac{C}{2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \left(\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \\
 &\quad - 2zx \sin \frac{B}{2} - 2xy \sin \frac{C}{2} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(y \cos \frac{C}{2} - z \cos \frac{B}{2} \right)^2 + \left(x - y \sin \frac{C}{2} - z \sin \frac{B}{2} \right)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}
 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{x}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{y}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{z}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

$$\text{Đặt } A_1 = \frac{\pi - A}{2}, B_1 = \frac{\pi - B}{2}, C_1 = \frac{\pi - C}{2}.$$

Vì $\cos A_1 = \sin \frac{A}{2}, \cos B_1 = \sin \frac{B}{2}, \cos C_1 = \sin \frac{C}{2}$, áp dụng Bài 1.1 cho

tam giác $A_1B_1C_1$ ta được

$$\begin{aligned} yz \sin \frac{A}{2} + zx \sin \frac{B}{2} + xy \sin \frac{C}{2} &= yz \cos A_1 + zx \cos B_1 + xy \cos C_1 \\ &\leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \text{ (với mọi } x, y, z \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Hệ quả 2.1. Cho $x = y = z = 1$, ta có bất đẳng thức

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}. \quad (2.6)$$

Bài toán 2.3. Cho tam giác ABC . Chứng minh

$$yz \cos 2A + zx \cos 2B + xy \cos 2C \geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$\begin{aligned} yz \cos 2A + zx \cos 2B + xy \cos 2C &\geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(yz \cos 2A + zx \cos 2B + xy \cos 2C) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos(2B + 2C) + 2zx \cos 2B + 2xy \cos 2C &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2yz(\cos 2B \cos 2C - \sin 2B \sin 2C) + 2zx \cos 2B + &2xy \cos 2C \geq 0 \\ \Leftrightarrow (z \sin 2B - y \sin 2C)^2 + (x + z \cos 2B + y \cos 2C)^2 &\geq 0, \text{ luôn đúng.} \\ \text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{x}{\sin 2A} = \frac{y}{\sin 2B} = \frac{z}{\sin 2C}. \end{aligned}$$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc) Giả thiết thêm rằng ABC là tam giác có ba góc nhọn. Đặt $A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$ thì A_2, B_2, C_2 là ba góc của tam giác $A_2B_2C_2$.

Vì $\cos A_2 = -\cos 2A, \cos B_2 = -\cos 2B, \cos C_2 = -\cos 2C$ nên

$$\begin{aligned} yz \cos 2A + zx \cos 2B + xy \cos 2C &\geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow -yz \cos A_2 - zx \cos B_2 - xy \cos C_2 &\geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Áp dụng Bài 1.1 cho tam giác $A_2B_2C_2$ ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét 2.2.

1) Thay $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, ta được:

$$yz \sin^2 A + zx \sin^2 B + xy \sin^2 C \leq \frac{1}{4}(x + y + z)^2.$$

2) Cho $x = y = z = 1$, ta có các bất đẳng thức quen thuộc:

$$+) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}.$$

$$+) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

Bài toán 2.4. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$yz \cos \frac{A}{2} + zx \cos \frac{B}{2} - xy \sin \frac{C}{2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$yz \cos \frac{A}{2} + zx \cos \frac{B}{2} - xy \sin \frac{C}{2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \sin \frac{B+C}{2} - 2zx \cos \frac{B}{2} + 2xy \sin \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y \cos \frac{C}{2} - z \sin \frac{B}{2}\right)^2 + \left(x + y \sin \frac{C}{2} - z \cos \frac{B}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } \frac{x}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{y}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{z}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

$$\text{Đặt } A_3 = \frac{A}{2}, B_3 = \frac{B}{2}, C_3 = \frac{\pi + C}{2}.$$

Vì $\cos A_3 = \cos \frac{A}{2}, \cos B_3 = \cos \frac{B}{2}, \cos C_3 = -\sin \frac{C}{2}$ nên theo Bài 1.1 ta có:

$$yz \cos \frac{A}{2} + zx \cos \frac{B}{2} - xy \sin \frac{C}{2}$$

$$= yz \cos A_3 + zx \cos B_3 + xy \cos C_3 \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \text{ luôn đúng với mọi tam giác } A_3 B_3 C_3. \text{ Vậy (2.7) được chứng minh.}$$

Bài toán 2.5. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$yz \cos 2A + zx \cos 2B - xy \cos 2C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$yz \cos 2A + zx \cos 2B - xy \cos 2C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos 2A - 2zx \cos 2B + 2xy \cos 2C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos(2B + 2C) - 2zx \cos 2B + 2xy \cos 2C \geq 0$$

$\Leftrightarrow (z \sin 2B + y \sin 2C)^2 + (x - z \cos 2B + y \cos 2C)^2 \geq 0$, luôn đúng.
 Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x}{\sin 2A} = \frac{y}{\sin 2B} = -\frac{z}{\sin 2C}$.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Coi góc C tù. Khi ấy $A_4 = 2A, B_4 = 2B, C_4 = 2C - \pi$ là ba góc của tam giác. Áp dụng Bài 1.1 cho tam giác $A_4B_4C_4$ ta được

$$yz \cos 2A + zx \cos 2B - xy \cos 2C \\ = yz \cos A_4 + zx \cos B_4 + xy \cos C_4 \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy (2.8) đúng với mọi tam giác ABC .

Bài toán 2.6. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$yz \sin A + zx \sin B - xy \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Chứng minh 1 (Biến đổi lượng giác)

$$yz \sin A + zx \sin B - xy \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \sin(B + C) - 2zx \sin B + 2xy \cos C \geq 0 \\ \Leftrightarrow (z \cos B - y \sin C)^2 + (x - z \sin B + y \cos C)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x}{\cos A} = \frac{y}{\cos B} = \frac{z}{\sin C}$.

Chứng minh 2 (Biến đổi tuyến tính góc)

Coi A, B là hai góc nhọn của tam giác ABC nên $A_5 = \frac{\pi}{2} - A,$

$B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$ là ba góc của một tam giác. Ta có:

$$yz \sin A + zx \sin B - xy \cos C \\ = yz \cos A_5 + zx \cos B_5 + xy \cos C_5 \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \text{ luôn đúng với mọi}$$

tam giác $A_5B_5C_5$. Vậy (2.9) được chứng minh.

2.2 Một số bài toán khác

Bài toán 2.7 (ĐH An ninh, ĐH Cảnh sát, 1998).

Tính các góc của tam giác ABC biết

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}.$$

Giải. Đặt $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2} = t > 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B \\ \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \sin C \cos A \\ \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} t = \sqrt{3}t \cos C + 2t \cos B \\ \sqrt{3}t = 2t \cos A + t \cos C \\ 2t = t \cos B + \sqrt{3}t \cos A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \sqrt{3} \cos C + 2 \cos B \\ \sqrt{3} = 2 \cos A + \cos C \\ 2 = \cos B + \sqrt{3} \cos A \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos B = \frac{1}{2} \\ \cos C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{6} \\ B = \frac{\pi}{3} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC có $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 2.8. Tính các góc của tam giác ABC có ba góc nhọn biết

$$\frac{\sin 2A}{1} = \frac{\sin 2B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 2C}{2}.$$

Giải.

Cách 1. Đặt $\frac{\sin 2A}{1} = \frac{\sin 2B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 2C}{2} = t$. Ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin 2A = -\sin 2B \cos 2C - \sin 2C \cos 2B \\ \sin 2B = -\sin 2A \cos 2C - \sin 2C \cos 2A \\ \sin 2C = -\sin 2A \cos 2B - \sin 2B \cos 2A \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} t = -\sqrt{3}t \cos 2C - 2t \cos 2B \\ \sqrt{3}t = -2t \cos 2A - t \cos 2C \\ 2t = -t \cos 2B - \sqrt{3}t \cos 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\sqrt{3} \cos 2C - 2 \cos 2B \\ \sqrt{3} = -2 \cos 2A - \cos 2C \\ 2 = -\cos 2B - \sqrt{3} \cos 2A \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos 2A = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 2B = -\frac{1}{2} \\ \cos 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{5\pi}{12} \\ B = \frac{7\pi}{12} \\ C = \frac{\pi}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Cách 2. Vì tam giác ABC có ít nhất một góc nhọn nên $t > 0$. Suy ra A, B, C là ba góc nhọn. Do đó $A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$ là ba góc của tam giác $A_2B_2C_2$. Ta có

$$\frac{\sin 2A}{1} = \frac{\sin 2B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 2C}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin A_2}{1} = \frac{\sin B_2}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C_2}{2}.$$

Vậy tam giác $A_2B_2C_2$ có $A_2 = \frac{\pi}{6}, B_2 = \frac{\pi}{3}, C_2 = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra tam giác ABC có $A = \frac{5\pi}{12}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{4}$.

Bài toán 2.9. Cho tam giác ABC . Biết $\frac{\cos A}{1} = \frac{\cos B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2}$.

Chứng minh $A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{2}$.

Chứng minh 1. Đặt $\frac{\cos A}{1} = \frac{\cos B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2} = t > 0$.

Suy ra $\cos A > 0, \cos B > 0$, hay tam giác ABC có góc A và góc B nhọn.

Ta có:

$$\begin{cases} t = -\sqrt{3}t \cos C + 2t \sin B \\ \sqrt{3}t = 2t \sin A - t \cos C \\ 2t = t \sin B + \sqrt{3}t \sin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin B = \frac{1}{2} \\ \cos C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{3} \\ B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Chứng minh 2. Vì tam giác ABC có góc A và góc B nhọn nên

$A_5 = \frac{\pi}{2} - A, B_5 = \frac{\pi}{2} - B, C_5 = \pi - C$ là ba góc của một tam giác. Ta có:

$$\frac{\cos A}{1} = \frac{\cos B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin A_5}{1} = \frac{\sin B_5}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C_5}{2}.$$

Suy ra tam giác $A_5B_5C_5$ có $A_5 = \frac{\pi}{6}, B_5 = \frac{\pi}{3}, C_5 = \frac{\pi}{2}$.

Vậy tam giác ABC có $A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{\pi}{2}$.

Bài toán 2.10 (Tập chí Toán học tuổi trẻ).

Nhận dạng tam giác ABC biết

$$\sqrt{3} \cos A + 2 \cos B + 2\sqrt{3} \cos C = 4.$$

Giải. Ta có:

$$\sqrt{3} \cos A + 2 \cos B + 2\sqrt{3} \cos C = 4.$$

$$\Leftrightarrow 8 - 2(\sqrt{3} \cos A + 2 \cos B + 2\sqrt{3} \cos C) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{3} \cos(B + C) - 4 \cos B - 4\sqrt{3} \cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 + 2\sqrt{3} \cos B \cos C - 2\sqrt{3} \sin B \sin C - 4 \cos B - 4\sqrt{3} \cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{3} \cos B \cos C - 2\sqrt{3} \sin B \sin C - 4 \cos B - 4\sqrt{3} \cos C + \sin^2 B + \cos^2 B + 3 \sin^2 C + 3 \cos^2 C = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 B - 2\sqrt{3} \sin B \sin C + 3 \sin^2 C) + (4 + \cos^2 B + 3 \cos^2 C - 4 \cos B - 4\sqrt{3} \cos C + 2\sqrt{3} \cos B \cos C) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin B - \sqrt{3} \sin C)^2 + (2 - \cos B - \sqrt{3} \cos C)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin B = \sqrt{3} \sin C \\ 2 - \cos B - \sqrt{3} \cos C = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin B}{\sin C} = \sqrt{3} \\ 2 - \cos B - \frac{\sin B}{\sin C} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin C = \sin(B + C) = \sin A. \end{cases}$$

Suy ra (theo Bài 2.7):

$$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin C}{1} \text{ hay } A = \frac{\pi}{2}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{6}.$$

Bài toán 2.11. Hãy nhận dạng tam giác ABC có ba góc nhọn, biết

$$\sqrt{3} \cos 2A + 2 \cos 2B + 2\sqrt{3} \cos 2C = -4.$$

Giải.

Cách 1. Ta có:

$$\sqrt{3} \cos 2A + 2 \cos 2B + 2\sqrt{3} \cos 2C = -4.$$

$$\Leftrightarrow 8 + 2(\sqrt{3} \cos 2A + 2 \cos 2B + 2\sqrt{3} \cos 2C) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2B - \sqrt{3} \sin 2C)^2 + (2 + \cos 2B + \sqrt{3} \cos 2C)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2B = \sqrt{3} \sin 2C \\ 2 + \cos 2B + \sqrt{3} \cos 2C = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin 2B}{\sin 2C} = \sqrt{3} \\ 2 \sin 2C = -\sin(2B + 2C) = \sin 2A. \end{cases}$$

Suy ra (theo Bài 2.8):

$$\frac{\sin 2A}{2} = \frac{\sin 2B}{\sqrt{3}} = \frac{\sin 2C}{1} \text{ hay } A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{5\pi}{12}.$$

Cách 2. Đặt $A_2 = \pi - 2A, B_2 = \pi - 2B, C_2 = \pi - 2C$. Vì A, B, C là ba góc nhọn của tam giác ABC nên A_2, B_2, C_2 là ba góc của tam giác $A_2B_2C_2$. Ta có:

$$\sqrt{3} \cos 2A + 2 \cos 2B + 2\sqrt{3} \cos 2C = \sqrt{3} \cos A_2 + 2 \cos B_2 + 2\sqrt{3} \cos C_2 = -4.$$

Theo Bài 2.10 thì tam giác $A_2B_2C_2$ có $A_2 = \frac{\pi}{2}, B_2 = \frac{\pi}{3}, C_2 = \frac{\pi}{6}$.

Vậy tam giác ABC có $A = \frac{\pi}{4}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{5\pi}{12}$.

Bài toán 2.12 (Tuyển tập đề thi Olympic 30-4, năm 2003).

Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$3\left(\sin^4 \frac{A}{2} + \sin^8 \frac{C}{2}\right) + 8\left(\sin^6 \frac{B}{2} + \sin^8 \frac{C}{2}\right) + 13 \sin^8 \frac{C}{2} \geq \frac{13}{32}. \quad (2.10)$$

Chứng minh 1. Ta chứng minh

$$3 \sin^4 \frac{A}{2} + 8 \sin^6 \frac{B}{2} + 24 \sin^8 \frac{C}{2} \geq \frac{13}{32}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$3 \sin^4 \frac{A}{2} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \geq 2 \sqrt{9 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \sin^4 \frac{A}{2}} = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{A}{2}.$$

$$8 \sin^6 \frac{B}{2} + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 8 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3 \sqrt[3]{64 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \sin^6 \frac{B}{2} \cdot 8 \left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{B}{2}.$$

$$24 \sin^8 \frac{C}{2} + 24 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 24 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 24 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \geq 4 \sqrt[4]{24^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \sin^8 \frac{C}{2}} = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{C}{2}.$$

Cộng các bất đẳng thức theo vế ta được

$$3 \sin^4 \frac{A}{2} + 8 \sin^6 \frac{B}{2} + 24 \sin^8 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{2} \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right) - \frac{23}{32}. \text{ Với}$$

mọi $\triangle ABC$ ta lại có

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

Suy ra:

$$3 \sin^4 \frac{A}{2} + 8 \sin^6 \frac{B}{2} + 24 \sin^8 \frac{C}{2} \geq \frac{13}{32} (\text{đpcm}).$$

Bài toán 2.13. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$3(\cos^4 A + \cos^8 C) + 8(\cos^6 B + \cos^8 C) + 13 \cos^8 C \geq \frac{13}{32} \quad (2.11)$$

Chứng minh 1. Ta có

$$3(\cos^4 A + \cos^8 C) + 8(\cos^6 B + \cos^8 C) + 13 \cos^8 C \geq \frac{13}{32}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos^4 A + 8 \cos^6 B + 24 \cos^8 C \geq \frac{13}{32}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$3 \cos^4 A + 8 \cos^6 B + 24 \cos^8 C \geq \frac{3}{2}(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - \frac{23}{32}.$$

Nhưng $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$ với mọi ΔABC nên

$$3 \cos^4 A + 8 \cos^6 B + 24 \cos^8 C \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{23}{32} = \frac{13}{32} \text{ (đpcm)}.$$

Chứng minh 2. Đặt $A = \frac{\pi - A_2}{2}, B = \frac{\pi - B_2}{2}, C = \frac{\pi - C_2}{2}$.

Vì $\cos A = \sin \frac{A_2}{2}, \cos B = \sin \frac{B_2}{2}, \cos C = \sin \frac{C_2}{2}$ nên với mọi hệ thức chứa $\cos A, \cos B, \cos C$ của tam giác ABC bất kì ta có một hệ thức chứa $\sin \frac{A_2}{2}, \sin \frac{B_2}{2}, \sin \frac{C_2}{2}$ của tam giác $A_2B_2C_2$. Áp dụng Bài 2.12 cho Bài 2.13 ta được:

$$3\left(\sin^4 \frac{A_2}{2} + \sin^8 \frac{C_2}{2}\right) + 8\left(\sin^6 \frac{B_2}{2} + \sin^8 \frac{C_2}{2}\right) + 13 \sin^8 \frac{C_2}{2} \geq \frac{13}{32} \text{ (đpcm)}.$$

Kết luận. Các ví dụ trên cho thấy, ta không những sử dụng *phép biến đổi tuyến tính góc* cho những đẳng thức, bất đẳng thức dạng đối xứng mà còn có thể áp dụng *phép biến đổi tuyến tính góc* cho những đẳng thức, bất đẳng thức dạng tổng quát hơn. Như vậy, *phép biến đổi tuyến tính góc trong tam giác* cho phép sáng tạo thêm nhiều hệ thức lượng giác trong tam giác.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Bài toán 2.14. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC

$$\cos \frac{A}{2} \sqrt{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Bài toán 2.15. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC

$$\sin A \sqrt{\sin B \sin C} \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Bài toán 2.16. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$\cos A \sqrt{\cos B \sin C} \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Bài toán 2.17. Cho tam giác ABC , chứng minh

$$\frac{\cos A}{3} + \frac{\cos B}{4} + \frac{\cos C}{5} \leq \frac{5}{12}.$$

Bài toán 2.18. Cho tam giác ABC , chứng minh

$$\frac{\cos 2A}{3} + \frac{\cos 2B}{4} + \frac{\cos 2C}{5} \geq -\frac{5}{12}.$$

Bài toán 2.19. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ,

$$\cos A \cos B \sqrt[n]{\cos C} \leq \frac{n}{2(n+1)\sqrt[n]{n+1}}.$$

Bài toán 2.20. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC có ba góc nhọn, ta đều có

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sqrt[n]{\sin \frac{C}{2}} \leq \frac{n}{2(n+1)\sqrt[n]{n+1}}.$$

Bài toán 2.21. Cho các số dương m, n, p . Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có:

$$\frac{n+p}{m} \tan^2 \frac{A}{2} + \frac{p+m}{n} \tan^2 \frac{B}{2} + \frac{m+n}{p} \tan^2 \frac{C}{2} \geq 2.$$

Bài toán 2.22. Cho các số dương m, n, p . Chứng minh rằng trong tam giác ABC có ba góc nhọn ta luôn có:

$$\frac{n+p}{m} \cot^2 A + \frac{p+m}{n} \cot^2 B + \frac{m+n}{p} \cot^2 C \geq 2.$$

Kết luận

Luận văn *Hệ thức lượng giác trong tam giác với phép biến đổi tuyến tính góc* nhằm thể hiện ý tưởng sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc trong tam giác trong sáng tạo và chứng minh các hệ thức lượng giác. Luận văn đã đạt được những kết quả sau:

1) Đưa ra và chứng minh được những định lý, mệnh đề, hệ quả của một số phép biến đổi tuyến tính về góc trong tam giác và từ đó có được một số chú ý và nhận xét có liên quan.

2) Thông qua một số đề thi học sinh giỏi, đề thi vào Đại học, một số bài toán trong tạp chí *Toán học và tuổi trẻ* và một số bài toán trong sách giáo khoa phổ thông, cũng như các sách tham khảo về hệ thức lượng giác trong tam giác, tác giả luận văn đã cố gắng minh họa và chứng minh một số hệ thức thông qua ý tưởng sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc trong tam giác.

Nhiều bài toán hệ thức trong tam giác có thể được chứng minh một cách nhất quán nhờ phép biến đổi tuyến tính góc. Tương tự, nếu thay biến đổi tuyến tính góc bằng phép biến đổi đơn điệu thì ta cũng sẽ nhận được chứng minh mới cho nhiều hệ thức đã biết.

Hy vọng trong thời gian tới, tác giả sẽ đi sâu nghiên cứu và khai thác nhiều hơn nữa đề tài này, nhằm làm rõ hơn nữa vai trò và giá trị của ý tưởng biến đổi tuyến tính góc hoặc biến đổi đơn điệu trong sáng tạo và chứng minh các hệ thức trong tam giác, phục vụ tốt hơn trong công tác giảng dạy.

Tài liệu tham khảo

- [1] Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng, (2010), " Chứng minh và sáng tạo các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc", *Kỷ yếu hội thảo Các chuyên đề chuyên toán bồi dưỡng HSG THPT*.
- [2] Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng, (2011), " Chứng minh và sáng tạo các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc", *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, số 3 và 4.
- [3] Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng, *Chứng minh và sáng tạo các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc*, (Bản thảo), 280 trang.

Tài liệu tham khảo

- [1] Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng, (2010), " Chứng minh và sáng tạo các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc", *Kỷ yếu hội thảo Các chuyên đề chuyên toán bồi dưỡng HSG THPT*.
- [2] Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng, (2011), " Chứng minh và sáng tạo các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc", *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, số 3 và 4.
- [3] Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng, *Chứng minh và sáng tạo các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc*, (Bản thảo), 280 trang.
- [4] Võ Giang Mai, *Chuyên đề hệ thức lượng trong tam giác*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 2001.
- [5] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Minh Tuấn, *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.
- [6] Trần Phương, *Tuyển tập các chuyên đề luyện thi Đại học môn Toán - Hệ thức lượng giác*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2004.
- [7] Tạ Duy Phượng, *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.
- [8] Các tạp chí, các tuyển tập đề thi Olympic 30-4, các trang WEB và các sách Toán phổ thông.

- [9] D. S. Mitrinovic, J. E. Pečarić, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, 1989.