ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN KIM TOÀN

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠO HÀM VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học : TS. Nguyễn Văn Ngọc

Thái Nguyên - 2012

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Mục lục

Mở đầu **3**

1 Một số bất đẳng thức đạo hàm của hàm một biến **6**

1.1 Các định lý trung bình 6

1.1.1 Lý thuyết tóm tắt 6

1.1.2 Các bài toán 6

1.2 Sự tăng giảm của hàm số 12

1.3 Hướng lồi và điểm uốn của đồ thị hàm số 14

1.4 Công thức Taylor và bất đẳng thức Landau-Hadamard . . . 15

1.4.1 Công thức Taylor trên một khoảng 15

1.4.2 Công thức Taylor địa phương 16

1.4.3 Bất đẳng thức Landau-Hadamard 16

1.4.4 Các bài toán 16

1.5 Bất đẳng thức Glaeser 19

1.5.1 Giới thiệu 19

1.5.2 Bất đẳng thức có điều kiện 20

1.5.3 Bất đẳng thức không có điều kiện biên 25

1.6 Công thức tính đạo hàm cấp n và một số bất đẳng thức liên quan 25

1.7 Một số bất đẳng thức đạo hàm khác của các đa thức 30

1.8 Định lý Markov-Bernsterin 36

2 Ứng dụng của đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình **38**

2.1 Ứng dụng đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức 38

2.2 Ứng dụng của đạo hàm trong phương trình,bất phương trình 50

2Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài luận văn

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề khó của toán học sơ cấp, đòi hỏi tính tư duy và tính sáng tạo cao. Trong chương trình chuyên toán của các trường THPT chuyên thì bất đẳng thức là một chuyên đề quan trọng. Các bài toán liên quan đến bất đẳng thức cũng là những bài toán thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi toán cấp quốc gia, khu vực và quốc tế.

Các bài toán về bất đẳng thức khá đa dạng và có thể chứng minh bằng nhiều phương pháp khác nhau trong đó phương pháp sử dụng đạo hàm là một công cụ hữu hiệu.Tuy nhiên, các bất đẳng thức đạo hàm hiện nay còn ít được quan tâm và giới thiệu trong các tài liệu bằng Tiếng Việt.

Bởi vậy việc sưu tầm, tuyển chọn, khai thác về một số bất đẳng thức đạo hàm một biến như: các định lý trung bình, sự tăng giảm của hàm số, hướng lồi và điểm uốn của đồ thị hàm số, công thức Taylor, công thức tính đạo hàm cấp n, là rất cần thiết cho công tác giảng dạy và học tập toán học ở bậc phổ thông.

Trên cơ sở các bất đẳng thức đạo hàm đó, có thể vận dụng vào giải quyết một lớp các bài toán khó như: chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, giải bất phương trình. Đó là những dạng toán được đề cập nhiều trong các kì thi học sinh giỏi toán cấp quốc gia, Olympic toán quốc tế.

Bên cạnh những bất đẳng thức đạo hàm kể trên thì vẫn còn khá nhiều bất đẳng thức đạo hàm khó hơn, được giới thiệu chưa nhiều bằng tiếng việt như: bất đẳng thức Landau-Hadamard; bất đẳng thức Glaeser, bất

3Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

đẳng thức Markov-Bernstein và một số bất đẳng thức khác liên quan đến hàm lồi. Đây là những bất đẳng thức khó còn ít được quan tâm, chỉ xuất hiện rải rác trong một số tài liệu.

Vì vậy việc giới thiệu các bất đẳng thức đạo hàm này là cần thiết cho công tác giảng dạy và học tập toán học ở bậc phổ thông.

2. Mục đích nghiên cứu luận văn

Sưu tầm, giới thiệu, hệ thống hóa và phân loại một số bất đẳng thức đạo hàm một biến số để áp dụng vào giải các bài toán sơ cấp khó, hay gặp trong các kì thi vào lớp chuyên, thi đại học, thi học sinh giỏi quốc gia và Olympic toán quốc tế như: Chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, giải bất phương trình.

Bên cạnh đó giới thiệu một số bất đẳng thức đạo hàm khó hơn chưa được giới thiệu nhiều trong các tài liệu Tiếng Việt như: bất đẳng thức Landau-Hadamard, bất đẳng thức Glaeser, bất đẳng thức Markov-Bernstein và một số bất đẳng thức khác liên quan đến hàm lồi.

3. Bố cục của luận văn

Bản luận văn "Một số bất đẳng thức đạo hàm và ứng dụng gồm có: mở đầu, hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Một số bất đẳng thức đạo hàm cơ bản

Trong chương này trình bày các định lý trung bình, định lý Rolle, định lý Lagrange, định lý Cauchy, sự tăng giảm của hàm số, hướng lồi và điểm uốn của đồ thị hàm số, công thức Taylor - bất đẳng thức Landau-Hadamard, bất đẳng thức Glaese, bất đẳng thưc Markov-Bernstein công thức tính đạo hàm cấp n và một số bất đẳng thức đạo hàm khác của đa thức.

Chương 2. Ứng dụng của đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức,giải phương trình,bất phương trình

Trong chương này trình bày những ứng dụng của các bất đẳng thức đạo hàm trong việc giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình.

Luận văn được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của

4Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

TS. Nguyễn Văn Ngọc - Viện Toán Học Hà Nội. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn các Thầy Cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo Trường Đại Học Khoa Học. Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán K4 Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã động viên, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu sẽ không tránh khỏi những thiếu sót, em rất mong nhận được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của các Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 09 năm 2012

Tác giả

Nguyễn Kim Toàn

5Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Chương 1

Một số bất đẳng thức đạo hàm của hàm một biến

1.1 Các định lý trung bình

1.1.1 Lý thuyết tóm tắt

Trong mục này trình bày một số định lý trung bình vi phân, được biết đến trong nhiều tài liệu về toán bằng Tiếng Việt.

Định lý 1.1. *(Định lý Rolle) Giả sử hàm f(x) liên tục trên đoạn [a,b]; có đạo hàm trên khoảng (a,b) và f(a) = f(b) thì tồn tại* $\xi \in (a, b)$ *sao cho f'(*ξ*) = 0.*

Định lý 1.2. *(Định lý Lagrange) Nếu hàm f(x) liên tục trên đoạn [a,b] và có đạo hàm trên khoảng (a,b) thì tồn tại* $\xi \in (a, b)$*, sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Định lý 1.3. *(Định lý Cauchy) Nếu các hàm f(x), g(x) đồng thời xác định, liên tục trên đoạn [a,b] và có đạo hàm trên khoảng (a,b), với g'(x)* $\neq 0, \forall x \in (a, b)$ *và* $g(a) \neq g(b)$ *thì tồn tại* $\xi \in (a, b)$ *sao cho:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

1.1.2 Các bài toán

Trong phần này trình bày một số bài toán chứng minh bất đẳng thức. Đây là những bài toán khó, ở dạng tổng quát, sử dụng các định lý trung bình để chứng minh.

Bài toán 1.1. *Cho hàm f(x) liên tục trên đoạn [a,b], có đạo hàm hữu hạn trong khoảng (a,b). Ngoài ra f không tuyến tính. Khi đó trong khoảng (a,b)*

6Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

tồn tại ít nhất một điểm c, sao cho

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

▼**Lời giải** Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bất kì bởi các điểm

$$a = x_o < x_1 < x_2 < .. < x_n = b.$$

Ta nhận được:

$$\Big|f(b) - f(a)\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))\Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\Big|f(x_{i+1}) - f(x_i)\Big|.$$

Theo công thức Lagrange, ta có

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i) \triangle x_i,\ x_i < \xi_i < \ x_{i+1}, \triangle x_i = x_{i+1} - xi.$$

Do đó ta có

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|f'(\xi)| \triangle x_i.$$

Vì hàm $f(x)$ không tuyến tính, nên tồn tại một phân hoạch đoạn $[a, b]$ sao cho trong các số $|f'(\xi)|$ tồn tại một số lớn nhất, khác không. Kí hiệu số đó là $|f'(c)|$. Khi đó ta nhận được bất đẳng thức

$$|f(b) - f(a)| < |f'(c)|\sum_{i=0}^{n-1}\triangle x_i = (b - a)|f'(c)|, a < c < b.$$

Từ đó suy ra

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

Ta có đpcm.

Bài toán 1.2. *Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 hữu hạn trên đoạn $[a, b]$, thỏa mãn điều kiện $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh rằng trong khoảng (a, b) tồn tại ít nhất một điểm c, sao cho*

$$f''(c) \geq \frac{4}{(b - a)^2}|f(b) - f(a)|.$$

▼**Lời giải** Nếu $f(x) = const$ thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên. Giả sử $f(x) \neq const$. Từ điều kiện $f'(a) = f'(b) = 0$, suy ra $f(x)$

không tuyến tính. Áp dụng công thức Cauchy về số gia hữu hạn cho các hàm số $f(x)$ và $\phi(x) = \dfrac{(x-a)^2}{2}$ trên đoạn $\Big[a, \dfrac{(a+b)}{2}\Big]$ và cho các hàm số $f(x)$ và $\gamma(x) = \dfrac{(b-x)^2}{2}$ trên đoạn $\Big[\dfrac{a+b}{2}, b\Big]$, ta nhận được

$$\frac{8\Big[f(\frac{a+b}{2}) - f(a)\Big]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a}, \qquad a < \xi_1 < \frac{a+b}{2}.$$

$$\frac{8\Big[f(b) - f(\frac{a+b}{2})\Big]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2}, \qquad \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b.$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được

$$\frac{8\big[f(b) - f(a)\big]}{(b-a)^2} = \frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2}.$$

Vì $f'(a) = f'(b) = 0$, nên vế phải của đẳng thức cuối cùng có thể viết dưới dạng:

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1 - a} + \frac{f'(\xi_2)}{b - \xi_2} = \frac{f'(\xi_1) - f'(a)}{\xi_1 - a} - \frac{f'(b) - f'(\xi_2)}{b - \xi_2} = f''(\eta_1) - f''(\eta_2),$$

trong đó

$$a < \eta_1 < \xi_1; \qquad \xi_2 < \eta_2 < b.$$

Từ đó suy ra

$$\Big|\frac{8[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2}\Big| \leq |f''(\eta_1)| + |f''(\eta_2)|.$$

Kí hiệu:

$$f''(c) = max\{|f''(\eta_1)|; |f''(\eta_2)|\}.$$

Khi đó ta có

$$\Big|\frac{8[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2}\Big| \leq 2|f''(c)|.$$

Từ đó suy ra đpcm. Dấu đẳng thức không loại trừ vì có thể có trường hợp $|f''(\eta_1)| = |f''(\eta_2)|$.

Bài toán 1.3. *Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng $[a, +\infty)$ và hơn nữa, $f'(x) > k = const > 0, \forall x > a$. Chứng minh rằng, $f(a) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có một và chỉ một nghiệm thực trong khoảng $\Big(a, a + \dfrac{|f(a)|}{k}\Big)$.*

8Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

▼Lời giải: Áp dụng Định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, a + \dfrac{|f(a)|}{k}]$ ta có:

$$f\Big(a + \frac{|f(a)|}{k}\Big) - f(a) = f'\Big(a + \theta\frac{|f(a)|}{k}\Big).\frac{|f(a)|}{k}, 0 < \theta < 1.$$

Từ điều kiện $f'(x) > k > 0$, ta tìm được:

$$f\Big(a + \frac{|f(a)|}{k}\Big) - f(a) > |f(a)|,$$

Suy ra

$$f\Big(a + \frac{|f(a)|}{k}\Big) > |f(a)| + f(a) = -f(a) + f(a) = 0.$$

Hàm $f(x)$ trên các đầu mút của đoạn $\big[a, a + \dfrac{|f(a)|}{k}\big]$ nhận các giá trị trái dấu, nên theo Định lý Cauchy về giá trị trung gian tồn tại $\xi \in (a, a + \dfrac{|f(a)|}{k})$, sao cho $f(\xi) = 0$. Ta sẽ chứng minh điểm ξ đó là duy nhất. Thật vậy giả sử trên khoảng đó còn tìm được ξ_1, sao cho $f(\xi_1) = 0$. khi đó theo định lý Rolle, trên (ξ, ξ_1) nếu $(\xi < \xi_1)$ hay trên khoảng (ξ_1, ξ), nếu $(\xi_1 < \xi)$ tìm được ξ_2, sao cho $f'(\xi_2) = 0$. Điều đó trái với giả thiết là $f'(x) > k > 0$ khi $x > a$.

Bài toán 1.4. *a, Giả sử hàm $f(x)$ khả vi liên tục n lần trên [a,b] và trên đoạn này có không ít hơn n không điểm (nghiệm của phương trình f(x)=0) tính cả bội .*
Chứng minh rằng:

$$\max_{[a,b]}|f(x)| \le \frac{(b-a)^n}{n!}\max_{[a,b]}|f^{(n)}(x)|.$$

b, Hàm $f(x) \in \mathbb{C}^2[0,1]$ có không ít hơn 2 nghiệm trên [0,1] (kể cả bội), ngoài ra $|f''(x)| \le 1, \forall x \in [0,1]$. Số $\max\limits_{[0,1]}|f(x)|$ sẽ như thế nào ?

▼Lời giải: a, Bằng quy nạp theo $k \ge 0$ ta sẽ chứng minh điều khẳng định sau:

Định lý Rolle tổng quát: Nếu $f \in \mathbb{C}^k[a,b]$ và f có không ít hơn (k+1)

9Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

không điểm (kể cả bội) trên đoạn [a,b] thì $f^{(k)}$ có ít nhất một không điểm trên [a,b].
Với k=0 điều khẳng định là hiển nhiên.
Giả sử định lý đúng với k-1. Ta chứng minh định lý đúng với k.
Giả sử $x_1, x_2, ..., x_l$ là những nghiệm khác nhau của hàm f trên $[a, b]$ có các bội tương ứng là $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_l$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_l \geq k + 1$ và $x_1 < x_2 < ... < \alpha_l$. Khi đó $f'(x)$ có nghiệm x_j bội $\alpha_j - 1$(nếu $\alpha_j > 1$) và ngoài ra theo định lý Rolle còn có ít nhất $l - 1$ nghiệm trên khoảng $(\alpha, \alpha_{j+1}), j = 1, 2, ..., l - 1$. Tóm lại số nghiệm của $f'(x)$ trên [a,b] không vượt quá:

$$\sum_{j=1}^{l}(\alpha_j - 1) + l - 1 \geq k - l + 1 - l - 1 = k.$$

Bây giờ, còn lại ta áp dụng giả thiết quy nạp cho f' với $k - 1$. Định lý được chứng minh.

Ta kí hiệu $x_1, x_2, .., x_n$ là n không điểm của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ ở đây giữa các số này có thể trùng nhau, mỗi nghiệm của f có thể lặp lại s lần nếu bội của nó không ít hơn s. Giả sử $x_0 \in [a, b]$ tùy ý và khác với $x_1, x_2, ..x_n$. Xét đa thức bậc n:

$$P(x) = f(x_0).\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(x - x_j)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - P(x)$. Hàm $g(x)$ có các nghiệm là $x_0, x_1, ..., x_n$. Nếu số $x_j (j \geq 1)$ nằm trong dãy $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ s lần thì bội của nghiệm x_j không ít hơn s. Vì vậy áp dụng định lý Rolle tổng quát thì $g^{(n)}$ có ít nhất một nghiệm $x' \in [a, b]$.
Ta có

$$0 = g^{(n)}(x') = f^{(n)}(x') - p^{(n)}(x') = f^{(n)}(x') - \frac{n! f(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(x_0 - x_j)}.$$

10Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Từ đó suy ra

$$|f(x_0)| = \frac{|f^{(n)}(x')| \prod_{j=1}^{n} |x_0 - x_j|}{n!} \leq \frac{|f^{(n)}(x')|.(b-a)^n}{n!}$$
$$\leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{[a,b]} |f^{(n)}(x)|.$$

Vì x_0 là tùy ý nên

$$\max_{[a,b]} |f(x)| \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \max_{[a,b]} |f^{(n)}(x)|.$$

b) Theo phần a) ta có $\max_{[0,1]} |f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Ví dụ $f(x) = \frac{x^2}{2}$, thì giá trị $\frac{1}{2}$ đạt được.

Bài toán 1.5. *Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, khả vi trên khoảng $(0;1)$ và $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng $\exists c \in (0;1)$ sao cho $f'(c) = f(c)$.*

▼**Lời giải** Ta đặt $g(x) = f(x).e^{-x}, x \in [0;1]$. Vì $g(0) = g(1) = 0$ nên theo định lý Rolle $\exists c \in (0;1)$ sao cho $g'(c) = 0$. Nhưng $g'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x} \Longrightarrow (f'(c) - f(c))e^{-c} = 0 \Longrightarrow f'(c) = f(c)$.

Bài toán 1.6. *Giả sử hàm $f(x)$ khả vi hai lần trong khoảng $[a, +\infty)$ ngoài ra $f(a) = A > 0, f'(a) < 0, f''(x) \leq 0$, khi $x > a$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có một và chỉ một nghiệm trong khoảng $(a, +\infty)$.*

▼**Lời giải** Khi $x > a$, theo công thức về số gia hữu hạn Lagrange, ta có

$$f(x) = A + (x-a)f'(\xi_1(x)), a < \xi_1 < x. \quad (1.1)$$

$$f'(x) = f'(a) + (x-a)f''(\xi_2(x)), a < \xi_2 < x. \quad (1.2)$$

Từ điều kiện $f''(\xi_2(x)) \leq 0$, suy ra $f'(x) < 0$,khi $x > a$, vì thế $f(x)$ giảm trên khoảng $(a, +\infty)$. Từ các công thức (1.1) và (1.2) suy ra

$$f(x) = A + (x-a)f'(a) + (x-a)(\xi_1 - a)f''(\xi_2(\xi_1)). \quad (1.3)$$

Vì $f'(a) < 0, f''(\xi_2(\xi_1)) \leq 0$, nên từ (1.3) suy ra khi x đủ lớn thì $f(x) < 0$. Theo Định lý Cauchy về giá trị trung bình, suy ra trong khoảng (a, x_0) tồn tại điểm x_1, sao cho $f(x_1) = 0$. Hàm số không triệt tiêu tại điểm nào khác x_1 vì nó giảm trên khoảng $(a, +\infty)$.

11Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

1.2 Sự tăng giảm của hàm số

a) Hàm số $f(x)$ được gọi là tăng (giảm) trên đoạn $[a, b]$, nếu $f(x_2) > f(x_1)$, khi $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ (hay tương ứng, $f(x_2) < f(x_1)$ khi $a \leq x_1 < x_2 \leq b$).

b) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm hữu hạn hay vô hạn trên khoảng $\mathbb{X}$. Để hàm đó tăng giảm trên $\mathbb{X}$ điều kiện cần và đủ là
1) $f'(x) \geq 0, (f'(x) \leq 0)$.
2)$f'(x)$ không triệt tiêu trên một đoạn $[\alpha, \beta]$ nào của $\mathbb{X}$.

Bài toán 1.7. *Chứng minh rằng, nếu $\varphi(x)$ là hàm khả vi đơn điệu tăng và $f'(x) \leq \varphi'(x)$ khi $x \geq x_0$, thì*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0), x \geq x_0.$$

▼**Lời giải** Vì các hàm $f(x)$ và $\varphi(x)$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của định lý Cauchy về giá trị trung gian, nên ta có:

$$\Big|\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}\Big| = \Big|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\Big| \leq 1, (x_0 < c < x).$$

Từ đó suy ra

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Về mặt hình học điều đó có nghĩa là: số gia của hàm khả vi đơn điệu tăng không bé hơn số gia của mọi hàm khả vi khác có trị tuyệt đối của đạo hàm không lớn hơn trị tuyệt đối của đạo hàm hàm khả vi đơn điệu tăng đó

Bài toán 1.8. *Giả sử hàm $f(x)$ khả vi hai lần trong khoảng (a, b) và $f''(x) \neq 0, a < x < b$. Chứng minh rằng với mỗi $\xi \in (a, b)$ có thể tìm được trong (a, b) hai giá trị x_1, x_2 sao cho*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

▼ **Lời giải** Để xác định ta giả thiết rằng $f''(\xi) < 0, \xi \in (a; b)$ khi đó hàm $f'(x)$ giảm tại điểm $x = \xi$: tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f'(x) > f'(\xi)$ khi $x \in (\xi - \delta; \xi)$; $f'(x) < f'(\xi)$ khi $x \in (\xi; \xi + \delta)$.
Xét hàm $\varphi(x) = f(\xi) - f(x) + f'(\xi)(x - \xi)$ trong khoảng $(\xi - \delta; \xi + \delta)$. Đạo hàm của nó $\varphi'(x) = -f'(x) + f'(\xi)$ thỏa mãn điều kiện $\varphi'(x) < 0$ khi

$\xi - \delta < x < \xi$; $\varphi'(x) > 0$ khi $\xi < x < \xi + \delta$. Bởi vậy hàm $\varphi(x)$ giảm trên khoảng $(\xi - \delta; \xi)$ và tăng trên khoảng $(\xi; \xi + \delta)$. Khi $x = \xi$ ta có $\varphi(\xi) = 0$ Thế thì $\varphi(x) \geq 0$ khi $x \in (\xi - \delta; \xi + \delta)$.
Ký hiệu $A = \varphi(\xi - \delta + 0)$; $B = \varphi(\xi + \delta - 0)$ và xét phương trình:

$$\varphi(x) = \varepsilon, \qquad (1.4)$$

trong đó $\varepsilon > 0$ là số cố định tùy ý, thỏa mãn điều kiện $0 < \varepsilon < \min(A; B)$. Từ lý luận trên rõ ràng phương trình (1.4) luôn có hai nghiệm: $\xi - \delta < x_1 < \xi$ và $\xi < x_2 < \xi + \delta$. Như vậy trên khoảng $(a; b)$ (trong lân cận điểm ξ) tìm được 2 giá trị x_1 và x_2 $(a < x_1 < \xi < x_2 < b)$ sao cho:

$$f(\xi) - f(x_1) + (x_1 - \xi)f'(\xi) = \varepsilon, \qquad (1.5)$$

$$f(\xi) - f(x_2) + (x_2 - \xi)f'(\xi) = \varepsilon, \qquad (1.6)$$

Lấy (1.5) trừ (1.6) vế với vế ta được

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

.

Bài toán 1.9. *Hàm $\phi(x)$ khả vi 2 lần trên $[0, +\infty)$. Biết rằng $\phi(x) > 0, \phi'(x) > 0$ và $\dfrac{\phi(x)\phi''(x)}{(\phi'(x))^2} \leq 2, \forall x \in [0, +\infty)$.*
Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\phi'(x)}{(\phi(x))^2} = 0$.

▼**Lời giải** Đặt $f(x) = \dfrac{1}{\phi(x)}$ ta có:

$$f'(x) = -\frac{\phi'(x)}{\phi^2(x)}; f''(x) = \frac{2(\phi'(x))^2 - \phi(x).\phi''(x)}{(\phi(x))^3}.$$

Do đó $f(x) > 0, f'(x) < 0, \dfrac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = 2 - \dfrac{\phi''(x)\phi(x)}{(\phi'(x))^2} \geq 0,$
tức là $f''(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.
Ta cần chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Vì $f'(x) < 0, \forall x \geq 0$ và $f'(x)$ đơn điệu không giảm trên $[0, +\infty)$ nên tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = c \leq 0$.
Nếu $c < 0$ thì $f'(x) \leq c, f(x) \leq cx + f(0), \forall x \geq 0$. Điều này không thể xảy ra do $f(x) > 0, \forall x \in [0, +\infty) \to c = 0$.
Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\phi'(x)}{(\phi(x))^2} = 0$.

13Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

1.3 Hướng lồi và điểm uốn của đồ thị hàm số

1) Đồ thị của hàm khả vi $f(x)$ trên khoảng (a, b) được gọi là lồi xuống (lên), nếu trong phạm vi nói trên nó không nằm dưới (nằm trên) tiếp tuyến bất kì của nó.

2) Điều kiện đủ để đồ thị của hàm số lồi xuống (lên) là $f''(x) \geq 0, (f''(x) \leq 0)$ khi $a < x < b$, nếu hàm số có đạo hàm đến cấp 2 hữu hạn khắp nơi trên khoảng (a, b).

3) Điểm $M_0(x_0, y_0)$ của đồ thị hàm số $f(x)$ được gọi là điểm uốn, nếu tồn tại một lân cận của x_0 trên trục hoành, sao cho trong lân cận đó đồ thị của hàm số ở về hai bên điểm x_0 có hướng lồi khác nhau.

4) Điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ mà $f''(x_0) = 0$ hoặc $f''(x_0)$ không tồn tại, sẽ là điểm uốn, nếu $f''(x)$ đổi dấu khi qua điểm x_0.

Bài toán 1.10. *Hàm $f(x)$ được gọi là lồi phía dưới (phía trên) trên khoảng (a, b) nếu với các điểm x_1, x_2 bất kì của khoảng đó và các số λ_1, λ_2 tùy ý $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ ta có bất đẳng thức:*

$$f(\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

hay tương ứng bất đẳng thức ngược lại

$$f(\lambda_1(x_1) + \lambda_2(x_2)) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Chứng minh rằng:
1) Hàm $f(x)$ lồi phía dưới trên khoảng (a, b), nếu $f''(x) > 0$ khi $a < x < b$.
2) Hàm $f(x)$ lồi phía trên trên khoảng (a, b), nếu $f''(x) < 0$ khi $a < x < b$.

▼**Lời giải** Giả sử $f''(x) > 0, x \in (a, b)$ và giả sử $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ là các số dương tùy ý thỏa mãn điều kiện $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Nếu x_1, x_2 là hai điểm bất kì của khoảng (a, b) và $x_1 < x_2$ thì hiển nhiên điểm $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ nằm giữa x_1, x_2. Theo công thức Lagange ta có:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_1) = \lambda_2(x_2 - x_1) f'(\xi_1), x_1 < \xi_1 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \tag{1.7}$$

$$f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1(x_2 - x_1) f'(\xi_2). \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < \xi_2 < x_2. \tag{1.8}$$

Nhân cả hai vế của (1.7) và (1.8) tương ứng λ_1 vàλ_2 rồi trừ vế với vế các đẳng thức trên ta được:

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + \lambda_1 \lambda_2 (x_2 - x_1) f''(\xi_3),$$

14Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

trong đó $\xi_1 < \xi_3 < x_2$. Do các điều kiện $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, f''(\xi_3) > 0$, ta có bất đẳng thức:

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) > f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

tức là hàm $f(x)$ lồi phía dưới trên (a, b).
Nếu như $f''(x) < 0$ trên (a, b) thì hàm $g(x) = -f(x)$ theo chứng minh trên là lồi phía dưới trên (a, b), tức là;

$$\lambda_2 g(x_2) + \lambda_1 g(x_1) > g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

Suy ra

$$\lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 f(x_1) < f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2).$$

Điều đó nghĩa là hàm $f(x)$ lồi phía trên trên (a, b).

1.4 Công thức Taylor và bất đẳng thức Landau-Hadamard

1.4.1 Công thức Taylor trên một khoảng

Giả sử hàm $f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên (a, b) đến cấp thứ $n-1$ và đạo hàm $f^{(n)}(x)$ hữu hạn với $a < x < b$. Khi đó với mỗi $x_0 \in (a, b)$ và $p > 0$, tồn tại $\theta \in (0, 1)$, sao cho công thức sau đây đúng

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x),$$

trong đó

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta)^{n-p}}{(n-1)! p} f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)].$$

(phần dư dưới dạng Slomilic-Roser)
Khi $p = n$ ta có phần dư dưới dạng Lagrange

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}[x_0 + \theta_1(x - x_0)], 0 < \theta_1 < 1.$$

Khi $p = 1$, ta có phần dư dạng Cauchy

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^n (1 - \theta_2)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}[x_0 + \theta_2(x - x_0)], 0 < \theta_2 < 1.$$

15Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

1.4.2 Công thức Taylor địa phương

Nếu hàm $f(x)$ xác định trong lân cận điểm x_0 nào đó, tại x_0 tồn tại các đạo hàm hữu hạn đến cấp n thì có công thức

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o[(x - x_0)^n].$$

1.4.3 Bất đẳng thức Landau-Hadamard

Giả sử $f(x), x \in \mathbb{R}$, là hàm khả vi hai lần và

$$M_k = \sup_{x\in R} |f^{(k)}(x)| < +\infty, (k = 0, 1, 2),$$

Chứng minh rằng $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

▼Lời giải Theo công thức Taylor, ta có

$$f(x_0) = f(x) + (x_0 - x)f'(x) + \frac{(x_0 - x)^2}{2} f''(\xi).$$

Từ đó suy ra

$$|f(x_0)| \leq |f(x)| + |f'(x)||x_0 - x| + |f''(\xi)|\frac{|x_0 - x|^2}{2} \leq M_0 + M_1 y + M_2\frac{y^2}{2},$$

trong đó $y = |x_0 - x|$.

Vì $M_0 + M_1 y + M_2\dfrac{y^2}{2} \geq 0, \forall y$, nên $M_1^2 \leq 2M_0M_2$, (đpcm).

1.4.4 Các bài toán

Bài toán 1.11. *Giả sử* $f(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}), f(0) = 0, f^{(k)}(0) = 0$ *và* $f^{(k)}(x) \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ *và* $x > 0$. *Chứng minh rằng:* $f(x) = 0$ *với* $x > 0$.

▼Lời giải Giả sử $x > 0$. Theo công thức Taylor ta có:

$$f(k) = \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!} x^k, 0 \leq \theta \leq x.$$

Vì $f^{(k+1)}(y) \geq 0$ với $y \geq 0$ nên $f^{(k)}$ tăng trên $[0; \infty)$ và $f^{(k)}(\theta) \leq f^{(k)}(x)$.

Chính vì vậy $\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k \geq f(x)$.

Ta cũng có:

$$f(2x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}x^n \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k \geq nf(x), (x \leq \theta \leq 2x).$$

16Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Bất đẳng thức này thỏa mãn $\forall x$ chỉ trong trường hợp $f(x) = 0$.

Bài toán 1.12. *Giả sử* $f(x) \in \mathbb{C}^2[0,1]; f(0) = f(1) = 0, |f''(x)| \le A, (0 < x < 1)$. *Chứng minh rằng*

$$|f'(x)| \le \frac{A}{2}, 0 \le x \le 1.$$

▼**Lời giải** Theo công thức Taylor, ta có

$$f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{x^2}{2!}f''(\xi_1), 0 < \xi_1 < x,$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(\xi_2), 0 < \xi_2 < x.$$

Từ đó suy ra

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

Ước lượng đẳng thức trên đây theo giá trị tuyệt đối của đạo hàm cấp hai, ta được

$$|f'(x)| \le \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1).$$

Vì $0 \le 2x^2 - 2x + 1 \le 1$ khi $0 \le x \le 1$, nên $|f'(x)| \le \frac{A}{2}$, (đpcm).

Bài toán 1.13. *Giả sử* $f(x)$ *là hàm khả vi vô hạn lần trên* $\mathbb{R}$ *sao cho:*
a) $\exists L > 0 : |f^{(n)}(x)| \le L, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.
b) $f(\frac{1}{n}) = 0$ *với* $n = 1, 2, 3, ...$
Chứng minh rằng $f(x) = 0$.

▼**Lời giải** Ta chứng minh với $k \in \mathbb{Z}^*$ bất kì, tồn tại một dãy điểm hội tụ về 0 mà $f^{(k)}(x) = 0$. Thật vậy, với $k = 0$, điều này đúng. Giả sử điều này đúng với $k = n$ ứng với dãy $x_1, x_2, ...$ khi đó do tính khả vi của $f^{(k)}(x)$, giữa hai điểm x_i và $x_{i+1}, \exists y_i$ sao cho $f^{(k+1)}(y_i) = 0$ và dãy $y_1, y_2, ..$ thỏa mãn điều kiện đặt ra. Bây giờ do tính liên tục của $f^{(k)}(x), f^{(k)}(0) = 0, \forall k = 0, 1, 2, ...$ Ta lấy x tùy ý, theo công thức Taylor ta có:

$$|f(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| \le \frac{L|x|^n}{n!}.$$

Do n tùy ý nên $|f(x)| = 0$.

17Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Bài toán 1.14. *Giả sử hàm $f(x)$ khả vi 2 lần, $f(0) = f(1) = 0$ và $\min\limits_{[0,1]} f(x) = -1$. Chứng minh rằng $\max\limits_{[0,1]} f''(x) \geq 8$.*

▼**Lời giải** Giả sử a là điểm cực tiểu $0 < a < 1$. Khi đó $f'(a) = 0, f(a) = -1$. Theo công thức Taylor ta có:

$$f(x) = -1 + \frac{f''(a + \theta_x(x-a))}{2}(x-a)^2, (0 < \theta_x < 1).$$

Với $x = 0, x = 1$ ta có $0 = -1 + \dfrac{f''(a + \theta_0(-a))}{2}a^2,$

$$0 = -1 + \frac{f''(a + \theta_1(1-a))}{2}(1-a)^2.$$

Ta kí hiệu $f''(a + \theta_i(i-a)) = c_i, (i = 1, 2)$ ta tìm được $c_0 = \dfrac{2}{a^2}, c_1 = \dfrac{2}{(1-a)^2}$. Do vậy với $a < \dfrac{1}{2}$ thì $c_0 \geq 8$; còn $a \geq \dfrac{1}{2}$ thì $c_1 \geq 8$ đó là đpcm.

Bài toán 1.15. *Giả sử $f(x)$ là hàm số có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$. và thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = a$. Chứng minh rằng:*

$$\max_{x \in [0;1]} \{f''(x)\} \geq 8(a-b).$$

Với $b = \min\limits_{x \in [0;1]} \{f(x)\}$.

▼**Lời giải** Áp dụng giả thiết và áp dụng định lý Rolle, tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho $f'(c) = 0$. Xét khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tại điểm c.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\theta(x))}{2!}(x-c)^2.$$

Thay lần lượt giá trị $x = 0$ và $x = 1$ vào đẳng thức trên ta thu được:

$$a = b + \frac{f''(\theta(0))}{2}.c^2,$$
$$a = b + \frac{f''(\theta(1))}{2}.(1-c)^2.$$

Hay

$$f''(\theta(0)) = \frac{2(a-b)}{c^2} \geq 0,$$
$$f''(\theta(1)) = \frac{2(a-b)}{(1-c)^2} \geq 0.$$

18Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Nhân vế với vế 2 bất đẳng thức sau cùng ta được:

$$f''(\theta(0)).f''(\theta(1)) = \frac{4(a-b)^2}{c^2(1-c)^2} \geq 64(a-b)^2.$$

(Sử dụng bất đẳng thức $c^2(1-c)^2 \leq \frac{1}{16}$, với $c \in [0;1]$).

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét: Nếu thay đoạn $[0;1]$ bằng đoạn $[\alpha;\beta]$ thì bằng phương pháp tương tự ta có kết quả

$$\max_{x\in[\alpha;\beta]}\{f''(x)\} \geq \frac{8(a-b)}{(\alpha-\beta)^2}.$$

1.5 Bất đẳng thức Glaeser

Nội dung chính của mục này được hình thành dựa trên tài liệu [7].

1.5.1 Giới thiệu

Cho một hàm f không âm trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm cấp hai liên tục bị chặn trên bởi $M > 0$ trên $\mathbb{R}$, khi đó đạo hàm cấp một thỏa mãn bất đẳng thức

$$-\sqrt{2Mf(x)} \leq f'(x) \leq \sqrt{2Mf(x)}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Điều ngạc nhiên của kết quả và có thể đó là lý do khiến nó không thể nổi tiếng hơn, mặc dù kết quả là một bất đẳng thức theo từng điểm, giả thiết toàn diện: f phải thỏa mãn với các hệ số nguyên trên $\mathbb{R}$. Bất đẳng thức $|f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}$ không đúng cho hàm không âmf chỉ được xác định trên khoảng (a,b) hoặc (a,∞) hàm $f(x) = x$ trên khoảng $(0,\infty)$. Với mục tiêu là tìm ra kiểu "quỹ tích" của bất đẳng thức Glaese's cho hàm f: để thay thế miền xác định $\mathbb{R}$ trong định lý với một tập con của $\mathbb{R}$, có thể sử dụng giới hạn biên hoặc đưa ra sự hội tụ yếu theo từng điểm. Một vài ví dụ nữa làm rõ sự cần thiết của các giả thuyết trong định lý Glaeser. Cho $f(x) > 0$ trên khoảng(a,b), một phép thử đầu tiên, phương pháp mở rộng hàm f trở thành hàm không âm trên $\mathbb{R}$, và sau đó áp dụng bất đẳng thức Glaese's để mở rộng. Ví dụ $f(x) = 0$ trên khoảng $(0,\infty)$ cho thấy điều đó là sai: f không mở rộng thành hàm lấy được vi phân không âm trên $\mathbb{R}$; nếu như vậy thì $f'(0)$ phải bằng 1, f phải tiến dần đến 0 và âm

khi $x \to 0^-$, mâu thuẫn. Để tránh tình trạng này, chúng ta có thể giả định rằng f' tiến gần đến cận trái của 0 nhưng giới hạn biên của nó không đủ mở rộng để thỏa mãn các giả thiết hoặc kết luận của bất đẳng thức Glaese's. Xét ví dụ $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ trên $(0, \infty)$, f được mở rộng thành hàm lấy được vi phân không âm $x^{\frac{3}{2}}$ trên $\mathbb{R}$, nhưng f" không bị chặn và f' không bị chặn trên $(0, \infty)$ bởi $\mu\sqrt{f}$ với bất kì μ.
Nếu ta xét thêm một giả thiết rằng: f tăng trên khoảng (a,b) và thỏa mãn $f(x) \geq 0, \lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = 0$ và $f''(x) \leq M$, khi đó ta nhận được bất đẳng thức (1.9) với $x \in (a, b)$ thông qua việc chứng minh

$$\frac{1}{2}(f'(x))^2 = \lim_{\omega \to a^+} \int_\omega^x f'(t)f''(t)dt \leq \int_a^x f'(t)Mdt \leq Mf(x). \qquad (1.10)$$

Tuy nhiên giả thiết "tăng" dường như quá chắc chắn và nó có thể thỏa mãn hơn để tìm một kết quả nếu f' biến thiên nhiều lần trên một khoảng.

1.5.2 Bất đẳng thức có điều kiện

Kết quả chính là định lý (1.4), không giả sử rằng f tăng; chứng minh sử dụng một cách khác (1.10) nhưng vẫn còn sơ cấp. Có thể chờ đợi một điều kiện giới hạn cho hàm f' tại một điểm a, dẫn đến sự ước lượng để hàm f tiến dần đến đến a,nhưng nó đã chỉ ra rằng điều kiện này $f''(x) \leq M$ với a<x<b là đủ.Thêm một điều kiện nữa rằng f'' bị chặn dưới bởi B, ta thu được giới hạn dưới $f'(x) \geq -\sqrt{2Mf(x)}$ trên khoảng (a,c], ở đó c phụ thuộc vào M và B nhưng không phụ thuộc vàof

Thật đơn giản, ta coi khoảng $I = (0, C)$ kết quả rõ ràng có thể được thể hiện trên khoảng (a,b).

Định lý 1.4. *Cho $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ giả sử*
- $f(x) \geq 0$ *với mọi* $x \in \mathbb{I}$.
- $f''(x)$ *liên tục trên* $\mathbb{I}$, ($f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{I})$).
- *Một hằng số M>0 sao cho* $f''(x) \leq M$ *với mọi* $x \in \mathbb{I}$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$.

Khi đó $-\sqrt{2Mf(x)} \leq f'(x) \leq \sqrt{2Mf(x)}, \forall x \in (a; b)$.

▼**Chứng minh** Đặt $s(x) = \max\left\{1, \dfrac{\sqrt{2f(x)}}{\sqrt{M}(C - x)}\right\}$.

Thì với mọi $x \in \mathbb{I}$

20Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

$$f'(x) \leq \sqrt{2Mf(x)}. \tag{1.11}$$

$$f'(x) \leq -\sqrt{2Mf(x)}\left(\frac{1}{2s(x)}\frac{s(x)}{2}\right). \tag{1.12}$$

Nếu thêm vào một hằng số B<M sao cho $B \leq f''(x)$ với mọi $x \in \mathbb{I}$
Đặt :

$$\widehat{s}(x) = \max\left\{1, \frac{\sqrt{2f(x)}}{\sqrt{M}(C-x)}\chi_{(\frac{M}{M-B}C,\infty)}(x)\right\}.$$

Thì f' thỏa mãn :

$$f'(x) \geq \max\left\{Bx, -\sqrt{2Mf(x)}\left(\frac{1}{2\widehat{s}(x)} + \frac{\widehat{s}(x)}{2}\right)\right\}.$$

Chứng mình : mở rộng f thành hàm liên tục trên đoạn $[0, C)$ với $f'(0) = 0$, định lý áp dụng cho $0 < t < C$.

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t - 0} = f''(c_1) \longrightarrow f'(t) = f''(c_1)t \longrightarrow f'(t) \leq Mt. \tag{1.13}$$

Tương tự như vậy nếu $f'' \geq B$ thì

$$Bt \leq f'(t). \tag{1.14}$$

Cho $x \in \mathbb{I}$ thì với mọi $y \in \mathbb{I}$ có tích phân

$$\begin{aligned}\int_y^x \int_x^t f''(s)dsdt &= \int_y^x (f'(t) - f'(x))dt \\ &= [f(t) - tf'(x)]_{t=y}^{t=x} \\ &= (f(x) - xf'(x)) - (f(y) - yf'(x)).\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(y) = f(x) - (x-y)f'(x) + \int_y^x \int_t^x f''(s)dsdt. \tag{1.15}$$

$$\Longrightarrow 0 \leq f(x) - (x-y)f'(x) + \frac{1}{2}(x-y)^2 M. \tag{1.16}$$

Với $f(y) \geq 0$.Đặt $\Delta x = x - y$ khi $0 < y < C$ tương đương với $x - C < \Delta x < x$ dạng của bậc hai (1.16) với mọi $y \in \mathbb{I}$ là

$$\frac{1}{2}M(\Delta x)^2 - f'(x)\Delta x + f(x) \geq 0. \tag{1.17}$$

Với mọi $\Delta x \in (x - C, x)$ (bằng cách sử dụng M>0) sẽ dẫn đến ba trường hợp :

Trường hợp 1: Với $(-f'(x))^2 - 4.\frac{1}{2}Mf(x) \leq 0 \Longrightarrow |f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}$.

Trường hợp 2: Với $(f'(x))^2 - 2Mf(x) > 0$ và

$$x \leq \frac{f'(x) - \sqrt{(f'(x))^2 - 2Mf(x)}}{M},$$

$$\Longrightarrow f'(x) \geq Mx + \sqrt{(f'(x))^2 - 2Mf(x)}.$$

Tuy nhiên ngươc lại $f'(x) \leq Mx$.

Trường hợp 3: Với $(f'(x))^2 - 2Mf(x) > 0$ và

$$x - C \geq \frac{f'(x) + \sqrt{(f'(x))^2 - 2Mf(x)}}{M},$$

$$\Longrightarrow f'(x) \leq M(x - C) - \sqrt{(f'(x))^2 - 2Mf(x)}. \tag{1.18}$$

Với $f'(x) < 0$ và chứng minh (1.11)

$$f'(x) + M(x - C) \leq -\sqrt{(f'(x))^2 - 2Mf(x)} < 0,$$

$$\Longrightarrow (f'(x) + M(x - C))^2 \geq (f'(x))^2 - 2Mf(x),$$

$$\Longrightarrow 2f'(x)M(C - x) + M^2(C - x)^2 \geq -2Mf(x),$$

$$\Longrightarrow f'(x) \geq -\frac{f(x)}{C - x} - \frac{M(C - x)}{2}. \tag{1.19}$$

Bất đẳng thức (1.18) và (1.19) chỉ thỏa mãn nếu :

$$-\frac{f(x)}{C - x} - \frac{M(C - x)}{2} < M(x - C),$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2f(x)}{(C - x)^2} > M.$$

22Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Từ trường hợp 1 và 3 ta thu được

$$f'(x) \geq -\sqrt{2Mf(x)}, \text{nếu} M \geq \frac{2f(x)}{(C-x)^2}. \tag{1.20}$$

$$f'(x) \geq -\left(\frac{f(x)}{C-x} + \frac{M(C-x)}{2}\right), \text{nếu} M < \frac{2f(x)}{(C-x)^2} \tag{1.21}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta được : $\sqrt{2Mf(x)} \leq \frac{f(x)}{C-x} + \frac{M(C-x)}{2}$, vì vậy giới hạn dưới của (1.21) luôn nhỏ hơn hoặc bằng giới hạn dưới của (1.20) và chúng xảy ra đồng thời khi $M = \frac{2f(x)}{(C-x)^2}$. Nó là điều cơ bản để kiểm tra rằng (1.20) và (1.21) cùng nói đến (1.12)

Trong trường hợp $f'' \geq B$ từ (1.18) và (1.14) ta có thể kết luận rằng

$$Bx \leq f'(x) < M(x-C)$$

Và theo đó $x > \frac{M}{M-B}C$.

Ta xét đến cả đặc điểm của hàm $\chi_{(\frac{M}{M-B}C,\infty)}(x)$, trong biểu thức cho $\widehat{s}(x)$ để biểu thị rằng trường hợp 3 không xảy ra với $0 < x \leq \frac{M}{M-B}C$ nói riêng, nếu $B \geq 0$ trường hợp 3 không xảy ra với mọi $x \in \mathbb{I}$

Ví dụ 2.2 Xét $f(x) = \frac{1}{2}Mx^2$ trên khoảng (0,C), thì (1.11) trong định lý là rõ ràng, có ý nghĩa với một vài hàm f(x), đẳng thức thỏa mãn với mọi x. Tuy nhiên với một vài hàm f(x) ví dụ như $\frac{1}{2}Mx^2 + 1$ thì (1.13) lại là tốt hơn

Ví dụ 2.3 Ví dụ này cho thấy giới hạn dưới cũng có thể đạt được, trong trường hợp này một hàm dần tới 0 tại điểm tới hạn C

Đặt $f(x) = x^2(1-x) = x^2 - x^3$ trong khoảng (0,1).Khi đó $f'(0) = 0$ và $f''(x) = 2 - 6x$ giới hạn trên bằng M-2 và giới hạn dưới B = -4.Cho x thuộc khoảng $(0, \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)]$, $\frac{2f(x)}{(1-x)^2} \leq M = 2$ và giới hạn của định lý (1.11) và (1.20) là :

$$-\sqrt{4(x^2-x^3)} \leq f'(x) = 2x - 3x^2 \leq \sqrt{4(x^2-x^3)} \tag{1.22}$$

23Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Trong thực tế, (1.22) cố định trong khoảng $\left(0, \dfrac{8}{9}\right]$ và giới hạn trên cố định trong khoảng (0,1) nhưng giới hạn dưới từ (1.22) là sai với x dần đến 1. Cho x thuộc khoảng $(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), 1)$

$\dfrac{2f(x)}{(1-x)^2} \leq M = 2, x > \dfrac{M}{M-B} = \dfrac{1}{3}$ và giới hạn của định lý (1.11), (1.14), (1.21) là:

$$\max\left\{-4x, -\left(\frac{f(x)}{1-x} + \frac{2(1-x)}{2}\right)\right\} = -x^2 + x - 1$$
$$\leq 2x - 3x^2 \leq \sqrt{4(x^2 - x^3)}.$$

Khi $x \to 1^-$ thì bất đẳng thức sẽ đúng $-1 \leq -1 \leq 0$.

Từ việc chứng minh định lý 1.4 ta thấy giới hạn cuối (1.9) của Glaese không chỉ cho với x dần đến điểm tới hạn với điều kiện biên và điều đó rơi vào trường hợp 3. Bất đẳng thức (1.9) có thể được phục hồi bằng cách tránh trường hợp 3 bằng hai cách: thứ nhất chúng ta có thể thay thế (0,C) bằng $(0, \infty)$ trong định lý 1.4, một kiểm chứng của chứng minh cho thấy trường hợp 3 được loại trừ.

Thứ hai chúng ta có thể thêm một điều kiện giới hạn ở các điểm tới hạn khác của $\mathbb{I} = (0, C)$, $\lim\limits_{x \to C^-} f'(x) = 0$. Sau đó là một giới hạn tuyến tính khác $f'(x) \geq M(x - C)$ điều đó mâu thuẫn với (1.18). Vì vậy trường hợp 3 trong chứng minh định lý 1.4 được loai trừ một lần nữa

Mệnh đề 1 *Đặt $\mathbb{I}$ biểu thị khoảng (0,C) hoặc $(0, \infty)$. Cho $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ giả sử :*

•*$f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{I}$;*

•*$f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{I})$;*

•*Một hằng số M>0 sao cho $f''(x) \leq M$ với mọi $x \in \mathbb{I}$;*

• *$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$;*

•*$I = (0, \infty)$ hoặc $\lim\limits_{x \to C^-} f'(x) = 0$;*

Khi đó $-\sqrt{2Mf(x)} \leq f'(x) \leq \sqrt{2Mf(x)}, \forall x \in \mathbb{I}$.

24Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

1.5.3 Bất đẳng thức không có điều kiện biên

Loại bỏ tất cả các điều kiện giới hạn trên f' dẫn đến kiểu bất đẳng thức này áp dụng cho bất kì khoảng(a, b). Nó có thể được chứng minh bằng cách áp dụng phần chứng minh của định lý 1.4

Mệnh đề 2 *Cho $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ giả sử :*

•*$f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$;*

•*$f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{I})$;*

•*Một hằng số M>0 sao cho $f''(x) \leq M$ với mọi $x \in (a, b)$.*

Đặt $s_\ell(x) = \max\left\{1, \dfrac{\sqrt{2f(x)}}{\sqrt{M}(x-a)}\right\}$ và

$s_r(x) = \max\left\{1, \dfrac{\sqrt{2f(x)}}{\sqrt{M}(b-x)}\right\}$, khi đó với mọi $x \in (a, b)$,

$$-\sqrt{2Mf(x)}\left(\frac{1}{2s_r(x)} + \frac{s_r(x)}{2}\right) \leq f'(x) \leq \sqrt{2Mf(x)}\left(\frac{1}{2s_\ell(x)} + \frac{s_\ell(x)}{2}\right).$$

1.6 Công thức tính đạo hàm cấp n và một số bất đẳng thức liên quan

Nội dung chính của mục này được hình thành dựa trên tài liệu [10].

Định lý 1.5. *Cho $\mathbb{I} = [-a, a] \subseteq \mathbb{R}, a > 0$ và $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sao cho $f^{(n+1)}$ là khả tích trên $\mathbb{I}$. Khi đó ta có :*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x}\right)\Bigg|_{x\neq 0} = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n f^{(n+1)}(y)dy, \tag{1.23}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{f(x) - f(0)}{x}\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}. \tag{1.24}$$

▼ **Chứng minh** Cho $x \neq 0$, từ

$$\int_0^1 f'(tx)dt = \int_0^x f'(y)\frac{dy}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x},$$

25Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

ta được :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right) = \frac{d^n}{dx^n}\int_0^1 f'(tx)dt = \int_0^1 \frac{d^n}{dx^n} f'(tx)dt$$
$$= \int_0^1 t^n f^{(n+1)}(tx)dt$$
$$= \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n f^{(n+1)}(y)dy.$$

Bằng cách thay $tx = y$.
Cho $x = 0$ ta có :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\Bigg|_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x y^n f^{(n+1)}(y)dy}{x^{n+1}} \qquad (L'Hospital'srule)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^n f^{(n+1)}(x)}{(n+1)x^n} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}.$$

Định lý 1.6. *Cho $p, q \in \mathbb{R}$ sao cho $1 \le p, q \le \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cho $\mathbb{I} = [-a, a] \subseteq \mathbb{R}, a > 0$, và $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sao cho $f^{(n+1)} \in \mathbb{L}^p([0, |x|])$ cho $x \in \mathbb{I}$ và $n \ge 0$.Khi đó ta có :*

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\right| \le \frac{||f^{(n+1)}||_p}{(nq+1)^{1/q}|x|^{1/p}}. \qquad (1.25)$$

Bất đẳng thức đúng khi cho $1 < p \le \infty$ và đẹp nhất khi cho p=1

▼**Chứng minh** Để chứng minh (1.25) ta bắt đầu đi từ (1.23).Cho $x \in \mathbb{I}$ và $f^{(n+1)} \in \mathbb{L}^p([0, |x|])$.
Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Holder như sau :

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)\right| = \frac{1}{|x|^{n+1}}\left|\int_0^{|x|} y^n f^{(n+1)}(y)dy\right|$$
$$\le \frac{1}{|x|^{n+1}}\int_0^{|x|} |y^n f^{(n+1)}(y)|dy$$
$$\le \frac{1}{|x|^{n+1}}\left(\int_0^{|x|} |y^n|^q dy\right)^{1/q}\left(\int_0^{|x|} |f^{(n+1)}(y)|^p dy\right)^{1/p}$$
$$= \frac{1}{|x|^{1/p}}\frac{||f^{(n+1)}||_p}{(nq+1)^{1/q}}.$$

Bây giờ ta đi chứng minh bất đẳng thức này. Cho $x \in \mathbb{I}$ ta phải tìm một hàm f sao cho :

$$\left| \int_0^{|x|} y^n f^{(n+1)}(y) dy \right| = \left(\int_0^{|x|} |y^n|^q dy \right)^{1/q} \left(\int_0^{|x|} |f^{(n+1)}(y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

Cho $1 < p < \infty$, lấy $\tilde{f}$ sao cho $\tilde{f}^{(n+1)}(y) = \text{sgn}(y^n)|y^n|^{\frac{1}{p-1}}$. Khi đó ta có

$$\left| \int_0^{|x|} y^n \tilde{f}^{(n+1)}(y) dy \right| = \frac{|x|^{nq+1}}{nq+1} = \left(\frac{|x|^{nq+1}}{nq+1} \right)^{1/p} \left(\frac{|x|^{nq+1}}{nq+1} \right)^{1/q}$$
$$= ||\tilde{f}^{(n+1)}||_p ||y^n||_q.$$

Cho $p = \infty$ lấy $\tilde{f}$ sao cho $\tilde{f}^{(n+1)}(y) = \text{sgn}(y^n)$. Khi đó

$$\left| \int_0^{|x|} y^n \tilde{f}^{(n+1)}(y) dy \right| = ||y^n||_1 = ||\tilde{f}^{(n+1)}||_\infty ||y^n||_1.$$

Cuối cùng, cho p = 1 ta chứng minh được bất đẳng thức :

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} \right) \right| \le \frac{1}{|x|} ||f^{(n+1)}||_1,$$

$$\iff \frac{1}{|x|^{n+1}} \left| \int_0^{|x|} y^n f^{(n+1)}(y) dy \right| \le \frac{1}{|x|^{n+1}} \sup_{y \in [0,|x|]} |y^n| \int_0^{|x|} |f^{(n+1)}(y)| dy \tag{1.26}$$

$$= \frac{1}{|x|} ||f^{(n+1)}||_1,$$

là tốt nhất, nghĩa là không thể thay thế $\dfrac{1}{|x|}$ bởi một giá trị nhỏ hơn.

Lưu ý rằng : $\lim_{q \to \infty} (nq+1)^{1/q} = 1$.

Cho một số đủ nhỏ $\delta > 0$. Định nghĩa hàm $\tilde{f}_\delta$ như sau :

$$\tilde{f}_\delta^{(n)}(y) = \begin{cases} 0 & , \quad (0 \le y \le |x| - \delta), \\ \frac{1}{\delta}(y - |x| + \delta) & , \quad (|x| - \delta \le y \le |x|). \end{cases}$$

27Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Với hàm này, vế trái của (1.26) trở thành :

$$\frac{1}{|x|^{n+1}}\left|\int_0^{|x|} y^n \tilde{f}_\delta^{(n+1)}(y)dy\right| = \frac{1}{|x|^{n+1}}\int_{|x|-\delta}^{|x|} y^n\frac{1}{\delta}dy$$
$$= \frac{1}{|x|^{n+1}}\frac{1}{\delta}\frac{|x|^{n+1}-(|x|-\delta)^{n+1}}{n+1},$$

trong khi vế phải trở thành :

$$\frac{|x|^n}{|x|^{n+1}}\int_0^{|x|} |\tilde{f}_\delta^{(n+1)}(y)|dy = \frac{1}{|x|}\int_{|x|-\delta}^{|x|}\frac{1}{\delta}dy = \frac{1}{|x|}.$$

Ta đi tính giá trị giới hạn vế trái của (1.26) khi $\delta \to 0$,

$$\frac{1}{(n+1)|x|^{n+1}}\lim_{\delta\to 0}\frac{|x|^{n+1}-(|x|-\delta)^{n+1}}{\delta} = \frac{1}{|x|}.$$

Sau đây là một số ví dụ áp dụng:

Ví dụ 1 Nếu ở (1.25) ta đặt $f(x) = e^{\alpha x}, f(x) = \text{ch}\alpha x\sin\beta x, f(x) = \text{ch}\alpha x\cos\beta x$ và $p = \infty$ ta có :

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{e^{\alpha x}-1}{x}\right)\right| \le |\alpha|^{n+1}\frac{e^{|\alpha x|}}{n+1} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$
$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\text{ch}\alpha x\sin\beta x}{x}\right)\right| \le (\alpha^2+\beta^2)^{(n+1)/2}\frac{e^{|\alpha x|}}{n+1} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$
$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1-\text{ch}\alpha x\cos\beta x}{x}\right)\right| \le (\alpha^2+\beta^2)^{(n+1)/2}\frac{e^{|\alpha x|}}{n+1} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

trong đó $\text{ch}\alpha x = \dfrac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2}$.

Nếu ở (1.25) ta đặt $f(x) = e^{\alpha x}$ và p = 1 ta được

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{e^{\alpha x}-1}{x}\right)\right| \le \frac{1}{|x|}|\alpha|^n(e^{|\alpha x|}-1) \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

28Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Ví dụ 2 Nếu ở (1.23) ta đặt f(x) = ln(1+ x), $x \neq 0, x > -1$ ta có

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right| = \left|\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n \frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+y)^{n+1}}dy\right|$$

$$\leq \frac{n!}{|x|^{n+1}}\int_0^{|x|}\frac{y^n}{(1+y)^{n+1}}dy$$

$$= \frac{n!}{|x|^{n+1}}\left(\ln(1+|x|) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{(1+|x|)^k}\right)\right).$$

Áp dụng (1.25) với $p = \infty$ ta xây dựng được

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sup_{y\in[0,|x|]}\left|\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+y)^{n+1}}\right|$$

$$= \frac{n!}{n+1}.$$

Với p = 1 ta được

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{|x|}\int_0^{|x|}\left|\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+y)^{n+1}}\right|dy$$

$$= \frac{n!}{|x|}\int_0^{|x|}\frac{1}{(1+y)^{n+1}}dy$$

$$= \frac{(n-1)!}{|x|}\left(1-\frac{1}{(1+|x|)^n}\right).$$

Ví dụ 3 Nếu ở (1.25) ta đặt f(x) = arctan x với $1 \leq p < +\infty$ và $x \neq 0$ ta

29Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

có :

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\text{arctan}x}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{|x|^{1/p}}\frac{1}{(nq+1)^{1/q}}$$

$$\left(\int_0^{|x|}\left|\frac{(-1)^n n!}{(1+y^2)^{(n+1)/2}}\sin((n+1)\text{arctan}y)\right|^p dy\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{n!}{|x|^{1/p}}\frac{1}{(nq+1)^{1/q}}\left(\int_0^{|x|}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^{(n+1)p} dy\right)^{1/p},$$

$(y = \text{tan}t)$

$$= \frac{n!}{|x|^{1/p}}\frac{1}{(nq+1)^{1/q}}\left(\int_0^{\text{arctan}|x|}\cos^{(n+1)p-2}t dt\right)^{1/p}$$

$$< \frac{n!}{|x|^{1/p}}\frac{1}{(nq+1)^{1/q}}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{(n+1)p-2}t dt\right)^{1/p}$$

$$= \frac{n!}{|x|^{1/p}}\frac{1}{(nq+1)^{1/q}}\left(\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{(n+1)p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(n+1)p}{2}\right)}\right)^{1/p}.$$

Áp dụng (1.25) với $p = \infty$ ta được

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\text{arctan}x}{x}\right)\right| \leq \frac{n!}{n+1}.$$

1.7 Một số bất đẳng thức đạo hàm khác của các đa thức

Trên trường số thực xét đa thức bậc n

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$

Bài toán 1.16. *Nếu đa thức*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$

có n nghiệm thực, thì

$$\Big(P'(x)\Big)^2 - P(x)P''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

▼ **Lời giải** Giả sử p(x) có các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$, thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $x = x_i \ \ (i = 1, 2, ..., n)$. Với $x \neq x_i \ \ (i = 1, 2, ..., n)$, ta có

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\frac{-(P'(x))^2 + P(x)P'(x)}{(P(x))^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{(x - x_i)^2} < 0.$$

Suy ra với mọi $x \neq x_i$ ta có

$$(P'(x))^2 - P(x)P''(x) \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 1.17. *Nếu $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm thực thì*

$$(n-1)\Big(P'(x)\Big)^2 - nP(x)P''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (1.27)$$

▼ **Lời giải** Giả sử $P(x)$ có các nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$, thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng với $x = x_i (i = 1, 2, ..., n)$. Với $x \neq x_i (i = 1, 2, .., n)$, ta có

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}, \frac{P(x)P''(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-1}{(x - x_1)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(P'(x))^2 - P(x)P''(x) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{P(x)}{x - x_i})^2 \geq \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x)}{x - x_i})^2 = \frac{(P'(x))^2}{2}.$$

Suy ra với mọi $x \neq x_i, (i = 1, 2, .., n)$ ta cũng có

$$(n-1)(P'(x))^2 - nP(x)P''(x) \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 1.18. *Cho đa thức*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \qquad a_i \geq 0, (i = 0, 1, 2, ..., n).$$

Chứng minh rằng

$$x[(P'(x))^2 - P(x)P''(x)] \leq P'(x)P(x), \forall x \geq 0. \qquad (1.28)$$

▼ **Lời giải** Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, với $x \geq 0$ ta có

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} ia_ix^i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{i^2a_ix^i}\sqrt{a_ix^i}\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n} i^2a_ix^i\Big),$$

$$\iff x^2\Big(\sum_{i=0}^{n} ia_ix^{i-1}\Big)^2 \leq P(x)\Big[x^2\sum_{i=0}^{n} i(i-1)a_ix^{i-2} + x\sum_{i=0}^{n} ia_ix^{i-1}\Big],$$

$$\iff x[(P'(x))^2 - P(x)P''(x)] \leq P'(x)P(x).$$

Bài toán 1.19. *Cho các đa thức*

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i(1-t)^i(1+t)^{n-i}, b_i \geq 0, \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Chứng minh rằng

$$(1-t^2)[(Q'(t))^2 - Q(t)Q''(t)] \leq n(Q(t))^2 - 2tQ(t)Q'(t), \forall t \in [-1, 1].$$

▼ **Lời giải** Đặt $x = \dfrac{1-t}{1+t}$ và $P(x) = \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n Q\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_ix^i$.
Ta được

$$(1+t)^nP(x) = Q(t),$$
$$2(1+t)^{n-1}P'(x) = nQ(t) - (t+1)Q'(t),$$

$$4(1+t)^{n-2}P''(x) = n(n-1)Q(t) - 2n(n-1)(n+1)Q'(t) + (1+t^2)^2Q''(t).$$

Thế $P(x), P'(x), P''(x)$ vào bất đẳng thức (1.27) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 1.20. *Cho P(x) là một đa thức bậc n với các hệ số không âm. Khi đó ta có*

$$\frac{P'(x)}{P(x)} \leq \frac{n}{x}, \forall x > 0.$$

▼ **Lời giải** Chia cả hai vế của (1.28) cho $xP(x)P'(x)$, $(x > 0)$, ta được

$$\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{P''(x)}{P'(x)} \leq \frac{1}{x}.$$

32Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Và do đó với mọi x > 0 ta có

$$\frac{P^{(k)}(x)}{P^{(k-1)}(x)} - \frac{P^{(k+1)}(x)}{P^{(k)}(x)} \leq \frac{1}{x}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Từ $P^{(n+1)}(x) = 0$ suy ra, với $x > 0$ ta có

$$\left(\frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{P''(x)}{P'(x)}\right) + \left(\frac{P''(x)}{P'(x)} - \frac{P^{(3)}(x)}{P''(x)}\right) + ... + \left(\frac{P^{(n)}(x)}{P^{(n-1)}(x)} - 0\right) \leq \frac{n}{x},$$

$$\iff \frac{P'(x)}{P(x)} \leq \frac{n}{x}.$$

Bài toán 1.21. *Giả sử P(x) là đa thức bậc n $(n \geq 2)$ có n nghiệm thực và x_0 là một nghiệm đơn của đa thức.Chứng minh rằng nếu*

$$|P''(x_0)| \geq (n-1)|P'(x_0)|,$$

Thì $P'(x)$ có ít nhất một nghiệm x thỏa mãn $|x - x_0| \leq 1$.

▼ **Lời giải** Do $P(x)$ có n nghiệm thực nên theo Định lý Rolle, $P'(x)$ có $n-1$ nghiệm thực $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$. Ta có thể giả sử hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ là 1. khi đó $P'(x) = n\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x - y_i)$. Ta có

$$\frac{P''(x)}{P'(x)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x - y_i}.$$

Vì x_0 là một nghiệm đơn của $P(x)$ nên $P'(x_0) \neq 0$. Giả sử rằng $|y_i - x_0| > 1$, với $i = 1, 2, ..., n-1$. Ta có

$$n - 1 \leq \left|\frac{P''(x_0)}{P'(x_0)}\right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|x_0 - y_i|} < n - 1.$$

Dẫn đến mâu thuẫn. Vậy tồn tại $i(1 \leq i \leq n-1)$ sao cho $|y_i - x_0| \leq 1$.

Bài toán 1.22. *Cho đa thức $p(x)$ bậc không vượt quá n, có tính chất*

$$|p(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1],$$

Chứng minh rằng

$$|p^{(k)}(x)| \leq |T_n^{(k)}(x)|, \forall x; |x| \geq 1, (k \in \mathbb{N}). \qquad (1.29)$$

trong đó $T_n(x)$ là đa thức Chebyshev bậc n.

33Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

▼ **Lời giải** Ta áp dụng Công thức nội suy Lagrange cho đa thức $p(x)$ tại $n+1$ điểm $x_i = cos\frac{(n-i)\pi}{n}, i = 0, 1, ..., n$, với chú ý rằng $T_n(x_i) = (-1)^{n-i}$, ta có

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p(x_i)}{g_i(x_1)} g_i(x).$$

trong đó

$$g_i(x) = \prod_{j=0 j\neq i}^{n} (x - x_j).$$

Với $k = 0, 1, 2, 3, ..., n$. ta có

$$p^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p(x_i)}{g_i(x_i)} g_i^{(k)}(x).$$

Vì $|p(x_i)| \leq 1$ nên

$$|p^{(k)}(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} \Big| \frac{g_i^{(k)}(x)}{g_i(x_i)} \Big|. \tag{1.30}$$

Mặt khác, vì $T_n(x_i) = (-1)^{n-i}$ suy ra

$$|T_n^{(k)}(x)| = \Big| \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{g_i(x_i)} g_i^{(k)}(x) \Big|.$$

Kí hiệu sgn $g_i(x)$ là hàm dấu của $g_i(x)$: sgn$g_i(x) = 1$ nếu $g_i(x) > 0$ và sgn$g_i(x)$ nếu $g_i(x) < 0$. Dễ thấy rằng sgn$g_i(x_i) = (-1)^{n-i}$. Ngoài ra, khi $|x| \geq 1$, dấu của $g_i^{(k)}(x)$ không phụ thuộc vào i. Thậy vậy, tất cả các nghiệm của $g_i(x)$ thuộc đoạn $[-1, 1]$ nên tất cả các nghiệm của $g_i^{(k)}(x)$ cũng thuộc khoảng$(-1, 1)$. Do đó

$$\text{sgn} g_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1, \\ (-1)^{n-k} & x \leq -1. \end{cases}$$

Như vậy, khi $|x| \geq 1$ta có

$$|T_n^{(k)}(x)| = \Big| \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{g_i(x_i)} g_i^{(k)}(x) \Big| = \sum_{i=0}^{n} \Big| \frac{g_i^{(k)}(x)}{g_i(x_i)} \Big|. \tag{1.31}$$

Từ (1.30) và (1.31) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ Với $|x| \geq 1, m < n, T_n(x)$ là đa thức Chebyshev. Chứng minh rằng

$$|T_m^{(k)}(x)| \leq |T_n^{(k)}(x)|, \qquad k = 0, 1, ..., n.$$

34Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

▼ **Lời giải** Ta xét đa thức $P(x) = T_m(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Bài toán 1.22. Do đó, với $|x| \geq 1$ ta có

$$|T_m^{(k)}(x)| = |p^{(k)}(x)| \leq |T_n^{(k)}(x)|, \qquad k = 0, 1, ..., n.$$

Bài toán 1.23. *Giả sử đa thức $P(x)$ có bậc không quá $n-1$, có hệ số bậc cao nhất là a_0 và thỏa mãn điều kiện:*

$$\sqrt{1-x^2}|P(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1].$$

Chứng minh rằng

$$|P(x)| \leq n, \forall x \in [-1, 1].$$

▼ **Lời giải** Xét dãy $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Do hàm số $\cos x$ giảm trên khoảng $(0, \pi)$, nên ta có $-1 < x_n < ... < x_2 < x_1 < 1$. Nếu $x_1 < x < 1$, thì

$$|P(x)| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\sqrt{1-x_k^2}P(x_k)|.\Big|\frac{T_n(x)}{x-x_k}\Big| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|\frac{T_n(x)}{x-x_k}\Big|$$

(do $x - x_k > 0$ và $T_n(x)$ không đổi dấu trên $(x_1, 1]$).
Mặt khác

$$T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(x - x_k).$$

nên ta có

$$T_n'(x) = 2^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)}{x-x_j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_k}.$$

Đặt $x = \cos t$. Khi đó $\frac{|T_n'(x)|}{n} = \Big|\frac{\sin nt}{\sin t}\Big| \leq n$ (Bất đẳng thức Jensen), từ đó suy ra

$$|P(x)| \leq n, \forall x \in [x_1, 1].$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$|P(x)| \leq n, \forall x \in [-1, x_n].$$

Xét $x_n \leq x \leq x_1$. Khi đó ta có

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-x_1^2} = \sin(\arccos x_1) = \sin\frac{\pi}{2n}.$$

35Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Do $1 \geq \dfrac{\sin x}{x} \geq \dfrac{2}{\pi}$, nên $\sin\dfrac{\pi}{2n} \geq \dfrac{\pi}{2n}.\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{1}{n}$ và $\sqrt{1-x^2} \geq \dfrac{1}{n}$. Suy ra

$$|P(x)| \leq \frac{1}{1/n} = n.$$

Vậy ta chứng minh được $|P(x)| \leq n, \forall x \in [-1, 1]$.

1.8 Định lý Markov-Bernsterin

Định lý Markov-Bernsterin được phát biểu như sau:

Định lý 1.7. *Cho đa thức* $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ *thỏa mãn điều kiện* $|P(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$. *Khi đó*

$$|P'(x)| \leq n^2, \forall x \in [-1, 1].$$

Nhận thấy rằng ta có thể áp dụng Định lý 1.7 cho đa thức Chebyshev và đa thức Legendre.
Để chứng minh định lý trước hết ta xét hai bài toán sau

Bài toán 1.24. *Cho đa thức lượng giác*

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kt.$$

thỏa mãn điều kiện$|P(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}/\{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$ *Chứng minh rằng* $|\dfrac{P(t)}{\text{sint}}| \leq n, \quad \forall t \in \mathbb{R}/\{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$.

▼ **Lời giải** Nhận xét rằng $\dfrac{P(t)}{\text{sint}} = Q(\text{cost})$ với $Q(x)$ là đa thức bậc $n-1$.
Đặt cost = x. Khi đó $|x| \leq 1$ và

$$P(t) = \text{sint}Q(\text{cost}) = \sqrt{1-x^2}Q(x).$$

Do $Q(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Bài toán (1.23) nên

$$|Q(x)| \leq n, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Do đó $|\dfrac{P(t)}{\text{sint}}| \leq n, \quad \forall t \in \mathbb{R}/\{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$.

Bài toán 1.25. *Cho đa thức lượng giác*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i\text{cos}ix + b_i\text{sin}ix).$$

thỏa mãn điều kiện $|P(x)| \leq 1$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.
Chứng minh rằng $|P'(x)| \leq n$, *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

▼ **Lời giải** Cho trước x_0 tùy ý. Do

$$\cos(x_0 - x) - \cos(x_0 + x) = 2\text{sin}x_0\text{sin}x.$$

$$\sin(x_0 + x) - \sin(x_0 - x) = 2\text{cos}x_0\text{sin}x.$$

nên

$$g(x)\frac{P(x_0 + x) + P(x_0 - x)}{2} = \sum_{k=0}^{n} c_k\text{sin}kx.$$

Suy ra

$$g'(x) = \frac{P'(x_0 + x) + P'(x_0 - x)}{2}, g'(0) = P'(x_0).$$

Ta thấy $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán(1.24) nên suy ra

$$|\frac{g(x)}{\text{sinx}}| \leq n, \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}.$$

Nhưng $g(0) = 0$ và $\left|\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}.\frac{x}{\text{sinx}}\right| \leq n$, nên khi cho $x \to 0$ ta có

$$g'(0) \leq n \longrightarrow |P'(x_0)| \leq n.$$

Do x_0 được chọn tùy ý nên ta có $|P'(x)| \leq n, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Bây giờ ta đi chứng minh Định lý 1.7.
Đặt $x = \text{cos}\alpha$ khi đó tho giả thiết thì $|P(x)| \leq 1$. Mà $P(\text{cos}\alpha)$ có dạng

$$P(\text{cos}\alpha) = \sum_{i=0}^{n}(a_i\text{cos}i\alpha + b_i\text{sin}i\alpha).$$

nên ta có thể áp dụng kết quả của Bài toán 1.25 ta được

$$|\text{sin}\alpha P'(\text{cos}\alpha)| \leq n \longrightarrow \sqrt{1 - x^2}\left|\frac{P'(x)}{n}\right| \leq 1.$$

Cũng theo Bài toán 1.24 ta có $\left|\frac{P'(x)}{n}\right| \leq n$, Suy ra

$$|P'(x)| \leq n^2.$$

Chương 2

Ứng dụng của đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình

Trong chương này trình bày những ứng dụng của các bất đẳng thức đạo hàm trong việc giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình và bất phương trình.

2.1 Ứng dụng đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức

Bài toán 2.1. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

với mọi n nguyên dương.

▼ **Lời giải** Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$n[\ln(n+1)-\ln n] < 1 < (n+1)[\ln(n+1)-\ln n], \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad (2.1)$$

Xét hàm số $f(x) = \ln x$ trên đoạn $[n; n+1]$. Dễ dàng thấy hàm số $f(x) = \ln x$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Lagrange trên đoạn $[n; n+1]$, nên $\exists x_0 \in (n; n+1)$ sao cho

$$\begin{aligned} &\ln(n+1)-\ln n = f'(x_0) = \frac{1}{x_0},\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{n+1} < \ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n}\\ \Longleftrightarrow\ &n < \frac{1}{\ln(n+1)-\ln n} < n+1\\ \Longleftrightarrow\ &n[\ln(n+1)-\ln n] < 1 < (n+1)[\ln(n+1)-\ln n]. \end{aligned}$$

Nghĩa là bất đẳng thức (2.1) đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vì vây bất đẳng thức sau đây đúng:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 2.2. *Chứng minh rằng với mọi $x \in [0;1]$, ta luôn có*

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

▼ **Lời giải** Xét $f(x) = e^{-x} + x - 1$ xác định và liên tục trên $[0;1]$. Có $f'(x) = 1 - e^{-x} = \dfrac{e^x - 1}{e^x} > 0, \forall x \in (0;1)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[0;1]$
Do đó, với mọi $x \in [0;1]$ có:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \Longrightarrow e^{-x} \geq 1 - x. \tag{2.2}$$

Xét $g(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - e^{-x}$, xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Có $g'(x) = e^{-x} + x - 1 = f(x)$. Theo trên thì $g'(x) = f(x) > 0, \forall x \in (0;1)$ nên hàm số $g(x)$đồng biến trên $[0;1]$và ta có $g(x) \geq g(0) = 0$. Từ đó ta có:

$$e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in [0;1]. \tag{2.3}$$

Từ (2.2) và (2.3) ta được

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in [0;1].$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Bài toán 2.3. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}}.$$

Với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in (1;+\infty), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

▼ **Lời giải** Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2},$$

$$f"(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} > 0,$$

$\forall x \in (0; +\infty)$.

Áp dụng bài toán 1.10 (chương 1) cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ và các số $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$.

$a_k = \mathrm{lnx}_k > 0 (k = 1, 2, ..., n; n \in \mathbb{N}^*)$, ta được

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n) \le \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + ... + \lambda_n f(a_n)$$

$$\iff \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{n}(\mathrm{lnx_1} + \mathrm{lnx_2} + ... + \mathrm{lnx_n})}} \le \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1+e^{\mathrm{lnx_1}}} + \frac{1}{1+e^{\mathrm{lnx_2}}} + ... + \frac{1}{1+e^{\mathrm{lnx_n}}}\Big)$$

$$\iff \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}} \le \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n}.$$

Bài toán 2.4. *Cho $x > y > 0$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\mathrm{lnx} - \mathrm{lny}} < \frac{x+y}{2}. \quad (2.4)$$

▼ **Lời giải** Chia hai vế của (2.4) cho $y > 0$ rồi đặt $t = \sqrt{\dfrac{x}{y}} \longrightarrow t > 1$, do đó $\ln t > 0$ ta được:

$$t < \frac{t^2-1}{\mathrm{lnt}^2} < \frac{t^2+1}{2} \iff \begin{cases} f(t) = t^2 - 2t\mathrm{lnt} - 1 > 0. & (i) \\ g(t) = (t^2+1)\mathrm{lnt} - t^2 + 1 > 0. & (ii) \end{cases}$$

Với $t \in (1, +\infty)$ ta có

$$f'(t) = 2t - 2\mathrm{lnt} - 2; f''(t) = \frac{2(t-1)}{t} > 0; \forall t \in (1; +\infty).$$

$\Longrightarrow f'(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Longrightarrow f'(t) > f'(1) = 0, \forall t \in (1; +\infty)$,
$\Longrightarrow f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Longrightarrow f(t) > f(1) = 0$.

$$\Longrightarrow (i), \forall t \in (1; +\infty). \quad (2.5)$$

$$g'(t) = 2t\ln t + t + \frac{1}{t} - 2t; g''(t) = 2\ln t + \frac{t^2-1}{t^2} > 0, \forall t \in (1; +\infty).$$

$\Longrightarrow g'(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Longrightarrow g'(t) > g'(1) = 0, \forall t \in (1; +\infty)$.
$\Longrightarrow g(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Longrightarrow g(t) > g(1) = 0$,

$$\Longrightarrow (ii), \forall t \in (1; +\infty). \quad (2.6)$$

40Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Từ (2.5) và (2.6) ta được $\sqrt{xy} < \dfrac{x-y}{\text{lnx} - \text{lny}} < \dfrac{x+y}{2}$ đúng với mọi x,y thỏa mãn điều kiện $x > y > 0$.

Bài toán 2.5. *Chứng minh rằng với mọi $x > 0; a \geq e$ ta luôn có*

$$(a+x)^a < a^{a+x}. \tag{2.7}$$

▼ **Lời giải** Chia hai vế của (2.7) cho $a^a > 0$ rồi đặt $t = \dfrac{x}{a}$ với $t \in \mathbb{R}^+$, ta được

$$(2.7) \Longleftrightarrow 1 + \frac{x}{a} < a^{\frac{x}{a}} \Longleftrightarrow f(t) = a^t - t - 1 > 0. \tag{2.8}$$

ta có $f'(t) = a^t\text{lna} - 1; f''(t) = a^t(\text{lna})^2 > 0$ suy ra$f'(t)$đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ do đó $f'(t) > f'(0) = \text{lna} - 1 \geq 0$ (vì $a \geq e$). Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ suy ra $f(t) > f(0) = 0$.
Ta được (2.8) đúng, tức là (2.7) đúng (đpcm).

Bài toán 2.6. *Chứng minh rằng với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ ta luôn có*

$$2^{2\text{sinx}} + 2^{\text{tanx}} > 2^{\frac{3x}{2}+1}.$$

▼ **Lời giải** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $2^{2\text{sinx}}$ và 2^{tanx} được:

$$2^{2\text{sinx}} + 2^{\text{tanx}} \geq 2\sqrt{2^{2\text{sinx}}.2^{\text{tanx}}} = 2^{\frac{2\text{sinx}+\text{tanx}}{2}+1}. \tag{2.9}$$

Ta chứng minh với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ luôn có

$$\frac{2\text{sinx} + \text{tanx}}{2} + 1 > \frac{3x}{2} + 1 \Longleftrightarrow f(x) = 2\text{sinx} + \text{tanx} - 3x > 0. \tag{2.10}$$

Thật vậy, do $0 < cosx < 1$ trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ ta có

$$f'(x) = 2\text{cosx} + \frac{1}{\text{cos}^2\text{x}} - 3 = \frac{(2\text{cosx}+1)(1-\text{cosx})^2}{\text{cos}^2\text{x}} > 0.$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ ta có $f(x) > f(0) = 0$ tức là (2.10) đúng với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Từ (2.9) và (2.10) ta được điều phải chứng minh.

41Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Bài toán 2.7. *Cho* $0 < a < b$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

▼ **Lời giải** Xét hàm số $f(x) = \ln x$ liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x \in [a; b]$ (do $[a; b] \subset \mathbb{R}^+$). Theo định lí Lagrange, tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a) \Longleftrightarrow \ln\frac{b}{a} = \frac{b-a}{c}.$$

Mà

$$0 < a < c < b \Longrightarrow \begin{cases} b - a > 0, \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Từ đó ta có $\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$.

Bài toán 2.8. *Cho* $x, y, z > 0; x + y + z \le \frac{3}{2}$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + x + y + z \ge \frac{27}{2}.$$

▼ **Lời giải** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + x + y + z \ge \frac{3}{(\sqrt[3]{xyz})^2} + 3\sqrt[3]{xyz} = M. \tag{2.11}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$ ta có

$$0 < t \le \frac{x+y+z}{3} \le \frac{1}{2} \Longrightarrow t \in \left(0; \frac{1}{2}\right].$$

Xét $f(t) = \frac{3}{t^2} + 3t$ với $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Ta có $f'(t) = 3 - \frac{6}{t^3} < 3 - 6.2^3 < 0$ với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. Do đó với mọi $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ ta có

$$f(t) \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{2} + \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{27}{2}.$$

42Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

Theo trên ta có

$$\sqrt[3]{xyz} \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \Longrightarrow M = f(\sqrt[3]{xyz}) \geq \frac{27}{2}. \qquad (2.12)$$

Từ (2.11) và (2.12) ta được

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + x + y + z \geq \frac{27}{2}.$$

Bài toán 2.9. *Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 0$ và*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Chứng minh rằng $a^2b^2c^2 \leq \dfrac{1}{54}$.

▼ **Lời giải** Ta có $b + c = -a$.

$$bc = \frac{(b+c)^2 - (b^2 + c^2)}{2} = \frac{a^2 - (1 - a^2)}{2} = a^2 - \frac{1}{2}.$$

Vì $(b + c)^2 \geq 4bc$ nên $a^2 \geq 4a^2 - 2 \Longrightarrow a^2 \leq \dfrac{2}{3}$.

$$a^2b^2c^2 = a^2(a^2 - \frac{1}{2})^2 = a^6 - a^4 + \frac{1}{4}a^2.$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + \dfrac{1}{4}x, (0 \leq x \leq \dfrac{2}{3})$. Ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{4}; f'(x) = 0.$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $x = \dfrac{1}{6}$. Ta có bảng biến thiên sau

x	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\frac{1}{54}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{54}$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta thấy $f(x) \leq \dfrac{1}{54}, \forall x \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right]$.

Suy ra $f(a^2) \leq \dfrac{1}{54} \Longrightarrow a^6 - a^4 + \dfrac{1}{4}a^2 \leq \dfrac{1}{54} \Longrightarrow a^2b^2c^2 \leq \dfrac{1}{54}$. (đpcm)

43Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Bài toán 2.10. *Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện* $a^3+b^3=c^3$. *Chứng minh rằng* $a^2+b^2-c^2>6(c-a)(c-b)$.

▼ **Lời giải** Từ $a^3+b^3=c^3$ và $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ suy ra $c>a$ và $c>b$. Ta có $a^3+b^3=c^3 \iff \left(\frac{a}{c}\right)^3+\left(\frac{b}{c}\right)^3=1.$
Đặt $x=\frac{a}{c}; y=\frac{b}{c}, (x,y>0)$ thì $x^3+y^3=1.$
Đặt $x+y=t, (1<t\leq\sqrt[3]{4}$. Ta có $t^3-3xyt=1$ suy ra $xy=\frac{t^3-1}{3t}$ và $x^2+y^2=\frac{t^3+2}{3t}$.
Do đó

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{x^2+y^2-1}{(1-x)(1-y)}=\frac{t^3-3t+2}{(t-1)^3}=\frac{t+2}{t-1}.$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t+2}{t-1}, (1<t\leq\sqrt[3]{4})$.
Ta có $f'(t)=\frac{-3}{(t-1)^2}<0$ với mọi $t\in(1;\sqrt[3]{4})$
Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:

t	1	$\sqrt[3]{4}$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$\searrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\geq\frac{\sqrt[3]{4}+2}{\sqrt[3]{4}-1}>6, \forall t\in(1;\sqrt[3]{4}]$.
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2.11. *Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh là a,b,c. Chứng minh rằng:*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3.$$

▼ **Lời giải** Không mất tính tổng quát, giả sử $a\leq\min\{b,c\}$, đặt $d=\min\{b,c\}$

Xét hàm số $f(x) = 2\left(\frac{x}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{x}\right) - \left(\frac{b}{x} + \frac{c}{b} + \frac{x}{c}\right), (0 < x \leq d)$.
Ta có
$$f'(x) = \frac{2}{b} - \frac{2c}{x^2} + \frac{b}{x^2} - \frac{1}{c} = \frac{(2c-b)(x^2-bc)}{x^2bc}.$$
Ta có $a \leq d \Longrightarrow a \leq c \Longrightarrow 2c \geq a + c > b \Longrightarrow 2c - b > 0$,
$\Longrightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (0; d)$.
Ta có bảng biến thiên:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ d
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$ $f(d)$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(a) \geq f(d)$.
Trường hợp 1: $b \leq c$ thì $d = b \Longrightarrow f(d) = f(b)$.
Mặt khác $f(b) = 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 3 \Longrightarrow f(a) \geq 3$.
Suy ra $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) + 3$.
Trường hợp 2: $b > c$ thì $d = c \Longrightarrow f(d) = f(c)$.
Mặt khác $f(c) = 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 3$.
Suy ra $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3$.

Bài toán 2.12. *Chứng minh bất đẳng thức:*
$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!},\ \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

▼ **Lời giải** Với $n = 1$ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành
$$e^n > 1 + x, \forall x > 0. \tag{2.13}$$
Xét hàm số $f(x) = e^x - x - 1, \forall x \geq 0$. Ta có
$$f'(x) = e^x - 1, \forall x \geq 0$$
vì $e^x > 1, \forall x > 0$ và $e^0 = 1$, nên $f'(x) = e^x - 1 > 0, \forall x > 0$, và $f'(0) = 0$. Từ đó suy ra f(x) đồng biến với mọi $x > 0$, còn $f(0) = 0$. Do

45Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

đó $f(x) > f(0)$ với mọi $x > 0$hay $e^x > 1 + x$ với mọi $x > 0$ và bất đẳng thức (2.13) đúng

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^k}{k!},\ \forall x > 0 \tag{2.14}$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},\ \forall x > 0. \tag{2.15}$$

Xét hàm số

$$g(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - ... - \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},\ \forall x \geq 0.$$

Ta có: $g'(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} - ... - \dfrac{x^k}{k!},\ x > 0$. Theo giả thiết quy nạp.

$g'(x) > 0, \forall x > 0$, hiển nhiên $g'(0) = 0$.

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $f(0) = 0$. Từ đó suy ra, $f(x) > f(0)$ với mọi x > 0 hay

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},\ \forall x > 0.$$

Vì vậy, nếu bất đẳng thức(2.14) đúng thì bất đẳng thức (2.15) đúng.

Theo nguyên lý quy nạp bất đẳng thức

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!},\ \forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

là đúng.

Bài toán 2.13. *Chứng minh rằng với các số thực $a, b, c \geq 0$ có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

▼ **Lời giải** Không hạn chế có thể giả thiết $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{x}{b+c+1} + \frac{b}{c+x+1} + \frac{c}{x+b+1} + (1-x)(1-b)(1-c).$$

46Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

với
$$f'(x) = \frac{1}{b+c+1} - \frac{b}{(c+x+1)^2} - \frac{c}{(x+b+1)^2} - (1-b)(1-c),$$
là hàm đơn điệu tăng. Do đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại 0 hoặc 1. Do vậy $f(a) \leq \max\{f(1), f(0)\}$. Vì $f(1) \leq \frac{1}{b+c+1} + \frac{b}{c+b+1} + \frac{c}{b+c+1} = 1$ và $f(0) = \frac{b}{c+1} + \frac{c}{b+1} + (1-b)(1-c) = \frac{1+b+c+b^2c^2}{1+b+c+bc} = 1$ nên $f(a) \leq 1$.

Bài toán 2.14. *Chứng minh rằng với các số $a, b, c, d \in [0,1]$ luôn có*

$(i) \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$

$(ii) \frac{a}{bcd+2} + \frac{b}{cda+2} + \frac{c}{abd+2} + \frac{d}{abc+2} \leq 1 + \frac{1}{abcd+2}.$

▼ **Lời giải** (i) Không hạn chế có thể giả thiết $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$. Xét
$$f(x) = \frac{x}{bc+1} + \frac{b}{cx+1} + \frac{c}{bx+1}.$$
với $f'(x) = \frac{1}{bc+1} - \frac{bc}{(cx+1)^2} - \frac{bc}{(bx+1)^2}$. Khi $x \geq b \geq c \geq 0$ ta có $\frac{bc}{(cx+1)^2} \leq \frac{bc}{(cb+1)^2}, \frac{bc}{(bx+1)^2} \leq \frac{bc}{(bc+1)^2}$. Như vậy
$$f'(x) \geq \frac{1}{bc+1} - \frac{2bc}{(bc+1)^2} = \frac{1-bc}{(bc+1)^2} \geq 0.$$
Hàm số $f(x)$ đồng biến khi $x \geq b$. Từ đó suy ra $f(1) \geq f(a)$ hay
$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{1}{bc+1} + \frac{b}{(c+1)} + \frac{c}{b+1}.$$
Ta suy ra $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{1}{bc+1} + \frac{b^2+c^2+b+c}{(c+1)(b+1)}$. Bởi vì $(1-b)(1-c) \geq 0$ nên $1+bc \geq b+c$ và ta được
$$\frac{1}{bc+1} + \frac{b^2+c^2+b+c}{(b+1)(c+1)} \leq \frac{1}{bc+1} + \frac{b+c+b+c}{2(b+c)} \leq 2.$$
Tóm lại $(i) \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$

(ii) Không hạn chế có thể giả thiết $1 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Xét hàm số

47Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

$f(x) = \dfrac{x}{bcd+2} + \dfrac{b}{cdx+2} + \dfrac{c}{bdx+2} + \dfrac{d}{bcx+2}$ với $x \geq b$ và có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1}{bcd+2} - \dfrac{bcd}{(cdx+2)^2} - \dfrac{bcd}{(bdx+2)^2}$. Khi $x \geq b$ ta có

$$f'(x) \geq \frac{1}{bcd+2} - \frac{3bcd}{(bcd+2)^2} = \frac{2-2bcd}{(bcd+2)^2} \geq 0.$$

Vậy hàm $f(x)$ đồng biến khi $x \geq b$. Từ đó suy ra $f(1) \geq f(a)$ hay

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{bcd+2} + \frac{b}{cda+2} + \frac{c}{dab+2} + \frac{d}{abc+2} \\ &\leq \frac{1}{bcd+2} + \frac{b}{cd+2} + \frac{c}{db+2} + \frac{d}{bc+2} \\ S &\leq \frac{1}{bcd+2} + \frac{b}{c+d+1} + \frac{c}{b+d+1} + \frac{d}{b+c+1} \\ &\leq \frac{1}{bcd+2} + \frac{b}{c+d+b} + \frac{c}{b+d+c} + \frac{d}{b+c+d} \\ &= \frac{1}{bcd+2} + 1 \leq \frac{1}{abcd+2} + 1. \end{aligned}$$

Tóm lại $\dfrac{a}{bcd+2} + \dfrac{b}{cda+2} + \dfrac{c}{abd+2} + \dfrac{d}{abc+2} \leq 1 + \dfrac{1}{abcd+2}$.

Bài toán 2.15. *Chứng minh rằng*

$$\mathrm{sine}\big(\sqrt[3]{\cos(e-1)}\big) - \sin(e-1)\sqrt[3]{\mathrm{cose}} > \sqrt[3]{\cos(\mathrm{e}-1)\mathrm{cose}}. \qquad (2.16)$$

▼ **Lời giải** Ta có $\pi > e$ và $e - 1 \approx 1,71828 > \dfrac{\pi}{2}$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{sine} > 0, \sin(\mathrm{e}-1) > 0, \\ \mathrm{cose} < 0, \cos(\mathrm{e}-1) < 0. \end{cases}$$

Khi đó

$$(2.16) \iff \frac{\mathrm{sine}}{\sqrt[3]{\mathrm{cose}}} - \frac{\sin(\mathrm{e}-1)}{\sqrt[3]{\cos(\mathrm{e}-1)}} > 1.$$

Đặt $f(x) = \dfrac{\mathrm{sinx}}{\sqrt[3]{\mathrm{cosx}}}$, với điều kiện $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

Rõ ràng hàm f(x) liên tục trên $[e-1, e] \subset (\dfrac{\pi}{2}; \pi)$ và có đạo hàm trên khoảng $(e-1; e)$.

Theo định lý Lagrange, $\exists c \in (e-1; e)$ sao cho

$$f(e) - f(e-1) = f'(c). \qquad (2.17)$$

Mặt khác, ta có $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{cos}^2\mathrm{x} + 1}{3\sqrt[3]{\mathrm{cos}^4\mathrm{x}}}$.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $\mathrm{cos}^2\mathrm{x}, \mathrm{cos}^2\mathrm{x}, 1$ ta có

$$2\mathrm{cos}^2\mathrm{x} + 1 = \mathrm{cos}^2\mathrm{x} + \mathrm{cos}^2\mathrm{x} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\mathrm{cos}^4\mathrm{x}},$$

$$\iff \frac{2\mathrm{cos}^2\mathrm{x} + 1}{3\sqrt[3]{\mathrm{cos}^4\mathrm{x}}} \geq 1 \iff f'(x) \geq 1.$$

Dấu "=" không xảy ra với $x \in [e-1; e]$,do vậy

$$f'(c) > 1. \tag{2.18}$$

Từ(2.17) và (2.18) ta thu được $f(e) - f(e-1) > 1$ hay

$$\frac{\mathrm{sine}}{\sqrt[3]{\mathrm{cose}}} - \frac{\mathrm{sin(e-1)}}{\sqrt[3]{\mathrm{cos(e-1)}}} > 1.$$

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh (2.16).

Bài toán 2.16. *Chứng minh rằng* $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ *thì*

$$\frac{\beta - \alpha}{\mathrm{cos}^2\alpha} < \mathrm{tan}\beta - \mathrm{tan}\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\mathrm{cos}^2\beta}.$$

▼ **Lời giải** Xét hàm số $f(x) = \mathrm{tanx}$ rõ ràng f(x) liên tục trên $[\alpha; \beta]$, có đạo hàm trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{cos}^2\mathrm{x}}$.
Theo định lý Lagrange, $\exists c \in (\alpha; \beta)$, sao cho

$$\mathrm{tan}\beta - \mathrm{tan}\alpha = \frac{1}{\mathrm{cos}^2\mathrm{c}}(\beta - \alpha). \tag{2.19}$$

Vì $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ nên $0 < \mathrm{cos}\beta < \mathrm{cosc} < \mathrm{cos}\alpha$.
Từ đó ta có $\dfrac{1}{\mathrm{cos}^2\alpha} < \dfrac{1}{\mathrm{cos}^2\mathrm{c}} < \dfrac{1}{\mathrm{cos}^2\beta}$.
Suy ra

$$\frac{\beta - \alpha}{\mathrm{cos}^2\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{\mathrm{cos}^2\mathrm{c}} < \frac{\beta - \alpha}{\mathrm{cos}^2\beta}. \tag{2.20}$$

. Từ (2.19) và (2.20) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 2.17. *Chứng minh rằng với* $n > 1, (n \in \mathbb{N})$ *và* $0 < a < b$, *ta có*

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a).$$

▼ **Lời giải** Xét hàm số $f(x) = x^n$ với $x > 0$.
Rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = nx^{n-1}$, Khi đó theo định lý Lagrange, $\exists c \in (a; b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

hay

$$b^n - a^n = nc^{n-1}(b - a). \tag{2.21}$$

Do $b - a > 0$ và $a < c < b$ nên ta có

$$na^{n-1}(b - a) < nc^{n-1}(b - a) < nb^{n-1}(b - a). \tag{2.22}$$

Từ (2.21) và(2.22) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

2.2 Ứng dụng của đạo hàm trong phương trình,bất phương trình

Bài toán 2.18. *Giải phương trình*

$$\ln(x + 1)^{2(x+1)} = x^2 + 2x. \tag{2.23}$$

▼ **Lời giải:**
Tập điều kiện của phương trình này là: $\mathbb{D} = (-1; +\infty)$.
Đặt $f(x) = 2(x + 1)\ln(x + 1) - x^2 - 2x = 0$.
Có $f(x)$ xác định, liên tục, khác hằng số với mọi $x \in \mathbb{D}$, có $f(0) = 0$ và

$$f'(x) = 2[\ln(x + 1) - x]; f''(x) = \frac{-2x}{x - 1}; f'''(x) = \frac{-2}{(x + 1)^2}, \forall x \in \mathbb{D}.$$

Ta có $f''(x) = 0 \iff x = 0; f'''(0) = -1 < 0$ nên $f'(x)$ đạt cực đại đồng thời là giá trị lớn nhất trên $\mathbb{D}$ tại $x = 0$. Bởi vậy ta có

$$f'(x) = 2[\ln(x + 1) - x] \leq f'(0) = 0, \forall x \in \mathbb{D}$$

Từ đó suy ra $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{D}$. Do đó

$$(2.23) \iff f(x) = f(0) \iff x = 0$$

Suy ra phương trình (2.23) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 2.19. *Giải phương trình*

$$x^2 - x - 1 = x^2 e^{x+1} - (x + 1)e^{x^2}.$$

50Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

▼ **Lời giải** Ta sẽ giải bài toán tổng quát hơn
Bài toán: Cho $g(x), h(x)$ là hai hàm số bất kì. Chứng minh rằng

$$h(x).e^{g(x)} - g(x).e^{h(x)} = h(x) - g(x). \qquad (2.24)$$

$$(2.24) \iff \left[\begin{array}{ll} g(x).h(x) & = 0, \\ g(x) & = h(x) \neq 0. \end{array}\right.$$

Chứng minh.
Xét hàm số $f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$ xác đinh, liên tục với mọi $t \neq 0$. Có

$$f'(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} = \frac{\phi t}{t^2}.$$

Mà $\phi' t = e^t + t.e^t - e^t = t.e^t$. Ta có $\phi'(t) = 0 \iff t = 0$. Lại có

$$\phi''(t) = e^t(t+1) \Longrightarrow \phi''(0) = 1 > 0.$$

nên hàm số $\phi(t)$ đạt cực tiểu và cũng là giá trị nhỏ nhất bằng 0 tại $t = 0$. Nói cách khác $\phi(t) > 0, \forall t \neq 0$. Từ đó có $f'(t) > 0 \forall t \neq 0$, tức là hàm số $f(t)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; 0); (0; +\infty)$.
Xét phương trình (2.24). Thấy ngay nếu $g(x).h(x) = 0$ thì (2.24) đúng
Nếu $g(x).h(x) \neq 0$, khi đó (2.24) tương đương với

$$\frac{e^{g(x)} - 1}{g(x)} = \frac{e^{h(x)} - 1}{h(x)}. \qquad (2.25)$$

Từ nhận xét rằng hàm số $f(t)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; 0); (0; +\infty)$, và $\lim\limits_{x \to 0} f(t) = 1$ ta được khi $t < 0$ thì $f(t) < 1$, còn khi $t > 0$ thì $f(t) > 1$
Bởi vậy nếu (2.25) có nghiệm thì $g(x)$ và $h(x)$ phải cùng dấu vì nếu chúng trái dấu thì trong phương trình (2.25) có một vế lớn hơn 1 còn vế kia nhỏ hơn 1.
Thế nhưng vì hàm số $f(t)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; 0); (0; +\infty)$ nên nếu $g(x), h(x)$ cùng dương hoặc cùng âm thì

$$(2.25) \iff g(x) = h(x).$$

Từ các lập luận này ta thu được kết quả của bài toán đã nêu trên.
Trở lại ví dụ đang xét áp dụng bài toán với $g(x) = x^2; h(x) = x + 1$ ta

51Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

được phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{ll} x^2(x+1) = 0 \\ x^2 & = x+1 \neq 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm:

$$x = 0; x = -1; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán 2.20. *Cho phương trình*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (2.26)$$

Chứng minh rằng nếu tồn tại $m \in N^*$ *sao cho*

$$\frac{a_n}{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1} + ... + \frac{a_1}{m+1} + \frac{a_0}{m} = 0. \qquad (2.27)$$

thì phương trình (2.26) luôn có nghiệm $x \in (0;1)$.

▼ **Lời giải:** Đặt $f(x) = VT(2.26)$. xét hàm số

$$F(x) = \frac{a_n}{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1} + ... + \frac{a_1}{m+1} + \frac{a_0}{m}.$$

Hàm số $F(x)$ xác định liên tục trên $[0;1]$ và có

$$F'(x) = x^{m-1}f(x), \forall x \in (0;1); F(0) = 0.$$

$$F(1) = \frac{a_n}{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1} + ... + \frac{a_1}{m+1} + \frac{a_0}{m} = 0.$$

Theo định lý Lagrange tồn tại $x_0 \in (0;1)$ sao cho

$$F'(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1-0} = 0 \Longrightarrow x_0^{m-1}f(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0) = 0.$$

(do $x_0 \in (0;1)$, nên $x_0^{m-1} \neq 0$). Vậy phương trình (2.26) luôn có nghiệm $x \in (0;1)$.

Bài toán 2.21. *Giải phương trình*

$$e^{-x} - \sin(e^{-x})\cos(e^{-x}) - \pi = 0. \qquad (2.28)$$

52Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

▼ **Lời giải** Đặt $f(x) = VT(2.28)$. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục, khác hằng số với mọi $x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}$, có $f(-\ln\pi) = 0$ và

$$f'(x) = e^{-x}(\cos 2e^{-x} - 1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{D}.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{D}$. Do đó

$$(2.28) \Longleftrightarrow f(x) = f(-\ln\pi) \Longleftrightarrow x = -\ln\pi.$$

Phương trình (2.28) có nghiệm duy nhất $x = -\ln\pi$.

Bài toán 2.22. *Giải phương trình*

$$2^{x+1} + 3^{x+1} - (x^2\ln 2 + \frac{3}{2}x^2\ln 3) - 5 = 0. \tag{2.29}$$

▼ **Lời giải** Đặt $f(x) = VT(2.29)$. Hàm số $f(x)$ xác đinh, liên tục, khác hằng số với mọi $x \in \mathbb{D} = \mathbb{R}$, có $f(0) = 0$ và

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2^{x+1}\ln 2 + 3^{x+1}\ln 3 - 2x\ln 2 - 3x\ln 3 \\ &= (2\ln 2)[2^x - x] + (3\ln 3)[3^x - x] > 0, \forall x \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{D}$. Do đó

$$(2.29) \Longleftrightarrow f(x) = f(0) \Longleftrightarrow x = 0$$

Phương trình (2.29) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 2.23. *Giải phương trình:*

$$\mathrm{tg}^2\pi(x+y) + \mathrm{cotg}^2\pi(x+y) = \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} + 1.$$

▼ **Lời giải** Tập xác định

$$\begin{cases} \cos\pi(x+y)\sin\pi(x+y) \neq 0. \\ x \geq 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin 2\pi(x+y) \neq 0. \\ x \geq 0. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y \neq \dfrac{k}{2}, k \in Z \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Với mọi x, y thỏa mãn (*) ta có

$$\mathrm{tg}^2\pi(x+y) + \mathrm{cotg}^2\pi(x+y) \geq 2\sqrt{\mathrm{tg}^2\pi(x+y).\mathrm{cotg}^2\pi(x+y)} = 2.(**)$$

53Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Ta xét hàm số $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}} + 1, \forall x \geq 0.$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{2x}{1+x^2}}}.\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{2x(1+x^2)}}, \forall x > 0.$$

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$, (do $x \geq 0$).

Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Nhờ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{x\geq 0} f(x) = f(1) = 2.$ (***)

Từ (**), (***) và bất đẳng thức Cauchy phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2\pi(x+y) + \mathrm{cotg}^2\pi(x+y) = 2 \\ \dfrac{2x}{1+x^2} + 1 = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{tg}^2\pi(x+y) = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mathrm{tg}\pi(x+y) = 1 \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{tg}\pi(x+y) = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = \frac{1}{4} + n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 1 \\ x + y = \dfrac{-1}{4} + m, m \in \mathbb{Z} \\ x = 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\dfrac{3}{4} + n, n \in \mathbb{Z} \\ x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\dfrac{5}{4} + m, m \in \mathbb{Z} \\ x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Dễ dàng thấy các cặp (x;y) trên đều thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm.

Bài toán 2.24. *Giải phương trình*

$$(a-x)^n + (x-b)^n = (a-b)^n.$$

54Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Trong đó a,b là các tham số thực $a \neq b$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

▼ **Lời giải** Với n=1 phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
Với n>1 phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\left(\frac{a-x}{a-b}\right)^n + \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n = 1. \tag{2.30}$$

Đặt $t = \dfrac{a-x}{a-b}$ ta được :

$$(2.30) \iff t^n + (1-t)^n = 1. \tag{2.31}$$

Xét hàm số $g(t) = t^n + (1-t)^n - 1$ trên R, ta có $g'(t) = n[t^{n-1} - (1-t)^{n-1}]$.

$$g'\Big(\frac{1}{2}\Big) = n\left[\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\right] = 0.$$

$$\begin{aligned} t > \frac{1}{2} &\Rightarrow 2t > 1 \Rightarrow -t < 1-t < t \Rightarrow t > |1-t| \\ &\Rightarrow t^{n-1} > |1-t|^{n-1} \geq (1-t)^{n-1}. \\ t < \frac{1}{2} &\Rightarrow 2t < 1 \Rightarrow -(1-t) = t-1 < t < 1-t \Rightarrow |t| < 1-t \\ &\Rightarrow (1-t)^{n-1} > |t|^{n-1} \geq t^{n-1}. \end{aligned}$$

Do đó phương trình $g'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = \dfrac{1}{2}$.
Giả sử phương trình $g(t) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $t_1 < t_2 < t_3$. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm số g(t) lần lượt trên hai đoạn$[t_1; t_2]$, $[t_2; t_3]$, tồn tại $c_1 \in (t_1; t_2), c_2 \in (t_2; t_3)$ sao cho:
$g'(c_1) = \dfrac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1} = 0,\ g'(c_2) = \dfrac{g(t_3) - g(t_2)}{t_3 - t_2} = 0.$
Nghĩa là phương trình $g'(t) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $c_1 < c_2$, trái với lập luận trên.Suy ra phương trình $g(t) = 0$ có không quá hai nghiệm phân biệt. Do đó phương trình (2.30) có không quá hai nghiệm phân biệt phân biệt. Lần lượt thay $x = a, x = b$ vào (2.30) ta được:

$$\Big(\frac{a-a}{a-b}\Big)^n + \Big(\frac{a-b}{a-b}\Big)^n = 0 + 1 = 1.$$

$$\Big(\frac{a-b}{a-b}\Big)^n + \Big(\frac{b-b}{a-b}\Big)^n = 1 + 0 = 1.$$

55Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

Nghĩa là phương trình (2.30) có hai nghiệm phân biệt : $x = a, x = b$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt : $x = a, x = b$, với n>1.
Vậy, với $n = 1$ tập nghiệm của phương trình đã cho là R.
Với $n > 1$ tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{a; b\}$.

Bài toán 2.25. *Cho phương trình*

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + ... + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất lớn hơn 1.

▼ **Lời giải** Xét hàm số $f_n(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{4x-1} + ... + \dfrac{1}{n^2x-1} - \dfrac{1}{2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, ta nhận thấy hàm số $f_n(x)$ liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.
$f_n(2) > 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, vì $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\dfrac{1}{2}$, nên tồn tại $b > 2$ sao cho $f_n(b) < 0$. Do đó tồn tại $x_0 \in (2; b)$ sao cho $f_n(x_0) = 0$. Mặt khác, hàm số $f_n(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(1; +\infty)$ và

$$f_n'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{(4x-1)^2} - ... - \frac{n^2}{(n^2x-1)^2} < 0.$$

$\forall x \in (1; +\infty), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
Suy ra hàm số $f_n(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$, nên nghiệm x_0 là duy nhất trên khoảng $(1; +\infty)$.
Vì vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất lớn hơn 1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 2.26. *Giải phương trinh*

$$2^x - 2^{2x+1} = (x+1)3^x. \tag{2.32}$$

▼ **Lời giải** Xét hàm số $f(x) = 2^x$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x) = 2^x\text{ln}2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Theo định lí Lagrange, tồn tại c nằm giữa x và $2x + 1$ sao cho:

$$2^x - 2^{2x+1} = f'(c)[x - (2x+1)] = -(x+1)2^c\text{ln}2.$$

Bởi vậy

$$\begin{aligned}(2.32) &\iff -(x+1)2^c\text{ln}2 = (x+1)3^x \\ &\iff (x+1)[3^x + 2^c\text{ln}2] = 0 \\ &\iff x+1 = 0 \iff x = -1.\end{aligned}$$

56Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

(do $3^x + 2^c\ln 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$).
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Bài toán 2.27. *Giải bất phương trình*

$$3^{x^2-4} + (x^2-4)3^{x-2} \geq 1. \quad (2.33)$$

▼ **Lời giải:** Xét hàm số $f(x) = 3^x$. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục, có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) = 3^x\ln 3$. Sử dụng định lí Lagrange ta có:

$$\begin{aligned}(2.33) &\iff f(x^2-4) - f(0) + (x^2-4)3^{x-2} \geq 0\\ &\iff f'(c)[x^2-4-0] + (x^2-4)3^{x-2} \geq 0\\ &\iff x^2 - 4 \geq 0\\ &\iff x \leq -2 \vee 2 \leq x.\end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \leq -2 \vee x \geq 2$.

Bài toán 2.28. *Chứng minh bất phương trình*

$$\ln(1+\sqrt{1+x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x.$$

thỏa mãn $\forall x \in (0; +\infty)$.

▼ **Lời giải** Xét hàm số $f(x) = \ln(1+\sqrt{1+x^2}) - \ln x - \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có

$$f'(x) = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{(1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{x^2 - \sqrt{1+x^2} - (1+x^2)}{x(1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{-(1+\sqrt{1+x^2})}{x(1+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x^2}$$
$$= -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x^2\sqrt{1+x^2}} > \frac{x-x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = 0.$$

Do đó hàm số f(x) đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
Lấy một điểm bất kỳ $x_0 \in (0; +\infty)$ và $x_1 > x_0$, thì $f(x_0) < f(x_1)$.
Khi đó

$f(x_1) < f(x), \forall x \in (x_1; +\infty)$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x_1) \leq \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) - \frac{1}{x}\right] = \ln 1 = 0.\end{aligned}$$

Suy ra $f(x_0) < f(x_1) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) < 0$. Do tính chất bất kỳ của điểm $x_0 \in (0; +\infty)$, nên $f(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$. Vì vậy

$$ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < lnx + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty).$$

Bài toán 2.29. *Bất phương trình*

$$\mathrm{sin(x+1)}\sqrt[3]{\mathrm{cosx}} - \mathrm{sinx}\sqrt[3]{\mathrm{cos(x+1)}} < \sqrt[3]{\mathrm{cosx.cos(x+1)}}. \qquad (2.34)$$

Có nghiệm x=5 (Radian) không ? Tại sao ?

▼ **Lời giải** Ta có

$$(2.34) \iff \frac{\mathrm{sin(x+1)}}{\sqrt[3]{\mathrm{cos(x+1)}}} - \frac{\mathrm{sinx}}{\sqrt[3]{\mathrm{cosx}}} < 1. \qquad (2.35)$$

Đặt $f(x) = \dfrac{\mathrm{sin(x+1)}}{\sqrt[3]{\mathrm{cos(x+1)}}} - \dfrac{\mathrm{sinx}}{\sqrt[3]{\mathrm{cosx}}}$.

Xét hàm $g(t) = \dfrac{\mathrm{sint}}{\sqrt[3]{\mathrm{cost}}}$ trên đọan $[x; x+1] \subset \big(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\big)$. Rõ rằng $g(t)$ liên tục và có đạo hàm $g'(t) = \dfrac{2\mathrm{cos}^2\mathrm{t} + 1}{3\sqrt[3]{\mathrm{cos}^4\mathrm{t}}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $\mathrm{cos}^2\mathrm{t}, \mathrm{cos}^2\mathrm{t}, 1$,ta có

$$2\mathrm{cos}^2\mathrm{t} + 1 = \mathrm{cos}^2\mathrm{t} + \mathrm{cos}^2\mathrm{t} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\mathrm{cos}^4\mathrm{t}}$$

$$\iff \frac{2\mathrm{coss}^2\mathrm{t} + 1}{3\sqrt[3]{\mathrm{cos}^4\mathrm{t}}} \geq 1.$$

. Tức $g'(t) \geq 1, \forall t \in [x, x+1] \subset \big(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\big)$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $g(t)$ trên $[x; x+1]$ ta có

$$\frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} = g'(c), (c \in (x; x+1)).$$

$$\iff \frac{\mathrm{sin(x+1)}}{\sqrt[3]{\mathrm{cos(x+1)}}} - \frac{\mathrm{sinx}}{\sqrt[3]{\mathrm{cosx}}} = \frac{2\mathrm{cos}^2\mathrm{c} + 1}{3\sqrt[3]{\mathrm{cos}^4\mathrm{c}}} \geq 1.$$

Như vậy, $\forall x \in [x; x+1] \iff \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ thì $f(x) \geq 1$ mà $x = 5 \in \left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$, cho nên $x = 5(radian)$ không phải là nghiệm của bất phương trình (2.35)

58Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

(cũng là bất phương trình (2.34)).
Vậy bất phương trình đã cho không có nghiệm $x = 5(radian)$.

59Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

KẾT LUẬN

Bản luận văn đã giới thiệu, phân loại và hệ thống hóa về một số bất đẳng thức đạo hàm một biến số như: các định lý trung bình, sự tăng giảm của hàm số, hướng lồi và điểm uốn của đồ thị hàm số, công thức Taylor, công thức tính đạo hàm cấp n và một số bất đẳng đạo hàm khác của đa thức.

Bên cạnh đó luận văn còn đề cập đến một số bất đẳng thức đạo hàm khó hơn chưa được giới thiệu nhiều trong các tài liệu Tiếng Việt như: bất đẳng thức Landau-Hadamard, bất đẳng thức Glaeser, bất đẳng thức Markov-Bernstein và một số bất đẳng thức khác liên quan đến hàm lồi.

Trên cơ sở các bất đẳng thức đạo hàm đó đã ứng dụng vào giải quyết các bài toán về chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, giải bất phương trình. Đây là những dạng toán thường gặp trong các kì thi học sinh giỏi toán cấp quốc gia và Olympic toán quốc tế.

Qua quá trình làm luận văn em đã được biết đến những bất đẳng thức đạo hàm mà từ trước đến nay em chưa hề biết đến như: bất đẳng thức Landau-Hadamard, bất đẳng thức Glaeser, bất đẳng thức Markov-Bernstein.

Qua đây em thấy nhận thức của mình về bất đẳng thức đạo hàm được nâng lên rõ rệt. Việc tìm hiểu về các bất đẳng thức này là cơ sở giúp em có thể sáng tạo thêm nhiều các bài toán về bất đẳng thức đạo hàm phục vụ rất nhiều cho việc học tập và giảng dạy của bản thân.

60Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Lưu Cường (2000),*Toán Olympic cho sinh viên-tập1*. NXB Giáo Dục .

[2] Nguyễn Phụ Hy (2005), *Ứng dụng giải tich để giải toán THPT*. NXB Giáo Dục .

[3] Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn (2006), *Các đề thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc*. NXB Giáo Dục .

[4] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Tiến (2009), *Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT*- NXB giáo dục .

[5] Y.Y.Liashko, A.C.Boiachuk, Ia.G.Gai,G.P.Golovak (1979), *Giải tích toán học- Các ví dụ và bài tập, phần 1, tập 1*- NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp.

[6] Tạp chí toán học tuổi trẻ, số 417, năm 2012.

[7] http://users.ipfw.edu/CoffmanA/pdf/calclemma6.pdf.

[8] http://www.math.tamu.edu/ terdelyi/.../abstract.pdf.

[9] http://www.ms.uky.edu/ larry/paper.dir/markov.pdf.

[10] http://files.ele-math.com/abstracts/mia-15-17-abs.pdf.

61Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*