

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM VĂN THƯ

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐA THỨC
ĐỐI XỨNG VÀ ỨNG DỤNG
TRONG ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60. 46. 40.

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN MINH

THÁI NGUYÊN – 2012

Mục lục

Mở đầu	3
1 Khái niệm cơ bản về đa thức đối xứng	5
1.1 Đa thức đối xứng hai biến	5
1.1.1 Các khái niệm cơ bản	5
1.1.2 Tổng lũy thừa và công thức Waring	6
1.1.3 Các định lý về đa thức đối xứng hai biến	9
1.2 Đa thức đối xứng ba biến	11
1.2.1 Các khái niệm cơ bản	11
1.2.2 Tổng lũy thừa và tổng nghịch đảo	12
1.2.3 Quỹ đạo của đơn thức	14
1.2.4 Các định lý của đa thức đối xứng ba biến	16
1.2.5 Đa thức phản đối xứng	19
2 Ứng dụng tính chất của đa thức đối xứng để giải một số bài toán đại số	21
2.1 Một số bài tập tính toán	21
2.2 Phân tích đa thức thành nhân tử	24
2.3 Phương trình đối xứng và phương trình hồi quy	27
2.4 Giải hệ phương trình	33
2.4.1 Hệ phương trình đối xứng hai ẩn và ứng dụng	33
2.4.2 Hệ phương trình đối xứng ba ẩn	37
2.5 Tìm nghiệm nguyên của các phương trình đối xứng	42
2.6 Chứng minh các đẳng thức	44
2.7 Chứng minh bất đẳng thức	50
3 Đa thức đối xứng n biến và ứng dụng	58
3.1 Các khái niệm	58
3.2 Biểu diễn các tổng lũy thừa qua các đa thức đối xứng cơ sở	60
3.3 Các định lý của đa thức đối xứng nhiều biến	63

3.4	Đa thức phản đối xứng nhiều biến	66
3.5	Phương trình và hệ phương trình	68
3.6	Chứng minh đẳng thức. Phân tích đa thức thành nhân tử .	72
	Kết luận	79
	Tài liệu tham khảo	80

Mở đầu

Các bài toán đại số luôn chiếm một vị trí quan trọng đối với toán phổ thông, cũng là lĩnh vực mà các nhà nghiên cứu sáng tạo ra rất đầy đủ và hoàn thiện. Tính đối xứng trong đại số là một trong những phần quan trọng của đại số sơ cấp, cũng là bài toán quen thuộc trong các tài liệu liên quan đến đại số sơ cấp, các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế. Trong quá trình giải nhiều bài toán đại số hoặc ở dạng trực tiếp hoặc ở dạng gián tiếp mới nhận ra đó là bài toán liên quan đến đa thức đối xứng, nếu giải mỗi bài toán này một cách đơn lẻ sẽ gặp không ít khó khăn và tính hiệu quả không cao khi giải các bài toán cùng loại. Việc nắm bắt được đầy đủ khái niệm và các tính chất cơ bản của đa thức đối xứng, thông qua đó áp dụng giải một số bài toán liên quan đến đa thức đối xứng là vấn đề được nhiều người quan tâm.

Luận văn này giới thiệu các khái niệm, tính chất của đa thức đối xứng và các ứng dụng cơ bản để giải các bài toán đại số thường gặp trong chương trình toán sơ cấp. Luận văn "Một số tính chất của đa thức đối xứng và ứng dụng trong đại số" gồm có phần mở đầu, ba chương nội dung, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Các khái niệm cơ bản về đa thức đối xứng.
Trong chương này tác giả trình bày các khái niệm, tính chất của đa thức đối xứng hai biến, ba biến. Một đóng góp nhỏ có ý nghĩa trong chương này là Hệ quả 1.1 của công thức Newton. Công thức này thường được sử dụng trong các bài toán tính giá trị biểu thức.

Chương 2. Ứng dụng tính chất của đa thức đối xứng để giải một số bài toán đại số.

Chương này tác giả trình bày các ứng dụng của đa thức đối xứng bằng các ví dụ minh họa cụ thể. Các ứng dụng này rất phổ biến trong các tài liệu về đại số trong chương trình toán phổ thông.

Chương 3. Đa thức đối xứng n biến và ứng dụng.

Chương này tác giả trình bày các kiến thức của đa thức đối xứng n biến và một số ứng dụng phổ biến thường gặp.

Luận văn nghiên cứu một phần rất nhỏ của đại số và đã thu được một số kết quả nhất định. Tuy nhiên, luận văn chắc chắn còn nhiều thiếu sót, nên rất mong được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp và độc giả quan tâm đến nội dung luận văn để luận văn của tác giả được hoàn thiện hơn.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Minh. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới sự quan tâm của thầy, tới các thầy cô trong Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo và Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học. Đồng thời tác giả xin cảm ơn tới Sở GD - ĐT tỉnh Yên Bái, Ban Giám hiệu, các bạn đồng nghiệp tại trường THPT Hoàng Văn Thụ huyện Lục Yên - Yên Bái và gia đình đã tạo điều kiện cho tác giả học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 06 năm 2012.

Tác giả

Phạm Văn Thư

Chương 1

Khái niệm cơ bản về đa thức đối xứng

1.1 Đa thức đối xứng hai biến

1.1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1 (Theo [2]). Một đơn thức $f(x,y)$ của các biến độc lập x, y (trường hợp chung nhất có thể là các số phức) được hiểu là hàm số có dạng

$$f(x, y) = a_{kl}x^k y^l,$$

trong đó $a_{kl} \neq 0$ là một số (hằng số), k, l là những số nguyên không âm. Số a_{kl} được gọi là hệ số, còn $k+l$ được gọi là bậc của đơn thức $f(x,y)$ và được kí hiệu là

$$\deg[f(x, y)] = \deg[ax^k y^l] = k + l.$$

Các số k, l tương ứng được gọi là bậc của đơn thức đối với các biến x, y . Như vậy, bậc của đơn thức hai biến bằng tổng các bậc của các đơn thức theo từng biến.

Chẳng hạn: $3x^4y^2$ và x^2y là các đơn thức theo x, y với bậc tương ứng bằng 6 và 3.

Định nghĩa 1.2 (Theo [2]). Hai đơn thức của các biến x, y được gọi là đồng dạng (tương tự), nếu chúng chỉ có hệ số khác nhau. Như vậy, hai đơn thức được gọi là đồng dạng, nếu chúng có dạng: $Ax^k y^l, Bx^k y^l (A \neq B)$.

Định nghĩa 1.3 (Theo [2]). Giả sử $Ax^k y^l$ và $Bx^m y^n$ là hai đơn thức của các biến x, y . Ta nói rằng đơn thức $Ax^k y^l$ trội hơn đơn thức $Bx^m y^n$ theo thứ tự của các biến x, y , nếu $k > m$, hoặc $k = m$ và $l > n$.

Chẳng hạn: Đơn thức $3x^4y^2$ trội hơn đơn thức $3x^2y^7$, còn đơn thức x^4y^5 trội hơn đơn thức x^4y^3 .

Định nghĩa 1.4 (Theo [2]). Một hàm số $P(x, y)$ được gọi là một đa thức theo các biến số x, y , nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hữu hạn các đơn thức. Như vậy, đa thức $P(x, y)$ theo các biến số x, y là hàm số có dạng

$$P(x, y) = \sum_{k+l \leq m} a_{kl} x^k y^l.$$

Bậc lớn nhất của các đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 1.5 (Theo [2]). Đa thức $P(x, y)$ được gọi là đối xứng của hai biến x, y , nếu nó không thay đổi khi đổi chỗ của x và y , nghĩa là

$$P(x, y) = P(y, x)$$

Chẳng hạn:

$$P(x, y) = x^3 - xy + y^3, Q(x, y) = x^2y + xy^2$$

là các đa thức đối xứng của các biến x, y .

Định nghĩa 1.6 (Theo [2]). Các đa thức

$$\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy.$$

được gọi là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x, y .

Định nghĩa 1.7 (Theo [2]). Đa thức đối xứng $P(x, y)$ được gọi là thuần nhất bậc m , nếu:

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \forall t \neq 0$$

1.1.2 Tổng lũy thừa và công thức Waring

Định nghĩa 1.8 (Theo [2]). Các đa thức $s_k = x^k + y^k$ ($k = 1, 2, \dots$) được gọi là tổng lũy thừa bậc k của các biến x, y .

Định lý 1.1 (Theo [2]). Mỗi tổng lũy thừa $s_m = x^m + y^m$ có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức bậc m của σ_1 và σ_2

Chứng minh. Ta có

$$\sigma_1 s_{k-1} = (x + y)(x^{k-1} + y^{k-1}) = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = s_k + \sigma_2 s_{k-2}.$$

Như vậy

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}. \quad (1.1)$$

Công thức (1.1) được gọi là công thức Newton, nó cho phép tính s_k theo s_{k-1} và s_{k-2} .

Với $m=1$, $m=2$, Định lý 1.1 đúng vì

$$\begin{aligned} s_1 &= x + y = \sigma_1, \\ s_2 &= x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2. \end{aligned}$$

Giả sử định lý đã đúng cho $m < k$. Khi đó s_{k-1} và s_{k-2} lần lượt là các đa thức bậc $k-1$, $k-2$ của σ_1 và σ_2 . Theo công thức (1.1) ta suy ra s_k là đa thức bậc k của σ_1 và σ_2 . Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh. $\square$

Hệ quả 1.1. Với $m > n$, ta có

$$s_{m+n} = s_m \cdot s_n - \sigma_2^n \cdot s_{m-n}. \quad (1.2)$$

Thật vậy,

$$s_{m+n} = x^{m+n} + y^{m+n} = (x^m + y^m)(x^n + y^n) - x^n y^n (x^{m-n} + y^{m-n}) = s_m \cdot s_n - \sigma_2^n \cdot s_{m-n}$$

Sử dụng công thức (1.1) và các biểu thức của s_1, s_2 ở chứng minh trên, ta nhận được các biểu thức sau

$$\begin{aligned} s_1 &= x + y = \sigma_1, \\ s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2, \\ s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2, \\ s_5 &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2. \end{aligned}$$

Việc tính các tổng lũy thừa s_k theo công thức lặp (1.1) không được thuận tiện vì phải biết trước các tổng s_k và s_{k-1} . Đôi khi ta cần có biểu thức s_k chỉ phụ thuộc vào σ_1 và σ_2 . Công thức tương ứng được tìm ra năm 1779 bởi nhà toán học người Anh E.Waring.

Định lý 1.2 (Công thức Waring (Theo [2])). Tổng lũy thừa s_k được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở σ_1 và σ_2 theo công thức

$$\frac{1}{k} s_k = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m! (k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m, \quad (1.3)$$

trong đó $[k/2]$ kí hiệu là phần nguyên của $k/2$.

Chứng minh. Ta chứng minh công thức (1.3) bằng phương pháp quy nạp. Với $k=1, k=2$ công thức tương ứng có dạng

$$s_1 = \sigma_1, \frac{1}{2}s_2 = \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \sigma_2.$$

Như vậy, với $k=1, k=2$ công thức (1.3) đúng. Giả sử công thức Waring đã đúng cho $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}$. Để chứng minh công thức đó đúng cho s_k ta sử dụng công thức (1.1). Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}s_k &= \frac{1}{k}[\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}] = \\ &= \frac{k-1}{k}\sigma_1 \cdot \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m (k-m-2)!}{m! (k-2m-1)!} \sigma_1^{k-2m-1} \sigma_2^m - \\ &\quad - \frac{k-1}{k}\sigma_2 \cdot \sum_n \frac{(-1)^n (k-n-3)!}{n! (k-2n-2)!} \sigma_1^{k-2n-2} \sigma_2^n = \\ &= \frac{1}{k} \sum_m \frac{(-1)^m (k-m-2)! (k-1)}{m! (k-2m-1)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m - \\ &\quad - \frac{1}{k} \sum_n \frac{(-1)^n (k-n-3)! (k-2)}{n! (k-2n-2)!} \sigma_1^{k-2n-2} \sigma_2^{n+1} \end{aligned}$$

Trong tổng thứ hai thay $n+1$ bởi m . Khi đó hai tổng có thể kết hợp thành một như sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}s_k &= \frac{1}{k} \sum \frac{(-1)^m (k-m-2)! (k-1)}{m! (k-2m-1)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m - \\ &\quad - \frac{1}{k} \sum_m \frac{(-1)^{m-1} (k-m-2)! (k-2)}{(m-1)! (k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m = \\ \frac{1}{k} \sum_m (-1)^m (k-m-2)! &\left[\frac{k-1}{m! (k-2m-1)!} + \frac{k-2}{(m-1)! (k-2m)!} \right] \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m. \end{aligned}$$

Sử dụng công thức

$$\frac{1}{(m-1)!} = \frac{m}{m!}, \frac{1}{(k-2m-1)!} = \frac{k-2m}{(k-2m)!},$$

ta có

$$\frac{(k-1)(k-2m)}{m!(k-2m)!} + \frac{(k-2)m}{m!(k-2m)!} = \frac{k(k-m-1)}{m!(k-2m)!}.$$

Cuối cùng, vì

$$(k-m-1).(k-m-2)! = (k-m-1)!$$

nên ta có công thức cần phải chứng minh:

$$\frac{1}{k}s_k = \sum_{m=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m! (k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m,$$

□

Công thức Waring cho biểu thức của $s_n = x^n + y^n$ theo $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$ sau đây
$s_1 = \sigma_1;$ $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$ $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2;$ $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2;$ $s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2;$ $s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3;$ $s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3;$ $s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4;$ $s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4;$ $s_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5;$

1.1.3 Các định lý về đa thức đối xứng hai biến

Định lý 1.3 (Theo [2]). Mọi đa thức đối xứng $P(x, y)$ của các biến x, y đều có thể biểu diễn được dưới dạng đa thức $p(\sigma_1, \sigma_2)$ theo các biến $\sigma_1 = x + y$ và $\sigma_2 = xy$, nghĩa là

$$P(x, y) = p(\sigma_1, \sigma_2) \quad (1.4)$$

Chứng minh. Trước hết ta xét trường hợp đơn thức, trong đó lũy thừa của x và y cùng bậc, nghĩa là đơn thức dạng ax^ky^k . Hiển nhiên là

$$ax^ky^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k.$$

Tiếp theo, xét đơn thức dạng $bx^ky^l (k \neq l)$. Vì đa thức là đối xứng, nên có số hạng dạng bx^ly^k . Để xác định, ta giả sử $k < l$ và xét tổng hai đơn thức trên

$$b(x^ky^l + x^ly^k) = bx^ky^k(x^{l-k} + y^{l-k}) = b\sigma_2^k s_{l-k}.$$

Theo công thức Waring s_{l-k} là một đa thức của các biến σ_1, σ_2 , nên nhị thức nói trên là một đa thức của σ_1, σ_2 .

Vì mọi đa thức đối xứng là tổng của các số hạng dạng ax^ky^k và $b(x^ky^l + x^ly^k)$, nên mọi đa thức đối xứng đều biểu diễn được ở dạng đa thức theo các biến σ_1 và σ_2 . □

Định lý 1.4 (Tính duy nhất (Theo [2])). Nếu các đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ và $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ khi thay $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $P(x, y)$, thì chúng phải trùng nhau, nghĩa là $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) \equiv \psi(\sigma_1, \sigma_2)$.

Chứng minh. Đặt $\phi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2) - \psi(\sigma_1, \sigma_2)$. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\phi(x + y, xy) = \varphi(x + y, xy) - \psi(x + y, xy) = P(x, y) - P(x, y) = 0.$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng $\phi(\sigma_1, \sigma_2) \equiv 0$. Dễ thấy rằng, sau khi mở ngoặc thì biểu thức

$$f(x, y) := (x + y)^k (xy)^l$$

là một đa thức của các biến x, y và có số hạng trội nhất theo thứ tự các biến x, y là $x^{k+l}y^l$.

Giả sử $\phi(\sigma_1, \sigma_2)$ có dạng

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{k,l} A_{kl} \sigma_1^k \sigma_2^l.$$

Để tìm số hạng trội nhất, ta chọn trong $\phi(\sigma_1, \sigma_2)$ các số hạng có $k+l$ là lớn nhất. Tiếp theo, trong các số hạng nói trên, chọn ra các số hạng với giá trị lớn nhất của l . Ví dụ, nếu

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2) = 3\sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_2^4 - 6\sigma_1\sigma_2^2 + 11\sigma_2^3 - 7\sigma_1 + 5\sigma_2 + 8$$

thì số hạng được chọn sẽ là $\sigma_1\sigma_2^4$.

Như vậy, giả sử chọn được đơn thức $A\sigma_1^m\sigma_2^n$. Khi đó, nếu thay $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$, thì số hạng trội nhất của ϕ sẽ là $Ax^{m+n}y^n$. Thật vậy, giả sử $B\sigma_1^k\sigma_2^l$ là đơn thức tùy ý khác với $Ax^{m+n}y^n$. Khi đó theo cách chọn có hoặc $m+n > k+l$, hoặc $m+n = k+l$, nhưng $n > l$. Trong cả hai trường hợp thì $Ax^{m+n}y^n$ trội hơn $Bx^{k+l}y^l$.

Vậy chúng tỏ rằng $Ax^{m+n}y^n$ là đơn thức trội nhất của $\phi(x + y, xy)$, nên $\phi(x + y, xy) \neq 0, \forall x, y$ nếu $\phi(\sigma_1, \sigma_2) \neq 0$. Vậy, ta có $\phi(\sigma_1, \sigma_2) \equiv 0$. $\square$

Ví dụ 1.1. Biểu diễn đa thức sau theo các đa thức đối xứng cơ sở

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^5 + 3x^3y^2 - x^3y^3 + 2xy^4 - 7x^2y^2 + y^5 + 3x^2y^3 - 5xy^3 - 5x^3y + 2x^4y \\ &= -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + 3(x^3y^2 + x^2y^3) + 2(xy^4 + x^4y) - \\ &\quad 5(xy^3 + x^3y) = \\ &= -x^3y^3 - 7x^2y^2 + (x^5 + y^5) + 3x^2y^2(x + y) + 2xy(y^3 + x^3) - 5xy(y^2 + x^2) \\ &= -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + s_5 + 3\sigma_2^2\sigma_1 + 2\sigma_2s_3 - 5\sigma_2s_2 = \\ &= -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + (\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) + 3\sigma_1\sigma_2^2 + 2\sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - 5\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \\ &= \sigma_1^5 - 3\sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2. \end{aligned}$$

1.2 Đa thức đối xứng ba biến

1.2.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.9 (Theo [2]). Một đơn thức $\varphi(x, y, z)$ của các biến x, y, z được hiểu là hàm số có dạng

$$\varphi(x, y, z) = a_{klm}x^k y^l z^m,$$

trong đó $k, l, m \in \mathbb{N}$ được gọi là bậc của các biến x, y, z ; số $a_{klm} \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ được gọi là hệ số của đơn thức, còn số $k+l+m$ gọi là bậc của đơn thức $\varphi(x, y, z)$.

Định nghĩa 1.10 (Theo [2]). Một hàm số $P(x, y, z)$ của các biến x, y, z được gọi là một đa thức, nếu nó có thể được biểu diễn ở dạng tổng hữu hạn các đơn thức:

$$P(x, y, z) = \sum_{k+l+m \leq n} a_{klm}x^k y^l z^m.$$

Bậc lớn nhất của các đơn thức trong đa thức được gọi là bậc của đa thức.

Định nghĩa 1.11 (Theo [2]). Đa thức $P(x, y, z)$ được gọi là đối xứng của các biến x, y, z , nếu nó không thay đổi với mọi hoán vị của x, y, z , nghĩa là

$$P(x, y, z) = P(x, z, y) = P(y, x, z) = P(y, z, x) = P(z, y, x) = P(z, x, y).$$

Chẳng hạn các đa thức dưới đây là những đa thức đối xứng theo các biến x, y, z

$$\begin{aligned} & x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2; \\ & (x+y)(x+z)(y+z); \\ & (x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.12 (Theo [2]). Đa thức đối xứng $P(x, y, z)$ được gọi là thuần nhất bậc m , nếu:

$$P(tx, ty, tz) = t^m P(x, y, z), \forall t \neq 0$$

Định nghĩa 1.13 (Theo [2]). Các đa thức

$$\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz,$$

được gọi là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x, y, z .

1.2.2 Tổng lũy thừa và tổng nghịch đảo

Định nghĩa 1.14 (Theo [2]). Các đa thức $s_k = x^k + y^k + z^k$, ($k = 0, 1, \dots$), được gọi là tổng lũy thừa bậc k của các biến x, y, z .

Định lý 1.5 (Công thức Newton (Theo [2])). Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có hệ thức

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} \quad (1.5)$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} =$$

$$\begin{aligned} &= (x + y + z)(x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1}) - \\ &\quad - (xy + xz + yz)(x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2}) + xyz(x^{k-3} + y^{k-3} + z^{k-3}) = \\ &= (x^k + y^k + z^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + xz^{k-1} + x^{k-1}z + yz^{k-1} + y^{k-1}z) - \\ &\quad - (x^{k-1}y + xy^{k-1} + x^{k-1}z + xz^{k-1} + y^{k-1}z + yz^{k-1} + \\ &\quad + xyz^{k-2} + xy^{k-2}z + x^{k-2}yz) + (x^{k-2}yz + xy^{k-2}z + xyz^{k-2}) = \\ &= x^k + y^k + z^k = s_k. \quad \square \end{aligned}$$

Định lý 1.6 (Theo [2]). Mỗi tổng lũy thừa $s_k = x^k + y^k + z^k$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một đa thức bậc n theo các biến $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Chứng minh. Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp. Ta có

$$\begin{aligned} s_0 &= 3, s_1 = x + y + z = \sigma_1 \\ s_2 &= x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2. \end{aligned}$$

Như vậy, Định lý đúng với $n = 0, n = 1, n = 2$. Giả sử định lý đúng với $n = k - 1, n = k - 2, n = k - 3$ ($k > 3$). Khi đó, theo công thức Newton, Định lý cũng đúng với $n = k$. $\square$

Công thức (1.5) cho phép biểu diễn các tổng lũy thừa s_k theo các đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, nếu biết trước công thức biểu diễn của s_{k-1}, s_{k-2} . Định lý sau cho ta công thức biểu diễn trực tiếp s_k theo các đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Định lý 1.7 (Công thức Waring (Theo [2])). *Tổng lũy thừa s_k được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở theo công thức*

$$\frac{1}{k}s_k = \sum_{l+2m+3n=k} \frac{(-1)^{k-l-m-n} (l+m+n-1)!}{l!m!n!} \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n. \quad (1.6)$$

Công thức (1.6) được chứng minh bằng phương pháp quy nạp với sự trợ giúp của công thức (1.5). Nhờ công thức Waring chúng ta có thể tìm được các công thức sau

<i>Biểu thức của $s_n = x^n + y^n + z^n$ tính theo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.</i> $s_0 = 3;$ $s_1 = \sigma_1;$ $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$ $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3;$ $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3;$ $s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3;$ $s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2;$ $s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_1^4\sigma_3 - 21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3;$ $s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 + 8\sigma_1^5\sigma_3 - 32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 +$ $+12\sigma_1^2\sigma_3^2 + 24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2;$ $s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4 + 9\sigma_1^6\sigma_3 -$ $-45\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 + 54\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_3^3 - 9\sigma_2^3\sigma_3 - 27\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2 + 3\sigma_3^3;$ $s_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5 + 10\sigma_1^7\sigma_3 -$ $-60\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3 + 100\sigma_1^3\sigma_2^2\sigma_3 + 25\sigma_1\sigma_3^3 - 40\sigma_1\sigma_2^3\sigma_3 - 60\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 + 10\sigma_1\sigma_3^3 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2;$

Định nghĩa 1.15 (Theo [2]). *Các biểu thức*

$$s_{-k} = x^{-k} + y^{-k} + z^{-k} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k}, (k = 1, 2, \dots)$$

được gọi là tổng nghịch đảo của các biến x, y, z .

Do công thức (1.5) đúng với $\forall k \in \mathbb{Z}$, nên nếu trong công thức đó thay k bởi $3 - k$, ta được

$$s_{-k} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} s_{1-k} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} s_{2-k} + \frac{1}{\sigma_3} s_{3-k} \quad (1.7)$$

Sử dụng công thức (1.7) có thể tìm được các biểu thức của các tổng nghịch đảo theo các đa thức đối xứng cơ sở. Chẳng hạn:

$$\begin{aligned}
s_{-1} &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_0 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_1 + \frac{1}{\sigma_3}s_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}.3 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}.\sigma_1 + \frac{1}{\sigma_3}(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}; \\
s_{-2} &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_0 + \frac{1}{\sigma_3}s_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2}{\sigma_3} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}.3 + \frac{1}{\sigma_3}\sigma_1 = \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}; \\
s_{-3} &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{-1} + \frac{1}{\sigma_3}s_0 = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2}{\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_3}.3 = \\
&= \frac{\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2}{\sigma_3^3}; \\
s_{-4} &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3}s_{-3} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}s_{-2} + \frac{1}{\sigma_3}s_{-1} = \\
&= \frac{\sigma_2}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2}{\sigma_3^3} - \frac{\sigma_1}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2} + \frac{1}{\sigma_3}.\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \\
&= \frac{\sigma_2^4 - 4\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 4\sigma_2\sigma_3^2 + 2\sigma_1^2\sigma_3^2}{\sigma_3^4}
\end{aligned}$$

1.2.3 Quỹ đạo của đơn thức

Định nghĩa 1.16 (Theo [2]). Đa thức đối xứng với số các số hạng tối thiểu, một trong các số hạng của nó là đơn thức $x^ky^lz^m$ được gọi là quỹ đạo của đơn thức $x^ky^lz^m$ và được kí hiệu là $O(x^ky^lz^m)$.

Rõ ràng là để tìm quỹ đạo của đơn thức $x^ky^lz^m$ cần phải bổ sung vào đơn thức đó tất cả các hoán vị của x, y, z . Với $k \neq l \neq m$, ta có:

$$O(x^ky^lz^m) = x^ky^lz^m + x^ky^mz^l + x^ly^kz^m + x^ly^mz^k + x^my^kz^l + x^my^lz^k.$$

Ví dụ 1.2 (Theo [5]). Ta có

$$\begin{aligned}
O(x^5y^2z) &= x^5y^2z + x^5yz^2 + x^2y^5z + x^2yz^5 + xy^5z^2 + xy^2z^5; \\
O(x^3y) &= O(x^3yz^0) = x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3.
\end{aligned}$$

Nếu trong đơn thức $x^ky^lz^m$ có hai số mũ nào đó bằng nhau, chẳng hạn $k = l \neq m$, thì

$$O(x^ky^kz^m) = x^ky^kz^m + x^ky^mz^k + x^my^kz^k$$

Chẳng hạn: $O(xy^5z) = xyz^5 + xy^5z + x^5yz$,

$$O(xy) = xy + yz + zx,$$

$$O(x^3y^3) = x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3.$$

Các trường hợp riêng của quỹ đạo:

$$\begin{aligned}
O(x) &= O(xy^0z^0) = x + y + z = \sigma_1, \\
O(xy) &= O(xy z^0) = xy + yz + zx = \sigma_2, \\
O(xyz) &= xyz = \sigma_3, \quad O(x^k) = O(x^k y^0 z^0) = x^k + y^k + z^k = s_k, \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Định lý 1.8 (Theo [2]). *Quỹ đạo của mọi đơn thức biểu diễn được dưới dạng đa thức theo các đơn thức đối xứng cơ sở.*

Chứng minh. Trước hết ta có $O(x^k) = s_k$, nên theo định lý (1.6), $O(x^k)$ biểu diễn được theo các đa thức đối xứng cơ sở.

Trường hợp quỹ đạo có dạng $O(x^k y^l)$. Ta có công thức

$$O(x^k y^l) = O(x^k)O(x^l) - O(x^{k+l}) \quad (k \neq l). \quad (1.8)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
O(x^k)O(x^l) - O(x^{k+l}) &= (x^k + y^k + z^k)(x^l + y^l + z^l) - (x^{k+l} + y^{k+l} + z^{k+l}) = \\
&= (x^{k+l} + y^{k+l} + z^{k+l}) + (x^k y^l + x^l y^k + x^k z^l + x^l z^k + y^k z^l + y^l z^k) - \\
&\quad - (x^{k+l} + y^{k+l} + z^{k+l}) = \\
&= x^k y^l + x^l y^k + x^k z^l + x^l z^k + y^k z^l + y^l z^k = O(x^k y^l).
\end{aligned}$$

Nếu $k = l$ thì công thức (1.8) được thay bởi công thức sau:

$$O(x^k y^k) = \frac{1}{2}[(O(x^k))^2 - O(x^{2k})]. \quad (1.9)$$

Từ (1.8) và (1.9), suy ra các quỹ đạo $O(x^k y^l)$ biểu diễn được dưới dạng đa thức theo các biến $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Cuối cùng, nếu đơn thức $x^k y^l z^m$ phụ thuộc vào cả ba biến x, y, z , nghĩa là $k \neq l \neq m \neq 0$, thì đơn thức $x^k y^l z^m$ sẽ chia hết cho lũy thừa với số mũ nào đó của xyz . Vì vậy trong đa thức $O(x^k y^l z^m)$ có thể đưa lũy thừa với số mũ nào đó của $xyz = \sigma_3$ ra ngoài ngoặc, khi đó trong ngoặc chỉ là quỹ đạo phụ thuộc vào số biến ít hơn ba. Do đó, quỹ đạo $O(x^k y^l z^m)$ biểu diễn được dưới dạng đa thức của $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. $\square$

Bằng cách trên ta dễ dàng nhận được các công thức sau:

Quỹ đạo $O(x^k y^l)$ biểu diễn ở dạng đa thức theo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. $O(xy) = \sigma_2$; $O(x^2 y) = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3$; $O(x^3 y) = \sigma_1^2 \sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_3$; $O(x^2 y^2) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_3$; $O(x^4 y) = \sigma_1^3 \sigma_2 - 3\sigma_1 \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \sigma_3 + 5\sigma_2 \sigma_3$; $O(x^3 y^2) = \sigma_1 \sigma_2^2 - 2\sigma_1^2 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3$; $O(x^5 y) = \sigma_1^4 \sigma_2 - 4\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_1^3 \sigma_3 + 7\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + 2\sigma_2^3 - 3\sigma_3^2$; $O(x^4 y^2) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 - 2\sigma_1^3 \sigma_3 + 4\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 3\sigma_3^2$; $O(x^3 y^3) = \sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$;
--

Sử dụng các công thức biểu diễn của tổng nghịch đảo theo các đa thức cơ sở, dễ dàng tìm được các quỹ đạo $O(x^k y^k)$. Thật vậy, ta có

$$s_{-k} = \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} = \frac{y^k z^k + x^k z^k + x^k y^k}{x^k y^k z^k} = \frac{O(x^k y^k)}{\sigma_3^k}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} O(x^k y^k) &= \sigma_3^k s_{-k}; \\ O(x^2 y^2) &= \sigma_3^2 s_{-2} = \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_3; \\ O(x^3 y^3) &= \sigma_3^3 s_{-3} = \sigma_2^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + 3\sigma_3^2; \\ O(x^4 y^4) &= \sigma_3^4 s_{-4} = \sigma_2^4 - 4\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3 + 4\sigma_2 \sigma_3^2 + 2\sigma_1^2 \sigma_3^2; \end{aligned}$$

1.2.4 Các định lý của đa thức đối xứng ba biến

Định lý 1.9 (Theo [2]). Mọi đa thức đối xứng ba biến x, y, z đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+yz+zx$, $\sigma_3 = xyz$.

Chứng minh. Giả sử $f(x, y, z)$ là đa thức đối xứng và $ax^k y^l z^m$ là một trong các số hạng của $f(x, y, z)$. Do tính đối xứng, cùng với số hạng trên, $f(x, y, z)$ chứa quỹ đạo $O(x^k y^l z^m)$ với thừa số chung là a . Như vậy ta có

$$f(x, y, z) = a.O(x^k y^l z^m) + f_1(x, y, z), \quad (1.10)$$

trong đó $f_1(x, y, z)$ là đa thức đối xứng nào đó với ít số hạng hơn. Đối với $f_1(x, y, z)$ ta lại có công thức tương tự nhờ công thức (1.9). Theo một số hữu hạn bước nói trên, ta có thể phân tích đa thức $f(x, y, z)$ thành tổng các quỹ đạo. Theo định lý (1.8), mỗi quỹ đạo lại là một đa thức theo các đa thức đối xứng cơ sở, do đó mọi đa thức đối xứng có thể biểu diễn được ở dạng đa thức theo các đa thức đối xứng cơ sở. $\square$

Định lý 1.10 (Định lý duy nhất (Theo [2])). *Nếu các đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ và $\psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ khi $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + yz + zx, \sigma_3 = xyz$ cho ta cùng một đa thức đối xứng $P(x, y, z)$, thì chúng phải trùng nhau, nghĩa là $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \equiv \psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.*

Chứng minh. Để thuận tiện ta đặt

$$t_1 = \sigma_1, t_2 = \sigma_2, t_3 = \sigma_3; x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z.$$

$$\phi(t_1, t_2, t_3) = \varphi(t_1, t_2, t_3) - \psi(t_1, t_2, t_3).$$

Theo giả thiết ta có

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = P(x_1, x_2, x_3) - P(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

$$\forall \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \sigma_3 = x_1x_2x_3$$

Ta chứng minh ϕ là đa thức không, nghĩa là đồng nhất bằng không. Đặt $Q(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, x_1x_2x_3) = \phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Rõ ràng $Q(x_1, x_2, x_3)$ là đa thức đối xứng. Ta viết lại $\phi(t_1, t_2, t_3)$ ở dạng

$$\phi(t_1, t_2, t_3) = \phi_0(t_1, t_2) + \phi_1(t_1, t_2)t_3 + \phi_2(t_1, t_2)t_3^2 + \dots + \phi_m(t_1, t_2)t_3^m$$

và kí hiệu τ_1, τ_2 là những đa thức đối xứng cơ sở của các biến x_1, x_2 . Dễ thấy rằng

$$\sigma_k(x_1, x_2, 0) = \tau_k(x_1, x_2) \quad (k=1, 2), \quad \sigma_3(x_1, x_2, 0) = \tau_3(x_1, x_2) = 0.$$

Theo điều kiện của bài toán ta có

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \phi_0(\sigma_1, \sigma_2) + \phi_1(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_3 + \phi_2(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_3^2 + \dots + \phi_m(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_3^m = 0, \quad \forall x_1, x_2, x_3.$$

Khi đó thì

$$R(x_1, x_2) := Q(x_1, x_2, 0) = \phi_0(\tau_1, \tau_2) = 0, \quad \forall x_1, x_2.$$

Vì $R(x_1, x_2)$ là đa thức đối xứng hai biến, nên theo định lý tính duy nhất của đa thức đối xứng hai biến (1.4) suy ra ϕ_0 đồng nhất bằng không. Như vậy ta có

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \sigma_3[\phi_1(\sigma_1, \sigma_2) + \phi_2(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_3 + \dots + \phi_m(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_3^{m-1}] = 0, \quad \forall x_1, x_2, x_3.$$

vì $\sigma_3 \neq 0$, nên đa thức

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \phi_1(\sigma_1, \sigma_2) + \phi_2(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_3 + \dots + \phi_m(\sigma_1, \sigma_2)\sigma_3^{m-1} = 0, \quad \forall x_1, x_2, x_3.$$

Lập luận tương tự như trên suy ra ϕ_1 đồng nhất bằng không. Tương tự có $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_m$ là những đa thức không. Vậy ϕ là đa thức không. $\square$

Để biểu diễn một đa thức đối xứng qua các đa thức đối xứng cơ sở, một cách tổng quát, ta tiến hành theo các bước như trong chứng minh định lý (1.9). Tuy nhiên, trong trường hợp đa thức là thuần nhất, ta có thể dùng phương pháp " hệ số bất định". Cơ sở của phương pháp này là mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1 (Theo [2]). *Cho $f_m(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng thuần nhất bậc m . Khi đó $f_m(x, y, z)$ được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở theo công thức*

$$f_m(x, y, z) = \sum_{i+2j+3k=m} a_{ijk} \sigma_1^i \sigma_2^j \sigma_3^k, \quad (i, j, k \in \mathbb{N}).$$

Mệnh đề 1.1 được suy ra từ các định lý của đa thức đối xứng với $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ lần lượt có bậc là 1, 2, 3 đối với các biến x, y, z . Dưới đây là một số trường hợp riêng của mệnh đề.

$$f_1(x, y, z) = a_1 \sigma_1;$$

$$f_2(x, y, z) = a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2;$$

$$f_3(x, y, z) = a_1 \sigma_1^3 + a_2 \sigma_1 \sigma_2 + a_3 \sigma_3;$$

$$f_4(x, y, z) = a_1 \sigma_1^4 + a_2 \sigma_1^2 \sigma_2 + a_3 \sigma_2^2 + a_4 \sigma_1 \sigma_3;$$

$$f_5(x, y, z) = a_1 \sigma_1^5 + a_2 \sigma_1^3 \sigma_2 + a_3 \sigma_1 \sigma_2^2 + a_4 \sigma_1^2 \sigma_3 + a_5 \sigma_2 \sigma_3;$$

trong đó, $a_i (i = 1, 2, \dots)$ là các hằng số được xác định duy nhất (theo định lý 1.10) và để tìm các hệ số này, ta cho x, y, z nhận các giá trị cụ thể thích hợp nào đó.

Ví dụ 1.3. *Biểu diễn đa thức sau đây theo các đa thức đối xứng cơ sở*

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= O(x^4) - 2O(x^2y^2) = \\ &= (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) - 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.4. *Biểu diễn đa thức sau đây theo các đa thức đối xứng cơ sở*

$$f(x, y, z) = (x - y)^2(y - z)^2(z - x)^2.$$

Lời giải. Do $f(x, y, z)$ là đa thức thuần nhất bậc 6, nên theo mệnh đề (1.1) ta có

$$f(x, y, z) = a_1\sigma_1^6 + a_2\sigma_1^4\sigma_2 + a_3\sigma_1^2\sigma_2^2 + a_4\sigma_2^3 + a_5\sigma_1^3\sigma_3 + a_6\sigma_3^2 + a_7\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Nhận xét rằng, $f(x, y, z)$ có bậc cao nhất đối với từng biến là 4, nên $a_1 = a_2 = 0$. Để tìm các hệ số còn lại, ta cho (x, y, z) lần lượt các giá trị $(0, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 1, -2), (-1, 1, 1), (1, 1, 1)$, ta tìm được $a_3 = 1, a_4 = -4, a_5 = -4, a_6 = -27, a_7 = 18$. Vậy ta có kết quả

$$f(x, y, z) = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 27\sigma_3^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

1.2.5 Đa thức phản đối xứng

Định nghĩa 1.17 (Theo [2]). Đa thức phản đối xứng là đa thức thay đổi dấu khi thay đổi vị trí của hai biến bất kì.

Ví dụ: Các đa thức $x - y$ và $x^4y^2 - y^4x^2 + x^4y - y^4x + x^3y^2 - x^2y^3$, là các đa thức phản đối xứng hai biến, còn đa thức $(x - y)(x - z)(y - z)$ là đa thức phản đối xứng ba biến đơn giản.

Định lý 1.11 (Định lý Benzout (Theo [2])). Giả sử $f(t)$ là đa thức bậc $n \geq 1$. Khi đó số dư trong phép chia của đa thức cho $t - a$ bằng $f(a)$. Đa thức $f(t)$ chia hết cho $t - a$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$.

Chứng minh. Thật vậy, thực hiện phép chia đa thức $f(t)$ cho $t - a$, ta được

$$f(t) = g(t)(t - a) + r(t).$$

Vì $t - a$ có bậc bằng 1, nên đa thức dư $r(t)$ có bậc bằng không, nghĩa là $r(t) = r$ là hằng số. Trong đẳng thức trên cho $t = a$, ta được $r = f(a)$. Từ đó suy ra $f(t)$ chia hết cho $t - a$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$. $\square$

Định lý 1.12 (Theo [2]). Mọi đa thức phản đối xứng hai biến $f(x, y)$ đều có dạng:

$$f(x, y) = (x - y)g(x, y), \quad (1.11)$$

trong đó $g(x, y)$ là đa thức đối xứng theo các biến x, y .

Chứng minh. Ta thấy rằng $f(x, y)$ là đa thức phản đối xứng thì $f(x, x) = 0$, vì theo định nghĩa ta có

$$f(x, y) = -f(y, x).$$

Trong đẳng thức trên đặt $y = x$, thì $f(x, x) = -f(x, x)$, suy ra $f(x, x) = 0$. Ta kí hiệu $F_y(x) = f(x, y)$ là đa thức chỉ theo biến x (coi y là tham số). Theo nhận xét trên, ta có $F_y(y) = 0$. Theo Định lý Bezout, đa thức $F_y(x)$ chia hết cho $x - y$, do đó $f(x, y)$ chia hết cho $x - y$, nghĩa là có

$$f(x, y) = (x - y)g(x, y),$$

trong đó $g(x, y)$ là đa thức nào đó. Trong công thức (1.11) đổi chỗ của x và y ta có

$$f(y, x) = (y - x)g(y, x),$$

Vì theo giả thiết $f(x, y) = -f(y, x)$ và cũng vì $x - y = -(y - x)$, nên ta có:

$$f(x, y) = (x - y)g(y, x), \quad (1.12)$$

Từ (1.11) và (1.12), suy ra $g(x, y)$ là đa thức đối xứng theo các biến x, y . $\square$

Định lý 1.13 (Theo [2]). Mọi đa thức phản đối xứng ba biến $f(x, y, z)$ đều có dạng

$$f(x, y, z) = (x - y)(x - z)(y - z)g(x, y, z),$$

trong đó $g(x, y, z)$ là đa thức đối xứng theo các biến x, y, z .

Định lý (1.13) được chứng minh tương tự định lý (1.12). Trong đa thức phản đối xứng, các đa thức $x - y$ và $T = (x - y)(x - z)(y - z)$ đóng vai trò rất quan trọng và được gọi là các đa thức phản đối xứng đơn giản nhất tương ứng đối với đa thức phản đối xứng hai biến và ba biến. Đối với đa thức phản đối xứng thuần nhất, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.2 (Theo [2]). Cho $f_m(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng thuần nhất bậc m . Khi đó

$$f_3(x, y, z) = aT(x, y, z),$$

$$f_4(x, y, z) = aT(x, y, z)\sigma_1,$$

$$f_5(x, y, z) = T(x, y, z)(a\sigma_1^2 + b\sigma_2),$$

$f_6(x, y, z) = T(x, y, z)(a\sigma_1^3 + b\sigma_1\sigma_2 + c\sigma_3)$, trong đó a, b, c là các hằng số.

Định nghĩa 1.18 (Theo [2]). Bình phương của đa thức phản đối xứng đơn giản nhất gọi là biệt thức.

Như vậy, trong trường hợp hai biến, biệt thức của các biến x, y là

$$\Delta(x, y) = (x - y)^2$$

còn trong trường hợp ba biến, thì biệt thức của các biến x, y, z là

$$\Delta(x, y, z) = T^2 = (x - y)^2(x - z)^2(y - z)^2.$$

Dễ thấy rằng : $\Delta(x, y) = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$. Theo ví dụ (1.3), ta có

$$\Delta(x, y, z) = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2, \quad (1.13)$$

trong đó $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các đa thức đối xứng cơ sở.

Chương 2

Ứng dụng tính chất của đa thức đối xứng để giải một số bài toán đại số

2.1 Một số bài tập tính toán

Bài 2.1. Cho $x + \frac{1}{x} = a$. Tính $M = x^{13} + \frac{1}{x^{13}}$.

(Đề thi HSG lớp 8, tỉnh Thái Nguyên năm 1997 - 1998).

Lời giải. Sử dụng công thức Waring ta tính $s_{13} = x^{13} + \frac{1}{x^{13}}$ theo $\sigma_1 = x + \frac{1}{x} = a; \sigma_2 = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ có:

$$\begin{aligned} M = s_{13} &= 13 \cdot \sum_{m=0}^6 \frac{(-1)^m (13-m-1)!}{m! (13-2m)!} \sigma_1^{13-2m} \sigma_2^m = \\ &= \sigma_1^{13} - 13\sigma_1^{11}\sigma_2 + 65\sigma_1^9\sigma_2^2 - 156\sigma_1^7\sigma_2^3 + 182\sigma_1^5\sigma_2^4 - 91\sigma_1^3\sigma_2^5 + 13\sigma_1\sigma_2^6 = \\ &= a^{13} - 13a^{11} + 65a^9 - 156a^7 + 182a^5 - 91a^3 + 13a. \end{aligned}$$

Bài 2.2. Tìm hai chữ số tận cùng của phần nguyên số $(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{2010}$.

Lời giải. Đặt

$$\begin{aligned} a &= (\sqrt{29} + \sqrt{21})^2 = 50 + 2\sqrt{609}, \\ b &= (\sqrt{29} - \sqrt{21})^2 = 50 - 2\sqrt{609}, \\ s_n &= a^n + b^n. \end{aligned}$$

Ta có $s_1 = \sigma_1 = 100, \sigma_2 = ab = 64$. Theo công thức Newton thì

$$s_{n+2} = \sigma_1 s_{n+1} - \sigma_2 s_n$$

hay

$$s_{n+2} = 100s_{n+1} - 64s_n$$

Do $s_1 = 100$ nên s_{n+2} chia hết cho 100, với n là 3, 5, 7, ... (n là số lẻ). Suy ra $s_{1005} = (\sqrt{29} + \sqrt{21})^{2010} + (\sqrt{29} - \sqrt{21})^{2010}$ chia hết cho 100. Do $0 < (\sqrt{29} - \sqrt{21})^{2010} < 1$, nên 2 chữ số tận cùng của phần nguyên của số $(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{2010}$ là 99.

Bài 2.3. Cho dãy số $U_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots, n$)

1. Tính 5 số hạng đầu của dãy.

2. Lập công thức tính U_{n+2} theo U_{n+1} và U_n .

Lời giải. Đặt $a = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$; $b = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$; $s_n = a^n + b^n$.

Ta có $s_1 = \sigma_1 = a + b = 3$; $\sigma_2 = a.b = 1$; $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

Áp dụng công thức Newton $s_{n+2} = \sigma_1 s_{n+1} - \sigma_2 s_n$. Ta có

$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = 3.7 - 1.3 = 18$$

$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = 3.18 - 1.17 = 37$$

$$s_5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 = 3.37 - 1.18 = 93$$

Mà $U_n = s_n - 2$ nên $U_1 = 1$; $U_2 = 5$; $U_3 = 16$; $U_4 = 35$; $U_5 = 91$. Do $s_n = U_n + 2$ nên bằng cách thay vào công thức Newton $s_{n+2} = \sigma_1 s_{n+1} - \sigma_2 s_n$ ta có

$$U_{n+2} + 2 = 3(U_{n+1} + 2) - 1.(U_n + 2)$$

hay

$$U_{n+2} = 3U_{n+1} - U_n + 2$$

Bài 2.4. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$. Tính $a^{2008} + b^{2008}$.

Lời giải. Đặt $s_1 = \sigma_1 = a + b = 3$; $\sigma_2 = a.b$; $s_n = a^n + b^n$. Sử dụng công thức Newton ta có $s_{102} = \sigma_1.s_{101} - \sigma_2.s_{100}$ mà $s_{102} = s_{101} = s_{100}$ nên $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$ hay $a + b - ab - 1 = 0 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow a = b = 1$ do đó $s_{2008} = a^{2008} + b^{2008} = 2$.

Bài 2.5. Cho x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$. Tính $x_1^7 + x_2^7$.

Lời giải. Đặt $s_n = x_1^n + x_2^n$, ta có $s_1 = \sigma_1 = 2$; $\sigma_2 = -2$; $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 8$, nên theo công thức Newton $s_{n+2} = \sigma_1 s_{n+1} - \sigma_2 s_n$ ta có $s_3 = 20$; $s_4 = 56$

Từ hệ quả của công thức Newton $s_{m+n} = s_m s_n - \sigma_2^n s_{m-n}$ với $m > n$ có $s_7 = s_4 s_3 - \sigma_2^3 s_1 = 56.20 - (-2)^3.2 = 1136$.

Bài 2.6 (Việt Nam, 1975 (Theo [2])). Không giải phương trình $x^3 - x + 1 = 0$, hãy tính tổng các lũy thừa bậc tám của các nghiệm.

Lời giải. Gọi x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của phương trình đã cho. Theo công thức Viète, ta có $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0, \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -1, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -1$. Sử dụng công thức Waring, ta có

$$x_1^8 + x_2^8 + x_3^8 = s_8 = s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 + 8\sigma_1^5\sigma_3 - 32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_1^2\sigma_3^2 + 24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2 = 10.$$

Bài 2.7. Tìm đa thức bậc 7 có hệ số nguyên nhận $x = \sqrt[7]{\frac{3}{5}} + \sqrt[7]{\frac{5}{3}}$ làm nghiệm.

Lời giải. Đặt $a = \sqrt[7]{\frac{3}{5}}; b = \sqrt[7]{\frac{5}{3}}$.

Đặt $s_n = a^n + b^n$, ta có $s_1 = \sigma_1 = a + b = x, \sigma_2 = ab = 1$.

Theo công thức Waring có

$$\begin{aligned} s_7 &= \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 \\ &\Rightarrow \frac{3}{5} + \frac{5}{3} = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x \\ &\Leftrightarrow 15x^7 - 105x^5 + 210x^3 - 105x - 34 = 0. \end{aligned}$$

Vậy đa thức bậc 7 cần tìm là $15x^7 - 105x^5 + 210x^3 - 105x - 34$.

Bài 2.8. Cho x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$. Chứng minh rằng $s_n = x_1^n + x_2^n, n \in \mathbb{N}$ là số nguyên không chia hết cho 5.

Lời giải.

Ta chứng minh $s_n \in \mathbb{Z}$ bằng phương pháp quy nạp.

Với $n=0$ có $s_0 = 2 \in \mathbb{Z}$

Với $n=1$ có $s_1 = 6 \in \mathbb{Z}$

Giả sử $s_k, s_{k+1} \in \mathbb{Z}, (k \in \mathbb{N})$ ta cần chứng minh $s_{k+2} \in \mathbb{Z}$.

Thật vậy, do $s_1 = \sigma_1 = 6, \sigma_2 = 1$ mà $s_{k+2} = \sigma_1 s_{k+1} - \sigma_2 s_k$

hay $s_{k+2} = 6s_{k+1} - s_k$. Vậy $s_{k+2} \in \mathbb{Z}$.

Từ kết quả $s_{k+2} = 6s_{k+1} - s_k$ mà

$$s_{k+1} = 6s_k - s_{k-1}$$

nên

$$s_{k+2} = 6(6s_k - s_{k-1}) - s_k = 35s_k - 5s_{k-1} - s_{k-1},$$

do đó s_{k+2} chia hết cho 5 khi và chỉ khi s_{k-1} chia hết cho 5 mà $s_0 = 2; s_1 = 6; s_2 = 34$ không chia hết cho 5 nên s_n không chia hết cho 5.

2.2 Phân tích đa thức thành nhân tử

Luận văn trình bày hai phương pháp phân tích đa thức đối xứng thành nhân tử. Phương pháp thứ nhất ta biểu diễn đa thức đã cho theo các đa thức đối xứng cơ sở σ_1, σ_2 . Phương pháp thứ hai là phương pháp hệ số bất định.

Các Bài tập trong mục này được trích dẫn từ [5].

Bài 2.9. *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$f(x, y) = 2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4$$

Lời giải. Ta có

$$f(x, y) = 2(x^4 + y^4) + 7xy(x^2 + y^2) + 9x^2y^2 = 2s_4 + 7\sigma_1s_2 + 9\sigma_2^2$$

Thay $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$ vào biểu thức trên ta được

$$f(x, y) = 2\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2$$

Đa thức trên có bậc hai đối với σ_2 và có các nghiệm là: $\sigma_2 = -2\sigma_1^2, \sigma_2 = \sigma_1^2$, do đó

$$f(x, y) = (2\sigma_1^2 - \sigma_2)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = (x^2 - xy + y^2)(2x^2 + 3xy + y^2).$$

Bài 2.10. *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$f(x, y) = 3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4.$$

Lời giải. Ta có

$$f(x, y) = 3(x^4 + y^4) - 8xy(x^2 + y^2) + 14x^2y^2 = 3s_4 - 8\sigma_2s_2 + 14\sigma_2^2$$

Thay $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$ vào biểu thức trên ta được

$$f(x, y) = 3\sigma_1^4 - 20\sigma_1^2\sigma_2 + 36\sigma_2^2$$

Đây là một đa thức bậc hai theo σ_2 và không có nghiệm (nghiệm thực). Vì vậy ta không thể phân tích đa thức thành tích hai nhị thức theo σ_2 , ta vận dụng phương pháp hệ số bất định thử biểu diễn đa thức đã cho ở dạng

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4 \\ &= (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Đẳng thức (2.1) thỏa mãn với mọi x, y , nên ta sẽ tìm các hệ số A, B, C bằng phương pháp hệ số bất định như sau:

Với $x=y=1$, ta có

$$4 = (A + B + C)^2$$

suy ra

$$A + B + C = \pm 2$$

Nhận xét rằng các hệ số A, B, C được xác định chính xác đến dấu của chúng, vì nếu thay đổi dấu của tất cả các số này thành ngược lại thì đẳng thức (2.1) không thay đổi. Vì vậy, không làm mất tính tổng quát, ta có

$$A + B + C = 2$$

Tiếp theo, với $x = 1, y = -1$, ta có

$$36 = (A - B + C)^2 \text{ suy ra } A + B + C = \pm 6.$$

Tiếp theo, với $x = 0, y = 1$, ta có $AC = 3$

Vậy để xác định các hệ số A, B, C ta giải các hệ phương trình

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ A - B + C = 6 \\ AC = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} A + B + C = 2 \\ A - B + C = -6 \\ AC = 3 \end{cases}$$

Hệ phương trình thứ nhất cho ta nghiệm $A = 1, B = -2, C = 3$. Hệ thứ hai vô nghiệm (nghiệm thực). Vậy ta có kết quả

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3x^4 - 8x^3y + 14x^2y^2 - 8xy^3 + 3y^4 = \\ &= (x^2 - 2xy + 3y^2)(3x^2 - 2xy + y^2). \end{aligned}$$

Tiếp sau đây, ta đặt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các đa thức đối xứng cơ sở của bộ ba số x, y, z hoặc a, b, c . Chẳng hạn, với bộ ba số x, y, z ta có $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$.

Bài 2.11. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$f(x, y, z) = (x + y)(y + z)(z + x) + xyz$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (\sigma_1 - z)(\sigma_1 - x)(\sigma_1 - y) + \sigma_3 = \\ &= \sigma_1^3 - \sigma_1^2(x + y + z) + \sigma_1(xy + yz + zx) - \sigma_3 + \sigma_3 = \\ &= \sigma_1^3 - \sigma_1^3 + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 = \\ &= (x + y + z)(xy + yz + zx). \end{aligned}$$

Bài 2.12. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$f(a, b, c) = (a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \sigma_1^3 - (\sigma_1 - 2a)^3 - (\sigma_1 - 2b)^3 - (\sigma_1 - 2c)^3 = \\ &= -2\sigma_1^3 + 6\sigma_1^2(a + b + c) - 12\sigma_1(a^2 + b^2 + c^2) + 8(a^3 + b^3 + c^3) = \\ &= -2\sigma_1^3 + 6\sigma_1^3 - 12\sigma_1 s_2 + 8s_3 = \\ &= -2\sigma_1^3 + 6\sigma_1^3 - 12\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 8(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) = \\ &= 24\sigma_3 = 24abc \end{aligned}$$

Vậy

$$f(a, b, c) = (a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc.$$

Bài 2.13. Phân tích đa thức sau thành nhân tử

$$f(x, y, z) = 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 2O(x^2y^2) - s_4 = 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) = \\ &= -\sigma_1^4 + 4\sigma_1^2\sigma_2 - 8\sigma_1\sigma_3 = \sigma_1(-\sigma_1^3 + 4\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_3) \end{aligned}$$

Ta thấy, đa thức trên là đa thức bậc bốn đối với σ_1 và chia hết cho σ_1 . Hơn nữa, đa thức đã cho là hàm chẵn đối với x, y, z nên khi ta thay x bởi $-x$ (hoặc y bởi $-y$, hoặc z bởi $-z$) thì đa thức không thay đổi, nhưng $x+y+z$ trở thành $-x+y+z$ (hoặc $x-y+z$ hoặc $x+y-z$), do đó đa thức cũng chia hết cho $-x+y+z$, $x-y+z$, $x+y-z$. Cũng vì đa thức đã cho bậc bốn, nên ta có:

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z).P$$

trong đó P là hằng số nào đó.

Hằng số P được xác định bằng phương pháp hệ số bất định, bằng cách cho $x = y = z = 1$, ta có $3 = 3P$ hay $P=1$.

Vậy ta có kết quả:

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z).$$

2.3 Phương trình đối xứng và phương trình hồi quy

Đa thức đối xứng là công cụ hữu hiệu để giải các phương trình đại số bậc cao, đặc biệt là phương trình hệ số đối xứng và phương trình hồi quy.

Định nghĩa 2.1 (Theo [2]). *Đa thức*

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n; (a_0 \neq 0)$$

được gọi là đa thức đối xứng, nếu các hệ số cách đều hai đầu bằng nhau, nghĩa là

$$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \dots$$

Phương trình của đa thức đối xứng được gọi là phương trình đối xứng.

Chẳng hạn, các đa thức sau đây là đa thức hệ số đối xứng :

$$9z^6 - 18z^5 - 73z^4 + 164z^3 - 73z^2 - 18z + 9,$$

$$z^8 + 4z^6 - 10z^4 + 4z^2 + 1,$$

$$10z^6 + z^5 - 47z^4 - 47z^3 + z^2 + 10z.$$

Định lý 2.1 (Theo [2]). *Đa thức $f(z)$ bậc n là đa thức đối xứng khi và chỉ khi*

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z), z \neq 0. \quad (2.2)$$

Chứng minh. Giả sử $f(z)$ có dạng

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n. \quad (2.3)$$

Với $z \neq 0$, trong (2.3) thay z bởi $\frac{1}{z}$, ta được

$$z^n f\left(\frac{1}{z}\right) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0. \quad (2.4)$$

So sánh (2.3) và (2.4) ta thấy hệ thức (2.2) xảy ra khi và chỉ khi

$$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_2 = a_{n-2}, \dots$$

nghĩa là $f(z)$ là đa thức đối xứng. Định lý được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 2.2 (Theo [2]). *Các đa thức*

$$\begin{aligned} & a_0 z^{2n} + a_1 z^{2n-1} + \dots + a_{n-1} z^{n+1} + a_n z^n + \lambda a_{n-1} z^{n-1} + \dots + \lambda^{n-1} a_1 z + \lambda^n a_0, \\ & a_0 z^{2n+1} + a_1 z^{2n} + \dots + a_{n-1} z^{n+2} + a_n z^{n+1} + \lambda a_n z^n + \lambda^2 a_{n-1} z^{n-1} + \dots + \\ & \lambda^{2n-1} a_1 z + \lambda^{2n+1} a_0, \end{aligned}$$

trong đó $a_0 \neq 0$ và $\lambda \neq 0$ được gọi là các đa thức hồi quy. Phương trình của đa thức hồi quy được gọi là phương trình hồi quy.

Khi $\lambda = 1$ thì đa thức hồi quy trở thành đa thức hệ số đối xứng. Ví dụ, phương trình

$$2x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 48x - 64 = 0$$

là phương trình hồi quy $\lambda = -2$, còn phương trình

$$4x^6 + 5x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 9x^2 + 45x + 108 = 0$$

là phương trình hồi quy $\lambda = 3$.

Định lý 2.2 (Theo [2]). Mọi đa thức hồi quy bậc chẵn $2k$

$$f(z) = a_0 z^{2k} + a_1 z^{2k-1} + \dots + a_{k-1} z^{k+1} + a_k z^k + \lambda a_{k-1} z^{k-1} + \dots + \lambda^{k-1} a_1 z + \lambda^k a_0,$$

đều biểu diễn được ở dạng $f(z) = z^k h(\sigma)$, trong đó $\sigma = z + \frac{\lambda}{z}$, $h(\sigma)$ là một đa thức nào đó theo biến σ và có bậc k .

Mọi đa thức hồi quy bậc lẻ $f(z)$ đều có dạng $f(z) = (z + \lambda)g(z)$, trong đó $g(z)$ là đa thức hồi quy bậc chẵn.

Chứng minh. Trước hết xét đa thức hệ số đối xứng $f(z)$ có bậc $2k$. Với $z \neq 0$ ta biến đổi $f(z)$ như sau:

$$f(z) = z^k \left[a_0 \left(z^k + \frac{\lambda^k}{z^k} \right) + a_1 \left(z^{k-1} + \frac{\lambda^{k-1}}{z^{k-1}} \right) + \dots + a_{k-1} \left(z + \frac{\lambda}{z} \right) + a_k \right].$$

Đặt $\sigma = z + \frac{\lambda}{z}$, $s_k = z^k + \frac{\lambda^k}{z^k}$. Ta sẽ chứng tỏ rằng s_k là đa thức bậc k theo σ . Thật vậy, nếu đặt $x = z$, $y = \frac{\lambda}{z}$ thì ta có $\sigma = x + y = \sigma_1$, $\lambda = xy = \sigma_2$, $s_k = x^k + y^k$. Do đó theo Định lý 1.1, các tổng lũy thừa s_k là các đa thức bậc k theo các biến σ_1, σ_2 , hay là theo các biến σ và λ , nghĩa là chỉ theo biến σ .

Lại xét đa thức đối xứng bậc lẻ $2k+1$:

$$f(z) = a_0 z^{2k+1} + a_1 z^{2k} + \dots + a_{k-1} z^{k+2} + a_k z^{k+1} + \lambda a_k z^k + \lambda^2 a_{k-1} z^{k-1} + \dots + \lambda^{2k-1} a_1 z + \lambda^{2k+1} a_0,$$

Với $z \neq 0$ ta biến đổi $f(z)$ như sau:

$$f(z) = a_0 (z^{2k+1} + \lambda^{2k+1}) + a_1 z (z^{2k-1} + \lambda^{2k-1}) + \dots + a_k z^k (z + \lambda).$$

Sử dụng hằng đẳng thức

$$z^{2m+1} + \lambda^{2m+1} = (z + \lambda)(z^{2m} - z^{2m-1}\lambda + \dots + z^2\lambda^{2m-2} - z\lambda^{2m-1} + \lambda^{2m}),$$

ta có

$$a_0(z^{2k+1} + \lambda^{2k+1}) = a_0(z + \lambda)(z^{2k} - z^{2m-1}\lambda + \dots + z^2\lambda^{2k-2} - z\lambda^{2k-1} + \lambda^{2k}),$$

$$a_1z(z^{2k-1} + \lambda^{2k-1}) = a_1(z + \lambda)(z^{2k-1} - z^{2m-2}\lambda + \dots - z^2\lambda^{2k-3} + z\lambda^{2k-2},$$

.....

$$a_kz^k(z + \lambda) = a_k(z + \lambda)z^k.$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên và đưa ra ngoài dấu ngoặc nhân tử chung $z + \lambda$, ta được

$$f(z) = (z + \lambda)g(z),$$

trong đó $g(z)$ là tổng của các đa thức

$$a_0(z^{2k} - z^{2m-1}\lambda + \dots + z^2\lambda^{2k-2} - z\lambda^{2k-1} + \lambda^{2k}),$$

$$a_1(z^{2k-1} - z^{2m-2}\lambda + \dots - z^2\lambda^{2k-3} + z\lambda^{2k-2},$$

.....

$$a_kz^k.$$

Dễ dàng thấy $g(z)$ là đa thức hồi quy bậc $2k$. Định lý được chứng minh. $\square$

Bài 2.14 (Theo [5]). *Giải phương trình*

$$9z^6 - 18z^5 - 73z^4 + 164z^3 - 73z^2 - 18z + 9 = 0.$$

Lời giải. Phương trình đã cho là phương trình đối xứng bậc 6. Vì $z = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho z^3 và biến đổi phương trình này về dạng

$$9(z^3 + \frac{1}{z^3}) - 18(z^2 + \frac{1}{z^2}) - 73(z + \frac{1}{z}) + 164 = 0$$

Sử dụng các công thức

$$z + \frac{1}{z} = \sigma, z^2 + \frac{1}{z^2} = \sigma^2 - 2, z^3 + \frac{1}{z^3} = \sigma^3 - 3\sigma$$

ta đưa được phương trình trên về dạng

$$9\sigma^3 - 18\sigma^2 - 100\sigma + 200 = 0.$$

Nghiệm của phương trình này là

$$\sigma = 2, \sigma = -\frac{10}{3}, \sigma = \frac{10}{3}.$$

Do đó, để tìm nghiệm của phương trình đã cho, ta có các phương trình

$$z + \frac{1}{z} = 2, z + \frac{1}{z} = -\frac{10}{3}, z + \frac{1}{z} = \frac{10}{3}.$$

Từ các phương trình trên ta tìm được các giá trị của x là nghiệm của phương trình là:

$$z = 1, z = \pm \frac{1}{3}, z = \pm 3.$$

Bài 2.15 (Theo [5]). Giải phương trình

$$2x^{11} + 7x^{10} + 15x^9 + 14x^8 - 16x^7 - 22x^6 - 22x^5 - 16x^4 + 14x^3 + 15x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Lời giải. Đây là phương trình đối xứng bậc lẻ. Theo Định lý 2.2, phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(x+1)(2x^{10} + 5x^9 + 10x^8 + 4x^7 - 20x^6 - 2x^5 - 20x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 5x + 2) = 0$$

Như vậy, phương trình đã cho được phân rã thành hai phương trình

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \\ 2x^{10} + 5x^9 + 10x^8 + 4x^7 - 20x^6 - 2x^5 - 20x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 5x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Phương trình thứ nhất có nghiệm $x = -1$.

Phương trình thứ hai là phương trình đối xứng bậc 10. Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho x^5 và biến đổi phương trình này về dạng

$$2\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right) + 5\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 10\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 20\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

Sử dụng các công thức

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= \sigma, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \sigma^2 - 2, \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = \sigma^3 - 3\sigma, \quad x^4 + \frac{1}{x^4} = \sigma^4 - 4\sigma^2 + 2, \\ x^5 + \frac{1}{x^5} &= \sigma^5 - 5\sigma^3 + 5\sigma, \end{aligned}$$

ta đưa được phương trình trên về dạng

$$2\sigma^5 + 5\sigma^4 - 16\sigma^2 - 40\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma(2\sigma + 5)(\sigma^3 - 8) = 0.$$

Nghiệm của phương trình này là

$$\sigma = 0, \sigma = -\frac{5}{2}, \sigma = 2.$$

Do đó, để tìm nghiệm của phương trình đã cho, ta có các phương trình

$$x + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, x + \frac{1}{x} = 2.$$

Từ các phương trình trên ta tìm được các giá trị của x là nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \pm 1, x = -\frac{1}{2}, x = -2.$$

Bài 2.16 (Theo [2]). Giải phương trình

$$2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 66x^3 + 80x^2 - 72x + 32 = 0.$$

Lời giải. Đây là phương trình bậc 8 truy hồi với $\lambda = 2$ vì có thể viết lại phương trình ở dạng

$$2x^8 - 9x^7 + 20x^6 - 33x^5 + 46x^4 - 33.2x^3 + 20.2^2x^2 - 9.2^3x + 2.2^4 = 0.$$

Rõ ràng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Chia hai vế của phương trình cho x^4 và biến đổi về dạng

$$2\left(x^4 + \frac{16}{x^4}\right) - 9\left(x^3 + \frac{8}{x^3}\right) + 20\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 33\left(x + \frac{2}{x}\right) + 46 = 0.$$

Đặt $\sigma = x + \frac{\lambda}{x} = x + \frac{2}{x}$. Khi đó

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = \sigma^2 - 4, x^3 + \frac{8}{x^3} = \sigma^3 - 6\sigma, x^4 + \frac{16}{x^4} = \sigma^4 - 8\sigma^2 + 8.$$

Nên phương trình cuối có dạng

$$2\sigma^4 - 9\sigma^3 + 4\sigma^2 + 21\sigma - 18 = 0.$$

Phương trình này có các nghiệm là

$$\sigma = 1, \sigma = 2, \sigma = 3, \sigma = -\frac{3}{2}, .$$

Như vậy phương trình đã cho tương đương với tổ hợp các phương trình:

$$x + \frac{2}{x} = 1, x + \frac{2}{x} = 2, x + \frac{2}{x} = 3, x + \frac{2}{x} = -\frac{3}{2}, .$$

Giải các phương trình trên ta tìm được nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = 1, x = 2.$$

Bài 2.17 (IMO, 1982, Hungari đề nghị (Theo [2])). *Hãy xác định tất cả các tham số a sao cho phương trình*

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0.$$

có bốn nghiệm thực lập thành một cấp số nhân.

Lời giải. Dễ thấy rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Với $x \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$16\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2a + 17 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$. Khi đó $|t| \geq 2$ và phương trình trên trở thành

$$16t^2 - at + 2a - 15 = 0.$$

Trước hết ta tìm điều kiện cần của tham số a . Giả sử phương trình đã cho có 4 nghiệm thực lập thành một cấp số nhân. Khi đó phương trình cuối cùng phải có hai nghiệm t_1, t_2 , trong đó t_1 cho hai nghiệm $x_1, \frac{1}{x_1}$, còn nghiệm t_2 cho hai nghiệm $x_2, \frac{1}{x_2}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|x_1| \geq 1, |x_2| \geq 1$. Khi đó có cấp số nhân $x_1, x_2, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}$. Theo tính chất của cấp số nhân ta có

$$\frac{x_1}{x_2} = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2^3 \Rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} = x_2^3 + \frac{1}{x_2^3} \Rightarrow t_1 = t_2^3 - 3t_2.$$

Mặt khác, theo Định lý Viète ta có

$$t_1 + t_2 = \frac{a}{16}, t_1 t_2 = \frac{2a - 15}{16}.$$

Từ đó ta tìm được $a=170$. Với $a=170$ phương trình đã cho trở thành

$$16x^4 - 170x^3 + 357x^2 - 170x + 16 = 0.$$

Phương trình này có bốn nghiệm thực lập thành một cấp số nhân là :
 $8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}.$

Vậy giá trị của tham số a là $a=170$.

2.4 Giải hệ phương trình

2.4.1 Hệ phương trình đối xứng hai ẩn và ứng dụng

Bài 2.18 (Theo [5]). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \frac{31}{7} \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

Lời giải. Với điều kiện $x, y \neq 0$. Đặt $x + y = \sigma_1, xy = \sigma_2$. Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \quad x^3 + y^3 = s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2, \\ x^5 + y^5 &= s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 \end{aligned}$$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} 7(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) = 23(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2), \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 3. \end{cases}$$

Từ hệ phương trình này, thực hiện phép thế và giải phương trình ta tìm được

$$\begin{cases} \sigma_1 = \pm 1 \\ \sigma_2 = -2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \sigma_1 = \pm \frac{6}{\sqrt{7}} \\ \sigma_2 = \frac{15}{7} \end{cases}$$

Khi đó x, y là các nghiệm của các hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \pm 1 \\ xy = -2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x + y = \pm \frac{6}{\sqrt{7}} \\ xy = \frac{15}{7} \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình này ta có các nghiệm của hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1, \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = 1, \end{cases} ; \begin{cases} x_4 = 1, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

Bài 2.19 (Theo [5]). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = a^4 \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $x + y = \sigma_1, xy = \sigma_2$.

Ta có

$$x^4 + y^4 = s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = a^4. \end{cases}$$

Từ hệ phương trình này, thực hiện phép thế và giải phương trình ta tìm được

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = 0; \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = 2a^2. \end{cases}$$

Khi đó x, y là các nghiệm của các hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + y = a \\ xy = 2a^2 \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình này ta có các nghiệm của hệ đã cho là

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ y_1 = 0, \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = a. \end{cases}$$

Bài 2.20 (Theo [5]). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 4 \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình đã cho không phải là hệ đối xứng, tuy nhiên bằng cách đặt $\frac{x}{a} = u, \frac{y}{b} = v$ ta có hệ đối xứng

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 4 \end{cases}$$

Đặt $u + v = \sigma_1, uv = \sigma_2$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u.v = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

Bài 2.21 (Theo [4]). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^5 - y^5 = 3093 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình đã cho không phải là hệ đối xứng, tuy nhiên bằng cách đặt $y = -z$ ta có hệ đối xứng

$$\begin{cases} x^5 + z^5 = 3093 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Đặt $x + z = \sigma_1, xz = \sigma_2$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 3093 \\ \sigma_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = -10 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = 19 \end{cases}$$

Từ đó ta có x, y là nghiệm của các hệ phương trình

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ xz = -10 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + z = 3 \\ xz = 19 \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình trên ta có

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ z_1 = -2 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = -2 \\ z_2 = 5. \end{cases}$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -5. \end{cases}$$

Bài 2.22 (Theo [3]). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt[4]{y^3 - 1} + \sqrt{x} = 3 \\ x^2 + y^3 = 82. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x} = u, \sqrt[4]{y^3 - 1} = v$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^4 + (v^4 + 1) = 82 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta có

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ v_1 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = 3. \end{cases}$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = \sqrt[3]{83}. \end{cases}$$

Bài 2.23 (Theo [3]). *Giải phương trình*

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = 1$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[5]{\frac{1}{2} + x} = u, \sqrt[5]{\frac{1}{2} - x} = v$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^5 + v^5 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, tìm được $\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 0; \end{cases} \begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = 1. \end{cases}$

Từ kết quả trên và $u^5 = \frac{1}{2} + x$ tìm được các nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$.

Bài 2.24 (Theo [3]). *Giải phương trình*

$$x + \sqrt[2]{17 - x^2} + x\sqrt[2]{17 - x^2} = 9$$

Lời giải. Đặt $\sqrt[2]{17 - x^2} = y$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + y + xy = 9 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, tìm được $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1. \end{cases}$

Từ kết quả trên ta tìm được các nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 1, x_2 = 4$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 1, x_2 = 4$.

Bài 2.25 (Theo [4]). *Giải phương trình*

$$x \cdot \frac{19 - x}{x + 1} \cdot \left(x + \frac{19 - x}{x + 1}\right) = 84.$$

Lời giải. Đặt $\frac{19 - x}{x + 1} = y$ thì $19 - x = xy + y$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} x + y + xy = 19 \\ xy(x + y) = 84 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, tìm được

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 3. \end{cases} \begin{cases} x_3 = 6 + \sqrt{29}, \\ y_3 = 6 - \sqrt{29}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = 6 - \sqrt{29} \\ y_4 = 6 + \sqrt{29}. \end{cases}$$

Từ kết quả trên ta tìm được các nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6 + \sqrt{29}, x_4 = 6 - \sqrt{29}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 6 + \sqrt{29}, x_4 = 6 - \sqrt{29}.$$

Bài 2.26 (Theo [5]). Giải phương trình

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}.$$

Lời giải. Với điều kiện $|x| > 1$, đặt $\frac{1}{x} = u, \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = v$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 1 \\ \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{35}{12} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, tìm được

$$\begin{cases} u_1 = \frac{4}{5}, \\ y_1 = \frac{3}{5}; \end{cases} \begin{cases} u_2 = \frac{3}{5} \\ v_2 = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Từ kết quả trên ta tìm được các nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{4}{5}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{4}{5}$.

2.4.2 Hệ phương trình đối xứng ba ẩn

Giả sử $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ là các đa thức đối xứng. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} P(x, y, z) = 0 \\ Q(x, y, z) = 0 \\ R(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Bằng cách đặt

$$x + y + z = \sigma_1, xy + yz + zx = \sigma_2, xyz = \sigma_3,.$$

trên cơ sở các định lý 1.9, 1.10 ta đưa hệ 2.5 về dạng

$$\begin{cases} p(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \\ q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \\ r(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Hệ phương trình (2.6) thường đơn giản hơn hệ (2.5) và có thể dễ dàng tìm được nghiệm $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Sau khi tìm được các giá trị của $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, cần phải tìm các giá trị của các ẩn số x, y, z . Điều này dễ dàng thực hiện được nhờ định lý sau đây

Định lý 2.3 (Theo [2]). *Giả sử $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các số thực nào đó. Khi đó phương trình bậc ba*

$$u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = 0 \quad (2.7)$$

và hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = \sigma_1, \\ xy + xz + yz = \sigma_2, \\ xyz = \sigma_3. \end{cases} \quad (2.8)$$

liên hệ với nhau như sau: nếu u_1, u_2, u_3 là các nghiệm của phương trình (2.7), thì hệ (2.8) có các nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = u_1, \\ y_1 = u_2, \\ z_1 = u_3; \end{cases} \begin{cases} x_2 = u_1, \\ y_2 = u_3, \\ z_2 = u_2; \end{cases} \begin{cases} x_3 = u_2, \\ y_3 = u_1, \\ z_3 = u_3; \end{cases} \\ \begin{cases} x_4 = u_2, \\ y_4 = u_3, \\ z_4 = u_1; \end{cases} \begin{cases} x_5 = u_3, \\ y_5 = u_1, \\ z_5 = u_2; \end{cases} \begin{cases} x_6 = u_3, \\ y_6 = u_2, \\ z_6 = u_1. \end{cases}$$

và ngoài ra không còn các nghiệm nào khác. Ngược lại, nếu $x=a, y=b, z=c$ là nghiệm của hệ (2.8) thì các số a, b, c là nghiệm của phương trình (2.7).

Chứng minh. Giả sử u_1, u_2, u_3 là các nghiệm của phương trình (2.7). Khi đó ta có đồng nhất thức

$$u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3).$$

Từ đó ta có các hệ thức Viète:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = \sigma_1, \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3 = \sigma_2, \\ u_1 u_2 u_3 = \sigma_3. \end{cases}$$

Suy ra u_1, u_2, u_3 là nghiệm của hệ (2.8). Ngoài ra còn năm nghiệm nữa nhận được bằng cách hoán vị các giá trị của các ẩn số. Vấn đề hệ (2.8) không còn nghiệm nào khác được chứng tỏ như sau

Giả sử $x=a, y=b, z=c$ là nghiệm của hệ (2.8), nghĩa là

$$\begin{cases} a + b + c = \sigma_1, \\ ab + bc + ca = \sigma_2, \\ abc = \sigma_3. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = u^3 - (a + b + c)u^2 + (ab + bc + ca)u - abc = (u - a)(u - b)(u - c).$$

Điều đó chứng tỏ rằng các số a, b, c là nghiệm của phương trình bậc ba (2.7). Định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 2.4 (Theo [2]). *Giả sử $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các số thực đã cho. Để các số x, y, z xác định bởi hệ phương trình (2.8) là các số thực, điều kiện cần và đủ là*

$$\Delta = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3 \geq 0. \quad (2.9)$$

Ngoài ra, để các số x, y, z là không âm thì

$$\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \sigma_3 \geq 0.$$

Chứng minh. Giả sử x, y, z là nghiệm của hệ (2.8). Khi đó theo Định lý (2.3) x, y, z là các nghiệm của phương trình (2.7). Phương trình (2.7) có nghiệm thực khi và chỉ khi biệt thức của nó không âm, nghĩa là (2.9) được thỏa mãn. Ngoài ra, nếu các số x, y, z không âm, thì hiển nhiên $\sigma_i \geq 0$ ($i=1,2,3$). Ngược lại, nếu $\sigma_i \geq 0$ ($i=1,2,3$) và (2.9) được thỏa mãn, thì phương trình (2.7) không thể có nghiệm âm. Thật vậy, trong (2.7) thay $u=-v$ ta có phương trình

$$v^3 + \sigma_1 v^2 + \sigma_2 v + \sigma_3 = 0 \quad (2.10)$$

Vì $\sigma_i \geq 0$ ($i=1,2,3$), nên phương trình (2.10) không thể có nghiệm dương, do đó phương trình (2.7) không thể có nghiệm âm. Từ đó suy ra x, y, z là các số không âm. Định lý được chứng minh. $\square$

Bài 2.27 (Theo [5]). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = \frac{73}{8}, \\ xy + yz + zx = x + y + z, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $x + y + z = \sigma_1, xy + yz + zx = \sigma_2, xyz = \sigma_3$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \frac{73}{8}, \\ \sigma_2 = \sigma_1, \\ \sigma_3 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{7}{2}, \sigma_3 = 1$. Theo định lý (2.3), ta có x, y, z là nghiệm của phương trình

$$u^3 - \frac{7}{2}u^2 + \frac{7}{2}u - 1 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u^2 - \frac{5}{2}u + 1) = 0$$

Nghiệm của phương trình này là $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = \frac{1}{2}$. Từ đó suy ra nghiệm của hệ đã cho là các bộ (x, y, z) :

$$(1, 2, \frac{1}{2}), (2, 1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2}, 2), (\frac{1}{2}, 1, 2), (\frac{1}{2}, 2, 1).$$

Bài 2.28 (Theo [5]). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{13}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{3}, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $x + y + z = \sigma_1, xy + yz + zx = \sigma_2, xyz = \sigma_3$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{13}{3}, \\ \sigma_2 = \frac{13}{3}, \\ \sigma_3 = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{13}{3}, \sigma_3 = 1$. Theo định lý (2.3), ta có x, y, z là nghiệm của phương trình

$$u^3 - \frac{13}{3}u^2 + \frac{13}{3}u - 1 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(u^2 - \frac{10}{3}u + 1) = 0$$

Nghiệm của phương trình này là $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = \frac{1}{3}$. Từ đó suy ra nghiệm của hệ đã cho là các bộ (x, y, z) :

$$(1, 3, \frac{1}{3}), (3, 1, \frac{1}{3}), (3, \frac{1}{3}, 1), (1, \frac{1}{3}, 3), (\frac{1}{3}, 1, 3), (\frac{1}{3}, 3, 1).$$

Bài 2.29 (Theo [2]). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

trong đó a, b là các số thực cho trước.

Lời giải. Đặt $x + y + z = \sigma_1, xy + yz + zx = \sigma_2, xyz = \sigma_3$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b^2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = a^3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2), \\ \sigma_3 = \frac{1}{2}a(a^2 - b^2). \end{cases}$$

Theo định lý (2.3), ta có x, y, z là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} u^3 - au^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)u - \frac{1}{2}a(a^2 - b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (u - a)[u^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)] &= 0 \end{aligned}$$

Từ phương trình trên, ta có

a) Nếu $|a| > |b|$, thì phương trình trên chỉ có một nghiệm thực $u=a$, do đó hệ đã cho không có nghiệm thực. Trong phạm vi số phức, thì phương trình có các nghiệm $u_1 = a, u_2 = i\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}, u_3 = -i\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$, trong đó i là đơn vị ảo. Khi đó hệ đã cho có nghiệm (x, y, z) là bộ số $(a, i\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}, -i\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}})$ và tất cả các hoán vị của nó.

b) Nếu $|a| \leq |b|$, thì phương trình trên có ba nghiệm thực $u_1 = a, u_2 = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}, u_3 = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}$. Khi đó hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y, z) là bộ số $(a, \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}, -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}})$ và tất cả các hoán vị của nó.

2.5 Tìm nghiệm nguyên của các phương trình đối xứng

Bài 2.30 (Theo [2]). *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^3 + y^3 + 1 = 3xy$$

Lời giải. Đặt $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$. Phương trình trở thành

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 1 = 3\sigma_2 \Leftrightarrow (\sigma_1 + 1)(\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 - 3\sigma_2) = 0.$$

Trường hợp 1: $\sigma_1 + 1 = 0$, ta có $x + y + 1 = 0$, phương trình có vô số nghiệm nguyên ($x \in \mathbb{Z}, y = -1 - x$).

Trường hợp 2: $\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 - 3\sigma_2 = 0$. Ta viết phương trình này dưới dạng

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 = 3\sigma_2$$

Từ việc đặt $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$, thì điều kiện tồn tại hai số x, y là $\sigma_1 \geq 4\sigma_2$. Sử dụng điều kiện này ta có

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 - \sigma_1 + 1 &\leq \frac{3}{4}\sigma_1^2 \Leftrightarrow \sigma_1^2 - 4\sigma_1 + 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sigma_1 - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sigma_1 = 2 \Rightarrow \sigma_2 = 1.\end{aligned}$$

Trong trường hợp này ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Hệ này luôn có nghiệm nguyên duy nhất là $x = y = 1$. Như vậy, nghiệm của phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \mathbb{Z}, \\ y = -1 - x. \end{cases}$$

Bài 2.31. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x + y = x^2 - xy + y^2$$

Lời giải. Đặt $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$. Phương trình trở thành

$$\sigma_1 = \sigma_2 - 2\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_1^2 - 3\sigma_2 \Leftrightarrow \sigma_1^2 - \sigma_1 = 3\sigma_2.$$

Từ việc đặt $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$, thì điều kiện tồn tại hai số x, y là $\sigma_1 \geq 4\sigma_2$. Sử dụng điều kiện này ta có

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \leq \frac{3}{4}\sigma_1^2 \Leftrightarrow \sigma_1^2 - 4\sigma_1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sigma_1 \leq 4$$

Mặt khác, từ phương trình

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 = 3\sigma_2.$$

$$\Leftrightarrow (2\sigma_1 - 1)^2 = 12\sigma_2 + 1$$

thấy $12\sigma_2 + 1$ là số chính phương, nên từ đó chọn được

+) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, phương trình có nghiệm nguyên: $x = y = 0$.

+) $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$, phương trình có các nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

+) $\sigma_1 = 2, 12\sigma_2 + 1 = 9$, phương trình không có nghiệm nguyên.

+) $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2$, phương trình có các nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

+) $\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 4$, phương trình có các nghiệm nguyên là

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2; \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên là:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases} ; \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases} ; \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} ; \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} ; \begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Bài 2.32 (Theo [1]). Tìm các nghiệm nguyên dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = z, \\ x^3 + y^3 = z^2. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = xy$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \sigma_1 = z, \\ s_3 = z^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = z, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = z^2. \end{cases}$$

Thế phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai, ta được

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2 \Leftrightarrow \sigma_1(\sigma_1^2 - \sigma_1 - 3\sigma_2) = 0$$

Trường hợp 1: $\sigma_1 = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = -y$, rõ ràng không thỏa mãn, do nghiệm cần tìm nguyên dương.

Trường hợp 2:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 - 3\sigma_2 = 0$$

Tương tự bài tập 2.30, dễ dàng tìm được các nghiệm nguyên dương của hệ là

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ y = 1, \\ z = 3; \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ y = 2 \\ z = 2. \end{array} \right.$$

2.6 Chứng minh các đẳng thức

Bài 2.33. Cho $x + y = 1, x^3 + y^3 = a, x^5 + y^5 = b$. Chứng minh rằng

$$5a(a + 1) = 9b + 1$$

Lời giải. Đặt $\sigma_1 = x + y = 1, \sigma_2 = xy$. Ta có:

$$x^3 + y^3 = a \Leftrightarrow \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = a \Rightarrow \sigma_2 = \frac{1-a}{3}$$

Vì

$$x^5 + y^5 = s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

nên

$$b = 1 - 5 \cdot \frac{1-a}{3} + 5 \cdot \frac{(1-a)^2}{9}$$

hay

$$5a(a + 1) = 9b + 1$$

Bài 2.34 (Theo [5]). Chứng minh đồng nhất thức

$$(x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1 = (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1).$$

Lời giải. Theo công thức Waring, ta có

$$\begin{aligned} (x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1 &= \sigma_1^3 + 3\sigma_2(1 - \sigma_1) - 1 = \\ &= \sigma_1^3 + 3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2 - 1. \end{aligned}$$

Mặt khác, cũng có

$$\begin{aligned} (x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) &= (\sigma_1 - 1)(\sigma_1^2 - 3\sigma_2 + \sigma_1 + 1) = \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2 + \sigma_1 - \sigma_1^2 + 3\sigma_2 - \sigma_1 - 1 = \\ &= \sigma_1^3 + 3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2 - 1. \end{aligned}$$

Từ hai hệ thức trên, ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.35 (Theo [5]). Chứng minh đồng nhất thức

$$(x + y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2.$$

Lời giải. Theo công thức Waring, ta có

$$\begin{aligned}(x + y)^7 - x^7 - y^7 &= \sigma_1^7 - s_7 = \sigma_1^7 - (\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3) = \\ &= 7\sigma_1^5\sigma_2 - 14\sigma_1^3\sigma_2^2 + 7\sigma_1\sigma_2^3 = 7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2) = \\ &= 7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2)^2 = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2.\end{aligned}$$

Bài 2.36 (Theo [5]). Chứng minh đồng nhất thức

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = (x + y)(y + z)(z + x).$$

Lời giải. Sử dụng các công thức quĩ đạo, khai triển vế phải, ta có

$$\begin{aligned}(x + y)(y + z)(z + x) &= x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 2xyz = \\ &= O(x^2y) + 2\sigma_3 = (\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) + 2\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = \\ &= (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz.\end{aligned}$$

Bài 2.37 (Theo [5]). Chứng minh rằng, nếu

$$x + y + z = xy + yz + zx = 0.$$

thì

$$3(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) = (x^3 + y^3 + z^3)^2.$$

Lời giải. Sử dụng các công thức quĩ đạo, khai triển vế phải với lưu ý điều kiện của đề bài là $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$, ta có

$$3(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) = 3O(x^3y^3) = 3(\sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = 9\sigma_3^2.$$

Tương tự với vế trái, ta có

$$(x^3 + y^3 + z^3)^2 = s_3^2 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)^2 = 9\sigma_3^2.$$

Từ các khai triển trên, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.38 (Theo [2]). Chứng minh rằng, nếu các số thực x, y, z, a, b, c thỏa mãn các hệ thức

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 + b^3 + c^3. \end{cases}$$

thì với mọi số tự nhiên n :

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n.$$

Lời giải. Kí hiệu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các đa thức đối xứng cơ sở theo các biến x, y, z ; còn τ_1, τ_2, τ_3 là các đa thức đối xứng cơ sở theo các biến a, b, c . Sử dụng các công thức Waring, theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \tau_1, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= \tau_1^2 - 2\tau_2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 &= \tau_1^3 - 3\tau_1\tau_2 + 3\tau_3,\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sigma_1 = \tau_1, \sigma_2 = \tau_2, \sigma_3 = \tau_3,$$

Khi đó với mọi đa thức $\varphi(t_1, t_2, t_3)$ ta có

$$\varphi(t_1, t_2, t_3) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

Giả sử $f(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng và theo Định lý duy nhất $f(x, y, z) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $f(a, b, c) = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Từ đó suy ra $f(x, y, z) = f(a, b, c)$. Trong trường hợp riêng ta có

$$x^n + y^n + z^n = a^n + b^n + c^n.$$

Bài 2.39 (Theo [5]). Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 0$, thì các đẳng sau đây đúng

1. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;
2. $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$;
3. $a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) = 0$;
4. $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$;
5. $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{a^7 + b^7 + c^7} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^5 + b^5 + c^5} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = abc \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^4 + b^4 + c^4}$;
6. $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{a^5 + b^5 + c^5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^5 + b^5 + c^5} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^4 + b^4 + c^4} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$;
7. $\frac{a^7 + b^7 + c^7}{a^5 + b^5 + c^5} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^5 + b^5 + c^5} = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{a^4 + b^4 + c^4}\right)^2$;
8. $\left(\frac{a^7 + b^7 + c^7}{a^5 + b^5 + c^5}\right)^2 = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{a^4 + b^4 + c^4}\right)^2 \cdot \frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^5 + b^5 + c^5}$

Lời giải. Kí hiệu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ và s_k tương ứng là các đa thức đối xứng cơ sở và tổng lũy thừa của các biến a, b, c . Theo công thức Waring ta có

<i>Công thức tính $s_k = x^k + y^k + z^k$, theo $\sigma_2 \sigma_3$ khi có $\sigma_1 = 0$</i>
$a + b + c = s_1 = \sigma_1 = 0;$
$a^2 + b^2 + c^2 = s_2 = -2\sigma_2;$
$a^3 + b^3 + c^3 = s_3 = 3\sigma_3;$
$a^4 + b^4 + c^4 = s_4 = 2\sigma_2^2;$
$a^5 + b^5 + c^5 = s_5 = -5\sigma_2\sigma_3;$
$a^6 + b^6 + c^6 = s_6 = 3\sigma_3^2 - 2\sigma_2^3;$
$a^7 + b^7 + c^7 = s_7 = 7\sigma_2^3\sigma_3;$
$a^8 + b^8 + c^8 = s_8 = 2\sigma_2^4 - 8\sigma_2\sigma_3^2;$
$a^9 + b^9 + c^9 = s_9 = 3\sigma_3^3 - 9\sigma_2^3\sigma_3;$
$a^{10} + b^{10} + c^{10} = s_{10} = -2\sigma_2^5 + 15\sigma_2^2\sigma_3^2;$
.....

Lời giải.

1. Theo công thức trên, hiển nhiên đúng.

2. Theo công thức trên và kết quả bài 2.28, hiển nhiên đúng.

$$3. a^2(b+c)^2 + b^2(c+a)^2 + c^2(a+b)^2 + (a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) = 2O(a^2b^2) + 2O(a^2bc) + s_2\sigma_2 = 2\sigma_2^2 - 2.0 + (-2\sigma_2)\sigma_2 = 0;$$

4. Từ công thức trên, ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 = s_4 = 2\sigma_2^2$$

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 2.O(a^2b^2) = 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) = 2\sigma_2^2$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2 = \frac{1}{2}s_2^2 = \frac{1}{2}(-2\sigma_2)^2 = 2\sigma_2^2$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

$$5. \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = -\sigma_2 \cdot \sigma_3 = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \\ = \sigma_3 \cdot \frac{-2\sigma_2}{2} = abc \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2};$$

$$6. \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = (-\sigma_2\sigma_3) \cdot (-\sigma_2) = \sigma_2^2\sigma_3 = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \\ = \frac{2\sigma_2^2}{2} \cdot \sigma_3 = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3};$$

$$7. \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = \sigma_2^2\sigma_3 \cdot \sigma_3 = (\sigma_2\sigma_3)^2 = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2,$$

$$8. \left(\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}\right)^2 = (\sigma_2^2\sigma_3)^2 = (\sigma_2\sigma_3)^2 \cdot \sigma_2^2 = \left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right)^2 \cdot \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2}.$$

Bài 2.40 (Theo [5]). Chứng minh đồng nhất thức

$$\frac{(a+b)^7 - a^7 - b^7}{(a+b)^3 - a^3 - b^3} = \frac{7}{6}[(a+b)^4 + a^4 + b^4].$$

Lời giải. Đặt $x = a, y = b, z = -a - b$. Khi đó $\sigma_1 = a + b + (-a - b) = 0$, nên theo công thức Waring ta có

$$\frac{(a+b)^7 - a^7 - b^7}{(a+b)^3 - a^3 - b^3} = \frac{-z^7 - x^7 - y^7}{-z^3 - x^3 - y^3} = \frac{s_7}{s_3} = \frac{7\sigma_2^2\sigma_3}{3\sigma_3} = \frac{7}{3}\sigma_2^2.$$

Ta biến đổi vế phải của đẳng thức cần chứng minh như sau:

$$\frac{7}{6}[(a+b)^4 + a^4 + b^4] = \frac{7}{6}[(-z)^4 + a^4 + b^4] = \frac{7}{6}s_4 = \frac{7}{6}.2\sigma_2^2 = \frac{7}{3}.\sigma_2^2.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Phương pháp trình bày trên thường được áp dụng khi trong bài toán có các hiệu $a - b, b - c, c - a$. Khi đó nếu đặt $x = a - b, y = b - c, z = c - a$ thì $\sigma_1 = x + y + z = 0$. Trong trường hợp này các công thức Waring đối với tổng lũy thừa trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Xét các ví dụ sau.

Bài 2.41 (Theo [5]). *Chứng minh đồng nhất thức*

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3 - 3(b - c)(c - a)(a - b) = 0.$$

Lời giải.

Đặt $x = a - b, y = b - c, z = c - a$ thì $\sigma_1 = x + y + z = 0$ và đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = s_3 - 3\sigma_3 = 3\sigma_3 - 3\sigma_3 = 0.$$

Bài 2.42 (Theo [5]). *Chứng minh đồng nhất thức*

$$25[(b - c)^7 + (c - a)^7 + (a - b)^7].[(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3] = 21[(b - c)^5 + (c - a)^5 + (a - b)^5]^2.$$

Lời giải. Đặt $x = a - b, y = b - c, z = c - a$ thì $\sigma_1 = x + y + z = 0$ và đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$25(x^7 + y^7 + z^7).(x^3 + y^3 + z^3) = 21(x^5 + y^5 + z^5)^2$$

hay

$$25s_7.s_3 = 21s_5^2$$

Sử dụng các công thức của tổng lũy thừa với chú ý $\sigma_1 = 0$, ta có

$$25s_7.s_3 = 25.7\sigma_2^2\sigma_3.3\sigma_3 = 525(\sigma_2\sigma_3)^2; 21s_5^2 = 21(-5\sigma_2\sigma_3)^2 = 525(\sigma_2\sigma_3)^2$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.43 (Theo [5]). Với $a + b + c = 2p$, chứng minh rằng

1. $a(p-b)(p-c) + b(p-a)(p-c) + c(p-a)(p-b) + 2(p-a)(p-b)(p-c) = abc$.
2. $(p-a)^3 + (p-b)^3 + (p-c)^3 + 3abc = p^3$

Lời giải

1. Khai triển vế phải, sử dụng công thức Waring với chú ý

$\sigma_1 = a + b + c = 2p$, ta có

$$\begin{aligned} p^2(a+b+c) - 2p(ab+ac+bc) + 3abc + \\ + 2[p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+ac+bc) - abc] = \\ = \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3 + 2\left(-\frac{\sigma_1^3}{8} + \frac{\sigma_1}{2} \sigma_2 - \sigma_3\right) = \sigma_3 = abc. \end{aligned}$$

2. Viết đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)^3 + \left(\frac{a-b+c}{2}\right)^3 + \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^3 + 3abc = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3.$$

Theo kết quả của bài 2.12, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.44 (Theo [5]). Chứng minh rằng, nếu $xy + yz + zx = 1$, thì

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Lời giải. Biến đổi biểu thức đã cho, ta nhận được biểu thức sau

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz.$$

Sử dụng các công thức của tổng lũy thừa và quỹ đạo với chú ý

$\sigma_2 = xy + yz + zx = 1$ để biến đổi vế phải đẳng thức trên ta có

$$O(x) - O(x^2y) + O(x^2y^2z) = \sigma_1 - (\sigma_1 - 3\sigma_3) + \sigma_3 = 4xyz.$$

Bài 2.45 (Theo [2]). Chứng minh rằng, nếu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

thì với mọi số lẻ n , ta có

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^n = \frac{1}{a^n + b^n + c^n} = \frac{1}{(a+b+c)^n}.$$

Lời giải. Từ giả thiết của bài toán, ta có

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{1}{\sigma_1},$$

hay

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 = 0,$$

Theo kết quả của bài 2.11 ta có đẳng thức

$$(a+b)(a+c)(b+c) = 0,$$

Từ đẳng thức trên, ta có

$$a = -b, a = -c, b = -c.$$

Thay vào đẳng thức cần chứng minh, ta thấy đẳng thức

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^n = \frac{1}{a^n + b^n + c^n} = \frac{1}{(a+b+c)^n}.$$

luôn đúng với mọi số lẻ n .

2.7 Chứng minh bất đẳng thức

Với hai số thực x, y , đặt $x+y = \sigma_1, xy = \sigma_2$. Khi đó ta có

$$(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \Leftrightarrow \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0.$$

Mệnh đề 2.1 (Theo [2]). Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Đặt $x+y = \sigma_1, xy = \sigma_2$. Khi đó

$$\sigma_1 \geq 4\sigma_2. \quad (2.11)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Giả sử cần chứng minh bất đẳng thức $f(x, y) \geq 0$ (với mọi $x \geq 0, y \geq 0$ hoặc $x+y = a$, tùy thuộc vào bài toán), trong đó $f(x, y)$ là đa thức đối xứng. Trước hết ta biểu diễn $f(x, y)$ theo σ_1, σ_2 . Sau đó trong đa thức vừa nhận được thay σ_2 bởi σ_1 bằng cách đặt $\sigma_2 = \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z)$ với $z \geq 0$. Hoặc cũng có thể biểu diễn σ_1 bởi σ_2 bằng cách viết $\sigma_1^2 = z + 4\sigma_2$.

Bài 2.46 (Theo [2]). Chứng minh rằng, nếu a, b và c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a+b \geq c \geq 0$, thì

$$a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}, \quad a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{8}, \quad a^8 + b^8 \geq \frac{c^8}{128}$$

Lời giải. Đặt $a+b = \sigma_1, ab = \sigma_2$. Ta có

$$s_2 = a^2 + b^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}z,$$

vì $z \geq 0$ và theo giả thiết $\sigma_1 \geq c \geq 0$, nên $s_2 \geq \frac{1}{2}c^2$, nghĩa là

$$a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}$$

Vận dụng bất đẳng thức trên, ta có

$$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{2}c^2)^2 \geq \frac{c^4}{8}.$$

Tương tự dễ dàng chứng minh

$$a^8 + b^8 \geq \frac{c^8}{128}$$

Một cách tổng quát, ta có bài toán

Nếu a, b và c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a + b \geq c \geq 0$, thì với mọi n nguyên dương, ta có

$$a^{2n} + b^{2n} \geq \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot c^{2n}$$

Lưu ý: Cho c nhận các giá trị thực khác nhau, ta nhận được các bài toán khác nhau. Chẳng hạn cho $c=1$, ta có bài toán

Chứng minh rằng, nếu a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện $a + b \geq 1$, thì

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}, a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}, a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}$$

Bài 2.47 (Theo [5]). Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng

1. $8(a^4 + b^4) \geq (a + b)^4$,
2. $a^6 + b^6 \geq a^5b + ab^5$

Lời giải

1. Ta có

$$\begin{aligned} 8(a^4 + b^4) - (a + b)^4 &= 8s_4 - \sigma_1^4 = 8(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_1^4 = \\ &= 7\sigma_1^4 - 32\sigma_1^2 \cdot \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) + 16 \cdot \frac{1}{16}(\sigma_1^2 - z)^2 = 6\sigma_1^2z + z^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Ta có

$$\begin{aligned}
a^6 + b^6 - a^5b + ab^5 &= s_6 - \sigma_2 s_4 = \sigma_1^6 - 7\sigma_1^4\sigma_2 + 13\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 = \\
&= \sigma_1^6 - 7\sigma_1^4 \cdot \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) + 13\sigma_1^2 \cdot \frac{1}{16}(\sigma_1^2 - z)^2 - 4 \cdot \frac{1}{64}(\sigma_1^2 - z)^3 = \\
&= \frac{5}{16}\sigma_1^4 z + \frac{5}{8}\sigma_1^2 z^2 + \frac{1}{16}z^3 \geq 0
\end{aligned}$$

Bài 2.48 (Theo [5]). Chứng minh rằng với mọi a, b không âm có các bất đẳng thức

1. $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b},$
2. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2.$

Lời giải.

1. Đặt $\sqrt{a} = u, \sqrt{b} = v.$ Ta có bất đẳng thức

$$\frac{u^2}{v} + \frac{v^2}{u} \geq u + v \text{ hay } u^3 + v^3 \geq uv(u + v)$$

Từ giả thiết của bài toán, ta có $u \geq 0, v \geq 0$ từ đó cũng có

$$\sigma_1 \geq 0, z = \sigma_1 - 4\sigma_2 \geq 0$$

Do đó

$$u^3 + v^3 - uv(u + v) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 4\sigma_2) \geq 0.$$

2. Đặt $\sqrt{a} = u, \sqrt{b} = v.$ Ta có bất đẳng thức $(u + v)^8 \geq 64u^2v^2(u^2 + v^2)^2.$
 Từ giả thiết của bài toán, ta có $u \geq 0, v \geq 0,$ do đó bất đẳng thức trên có thể viết thành

$$(u + v)^4 \geq 8uv(u^2 + v^2)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
(u + v)^4 - 8uv(u^2 + v^2) &= \sigma_1^4 - 8\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 8\sigma_1^2\sigma_2 + 16\sigma_2^2 = \\
&= \sigma_1^4 - 8\sigma_1^2 \cdot \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) + 16 \cdot \frac{1}{16}(\sigma_1^2 - z)^2 = z^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Với các bộ số thực (x, y, z) hay (a, b, c) v.v.. ta luôn hiểu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ là các đa thức đối xứng cơ sở của các bộ đó. Chẳng hạn với bộ số thực (x, y, z) ta có

$$\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + xz + yz, \sigma_3 = xyz.$$

Mệnh đề 2.2 (Theo [2]). Với các số thực x, y, z luôn có :

$$a) \quad \sigma_1^2 \geq 3\sigma_2 \qquad b) \quad \sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3. \qquad (2.12)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z.$

Chứng minh. Với mọi số thực x, y, z ta luôn có bất đẳng thức

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. Khai triển vế trái của bất đẳng thức trên và thu gọn ta được $s_2 - \sigma_2 \geq 0$. Thay $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, ta có bất đẳng thức thứ nhất trong (2.12).

Theo bất đẳng thức thứ nhất trong (2.12), ta có

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz).$$

Trong bất đẳng thức trên thay $x = ab, y = ac, z = bc$ ta được

$$(ab + ac + bc)^2 \geq 3(a^2bc + ab^2c + abc^2) = 3abc(a + b + c).$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức thứ hai trong (2.12) với các số thực a, b, c . $\square$

Mệnh đề 2.3 (Theo [2]). Với các số thực dương x, y, z luôn có :

$$a) \quad \sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3 \qquad b) \quad \sigma_1^3 \geq 27\sigma_3 \qquad c) \quad \sigma_2^3 \geq 27\sigma_3^2. \quad (2.13)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Chứng minh. Vì x, y, z là các số thực dương nên $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ cũng là các số dương. Nhân hai vế tương ứng của các bất đẳng thức trong (2.12) ta được $\sigma_1^2\sigma_2^2 \geq 9\sigma_1\sigma_2\sigma_3$. Giản ước hai vế ta nhận được bất đẳng thức $\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3$. Từ bất đẳng thức thứ nhất trong (2.12), ta có

$$\sigma_1^4 = \sigma_1^2.\sigma_1^2 \geq \sigma_1^2.3\sigma_2 = 3\sigma_1(\sigma_1\sigma_2) \geq 3\sigma_1.9\sigma_3 = 27\sigma_1\sigma_3.$$

Giản ước hai vế bất đẳng thức trên, với lưu ý σ_1 dương, ta nhận được bất đẳng thức $\sigma_1^3 \geq 27\sigma_3$.

Từ bất đẳng thức thứ hai trong (2.12) và bất đẳng thức thứ nhất trong (2.13) ta có

$$\sigma_2^3 = \sigma_2.\sigma_2^2 \geq \sigma_2.3\sigma_1\sigma_3 = 3\sigma_3(\sigma_1\sigma_2) \geq 3\sigma_3.9\sigma_3 = 27\sigma_3^2.$$

$\square$

Nhận xét. Các bất đẳng thức trong (2.13) vẫn còn đúng với x, y, z là các số không âm.

Từ bất đẳng thức thứ nhất và thứ hai trong (2.13), ta có các bất đẳng thức quen thuộc

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \text{ và } (x + y + z)^3 \geq 27xyz \text{ hay } \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Mệnh đề 2.4 (Theo [2]). Với mọi số thực không âm x, y, z ta luôn có các bất đẳng thức

$$a) \quad \sigma_1^3 + 9\sigma_3 \geq 4\sigma_1\sigma_2 \qquad b) \quad 2\sigma_1^3 + 9\sigma_3 \geq 7\sigma_1\sigma_2. \quad (2.14)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Chứng minh. Trước hết, với mọi x, y, z không âm, ta chứng minh có bất đẳng thức

$$x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) \geq 0$$

Thật vậy, do tính chất đối xứng của x, y, z nên không làm mất tính tổng quát ta giả sử rằng $x \geq y \geq z$. Khi đó bất đẳng thức đã cho được viết lại như sau

$$(x-y)[x(x-z) - y(y-z)] + z(x-z)(y-z) \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng.

Khai triển vế trái bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & x(x-y)(x-z) + y(y-x)(y-z) + z(z-x)(z-y) = \\ & = (x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz - (x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) = \\ & = s_3 + 3\sigma_3 - O(x^2y) = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) + 3\sigma_3 - (\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) = \\ & = \sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3. \end{aligned}$$

Từ đó ta có kết quả của bất đẳng thức thứ nhất trong công thức (2.14).

Từ bất đẳng thức thứ nhất trong (2.12) và (2.14), ta có

$$2\sigma_1^3 + 9\sigma_3 = (\sigma_1^3 + 9\sigma_3) + \sigma_1^3 \geq 4\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2 = 7\sigma_1\sigma_2.$$

Vậy các bất đẳng thức trong (2.14) được chứng minh. $\square$

Bài 2.49 (Anh, 1999 (Theo [2])). Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$7(xy + yz + zx) \leq 2 + 9xyz.$$

Lời giải. Vì $x + y + z = 1$, nên ta có thể viết bất đẳng thức cần chứng minh ở dạng

$$7(x + y + z)(xy + yz + zx) \leq 2 + 9xyz.$$

Đặt $\sigma_1 = x + y + z, \sigma_2 = xy + xz + yz, \sigma_3 = xyz$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$7\sigma_1\sigma_2 \leq 2\sigma_1^3 + 9\sigma_3$$

Theo 2.10 ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.50 (Theo [5]). Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có các bất đẳng thức sau

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$,
2. $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2$,
3. $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$,
4. $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$,
5. $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$,

Lời giải. Đặt $\sigma_1 = a + b + c, \sigma_2 = ab + bc + ca, \sigma_3 = abc$. Ta có

1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 \geq \sigma_2$ hay $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$. Theo (2.12) ta có điều phải chứng minh.

2. Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 \geq \frac{1}{3}\sigma_1^2$ hay $\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2$. Theo (2.12) ta có điều phải chứng minh.

3. Bất đẳng thức đã cho tương đương với $O(a^2b^2) \geq \sigma_1\sigma_3$ hay $\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \geq \sigma_1\sigma_3$. Theo (2.12) ta có điều phải chứng minh.

4. Theo (2.12) ta có điều phải chứng minh.

5. Trong bất đẳng thức 1, cho $c = 1$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.51 (Theo [5]). Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có các bất đẳng thức sau

1. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$,
2. $ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ac(a + c - 2b) \geq 0$,
3. $ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) \geq 6abc$,
4. $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c)$,
5. $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{x + y + z}{3}$,

Lời giải. Đặt $\sigma_1 = a + b + c, \sigma_2 = ab + ac + bc, \sigma_3 = abc$. Khi đó

1. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \geq 9\sigma_3 \text{ hay } \sigma_1^3 \geq 2\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3.$$

Theo công thức (2.12) trong mệnh đề (2.2) và công thức (2.13) trong mệnh đề (2.3) thì

$$\sigma_1^3 \geq 3\sigma_1\sigma_2 \text{ và } \sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$ab(\sigma_1 - 3c) + bc(\sigma_1 - 3a) + ac(\sigma_1 - 3b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo công thức (2.13) trong mệnh đề (2.3). Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

3. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$ab(\sigma_1 - c) + bc(\sigma_1 - a) + ac(\sigma_1 - b) \geq 6\sigma_3 \\ \Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \geq 6\sigma_3 \Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo công thức (2.13) trong mệnh đề (2.3). Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

4. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$2s_3 \geq O(a^2b) \Leftrightarrow 2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \geq \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 \\ \Leftrightarrow 2\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geq 0 \Leftrightarrow 2\sigma_1^3 + 9\sigma_3 \geq 7\sigma_1\sigma_2.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo công thức (2.14) trong mệnh đề (2.4). Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

5. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$3s_3 \geq s_1s_2 \Leftrightarrow 3(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \geq \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \\ \Leftrightarrow 2\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \geq 0 \Leftrightarrow 2\sigma_1^3 + 9\sigma_3 \geq 7\sigma_1\sigma_2.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo công thức (2.14) trong mệnh đề (2.4). Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bài 2.52 (Theo [5]). Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác thì ta có các bất đẳng thức

1. $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$,
2. $(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3)$.

Lời giải.

1. Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác, nên ta có thể đặt

$$x = a + b - c, y = a - b + c, z = -a + b + c$$

trong đó x, y, z là các số dương. Khi đó a, b, c được biểu thị theo x, y, z như sau:

$$a = \frac{x + y}{2}, b = \frac{x + z}{2}, c = \frac{y + z}{2}$$

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh ta có bất đẳng thức

$$2\left(\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+z}{2} + \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} + \frac{x+z}{2} \cdot \frac{y+z}{2}\right) > \\ > \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2$$

Đặt $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$, $s_2 = x^2 + y^2 + z^2$ là các đa thức đối xứng cơ sở và tổng lũy thừa của x, y, z . Ta có

$$2(s_2 + 3\sigma_2) > 2s_2 + 2\sigma_2 \Leftrightarrow 4\sigma_2 > 0$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức đúng. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

2. Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác, nên ta có thể đặt

$$x = a + b - c, y = a - b + c, z = -a + b + c$$

trong đó x, y, z là các số dương. Khi đó a, b, c được biểu thị theo x, y, z như sau:

$$a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x+z}{2}, c = \frac{y+z}{2}$$

Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh ta có bất đẳng thức

$$\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2\right](x+y+z) > \\ > 2\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 + \left(\frac{x+z}{2}\right)^3 + \left(\frac{y+z}{2}\right)^3\right].$$

Đặt $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + xz + yz$, $\sigma_3 = xyz$, $s_2 = x^2 + y^2 + z^2$, $O(x^2y) = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$ là các đa thức đối xứng cơ sở, tổng lũy thừa và công thức quỹ đạo của x, y, z . Ta có

$$2(s_2 + 2\sigma_2)\sigma_1 > 2s_3 + 3O(x^2y) \\ \Leftrightarrow 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2 + 2\sigma_2)\sigma_1 > 2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) + 3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) \\ \Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3 > 0.$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức đúng. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Chương 3

Đa thức đối xứng n biến và ứng dụng

3.1 Các khái niệm

Định nghĩa 3.1 (Theo [2]). Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Đa thức $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được hiểu là hàm số có dạng

$$f(x) = \sum_{k=0}^m M_k(x),$$

trong đó

$$M_k(x) = M_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=k} a_{j_1 j_2 \dots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n},$$

$$j_i \in \mathbb{N}, (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Định nghĩa 3.2 (Theo [2]). Đa thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ theo các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là đối xứng nếu nó không thay đổi khi đổi chỗ giữa hai biến bất kì.

Định nghĩa 3.3 (Theo [2]). Đa thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ theo các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là thuần nhất bậc m , nếu

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall t \neq 0.$$

Định nghĩa 3.4 (Theo [2]). Kí hiệu

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sigma_0 = 1, \sigma_1 = \sum_{i=1}^n x_i, \sigma_2 = \sum_{i,j=1, i < j}^n x_i x_j,$$

$$\sigma_3 = \sum_{i,j,l=1, i < j < l}^n x_i x_j x_l, \dots, \sigma_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1, i_1 < i_2 < \dots < i_k}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k},$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Ta gọi s_k là các tổng lũy thừa, còn $\sigma_r(x) (r = 1, 2, 3, \dots, n)$ là các đa thức đối xứng sơ cấp bậc r .

Chẳng hạn, với $n = 4$, ta có

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4,$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4,$$

$$\sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Số các số hạng trong đa thức đối xứng bậc k : σ_k bằng

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Định nghĩa 3.5 (Theo [2]). Đa thức với số hạng tối thiểu, mỗi số hạng là một đơn thức có dạng $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ được gọi là quỹ đạo của đơn thức (orbit) và được kí hiệu là

$$O(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$$

Chẳng hạn với $n = 4$, ta có

$$O(x_1^2 x_2^3) = x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + x_1^2 x_4^3 + x_2^2 x_1^3 + x_2^2 x_3^3 + x_2^2 x_4^3 + x_3^2 x_1^3 + x_3^2 x_2^3 + x_3^2 x_4^3 + x_4^2 x_1^3 + x_4^2 x_2^3 + x_4^2 x_3^3.$$

Từ định nghĩa về quỹ đạo suy ra, nếu các số mũ $k_1, k_2, \dots, k_n$ khác nhau thì số các số hạng của quỹ đạo $O(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$ bằng $n!$. Mở rộng cho trường hợp các số mũ $k_1, k_2, \dots, k_n$ không nhất thiết phải khác nhau ta có khái niệm quỹ đạo toàn phần.

Định nghĩa 3.6 (Theo [2]). Đa thức bằng tổng tất cả các hoán vị theo các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ của đơn thức $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ được gọi là quỹ đạo toàn phần và được kí hiệu là

$$O_{\Pi}(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$$

Quỹ đạo toàn phần chỉ khác quỹ đạo thông thường bởi hệ số, cụ thể là: Nếu trong các số mũ $k_1, k_2, \dots, k_n$ có m_1 số bằng nhau, sau đó lại có m_2 số bằng nhau, ..., và cuối cùng còn lại m_l số bằng nhau, thì

$$O_{\Pi}(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}) = m_1! m_2! \dots m_l! O(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}) \quad (3.1)$$

Từ công thức (3.1) ta thấy, nếu các số mũ $k_1, k_2, \dots, k_n$ khác nhau, thì quỹ đạo toàn phần trùng với quỹ đạo thông thường.

Các công thức dưới đây cho phép biểu diễn các quỹ đạo toàn phần qua các tổng lũy thừa

$$O_{\Pi}(x_1^k x_2^l) = (n-2)!(s_k s_l - s_{k+l}), \quad (3.2)$$

$$(n-2)O_{\Pi}(x_1^k x_2^l x_3^m) = O_{\Pi}(x_1^k x_2^l) s_m - O_{\Pi}(x_1^{k+m} x_2^l) - O_{\Pi}(x_1^k x_2^{l+m}), \quad (3.3)$$

.....

$$\begin{aligned} (n-r)O_{\Pi}(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r} x_{r+1}^{k_{r+1}}) = \\ = O_{\Pi}(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}) s_{k_{r+1}} - \\ - O_{\Pi}(x_1^{k_1+k_{r+1}} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}) - \\ - O_{\Pi}(x_1^{k_1} x_2^{k_2+k_{r+1}} \dots x_r^{k_r}) - \\ \dots \dots \dots \\ - O_{\Pi}(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r+k_{r+1}}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Định nghĩa 3.7 (Theo [2]). Xét hai đơn thức $Ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $Bx_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$. Ta nói đơn thức thứ nhất trội hơn đơn thức thứ hai, nếu $k_1 > l_1$; hoặc $k_1 = l_1$ và $k_2 > l_2$; ...; hoặc $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \dots, k_s = l_s$ và $k_{s+1} > l_{s+1}$.

Chẳng hạn, để so sánh hai đa thức $f = x_1^3 x_2^4 x_3^2$, $g = x_1^3 x_2^4 x_4^5$ ta viết chúng ở dạng $f = x_1^3 x_2^4 x_3^2 x_4^0$, $g = x_1^3 x_2^4 x_3^0 x_4^5$. Theo định nghĩa ta thấy f trội hơn g .

3.2 Biểu diễn các tổng lũy thừa qua các đa thức đối xứng cơ sở

Định lý 3.1 (Công thức truy hồi Newton (Theo [2])). Các tổng lũy thừa và các đa thức đối xứng cơ sở liên hệ với nhau theo công thức

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} k \sigma_k \quad (3.5)$$

(trong công thức (3.5) số hạng $(-1)^{i-1} \sigma_i s_{n-i} = 0$ khi $i > n$).

Chứng minh. Xét đa thức một biến theo x

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} x + (-1)^n \sigma_n$$

và các đa thức $Q_i(x)$ được xác định theo công thức

$$Q_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x - x_j) = \frac{P(x)}{x - x_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Kí hiệu

$$\sigma_k(x) = \sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \sigma_k(x_i^0) = \sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Rõ ràng là

$$\sigma_k = \sigma_k(x_i^0) + x_i \sigma_{k-1}(x_i^0), \quad (3.6)$$

$$Q_i(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_k(x_i^0) x^{n-1-k} \quad (3.7)$$

Từ (3.6), suy ra

$$\begin{aligned} \sigma_0(x_i^0) &= 1, \sigma_1(x_i^0) = \sigma_1 - x_i, \\ \sigma_2(x_i^0) &= \sigma_2(x) - x_i \sigma_1(x) + x_i^2, \\ \sigma_3(x_i^0) &= \sigma_3(x) - x_i \sigma_2(x) + x_i^2 \sigma_1(x) - x_i^3. \end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta có công thức

$$\sigma_k(x_i^0) = \sum_{j=0}^k (-1)^j x_i^j \sigma_{k-j}(x) \quad (3.8)$$

$$(k=0, 1, \dots, n-1).$$

Ta có công thức

$$\sum_{i=1}^n \frac{P(x)}{x - x_i} = P'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k) \sigma_k(x) x^{n-k-1}. \quad (3.9)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{P(x)}{x - x_i} &= \sum_{i=1}^n Q_i(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sigma_k(x_i^0) x^{n-k-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\sum_{i=1}^n \sigma_k(x_i^0) \right) x^{n-k-1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Từ (3.9) và (3.10), suy ra

$$\sum_{i=1}^n \sigma_k(x_i^0) = (n-k) \sigma_k(x), \quad (0 \leq k \leq n-1). \quad (3.11)$$

Từ (3.9) và (3.11), suy ra

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k (-1)^j x_i^j \sigma_k(x_i^0) = (n-k) \sigma_k(x), \quad (k \leq n-1),$$

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j s_j \sigma_{k-j}(x) = (n-k) \sigma_k(x), (k \leq n-1). \quad (3.12)$$

Chú ý rằng $s_0 = n$, từ (3.12) dễ dàng suy ra (3.5). Định lý 3.1 được chứng minh. $\square$

Nhận xét. Trên đây đã trình bày một chứng minh của Định lý 3.1 tuy chưa được đơn giản nhưng lại cho một số công thức cần thiết cho sau này. Định lý trên có thể được chứng minh bằng cách đơn giản sau. Vì $x_1, x_2, \dots, x_n$ là nghiệm của đa thức $P(x)$, nên ta có các đẳng thức sau

$$x_1^n - \sigma_1 x_1^{n-1} + \sigma_2 x_1^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n = 0$$

$$x_2^n - \sigma_1 x_2^{n-1} + \sigma_2 x_2^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n = 0$$

.....

$$x_n^n - \sigma_1 x_n^{n-1} + \sigma_2 x_n^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n = 0$$

Cộng theo từng cột về với về các đẳng thức trên ta được công thức (3.5).

Sử dụng công thức (3.5) dễ dàng thu được các công thức sau đây

$$s_1 = 1 \cdot \sigma_1;$$

$$s_2 = \sigma_1 s_1 - 2\sigma_2;$$

$$s_3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + 3\sigma_3;$$

$$s_4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 - 4\sigma_4;$$

$$s_5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 + \sigma_3 s_2 - \sigma_4 s_1 + 5\sigma_5;$$

$$s_6 = \sigma_1 s_5 - \sigma_2 s_4 + \sigma_3 s_3 - \sigma_4 s_2 + 5\sigma_5 s_1 - 6\sigma_6;$$

.....

Từ các công thức trên, một cách liên tiếp ta nhận được các công thức sau

$$s_1 = \sigma_1;$$

$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$$

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3;$$

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4;$$

$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 + 5\sigma_5;$$

$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \\ + 3\sigma_3^2 - 6\sigma_1^2\sigma_4 + 6\sigma_2\sigma_4 + 6\sigma_1\sigma_5 - 6\sigma_6;$$

.....

Định lý 3.2 (Công thức Waring (Theo [2])). *Tổng lũy thừa s_k được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở theo công thức*

$$\frac{s_k}{k} = \sum_{m_1+2m_2+\dots+km_k=k} (-1)^{k-m_1-m_2-\dots-m_k} \cdot \frac{(m_1+m_2+\dots+m_k-1)!}{m_1!m_2!\dots m_k!} \cdot \sigma_1^{m_1}\sigma_2^{m_2}\dots\sigma_k^{m_k} \quad (3.13)$$

Công thức (3.13) có thể được chứng minh bằng phương pháp quy nạp với sự trợ giúp của công thức truy hồi (3.5) và được gọi là công thức Waring.

Ngoài ra có thể chứng minh được rằng các tổng lũy thừa s_k được biểu diễn theo các đa thức đối xứng cơ sở σ_j bởi công thức

$$s_k = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\sigma_1 \\ \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 & \sigma_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \dots & 1 & (k-1)\sigma_1 \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \dots & \sigma_1 & k\sigma_k \end{vmatrix}$$

3.3 Các định lý của đa thức đối xứng nhiều biến

Định lý 3.3 (Định lý tồn tại (Theo [2])). *Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là đa thức đối xứng của n biến. Khi đó tồn tại đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, sao cho nếu vào chỗ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ thay các biểu thức*

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ \sigma_2 &= x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_n &= x_1x_2\dots x_n, \end{aligned}$$

thì ta nhận được đa thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Chứng minh. Giả sử $a.x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ là một đơn thức của $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Vì $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ có tính đối xứng, nên cùng với đơn thức nói trên nó chứa quỹ đạo toàn phần $O_\Pi(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n})$ với hệ số a . Như vậy

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a.O_\Pi(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}) + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

trong đó $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một đa thức đối xứng có số các số hạng ít hơn $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Từ $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lại có thể chọn ra một quỹ đạo $b.O_\Pi(x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n})$ có hệ số b và v.v... Sau một số hữu hạn bước ta có thể phân tích $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thành tổng của các quỹ đạo toàn phần.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a.O_\Pi(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}) + \dots + b.O_\Pi(x_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}).$$

Theo công thức (3.2) và (3.4), các quỹ đạo toàn phần được biểu diễn qua các tổng lũy thừa. Cuối cùng, trên cơ sở công thức truy hồi (3.5), bằng phương pháp quy nạp, các tổng lũy thừa được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở. Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét. Định lý trên còn có thể được chứng minh bằng phương pháp sử dụng khái niệm "đơn thức trội". Thật vậy, giả sử $a.x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ là một đơn thức trội nhất của f . Khi đó $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_n$ và

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}...\sigma_n^{k_n}$$

là một đa thức đối xứng có đơn thức trội thấp hơn $a.x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ (nếu vào chỗ $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ thay các biểu thức của chúng theo $x_1, x_2, \dots, x_n$). Đối với đa thức này lại chọn ra đơn thức trội nhất $b.x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n}$ và lại xét hiệu

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - b\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}...\sigma_n^{l_n} = \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) - a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}...\sigma_n^{k_n} - b\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}...\sigma_n^{l_n}. \end{aligned}$$

Sau một số bước hữu hạn cuối cùng ta có

$$0 = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}...\sigma_n^{k_n} - \dots - c\sigma_1^{m_1-m_2}\sigma_2^{m_2-m_3}...\sigma_n^{m_n}.$$

Từ đó suy ra

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}...\sigma_n^{k_n} + \dots + c\sigma_1^{m_1-m_2}\sigma_2^{m_2-m_3}...\sigma_n^{m_n}.$$

Định lý 3.4 (Định lý duy nhất (Theo [2])). *Nếu hai đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, $\psi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ sau khi thay*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

cùng cho một đa thức đối xứng $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ thì

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \equiv \psi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Chứng minh định lý này hoàn toàn tương tự trường hợp hai biến.

Biểu diễn một đa thức đối xứng nhiều biến $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qua đa thức $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ của các đa thức đối xứng cơ sở theo phương pháp như trong chứng minh định lý 3.2 rất phức tạp vì phải liên tiếp biểu diễn các quỹ đạo của các đơn thức nhiều biến qua các quỹ đạo của các đơn thức với số biến ít hơn. Vì vậy khi số biến lớn hơn 3 để tìm $\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ thường sử dụng phương pháp hệ số bất định. Xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 3.1 (Theo [5]). *Biểu diễn đa thức đối xứng của các biến x_1, x_2, x_3, x_4 sau đây theo các đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$:*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4).$$

Lời giải. Vì f có bậc 6 nên khi biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở thì ta sẽ được một tổng của các đơn thức dạng $A\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\sigma_3^{k_3}\sigma_4^{k_4}$, với

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 6,$$

trong đó k_1, k_2, k_3, k_4 là các số nguyên không âm. Do đó ta tìm f ở dạng:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & A_1\sigma_1^6 + A_2\sigma_1^4\sigma_2 + A_3\sigma_1^3\sigma_3 + A_4\sigma_1^2\sigma_2^2 + \\ & + A_5\sigma_1^2\sigma_4 + A_6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + A_7\sigma_2^3 + A_8\sigma_2\sigma_4 + A_9\sigma_3^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, \\ \sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \sigma_4 = x_1x_2x_3x_4. \end{aligned}$$

Để tìm các hệ số $A_1, A_2, \dots, A_9$ ta cho các biến x_1, x_2, x_3, x_4 nhận các giá trị cụ thể nào đó.

Với $x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = 1$, ta có $f = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0$ và từ (3.14) suy ra $A_1 = 0$

Với $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$, ta có $f = 0, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = \sigma_4 = 0$ và từ (3.14) suy ra $A_7 = 0$

Với $x_1 = x_2 = 0; x_3 = x_4 = 1$, ta có $f = 0, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0, \sigma_4 = 0$ và từ (3.14) với chú ý $A_1 = A_7 = 0$ suy ra

$$4A_2 + A_4 = 0$$

Với $x_1 = x_2 = 0; x_3 = 1, x_4 = 2$, ta có $f = 0, \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = \sigma_4 = 0$ và từ (3.14) với chú ý $A_1 = A_7 = 0$ suy ra

$$9A_2 + 2A_4 = 0$$

Do đó từ hai phương trình trên suy ra $A_2 = A_4 = 0$. Như vậy bây giờ f có dạng

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_3\sigma_1^3\sigma_3 + A_5\sigma_1^2\sigma_4 + A_6\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + A_8\sigma_2\sigma_4 + A_9\sigma_3^2, \quad (3.15)$$

Với $x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1, x_4 = -2$, ta có $f = -4, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -3, \sigma_3 = -2, \sigma_4 = 0$ và từ (3.15) suy ra $A_9 = -1$.

Với $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -1$, ta có $f = 0, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = -2,$

$\sigma_3 = 0, \sigma_4 = 1$ và từ (3.15) suy ra $A_8 = 0$.

Với $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 2$, ta có $f = -16, \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 0$,

$\sigma_3 = -4, \sigma_4 = 0$ và từ (3.15) với chú ý $A_9 = -1$ suy ra $A_3 = 0$.

Với $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = x_4 = 1$, ta có $f = 0, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0$,

$\sigma_3 = -2, \sigma_4 = -1$ và từ (3.15) với chú ý $A_3 = 0, A_9 = -1$ suy ra $A_5 = -1$.

Với $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = 0$, ta có $f = 8, \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0$ và từ (3.15) với chú ý $A_3 = 0, A_9 = -1$ suy ra $A_6 = 1$.

Vậy ta có kết quả

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\sigma_1^2 \sigma_4 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3^2.$$

3.4 Đa thức phản đối xứng nhiều biến

Định nghĩa 3.8 (Theo [2]). Đa thức phản đối xứng nhiều biến là đa thức thay đổi dấu khi thay đổi vị trí của hai biến bất kì.

Chẳng hạn, Đa thức

$$(x - y)(x - z)(x - t)(y - z)(y - t)(z - t)$$

là đa thức phản đối xứng theo các biến x, y, z, t .

Đa thức

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) =$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n)$$

là đa thức phản đối xứng nhiều biến đơn giản nhất. Thấy rằng đa thức phản đối xứng đơn giản nhất của n biến số có bậc bằng $\frac{n(n-1)}{2}$.

Định lý 3.5 (Theo [2]). Mọi đa thức phản đối xứng nhiều biến $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đều có dạng:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(x_1, x_2, \dots, x_n)g(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

trong đó $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là đa thức đối xứng.

Chứng minh định lý trên hoàn toàn tương tự như trường hợp ba biến. Áp dụng định lý trên, ta xét một ví dụ sau

Ví dụ 3.2 (Theo [5]). Phân tích thành nhân tử biểu thức sau

$$f(a, b, c, d) = (b+c-a-d)^4(b-c)(a-d) + (c+a-b-d)^4(c-a)(b-d) + (a+b-c-d)^4(a-b)(c-d).$$

Lời giải. Ta thấy f là đa thức phản đối xứng. Thật vậy, đổi chỗ a và b ta có

$$\begin{aligned} f(b, a, c, d) &= (a+c-b-d)^4(a-c)(b-d) + (c+b-a-d)^4(c-b)(a-d) + \\ &+ (b+a-c-d)^4(b-a)(c-d) = \\ &= -(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d) - (c+a-b-d)^4(c-a)(b-d) - \\ &- (a+b-c-d)^4(a-b)(c-d) = -f(a, b, c, d). \end{aligned}$$

Như vậy khi đổi chỗ a và b thì f đổi dấu. Đổi chỗ hai biến bất kì khác cũng cho kết quả tương tự. Vậy f là đa thức phản đối xứng theo các biến a, b, c, d . Mặt khác, f là đa thức bậc 6, nên theo định lý (3.5) trên, ta có

$$f(a, b, c, d) = k.T(a, b, c, d) = k.(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

trong đó k là một hằng số nào đó. Để xác định k ta có thể cho a, b, c, d các giá trị bất kì nào đó đôi một khác nhau, chẳng hạn $a = 0, b = 1, c = 2, d = 3$. Khi đó ta có

$$f(0, 1, 2, 3) = 192, T(a, b, c, d) = 12$$

suy ra $k=16$. Vậy ta có kết quả

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= (b+c-a-d)^4(b-c)(a-d) + (c+a-b-d)^4(c-a)(b-d) + \\ &+ (a+b-c-d)^4(a-b)(c-d) = \\ &= 16.(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d). \end{aligned}$$

Định nghĩa 3.9 (Theo [2]). Bình phương của đa thức phản đối xứng đơn giản nhất $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là biệt thức của các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = T^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2.$$

Rõ ràng là $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là đa thức đối xứng, nên nó được biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở. Đối với các trường hợp hai và ba biến đã có các công thức

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &= (x-y)^2 = \sigma_1^2 - 4\sigma_2, \\ \Delta(x, y, z) &= (x-y)^2(x-z)^2(y-z)^2 = \\ &= -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2. \end{aligned}$$

Định thức sau đây được gọi là định thức Vandermonde

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = V_n^2.$$
$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

Nếu đã biết công thức biểu diễn của các tổng lũy thừa theo các đa thức đối xứng cơ sở, thì theo công thức (3.16) ta có thể biểu diễn được biệt thức theo các đa thức đối xứng cơ sở.

3.5 Phương trình và hệ phương trình

$$u^n - \sigma_1 u^{n-1} + \sigma_2 u^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n = 0 \quad (3.17)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sigma_1, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \sigma_2, \\ \\ x_1x_2\dots x_n = \sigma_n \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên 68

và tất cả các nghiệm nhận được từ nghiệm trên bằng cách hoán vị các nghiệm $u_1, u_2, \dots, u_n$ của phương trình (3.17). Ngoài các nghiệm trên, thì hệ (3.18) không còn nghiệm khác. Ngược lại, nếu $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$ là nghiệm của hệ (3.18) thì các số $u_1, u_2, \dots, u_n$ là các nghiệm của phương trình (3.17).

$$f(u) = u^n - \sigma_1 u^{n-1} + \sigma_2 u^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$$
$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2) \dots (u - u_n).$$
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sigma_1, \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{n-1} u_n = \sigma_2, \\ \\ u_1 u_2 \dots u_n = \sigma_n. \end{cases} \quad (3.19)$$

Định lý (3.6) cho ta cách giải hệ phương trình đại số (3.18) bằng cách đưa về giải phương trình đại số (3.17). Cụ thể, nếu các số $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ đã biết, thì để tìm các ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$ (là các nghiệm của hệ phương trình (3.18)) chỉ cần thành lập phương trình (3.17) và tìm các nghiệm của phương trình ấy. Giả sử các nghiệm của phương trình (3.17) là $u_1, u_2, \dots, u_n$. Khi đó

là một nghiệm của hệ (3.18). Thực hiện các hoán vị có thể có của các số $u_1, u_2, \dots, u_n$ ta nhận được tất cả các nghiệm của hệ (3.18). Từ định lý (3.6) ta có kết quả sau.

Định lý 3.7 (Công thức Viète (Theo [2])). *Nếu $u_1, u_2, \dots, u_n$ là các nghiệm của phương trình*

$$a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n = 0 (a_0 \neq 0) \quad (3.20)$$

thì có các hệ thức

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 + u_2 + \dots + u_n = -\frac{a_1}{a_0}, \\ u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{n-1} u_n = \frac{a_2}{a_0}, \\ \\ u_1 u_2 \dots u_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Các hệ thức (3.21) được gọi là các hệ thức (công thức) Viète của phương trình (3.20).

Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 3.3 (CHDC Đức, 1970 (Theo [2])). Cho x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 - ax^2 + bx + b = 0$, ($a, b \neq 0$). Chứng minh rằng

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1.$$

Lời giải. Theo định lý Viète, ta có $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$,

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{b}{a}, \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{-b}{a}. \text{ Khi đó}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = -1.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.4 (Áo, 1983 (Theo [2])). *Tìm a để các nghiệm x_1, x_2, x_3 của đa thức*

$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + a$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 = 0.$$

Lời giải. Đặt $y = x - 3$, bài toán trở thành: tìm a để các nghiệm y_1, y_2, y_3 của đa thức

$$f(y+3) = (y+3)^3 - 6(y+3)^2 + a(y+3) + a = y^3 + 3y^2 + (a-9)y + 4a - 27$$

thỏa mãn hệ thức $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0$.

Theo Định lý Viète, ta có $\sigma_1 = y_1 + y_2 + y_3 = -3$,

$$\sigma_2 = y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3 = -9, \sigma_3 = y_1 y_2 y_3 = 27 - 4a. \text{ Khi đó}$$

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -27 - 3a,$$

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = 0 \Leftrightarrow -27 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = -9.$$

Vậy giá trị cần tìm là $a = -9$.

Ví dụ 3.5 (Theo [5]). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9, \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1, \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 33. \end{cases}$$

Lời giải. Gọi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x, y, z, t . Hệ đã cho được đưa về dạng

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 9, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 1, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = 33. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = -4, \\ \sigma_3 = -4, \\ \sigma_4 = 0. \end{cases}$$

Theo định lý (3.6) ta có x, y, z, t là các nghiệm của phương trình

$$u^4 - u^3 - 4u^2 + 4u = 0$$

giải phương trình trên ta tìm được các nghiệm

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = -2.$$

Từ đó ta nhận được các nghiệm x, y, z, t từ các hoán vị của $0, 1, 2, -2$. Hệ phương trình có tất cả 24 nghiệm.

Ví dụ 3.6 (Theo [5]). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + y + z + t = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = a^3, \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = a^4. \end{cases}$$

Lời giải. Gọi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến x, y, z, t .

Hệ đã cho được đưa về dạng

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = a^3, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = a^4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = a, \\ \sigma_2 = 0, \\ \sigma_3 = 0, \\ \sigma_4 = 0. \end{cases}$$

Theo định lý (3.6) ta có x, y, z, t là các nghiệm của phương trình

$$u^4 - au^3 = 0$$

giải phương trình trên ta tìm được các nghiệm

$$u_1 = a, u_2 = u_3 = u_4 = 0.$$

Từ đó ta nhận được các nghiệm x, y, z, t từ các hoán vị của $a, 0, 0, 0$. Hệ phương trình có tất cả 4 nghiệm.

Ví dụ 3.7 (Theo [5]). *Giải hệ phương trình*

[illegible]

Lời giải. Gọi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ là các đa thức đối xứng cơ sở của các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ và s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) là các tổng lũy thừa:

$$x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = s_k.$$

Khi đó từ hai phương trình đầu tiên của hệ đã cho ta có

$$\begin{cases} \sigma_1 = a, \\ s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = a^2. \end{cases}$$

Suy ra $\sigma_2 = 0, s_1 = a = \sigma_1, s_2 = a^2 = \sigma_1^2$. Sử dụng công thức truy hồi Newton bằng cách quy nạp suy ra rằng $\sigma_k = 0, (k = 2, 3, \dots, n)$. Vậy trong các ẩn $x_1, x_2, \dots, x_n$ chỉ có một ẩn bằng a , các ẩn còn lại bằng không. Do đó nghiệm của hệ đã cho là các bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được xác định theo công thức

$$x_i = a, x_j = 0; j \neq i; i, j = 1, 2, \dots, n,$$

nghĩa là các bộ số

$$(a, 0, \dots, 0), (0, a, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, a).$$

3.6 Chứng minh đẳng thức. Phân tích đa thức thành nhân tử

Ví dụ 3.8 (Theo [5]). *Chứng minh rằng nếu $a+b+c+d=0$, thì*

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 = 9(abc + abd + acd + bcd)^2.$$

Lời giải. Theo giả thiết $\sigma_1 = s_1 = a + b + c + d = 0$, nên ta có:
 $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 = s_3^2 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)^2 = (3\sigma_3)^2 = 9\sigma_3^2 =$
 $= 9(abc + abd + acd + bcd)^2.$

Ví dụ 3.9 (Theo [5]). Chứng minh rằng nếu $a + b + c + d = 0$, thì

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 2(ab - cd)^2 + 2(ac - bd)^2 + 2(ad - bc)^2 + 4abcd.$$

Lời giải. Theo giả thiết $\sigma_1 = a + b + c + d = 0$, nên ta có:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.$$

Mặt khác, ta cũng có:

$$\begin{aligned} 2(ab - cd)^2 + 2(ac - bd)^2 + 2(ad - bc)^2 + 4abcd &= \\ &= 2[O(a^2b^2) - 6\sigma_4] + 4\sigma_4 = 2.O(a^2b^2) - 8\sigma_4 = \\ &= 2.\frac{1}{2}(s_2^2 - s_4) - 8\sigma_4 = s_2^2 - s_4 - 8\sigma_4 = \\ &= (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4) - 8\sigma_4 = \\ &= (-2\sigma_2)^2 - (2\sigma_2^2 - 4\sigma_4) - 8\sigma_4 = \\ &= 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4. \end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.10 (Theo [5]). Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &(a + b + c + d)^5 - [(b + c + d)^5 + (a + c + d)^5 + (a + b + d)^5 + (a + b + c)^5] + \\ &+ [(b + c)^5 + (a + d)^5 + (a + b)^5 + (c + d)^5 + (b + d)^5 + (a + c)^5] - [a^5 + b^5 + c^5 + d^5] = \\ &60abcd(a + b + c + d). \end{aligned}$$

Lời giải. Gọi biểu thức vế trái là $f(a, b, c, d)$ thì f là đa thức đối xứng thuần nhất bậc 5; vế phải chỉ là tích của hai đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1\sigma_4$, nên nếu biểu diễn f qua các đa thức đối xứng cơ sở của các số a, b, c, d thì f có dạng

$$f(a, b, c, d) = A\sigma_1^5 + B\sigma_1^3\sigma_2 + C\sigma_1^2\sigma_3 + D\sigma_1\sigma_2^2 + E\sigma_1\sigma_4 + F\sigma_2\sigma_3,$$

Trong đó A, B, C, D, E, F là các hằng số. Để tìm A, B, C, D, E, F ta sử dụng phương pháp đồng nhất thức (hệ số bất định). Cho a, b, c, d các giá trị tùy ý nào đó ta có giá trị tương ứng của các đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ được thể hiện trong bảng sau:

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	2	1	0	0
0	0	1	2	3	2	0	0
0	-2	3	6	7	0	-36	0
0	1	1	1	3	3	1	0
1	1	1	1	4	6	4	1

thay vào hệ thức $f(a, b, c, d)$ trên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 0 = A, \\ 0 = 32A + 8B + 2D, \\ 0 = 3^5A + 54B + 12D, \\ 0 = 7^5A - 36 \cdot 7^2C, \\ 0 = 3^5A + 3^4B + 3^2C + 3^3D + 3F, \\ 240 = 4^5A + 6 \cdot 4^3B + 4^3C + 4 \cdot 6^2D + 4E + 24F. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = 0, \\ E = 60, \\ F = 0. \end{cases}$$

Vậy ta có

$$f(a, b, c, d) = 60\sigma_1\sigma_4 = 60abcd(a + b + c + d).$$

Cuối cùng ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.11 (Theo [5]). *Phân tích biểu thức sau thành nhân tử*

$$(b + c)^3 + (c + a)^3 + (a + b)^3 + (a + d)^3 + (b + d)^3 + (c + d)^3.$$

Lời giải. Đặt

$f(a, b, c, d) = (b + c)^3 + (c + a)^3 + (a + b)^3 + (a + d)^3 + (b + d)^3 + (c + d)^3$ thì thấy rằng f là đa thức đối xứng thuần nhất bậc ba, nên nếu biểu diễn f qua các đa thức đối xứng cơ sở của các số a, b, c, d thì f có dạng

$$f(a, b, c, d) = A\sigma_1^3 + B\sigma_1\sigma_2 + C\sigma_3 \quad (3.22)$$

Trong đó A, B, C là các hằng số. Để tìm A, B, C ta sử dụng phương pháp đồng nhất thức (hệ số bất định). Cho a, b, c, d các giá trị tùy ý nào đó ta có giá trị tương ứng của các đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ được thể hiện trong bảng sau:

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	2	1	0	0
0	1	1	-2	0	-3	-2	0

thay vào hệ thức (3.22) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3 = A, \\ 12 = 8A + 2B, \\ 0 = -2C. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = -6, \\ C = 0. \end{cases}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= 3\sigma_1^3 - 6\sigma_1\sigma_2 = 3\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \\ &= 3(a + b + c + d)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2). \end{aligned}$$

Cuối cùng ta có kết quả

$$(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 + (a+d)^3 + (b+d)^3 + (c+d)^3 = 3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

Ví dụ 3.12 (Theo [5]). *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$f(x, y, z, t) = x^2y^2(z-t)(x-y) + x^2z^2(t-y)(x-z) + x^2t^2(y-z)(x-t) + y^2z^2(x-t)(y-z) + y^2t^2(z-x)(y-t) + z^2t^2(x-y)(z-t).$$

Lời giải. Ta thấy $f(x, y, z, t)$ là đa thức phản đối xứng bậc 6. Vận dụng Định lý của đa thức phản đối xứng ta có đồng nhất thức

$$f(x, y, z, t) = k.T(x, y, z, t) = k.(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t),$$

trong đó k là một hằng số nào đó; $T(x, y, z, t)$ là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất của các biến x, y, z, t . Để xác định k ta có thể cho x, y, z, t giá trị bất kỳ nào đó đôi một khác nhau, chẳng hạn cho $x=0, y=1, z=2, t=3$. Khi đó ta có

$$f(0, 1, 2, 3) = 12, T(0, 1, 2, 3) = 12 \\ \Rightarrow 12 = 12k \Leftrightarrow k = 1$$

Vậy ta có kết quả

$$f(x, y, z, t) = (x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t).$$

Ví dụ 3.13 (Theo [5]). *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$f(x, y, z, t) = x^4(z-y)(y-t)(z-t) + y^4(x-z)(x-t)(z-t) + z^4(y-x)(y-t)(x-t) - t^2.[x^2(z-y)(y-t)(z-t) + y^2(x-z)(x-t)(z-t) + z^2(y-x)(y-t)(x-t)].$$

Lời giải. Ta thấy $f(x, y, z, t)$ là đa thức phản đối xứng bậc 7. Vận dụng Định lý của đa thức phản đối xứng ta có đồng nhất thức

$$f(x, y, z, t) = k\sigma_1.T(x, y, z, t) = k\sigma_1.(x-y)(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)(z-t),$$

trong đó k là một hằng số nào đó; $T(x, y, z, t)$ là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất của các biến x, y, z, t . Để xác định k ta có thể cho x, y, z, t giá trị bất kỳ nào đó đôi một khác nhau, chẳng hạn cho $x=0, y=1, z=2, t=3$. Khi đó ta có

$$f(0, 1, 2, 3) = -72, T(0, 1, 2, 3) = 12, \sigma_1 = 6 \\ \Rightarrow -72 = 72k \Leftrightarrow k = -1$$

Vậy ta có kết quả

$$f(x, y, z, t) = -(x + y + z + t)(x - y)(x - z)(x - t)(y - z)(y - t)(z - t).$$

Ví dụ 3.14 (Theo [5]). *Phân tích đa thức sau thành nhân tử*

$$f(x, y, z, t) = x^3y^3(z - t)(x - y) + x^3z^3(t - y)(x - z) + x^3t^3(y - z)(x - t) + y^3z^3(x - t)(y - z) + y^3t^3(z - x)(y - t) + z^3t^3(x - y)(z - t).$$

Lời giải. Ta thấy $f(x, y, z, t)$ là đa thức phản đối xứng bậc 8. Vận dụng Định lý của đa thức phản đối xứng ta có đồng nhất thức

$$f(x, y, z, t) = (k\sigma_1^2 + l\sigma_2).T(x, y, z, t). \quad (3.23)$$

trong đó k, l là một hằng số nào đó; $T(x, y, z, t)$ là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất của các biến x, y, z, t . Để xác định k, l ta có thể cho x, y, z, t giá trị bất kì nào đó đôi một khác nhau, chẳng hạn cho $x=0, y=1, z=2, t=3$ và $x=-1, y=0, z=1, t=2$. Khi đó, thay vào hệ thức 3.23 ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 132 = 12(36k + 11l) \\ -12 = 12(4k - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ l = 1 \end{cases}$$

Vậy ta có kết quả

$$f(x, y, z, t) = (xy + xz + xt + yz + yt + zt)(x - y)(x - z)(x - t)(y - z)(y - t)(z - t).$$

Ví dụ 3.15 (Theo [5]). *Rút gọn biểu thức*

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Lời giải. Ta thấy mẫu thức chung của biểu thức là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất $T(a, b, c, d)$ của các biến a, b, c, d . Quy đồng mẫu số biểu thức trên thì tử số có dạng

$$a^4(b-c)(b-d)(c-d) - b^4(a-c)(a-d)(c-d) + c^4(a-b)(a-d)(b-d) - d^4(a-b)(a-c)(b-c).$$

Đặt biểu thức tử số trên là $f(a, b, c, d)$ thì ta thấy $f(a, b, c, d)$ là đa thức phản đối xứng bậc 7. Vận dụng Định lý của đa thức phản đối xứng ta có đồng nhất thức

$$f(a, b, c, d) = k\sigma_1.T(a, b, c, d) = k\sigma_1.(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

trong đó k là một hằng số nào đó; $T(a, b, c, d)$ là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất của các biến a, b, c, d . Để xác định k ta có thể cho a, b, c, d giá trị bất kì nào đó đôi một khác nhau, chẳng hạn cho $a=0, b=1, c=2, d=3$. Khi đó ta có

$$f(0, 1, 2, 3) = 72, T(0, 1, 2, 3) = 12, \sigma_1 = 6 \\ \Rightarrow 72 = 72k \Leftrightarrow k = 1.$$

Từ đó suy ra được

$$f(a, b, c, d) = (a + b + c + d)(a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d).$$

Vậy ta có kết quả

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \\ + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a + b + c + d.$$

Ví dụ 3.16 (Theo [5]). Rút gọn biểu thức sau

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} + \frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)} + \\ + \frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)} + \frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}.$$

Lời giải. Ta thấy mẫu thức chung của biểu thức là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất $T(a, b, c, d)$ của các biến a, b, c, d . Quy đồng mẫu số biểu thức trên thì tử số có dạng

$$a^2b^2c^2(a-b)(a-c)(b-c) - a^2b^2d^2(a-b)(a-d)(b-d) + \\ + a^2c^2d^2(a-c)(a-d)(c-d) - b^2c^2d^2(b-c)(b-d)(c-d).$$

Đặt biểu thức tử số trên là $f(a, b, c, d)$ thì ta thấy $f(a, b, c, d)$ là đa thức phản đối xứng bậc 9. Vận dụng Định lý của đa thức phản đối xứng ta có đồng nhất thức

$$f(a, b, c, d) = (k\sigma_1^3 + l\sigma_1\sigma_2 + m\sigma_3).T(a, b, c, d), \quad (3.24)$$

trong đó k, l, m là một hằng số nào đó; $T(a, b, c, d)$ là đa thức phản đối xứng đơn giản nhất của các biến a, b, c, d . Để xác định k, l, m ta có thể cho a, b, c, d giá trị bất kỳ nào đó đôi một khác nhau, ta có giá trị tương ứng của các đa thức đối xứng cơ sở $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, T(a, b, c, d)$ được thể hiện trong bảng sau:

a	b	c	d	σ_1	σ_2	σ_3	$T(a, b, c, d)$
-3	0	1	2	0	-7	-6	120
0	1	2	3	6	11	6	12
-1	0	1	2	2	-1	-2	12

thay vào hệ thức (3.24) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -720 = -720m, \\ 72 = 12(216k + 66l + 6m), \\ -24 = 12(8k - 2l - 2m). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1, \\ k = 0, \\ l = 0. \end{cases}$$

Vậy ta có

$$f(a, b, c, d) = \sigma_3.T(a, b, c, d).$$

Cuối cùng ta có kết quả

$$\begin{aligned} & \frac{a^2b^2c^2}{(a-d)(b-d)(c-d)} + \frac{a^2b^2d^2}{(a-c)(b-c)(d-c)} + \\ & + \frac{a^2c^2d^2}{(a-b)(c-b)(d-b)} + \frac{b^2c^2d^2}{(b-a)(c-a)(d-a)} = \\ & = \sigma_3 = abc + abd + acd + bcd. \end{aligned}$$

,

Kết luận

Luận văn đã trình bày được một số kết quả sau:

1. Trình bày cơ sở lý thuyết của các đa thức đối xứng và các ứng dụng của nó trong đại số sơ cấp như giải phương trình, hệ phương trình, chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, phân tích đa thức thành nhân tử,...
2. Xây dựng được một số bài toán hay và khó dành cho học sinh khá và giỏi từ các đa thức đối xứng cơ sở.
3. Luận văn đã chọn lọc và giới thiệu một số đề thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế liên quan đến tính đối xứng trong đại số.
4. Trình bày khá nhiều công thức tính cho tổng lũy thừa của các biến theo các đa thức đối xứng cơ sở của các biến tương ứng.
5. Tiếp tục nghiên cứu để xây dựng các bài toán đại số liên quan đến đa thức đối xứng n biến ($n \geq 4$) cũng là công việc mới mẻ và là bài toán mở cho tác giả và những ai quan tâm đến luận văn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Bộ giáo dục và đào tạo - Hội toán học Việt Nam (2009), *Các bài toán chọn lọc - 45 năm tạp chí Toán học và tuổi trẻ*, NXB Giáo Dục.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên) Nguyễn Văn Ngọc, 2009, *Chuyên đề đa thức đối xứng và áp dụng*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [3] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Nguyễn Đăng Phát, Trịnh Đào Chiến, (2008), *Chuyên đề chọn lọc về đa thức và áp dụng*, NXB Giáo dục Việt Nam .
- [4] Nguyễn Văn Mậu, (1993), *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [5] V.G. Boltianski, N. Ia. Vilenkin, (1967), *Phép đối xứng trong đại số*, NXB Nauka, Moscow (Tiếng Nga).