ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG VĂN THẮNG

NỘI SUY CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ ĐỒNG BẬC

LUẬN VĂN THẠC SĨ

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

Giáo viên hướng dẫn:
GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN, 2012

Mục lục

Mở đầu **3**

1 Các bất đẳng thức cổ điển **5**

1.1 Bất đẳng thức Cauchy 5

1.2 Bất đẳng thức giữa các trung bình cộng và trung bình nhân 13

1.3 Bất đẳng thức Bernoulli và các bài toán liên quan. 28

2 Một số bài toán nội suy bất đẳng thức **38**

2.1 Nội suy bất đẳng thức bậc hai trên một đoạn. 38

2.2 Nội suy tam thức bậc tùy ý. 46

2.3 Nội suy bất đẳng thức trong lớp hàm đơn điệu 53

Kết luận **75**

Tài liệu tham khảo 76

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Bất đẳng thức là một nội dung quan trọng trong chương trình toán phổ thông thường, dạng toán này thường xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh giỏi trong nước và Quốc tế. Với hệ thống lí thuyết, bài tập và phương pháp giải đa dạng nên việc dạy và học chuyên đề này gặp rất nhiều khó khăn.

Với mong muốn có được một tài liệu để bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề này, đồng thời giúp học sinh tìm hiểu các kết quả về các bất đẳng cổ điển của các nhà toán học đã nghiên cứu và có nhìn nhận khái quát được nhiều các bất đẳng thức mà học sinh vẫn thường gặp, để từ đó có thể sáng tác được rất nhiều các bài toán về bất đẳng thức nên tôi đi tìm hiểu và nghiên cứu đề tài này.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục tiêu mà đề tài cần phải đạt được là từ một bài toán quen thuộc hay một bất đẳng thức đã biết, ta cần khái quát, mở rộng chúng ra để từ đó có thể tạo ra được rất nhiều các bất đẳng thức.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài tập trung nghiên cứu một vài bất đẳng thức cổ điển và các bài toán nội suy bất đẳng thức thông qua các ví dụ.

4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu trực tiếp từ các tài liệu của giáo viên hướng dẫn, tủ sách chuyên toán và các kỷ yếu hội thảo khoa học về chuyên toán cũng như từ bài học kinh nghiệm giảng dạy của các đồng nghiệp và các bạn học viên trong lớp.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi cấp trung học phổ thông.

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 2 chương.

Chương 1.*Các bất đẳng thức cổ điển.*
Nội dung chương này các bất đẳng thức: Bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức Bernoulli. Đây là cơ sở lý thuyết để vận dụng cho các bài toán ở chương sau.

Chương 2.*Một số bài toán nội suy.*
Chương này trình bày một số bài toán nội suy: Nội suy bất đẳng thức bậc hai trên một đoạn, nội suy tam thức bậc tùy ý và nội suy bất đẳng thức trong lớp hàm đơn điệu.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Nhà giáo nhân dân Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin bày tỏ sâu sắc tới Giáo sư đã tận tình giúp đỡ tác giả hoàn thành luận văn này.
Trong quá trình học tập và làm luận văn, tác giả nhận được sự quan tâm, giúp đỡ của Khoa Toán, Phòng đào tạo Sau đại học của Trường Đại học Khoa học-Đại học Thái Nguyên, các thầy cô đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán K4C. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu đó .

Chương 1

Các bất đẳng thức cổ điển

Nội dung của chương này là trình bày các bất đẳng thức cổ điển quan trọng như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức Bernoulli. Đây là cơ sở lý thuyết để vận dụng cho các bài toán ở chương sau.

1.1 Bất đẳng thức Cauchy

Định lý 1.1 (Xem [1])**.** Với mọi bộ số $\big(x_i\big), \big(y_i\big)$, ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big). \tag{1.1}$$

Dấu đẳng thức trong (1.1) xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số $\big(x_i\big), \big(y_i\big)$ tỉ lệ với nhau, tức là tồn tại cặp số α, β không đồng thời bằng 0, sao cho

$$\alpha x_i + \beta y_i = 0, \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Chứng minh. Xét tam thức bậc hai sau đây

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i t - y_i)^2.$$

Sau khi khai triển ta có

$$f(t) = t^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2t \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Mặt khác vì $f(t) \geqslant 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R}$ nên theo định lý về dấu của tam thức bậc hai ta có

$$\Delta' \le 0 \Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) \le 0.$$

Hay

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

Hệ quả 1.1. Với hai bộ số $\big(x_i\big)$ và $\big(y_i\big), y_i > 0,\ \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, ta luôn có

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \ge \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}.$$

Bất đẳng thức này thường được gọi là bất đẳng thức Schwarz.

Chứng minh. Áp dụng định lý 1.1 với hai bộ số $\Big(\dfrac{x_i}{\sqrt{y_i}}\Big), \big(\sqrt{y_i}\big)$, ta có

$$\Big(\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}\sqrt{y_1} + \frac{x_2}{\sqrt{y_2}}\sqrt{y_2} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}\sqrt{y_n}\Big)^2$$

$$\le \Big(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n}\Big)\Big(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\Big).$$

$$\Leftrightarrow \Big(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\Big)^2 \le \Big(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n}\Big)\Big(y_1 + y_2 + \cdots + y_n\Big).$$

Hay

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \ge \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}.$$

Một số bất đẳng thức liên quan.

Định lý 1.2 (Xem [1]). Với mọi cặp dãy số thực $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ và $0 \le x \le 1$, ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x\sum_{i\neq j} a_i b_j\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x\sum_{i<j} a_i a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x\sum_{i<j} b_i b_j\Big).$$

Rõ ràng với $x = 0$, ta thu được bất đẳng thức Cauchy.

Chứng minh. Xét tam thức bậc hai theo y:

$$f(y) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x\sum_{i<j} a_i a_j\Big)y^2 - 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x\sum_{i\neq j} a_i b_j\Big)y + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x\sum_{i<j} b_i b_j\Big)$$

$$= (1-x)\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k y - b_k\Big)^2 + x\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big(a_k y - b_k\Big)\Big)^2.$$

Dễ thấy $f(y) \geq 0$ với mọi y, và vì vậy ta suy ra ngay điều cần chứng minh.

Định lý 1.3 (H.W.Mclaughlin)**.** Với mọi cặp dãy số thực $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ta đều có

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) \geq \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i\Big)\Big)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_i b_j - a_j b_i - a_{n+i} b_{n+j} + a_{n+j} b_{n+i} = 0$$

và

$$a_i b_{n+j} - a_j b_{n+i} + a_{n+i} b_j - a_{n+j} b_i = 0$$

ứng với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Chứng minh. Chứng minh được suy ra trực tiếp từ đẳng thức

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i\Big)\Big)^2$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(a_i b_j - a_j b_i - a_{n+i} b_{n+j} + a_{n+j} b_{n+i}\Big)^2 +$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(a_i b_{n+j} - a_j b_{n+i} + a_{n+i} b_j - a_{n+j} b_i\Big)^2.$$

Định lý 1.4 (Xem [1])**.** Với mọi bộ số thực $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sao cho $a_k^2 + b_k^2 \neq 0$,k=1,2,...,n, ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k^2 + b_k^2\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2 b_k^2}{a_k^2 + b_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Bất đẳng thức đầu xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a và b tỷ lệ và bất đẳng sau xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi các véctơ $\{|a_k|\}_{k=1}^n$ và $\{|b_k|\}_{k=1}^n$ trực giao.

Bài toán 1.1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{5a^2+\Big(b+c\Big)^2}+\frac{b^2}{5b^2+\Big(c+a\Big)^2}+\frac{c^2}{5c^2+\Big(a+b\Big)^2}\leq\frac{1}{3}.$$

Giải.
Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{9a^2}{5a^2+\Big(b+c\Big)^2}=\frac{9a^2}{(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)}.$$

$$\leq a^2\Big(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2a^2+bc}\Big).$$

Suy ra

$$9VT\leq\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}$$

$$=1+\frac{2a^2}{2a^2+bc}+\frac{2b^2}{2b^2+ca}+\frac{2c^2}{2c^2+ab}=4-(\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}).$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\geq$$

$$\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(2a^2+bc)+ca(2b^2+ca)+ab(2c^2+ab)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2}=1$$

Từ đây ta thu được điều cần chứng minh.

Bài toán 1.2 (USAMO 2009)**.** Cho $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})\leq\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2.$$

Chứng minh rằng $max\{a_i\} \leqslant 4\min\{a_i\}$.

Giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\min\{a_i\} = a_1; max\{a_i\} = a_2$.
Khi đó ta cần chứng minh $a_2 \leqslant 4a_1$.
Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}) = [(a_1 + a_2) + a_3 + \cdots + a_n]$$

$$\times\Big[(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}) + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}\Big]$$

$$\geq \Big(\sqrt{(a_1 + a_2)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})} + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-2\ so}\Big)^2 = \Big(\sqrt{(a_1 + a_2)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2})} + n - 2\Big)^2.$$

Do đó, từ giả thuyết ta suy ra

$$(a_1 + a_2)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}) \leqslant \frac{25}{5} \Leftrightarrow \Big(\frac{a_2}{a_1}\Big)^2 - \frac{17}{4}\frac{a_2}{a_1} + 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \leqslant 4 \Leftrightarrow a_2 \leqslant 4a_1.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Bài toán 1.3 (MO Romanian 2004)**.** Chứng minh rằng, với mọi $a, b, c > 0$, ta đều có

$$\frac{a}{bc(c + a)} + \frac{b}{ca(a + b)} + \frac{c}{ab(b + c)} \geq \frac{27}{2\Big(a + b + c\Big)^2}.$$

Giải. Đặt

$$\frac{a}{bc(c + a)} + \frac{b}{ca(a + b)} + \frac{c}{ab(b + c)} = M$$

Ta có

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}} + \sqrt{\frac{b}{ca}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 =$$

$$= \Big(\sqrt{\frac{a}{bc(c + a)}}\sqrt{c + a} + \sqrt{\frac{b}{ca(a + b)}}\sqrt{a + b} + \sqrt{\frac{c}{ab(b + c)}}\sqrt{b + c}\Big)^2$$

$$\leq \left[\frac{a}{bc(c + a)} + \frac{b}{ca(a + b)} + \frac{c}{ab(b + c)}\right]\left[2\Big(a + b + c\Big)\right] = M\left[2\Big(a + b + c\Big)\right].$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{b}{ca}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2\geq\sqrt{\frac{a}{bc}}\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}\sqrt{\frac{c}{ab}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\sqrt{\frac{a}{bc}}$$

$$\Leftrightarrow\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{b}{ca}}\Big)^2+\Big(\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2+2\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}\sqrt{\frac{c}{ab}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\sqrt{\frac{a}{bc}}\Big)$$

$$\geq3\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}\sqrt{\frac{c}{ab}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\sqrt{\frac{a}{bc}}\Big)$$

$$\Leftrightarrow\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2\geq3\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)\geq\frac{27}{a+b+c}$$

nên suy ra

$$M\geq\frac{27}{2(a+b+c)}.$$

Bài toán 1.4 (MO USA). Xét các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}.$$

Giải. Ta có

$$P=\frac{abc}{a^2(b+c)}+\frac{abc}{b^2(c+a)}+\frac{abc}{c^2(a+b)}=\frac{bc}{a(b+c)}+\frac{ac}{b(c+a)}+\frac{ab}{c(a+b)}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Đặt $\quad\frac{1}{a}=x,\frac{1}{b}=y,\frac{1}{c}=z.$

Khi đó

$$P=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=\frac{x}{y+z}+1+\frac{y}{z+x}+1+\frac{z}{x+y}+1-3$$

$$=(x+y+z)\Big(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\Big)-3$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\Big(y+z\Big)+\Big(z+x\Big)+\Big(x+y\Big)\Big]\Big(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\Big)-3\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

Vậy $P_{\min}=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 1.5 (Olympic Trung Quốc)**.** Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(ab+bc+ca)\Big(\frac{ab}{ab+bc}+\frac{bc}{bc+ca}+\frac{ca}{ca+ab}\Big) \ge \Big(\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}}+\frac{bc}{\sqrt{bc+ca}}+\frac{ca}{\sqrt{ca+ab}}\Big)^2.$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(ab+bc+ca)\frac{ab}{ab+bc} = ab + \frac{abca}{ab+bc} \le ab + \frac{abca}{4}\Big(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}\Big)$$

$$= ab + \frac{ca}{4} + \frac{a^2}{4}\cdot$$

Từ đó suy ra

$$(ab+bc+ca)\Big(\frac{ab}{ab+bc}+\frac{bc}{bc+ca}+\frac{ca}{ca+ab}\Big) \le \frac{a^2+b^2+c^2}{4} + \frac{5(ab+bc+ca)}{4}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{4} + \frac{3}{4}(ab+bc+ca) \le \frac{(a+b+c)^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.6 (Iran MO 1998)**.** Với a, b, c lớn hơn hoặc bằng 1 và thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+b+c} \ge \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}.$$

Giải. Ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \Leftrightarrow \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} = 1.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy,thì

$$\begin{aligned} a+b+c &= \Big(a+b+c\Big)\Big(\frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{b}+\frac{c-1}{c}\Big) \\ &\geq \Big(\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\Big)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}. \end{aligned}$$

Bài toán 1.7 (Việt Nam MO 1991)**.** Giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y} \geq x^2+y^2+z^2.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\Big(\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\Big)\Big(\frac{x^2z}{y}+\frac{y^2x}{z}+\frac{z^2y}{x}\Big) \geq \Big(x^2+y^2+z^2\Big)^2.$$

Mặt khác, vì $x \geq y \geq z$ nên

$$\Big(\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\Big)-\Big(\frac{x^2z}{y}+\frac{y^2x}{z}+\frac{z^2y}{x}\Big) =$$

$$= \frac{\Big(xy+yz+zx\Big)\Big(x-y\Big)\Big(y-z\Big)\Big(x-z\Big)}{xyz} \geq 0$$

hay

$$\frac{x^2z}{y}+\frac{y^2x}{z}+\frac{z^2y}{x} \leq \frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Bài tập áp dụng

Bài 1. Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$, ta đều có

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Bài 2. Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương, ta đều có

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)}+\frac{b^4}{c^2(a+b)}+\frac{c^4}{c^2(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Bài 3. Giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho có tổng bằng 1, ta đều có

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k + \frac{1}{a_k}\right)^2 \geq n^3 + 2n + \frac{1}{n}.$$

Bài 5. Với a,b,c,d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

1.2 Bất đẳng thức giữa các trung bình cộng và trung bình nhân

Định lý 1.5 (Định lí về các giá trị trung bình cộng và trung bình nhân)**.** Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm. Khi đó

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{1.2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Chứng minh. (Đây là quy nạp theo hướng (lên- xuống) do Cauchy đề xuất vào năm 1821.)

Từ hệ thức bậc hai

$$u_1^2 + u_2^2 \geq 2u_1u_2, \quad \forall u_1u_2 \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

ta suy ra

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}, \forall x_1, x_2 \geq 0. \tag{1.4}$$

Thay x_1, x_2 lần lượt bởi các biến $\frac{x_1 + x_2}{2}$ và $\frac{x_3 + x_4}{2}$, từ (1.3) ta nhận được

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}\frac{x_3 + x_4}{2}}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}. \tag{1.5}$$

Tiếp tục như trên ta thấy bất đẳng thức (1.2) đúng với $n = 2, 4, \dots$ và nói chung đúng với n là lũy thừa của 2. Đây chính là quy nạp theo hướng lên trên.

Bây giờ ta thực hiện quy nạp theo hướng xuống phía dưới. Ta chứng minh rằng, khi bất đẳng thức (1.2) đúng với $n (n > 1)$ thì nó đúng với $n - 1$. Thay x_n trong (1.2) bởi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

và giữ nguyên các biến x_i khác, từ (1.2) ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq$$

$$\geq \Big(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}} \Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\Big)^{\frac{1}{n}}$$

hay

$$\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\Big)^{\frac{n}{n-1}} \geq \Big(x_1 x_2 \dots x_{n-1}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Rút gọn biểu thức trên, ta thu được

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}.$$

Từ kết quả đã chứng minh theo cặp hướng (lên-xuống),ta thu được phép chứng minh quy nạp của Định lí 1.5.

Hệ quả 1.2 (Bất đẳng thức GH)**.** Với mọi bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, ta đều có

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{1}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AG đối với bộ số $x_k := \dfrac{1}{a_k}$ (k=1,2,. . . ,n), ta có ngay bất đẳng thức GH.

Định lý 1.6 (Bất đẳng thức AG suy rộng)**.** Giả sử cho trước hai cặp dãy số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$; $p_1, p_2, \dots, p_n$. Khi đó

$$x_1^{p_1}.x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \leq \Big(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\Big)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Chứng minh. Đặt

$$s = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$e^{x-1} \geqslant x, \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

ta thu được hệ

$$\begin{cases} x_1 \leq se^{\frac{x_1}{s}-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n \leq se^{\frac{x_n}{s}-1} \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} x_1^{p_1} \leq s^{p_1}e^{\left(\frac{x_1}{s}-1\right)p_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{p_n} \leq s^{p_n}e^{\left(\frac{x_n}{s}-1\right)p_n} \end{cases}$$

Vậy nên

$$x_1^{p_1}.x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n} \leq s^{p_1+p_2+\cdots+p_n}e^{\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{s}-\left(p_1+p_2+\cdots+p_n\right)},$$

hay

$$x_1^{p_1}.x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n} \leq s^{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x_1}{s} = \dfrac{x_2}{s} = \cdots = \dfrac{x_n}{s} = 1$ hay $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Chú ý 1.1. Bất đẳng thức AG suy rộng có thể viết

$$\sum_{k=1}^{n} p_kx_k \geq \Big(\sum_{k=1}^{n} p_k\Big)\Big(\prod_{k=}^{n} x_k^{p_k}\Big)^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}.$$

Hệ quả 1.3. Giả sử cho trước hai cặp dãy số dương $x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ với

$$x_1^{\beta_1}.x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n} = M.$$

Khi đó
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \ge \Big(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\Big)\Big(M\prod_{k=}^{n}\Big(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\Big)^{\beta_k}\Big)^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}}$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\alpha_1 x_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2 x_2}{\beta_2} = \cdots = \dfrac{\alpha_k x_k}{\beta_k}$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức AG suy rộng, ta có
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n}\beta_k\Big(\frac{\alpha_k x_k}{\beta_k}\Big) \ge \Big(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\Big)\Big(\prod_{k=}^{n}\Big(\frac{\alpha_k x_k}{\beta_k}\Big)^{\beta_k}\Big)^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}}$$
hay
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \ge \Big(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\Big)\Big(M\prod_{k=}^{n}\Big(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\Big)^{\beta_k}\Big)^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{\alpha_1 x_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2 x_2}{\beta_2} = \cdots = \dfrac{\alpha_k x_k}{\beta_k}$.

Định lý 1.7 (Bất đẳng thức Holder)**.** Với m dãy số dương
$$\Big(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\Big),$$
$$\Big(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\Big),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Big(a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}\Big),$$
ta có
$$\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{\mathrm{ij}}\Big) \ge \Big(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{\mathrm{ij}}}\Big)^{m}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi m dãy đó tương ứng tỉ lệ.

Chứng minh. Theo bất đẳng thức AG, ta có
$$\frac{a_{11}}{a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}} + \frac{a_{21}}{a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}} + \cdots + \frac{a_{m1}}{a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}}$$
$$\ge m\sqrt[m]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}a_{i1}}{\prod\limits_{i=1}^{m}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{\mathrm{ij}}\Big)}},$$

$$\frac{a_{12}}{a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}}+\frac{a_{22}}{a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}}+\cdots+\frac{a_{m2}}{a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}}$$

$$\geq m\sqrt[m]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}a_{i2}}{\prod\limits_{i=1}^{m}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{\mathrm{ij}}\Big)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_{1n}}{a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}}+\frac{a_{2n}}{a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}}+\cdots+\frac{a_{mn}}{a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}}$$

$$\geq m\sqrt[m]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}a_{in}}{\prod\limits_{i=1}^{m}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{\mathrm{ij}}\Big)}}.$$

Cộng các bất đẳng thức lại ta được

$$m\geq m\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod\limits_{i=1}^{m}a_{\mathrm{ij}}}}{\sqrt[m]{\prod\limits_{i=1}^{m}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{\mathrm{ij}}\Big)}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{\mathrm{ij}}\Big)}\geq\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{\mathrm{ij}}},$$

hay

$$\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{\mathrm{ij}}\Big)\geq\Big(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}a_{\mathrm{ij}}}\Big)^{m}.$$

Hệ quả 1.4. Với a,b,c,x,y,z,m,n,p là các số thực dương ta luôn có

$$\Big(a^3+b^3+c^3\Big)\Big(x^3+y^3+z^3\Big)\Big(m^3+n^3+p^3\Big)\geq\Big(axm+byn+czp\Big)^3.$$

Hệ quả 1.5. Với $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số thực dương ta có

$$\Big(1+a_1\Big)\Big(1+a_2\Big)\ldots\Big(1+a_n\Big)\geq\Big(1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\Big)^n.$$

Bài toán 1.8. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_m$ là các số không âm và $n = 1, 2, \dots$ Khi đó
$$\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\Big)^n \le \frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n}{m}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$.

Giải.
Áp dụng bất đẳng thức AG với bộ n số không âm $\dfrac{x_k^n}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n}, \dfrac{1}{m}, \dots, \dfrac{1}{m}$, ta có
$$\frac{x_k^n}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m} \ge n \sqrt[n]{\frac{x_k^n}{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n} \cdot \frac{1}{m} \cdots \frac{1}{m}}$$ với k=1,2,...,m.
Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được
$$n \ge \frac{n}{\sqrt[n]{\Big(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n\Big) m^{n-1}}} \Big(x_1 + x_2 + \cdots + x_m\Big)$$
hay
$$\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\Big)^n \le \frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n}{m}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$.

Bài toán 1.9 (Thi chọn Đội tuyển Việt Nam 2005)**.** Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng
$$\frac{a^3}{\Big(a+b\Big)^3} + \frac{b^3}{\Big(b+c\Big)^3} + \frac{c^3}{\Big(c+a\Big)^3} \ge \frac{3}{8}.$$

Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\frac{1}{\Big(1+\dfrac{b}{a}\Big)^3} + \frac{1}{\Big(1+\dfrac{c}{b}\Big)^3} + \frac{1}{\Big(1+\dfrac{c}{a}\Big)^3} \ge \frac{3}{8}.$$
Theo bất đẳng thức AG, ta có
$$\frac{1}{\Big(1+\dfrac{b}{a}\Big)^3} + \frac{1}{\Big(1+\dfrac{b}{a}\Big)^3} + \frac{1}{8} \ge \frac{3}{2} \frac{1}{\Big(1+\dfrac{b}{a}\Big)^2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{a}\right)^3} \geq \frac{3}{4}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{a}\right)^2}\right]-\frac{3}{16}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{a}\right)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Đặt $\quad \frac{b}{a}=\frac{xy}{z^2}; \frac{c}{b}=\frac{yz}{x^2}; \frac{a}{c}=\frac{zx}{y^2}.$

Khi đó

$$\frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zx)^2}+\frac{z^4}{(z^2+xy)^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zx)^2}+\frac{z^4}{(z^2+xy)^2}$$

$$\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+2xyz(x+y+z)}.$$

Lại có

$$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geq 2xyz(x+y+z); x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \leq \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2,$$

nên

$$\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zx)^2}+\frac{z^4}{(z^2+xy)^2} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\frac{4}{3}(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{3}{4}.$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.10 (Thi chọn đội tuyển Việt Nam dự IMO -2001)**.** Xét bộ ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$21ab+2bc+12ca \leq 12.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

Giải. Với x, y, z là các số thực dương tùy ý (sẽ được chọn sau),áp dụng bất đẳng thức AG suy rộng, ta có

$$P = x\frac{1}{ax} + y\frac{2}{by} + z\frac{3}{cz} \geq \Big(x+y+y\Big)\left[\Big(\frac{1}{ax}\Big)^x\Big(\frac{2}{by}\Big)^y\Big(\frac{3}{cz}\Big)^z\right]^{\dfrac{1}{x+y+y}}$$

$$= \frac{x+y+y}{\left[\Big(\frac{abxy}{2}\Big)^{\frac{x+y-z}{2}}\Big(\frac{bcyz}{6}\Big)^{\dfrac{-x+y+z}{2}}\Big(\frac{cazx}{3}\Big)^{\dfrac{x-y+z}{2}}\right]^{\dfrac{1}{x+y+y}}}$$

$$\geq \frac{\Big(x+y+y\Big)^2}{\dfrac{xy\Big(x+y-z\Big)}{4}ab + \dfrac{yz\Big(-x+y+z\Big)}{12}bc + \dfrac{zx\Big(x-y-z\Big)}{6}ca}.$$

hay

$$P \geq \frac{\Big(x+y+y\Big)^2}{\dfrac{xy\Big(x+y-z\Big)}{4}ab + \dfrac{yz\Big(-x+y+z\Big)}{12}bc + \dfrac{zx\Big(x-y-z\Big)}{6}ca}. \tag{1.6}$$

Chọn x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\frac{xy\Big(x+y-z\Big)}{4.12}ab + \frac{yz\Big(-x+y+z\Big)}{12.2}bc + \frac{zx\Big(x-y-z\Big)}{6.8}ca$$

hay $(x, y, z) = (6, 5, 4)$.

Suy ra $P \geq \dfrac{15}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6a} = \dfrac{2}{5b} = \dfrac{3}{4c} \\ 15ab = \dfrac{10bc}{3} = 8ca \\ 21ab + 2bc + 12ca = 12 \end{cases} \quad hay \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{4}{5} \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $\min P = \dfrac{15}{2}$ khi $\Big(a, b, c\Big) = \Big(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}, 3\Big)$.

Bài toán 1.11. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương sao cho $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m ta có

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geq a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}.$$

Giải. Sử dụng bất đẳng thức AG, ta có

$$(m-1)a_k^m + 1 = a_k^m + a_k^m + \cdots + a_k^m + 1 \geq m\sqrt[m]{a_k^{m(m-1)}} = ma_k^{m-1}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Cộng các bất đẳng thức lại ta được

$$\Big(m-1\Big)\Big(a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m\Big) + n \geq m\Big(a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1}\Big).$$

Ta chứng minh

$$a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1} \geq n.$$

Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$a_k^{m-1} + (m-2) = a_k^{m-1} + 1 + 1 + \cdots + 1$$

$$\geq (m-1)\sqrt[m-1]{a_k^{m-1}} = \Big(m-1\Big)a_k, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Cộng các bất đẳng thức lại ta được

$$a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1} + n(m-2) \geq (m-1)\Big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\Big) = (m-1)n.$$

$$\Rightarrow a_1^{m-1} + a_2^{m-1} + \cdots + a_n^{m-1} \geq n.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Bài toán 1.12. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

Giải. Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$a^5 + a^5 + a^5 + b^5 + b^5 \geq 5a^3b^2$$

$$a^5 + a^5 + b^5 + b^5 + b^5 \geq 5a^2b^3$$

Suy ra

$$a^5 + b^5 \geq a^2b^2\Big(a + b\Big).$$

Do đó

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2\Big(a + b\Big) + ab} = \frac{1}{ab\Big(a + b\Big) + 1} = \frac{c}{a + b + c}.$$

Tương tự,ta có

$$\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a + b + c}$$

$$\frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{b}{a + b + c}$$

Cộng các bất đẳng thức lại ta được

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 1.13 (India MO 2003)**.** Cho a, b là các số thực dương và thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh rằng

$$a^3b^3(a^3 + b^3) \leq 2.$$

Giải. Ta có

$$a^3b^3(a^3 + b^3) = a^3b^3(a + b)\left[(a + b)^2 - 3ab\right]$$

nên từ giả thuyết suy ra

$$a^3b^3(a^3 + b^3) = 2a^3b^3(4 - 3ab) = 2(4a^3b^3 - 3a^4b^4).$$

Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$a^4b^4 + a^4b^4 + a^4b^4 + 1 \geq 4\sqrt[4]{(a^4b^4)^3} = 4a^3b^3$$

hay

$$3a^4b^4 + 1 \geq 4a^3b^3 \Leftrightarrow 4a^3b^3 - 3a^4b^4 \leqslant 1.$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 1.14. Cho m, n là các số nguyên dương và đa thức

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1 \in \mathbb{R}[x],$$

vơi $a_i \geq 0(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.Biết rằng P(x) có n nghiệm thực. Chứng minh rằng

$$P(m) \geq \Big(m+1\Big)^n.$$

Giải. Do $a_i \geq 0(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ và $P(0) = 1 > 0$ nên các nghiệm của $P(x)$ đều âm. Gọi các nghiệm của $P(x)$ là

$$-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\Big(x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n\Big).$$

Theo Định lí Viète thì

$$x_1x_2 \ldots x_n = 1$$

Vì hệ số bậc cao nhất của $P(x)$ bằng 1 nên

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n}\Big(x + x_i\Big).$$

Theo bất đẳng thức AG, ta có

$$P(m) = \prod_{i=1}^{n}\Big(m + x_i\Big) \geq \Big(m+1\Big)^n \sqrt[m+1]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \Big(m+1\Big)^n.$$

Bài toán 1.15. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$2\Big(a^3 + b^3 + c^3\Big) \geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} + ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\Big(a^3 + b^3 + c^3\Big)^2 \geq \frac{1}{3}\Big(a^2 + b^2 + c^2\Big)^3. \tag{1.7}$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

Suy ra

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right). \tag{1.8}$$

Từ (1.7) và (1.8) ta có

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)^2 \geq \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right). \tag{1.9}$$

Lại theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\left[2(a^2+b^2)+2(b^2+c^2)+2(c^2+a^2)\right]$$

$$\geq \frac{1}{4}\left(ab\sqrt{2(a^2+b^2)}+bc\sqrt{2(b^2+c^2)}+ca\sqrt{2(c^2+a^2)}\right)^2. \tag{1.10}$$

Từ (1.9) và (1.10) đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.16. Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 2$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3 \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)^2 \geq \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}\left(a+b+c\right)^2.$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]$$

$$\geq \frac{1}{6}\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \tag{1.11}$$

Mặt khác,theo bất đẳng thức AM, ta có

$$a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b} \geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{abc\sqrt{8abc}} = 6. \tag{1.12}$$

Từ (1.11) và (1.12) suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.17. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{2012}}{b^{2011}} + \frac{b^{2012}}{c^{2011}} + \frac{c^{2012}}{a^{2011}} \geq \frac{a^{2011}}{b^{2010}} + \frac{b^{2011}}{c^{2010}} + \frac{c^{2011}}{a^{2010}}.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\frac{a^{2012}}{b^{2011}} + \frac{b^{2012}}{c^{2011}} + \frac{c^{2012}}{a^{2011}}\right)^{2010}\left(a+b+c\right) \geq \left(\frac{a^{2011}}{b^{2010}} + \frac{b^{2011}}{c^{2010}} + \frac{c^{2011}}{a^{2010}}\right)^{2011}$$

$$\left(\frac{a^{2011}}{b^{2010}} + \frac{b^{2011}}{c^{2010}} + \frac{c^{2011}}{a^{2010}}\right)\left(b+c+a\right)^{2010} \geq \left(a+b+c\right)^{2011}.$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 1.18 (USA)**.** Với a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^5 - a^2 + 3\right)\left(b^5 - b^2 + 3\right)\left(c^5 - c^2 + 3\right) \geq \left(a+b+c\right)^3.$$

Giải. Trước hết ta chứng minh

$$a^5 - a^2 + 3 \geq a^3 + 2$$

Theo bất đẳng thức AM,ta có

$$a^5 + a^5 + a^5 + 1 + 1 \geq 5a^3,$$

$$a^5 + a^5 + 1 + 1 + 1 \geq 5a^2,$$

Cộng hai bất đẳng thức trên ta được

$$a^5 + 1 \geq a^3 + a^2 \Leftrightarrow a^5 - a^2 + 3 \geq a^3 + 2.$$

Tương tự

$$b^5 - b^2 + 3 \geq b^3 + 2.$$

$$c^5 - c^2 + 3 \geq c^3 + 2.$$

Do đó

$$\left(a^5 - a^2 + 3\right)\left(b^5 - b^2 + 3\right)\left(c^5 - c^2 + 3\right) \geq \left(a^3 + 2\right)\left(b^3 + 2\right)\left(c^3 + 2\right) \tag{1.13}$$

Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(a^3 + 2\right)\left(b^3 + 2\right)\left(c^3 + 2\right) = \left(a^3 + 1 + 1\right)\left(1 + b^3 + 1\right)\left(1 + 1 + c^3\right) \geq \left(a+b+c\right)^3. \tag{1.14}$$

Từ(1.13) và (1.14) suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.19 (IMO 2001)**.** Với a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\Big)^2$$

$$\times\Big[a\Big(a^2+8bc\Big)+b\Big(b^2+8ca\Big)+c\Big(c^2+8ab\Big)\Big]\geq\Big(a+b+c\Big)^3 \qquad (1.15)$$

Ta cần chứng minh

$$\Big(a+b+c\Big)^3\geq a\Big(a^2+8bc\Big)+b\Big(b^2+8ca\Big)+c\Big(c^2+8ab\Big) \qquad (1.16)$$

Thật vậy, bất đẳng thức (1.16)

$$\Leftrightarrow\Big(a+b+c\Big)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

$$\Leftrightarrow c\Big(a-b\Big)^2+b\Big(c-a\Big)^2+a\Big(b-c\Big)^2\geq 0.$$

Từ(1.15) và (1.16) suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.20. Với a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a^3+7}+\sqrt[3]{b^3+7}+\sqrt[3]{c^3+7}\leq 2(a+b+c).$$

Giải. Do $abc = 1$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương tương với bất đẳng thức

$$\sqrt[3]{a^3+7abc}+\sqrt[3]{b^3+7abc}+\sqrt[3]{c^3+7abc}\leq 2(a+b+c).$$

Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\Big(a+b+b\Big)\Big[\Big(a^2+7bc\Big)+\Big(b^2+7ca\Big)+\Big(c^2+7ab\Big)\Big]\Big(1+1+1\Big)$$

$$\geq\Big(\sqrt[3]{a^3+7abc}+\sqrt[3]{b^3+7abc}+\sqrt[3]{c^3+7abc}\Big)^3 \qquad (1.17)$$

Ta cần chứng minh

$$8\left(a+b+c\right)^2 \geq 3\left(a^2+7bc\right)+3\left(b^2+7ca\right)+3\left(c^2+7ab\right) \qquad (1.18)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng.
Từ (2.11) và (2.23) ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 1.21. Với a, b, c là các số dương và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}}.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$P^3\left[a\left(a+2b\right)+b\left(b+2c\right)+c\left(c+2a\right)\right] \geq \left(a+b+c\right)^4 = 1.$$

Mặt khác

$$a\left(a+2b\right)+b\left(b+2c\right)+c\left(c+2a\right) = \left(a+b+c\right)^2 = 1$$

Do đó $P \geq 1$.
Vậy $P_{\min} = 1$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài tập áp dụng

Bài 1. Với $a, b, c \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right)$ và $a^3+b^3+c^3=\dfrac{3}{64}$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-3a}+\frac{1}{1-3b}+\frac{1}{1-3c} \geq 12.$$

Bài 2. Với a,b,c,d là các số thực dương và thỏa mãn

$$a^3+b^3+c^3+d^3=1.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3+c^3+d^3}+\frac{b^2}{c^3+d^3+a^3}+\frac{c^2}{d^3+a^3+b^3}+\frac{d^2}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Bài 3.[IMO 2005] Cho a, b, c là các số dương và thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{a(b+c)} + b\sqrt{b(c+a)} + c\sqrt{c(a+b)} \leq \sqrt{6\Big(a^4 + b^4 + c^4\Big)}.$$

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$a^2\sqrt[3]{\frac{2a}{b+c}} + b^2\sqrt[3]{\frac{2b}{c+a}} + c^2\sqrt[3]{\frac{2c}{a+b}} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài 6. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(a^7 - a^3 + 4)(b^7 - b^3 + 4)(c^7 - c^3 + 4)(d^7 - d^3 + 4) \geq (a + b + c + d)^4.$$

Bài 7. Cho a, b, c là các số dương và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a^3 + 26abc} + \sqrt[3]{b^3 + 26abc} + \sqrt[3]{c^3 + 26abc} \leq 3.$$

1.3 Bất đẳng thức Bernoulli và các bài toán liên quan.

Định lý 1.8 (Xem [1])**.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trong (a, b) .
a) Nếu $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,\ \ \forall x, x_0 \in (a, b). \tag{1.19}$$

b) Nếu $f''(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,\ \ \forall x, x_0 \in (a, b). \tag{1.20}$$

Chứng minh.
a)
-Nếu $x = x_0$ thì ta có đẳng thức .
-Nếu $x > x_0$ thì (1.19) $\Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \overset{Lagrange}{\Leftrightarrow} f'(x_1) \geq f'(x_0)$ với

$x_1 \in (x_o; b)$ Bất đẳng thức này đúng vì nên hàm số đồng biến .

-Nếu $x < x_0$ thì (1.19) $\Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \overset{Lagrange}{\Leftrightarrow} f'(x_1) \leq f'(x_0)$ với $x_1 \in (x_o; b)$ Bất đẳng thức này đúng vì $f''(x) \geq 0$ nên $f'(x)$ là hàm số đồng biến .

b) Chứng minh tương tự.

Định lý 1.9 (Bất đẳng thức Bernoulli)**.** Với mọi số thức $x > -1$

a) Nếu $\alpha > 1$ thì

$$(x+1)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x \tag{1.21}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

b) Nếu $0 < \alpha < 1$ thì

$$(x+1)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x \tag{1.22}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Chứng minh.

a.Xét hàm số $f(x) = (x+1)^{\alpha}$ với $x > -1$ và $\alpha > 1$.

Ta có $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(x+1)^{\alpha - 2} > 0$ với $x > -1$ và $\alpha > 1$ nên theo *Định lí 1.8* ta có

$$f(x) \geqslant f(0) + f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow (x+1)^{\alpha} \geqslant 1 + \alpha x.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

b.Xét hàm số $f(x) = (x+1)^{\alpha}$ với $x > -1$ và $0 < \alpha < 1$.

Ta có $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(x+1)^{\alpha - 2} < 0$ với $x > -1$ và $0 < \alpha < 1$ nên theo *Định lí 1.8* ta có

$$f(x) \leqslant f(0) + f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow (x+1)^{\alpha} \leqslant 1 + \alpha x.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Nếu trong (1.21) và (1.22), ta thay $x + 1$ bởi x thì khi đó *Định lí 1.9* có thể phát biểu như sau:

Định lý 1.10. Với mọi số thức $x > 0$

a) Nếu $\alpha > 1$ thì

$$x^{\alpha} + \alpha - 1 \geq \alpha x. \tag{1.23}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

b) Nếu $0 < \alpha < 1$ thì

$$x^{\alpha} + \alpha - 1 \leq \alpha x. \tag{1.24}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Bài toán 1.22. Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\Big(\frac{a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{b}{2c+a}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{c}{2a+b}\Big)^{\sqrt[3]{4}} \geq 3^{1-\sqrt[3]{4}}.$$

Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{3b}{2c+a}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{3c}{2a+b}\Big)^{\sqrt[3]{4}} \geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (1.23), ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4} - 1 \geqslant \sqrt[3]{4}\Big(\frac{3a}{2b+c}\Big),\\
&\Big(\frac{3b}{2c+a}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4} - 1 \geqslant \sqrt[3]{4}\Big(\frac{3b}{2c+a}\Big),\\
&\Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4} - 1 \geqslant \sqrt[3]{4}\Big(\frac{3c}{2a+b}\Big).
\end{aligned}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng trên ta được

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{3b}{2c+a}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + 3\sqrt[3]{4} - 3\\
&\qquad\qquad \geqslant 3\sqrt[3]{4}\Big(\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b}\Big).
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Schwarz, ta có

$$\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b} = \frac{a^2}{2ab+ca}+\frac{b^2}{2bc+ab}+\frac{c^2}{2ca+bc} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Do

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$$

nên

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geqslant 1.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{3b}{2c+a}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + 3\sqrt[3]{4} - 3 \geqslant 3\sqrt[3]{4}\\
\Leftrightarrow\ &\Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{3b}{2c+a}\Big)^{\sqrt[3]{4}} + \Big(\frac{3a}{2b+c}\Big)^{\sqrt[3]{4}} \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Ta được điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài toán 1.23. Với a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\Big(\frac{a^2}{b+c}\Big)^{\sqrt{2}} + \Big(\frac{b^2}{c+a}\Big)^{\sqrt{2}} + \Big(\frac{c^2}{a+b}\Big)^{\sqrt{2}} \geqslant 3\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\sqrt{2}}.$$

Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\Big(\frac{2a^2}{b+c}\Big)^{\sqrt{2}} + \Big(\frac{2b^2}{c+a}\Big)^{\sqrt{2}} + \Big(\frac{2a^2}{b+c}\Big)^{\sqrt{2}} \geqslant 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (1.23), ta có

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{a^2}{b+c}\Big)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 &\geqslant \sqrt{2}\frac{a^2}{b+c},\\
\Big(\frac{b^2}{c+a}\Big)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 &\geqslant \sqrt{2}\frac{b^2}{c+a},\\
\Big(\frac{c^2}{a+b}\Big)^{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 1 &\geqslant \sqrt{2}\frac{c^2}{a+b}.
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Schwarz, ta có

$$\sqrt{2}\Big(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\Big) \geqslant \sqrt{2}\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = \sqrt{2}\Big(a+b+c\Big) = 3\sqrt{2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta được

$$\Big(\frac{2a^2}{b+c}\Big)^{\sqrt{2}} + \Big(\frac{2b^2}{c+a}\Big)^{\sqrt{2}} + \Big(\frac{2a^2}{b+c}\Big)^{\sqrt{2}} \geqslant 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 1.24. Cho tam giác ABC và $\alpha > 1$. Chứng minh rằng

$$\sin^\alpha A + \sin^\alpha B + \sin^\alpha C + \frac{1}{\sin^\alpha A} + \frac{1}{\sin^\alpha B} + \frac{1}{\sin^\alpha C} \geq 3\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^\alpha + 3\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^\alpha.$$

Giải .Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (1.23), ta có

$$\Big(\frac{\sin A}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big)^{\alpha} + \alpha - 1 \geq \alpha\frac{\sin A}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^{\alpha} A \geqslant (1-\alpha)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{\alpha} + \alpha\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{\alpha-1}\sin A.$$

$$\Big(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin A}\Big)^{\alpha} + \alpha - 1 \geqslant \alpha\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^{\alpha} A} \geqslant (1-\alpha)\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{\alpha} + \alpha\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{\alpha-1}\frac{1}{\sin A}.$$

Khi đó

$$VT \geqslant 3(1-\alpha)\Big[\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{\alpha} + \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{\alpha}\Big] + \alpha\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{\alpha-1}\Big(\sin A + \sin B + \sin C\Big)$$
$$+\alpha\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{\alpha-1}\Big(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\Big)$$
$$= 3(1-\alpha)\Big[\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{\alpha} + \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{\alpha}\Big] + \alpha\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{\alpha-1}\left[\left(\frac{1}{\sin A} + (\frac{2}{\sqrt{3}})^2\sin A\right) + \right.$$
$$+\left(\frac{1}{\sin B} + (\frac{2}{\sqrt{3}})^2\sin B\right) + \left.\left(\frac{1}{\sin C} + (\frac{2}{\sqrt{3}})^2\sin C\right)\right] -$$
$$-\alpha\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\alpha-1}\right]\Big(\sin A + \sin B + \sin C\Big).$$

Lại có

$$\frac{1}{\sin A} + \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^2\sin A \geqslant 2\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sin B} + \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^2\sin B \geqslant 2\frac{2}{\sqrt{3}};$$
$$\frac{1}{\sin C} + \Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^2\sin C \geqslant 2\frac{2}{\sqrt{3}}; \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra

$$VT \geqslant 3\Big(1-\alpha\Big)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha}\right] + 6\alpha\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{\alpha}$$

$$-3\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\alpha+1}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\alpha-1}\right]=3\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^{\alpha}+3\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^{\alpha}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài toán 1.25. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\Big(\frac{1}{h_a}\Big)^{\sqrt{2}}+\Big(\frac{1}{h_b}\Big)^{\sqrt{2}}+\Big(\frac{1}{h_c}\Big)^{\sqrt{2}}\geq 3\Big(\frac{1}{3r}\Big)^{\sqrt{2}}.$$

trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp,h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao hạ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC

Giải .Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (1.23), ta có

$$\Big(3r\frac{1}{h_a}\Big)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\geq\sqrt{2}\Big(3r\frac{1}{h_a}\Big),$$

$$\Big(3r\frac{1}{h_b}\Big)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\geq\sqrt{2}\Big(3r\frac{1}{h_b}\Big),$$

$$\Big(3r\frac{1}{h_c}\Big)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\geq\sqrt{2}\Big(3r\frac{1}{h_c}\Big).$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\Big(3r\Big)^{\sqrt{2}}\Big[\Big(\frac{1}{h_a}\Big)^{\sqrt{2}}+\Big(\frac{1}{h_b}\Big)^{\sqrt{2}}+\Big(\frac{1}{h_c}\Big)^{\sqrt{2}}\Big]+3\sqrt{2}-3\geq 3r\sqrt{2}\Big(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\Big).$$

Ta lại có

$$r\Big(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\Big)=\frac{S}{p}\Big(\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}\Big)=\frac{a+b+c}{2p}=1.$$

Do đó

$$\Big(3r\Big)^{\sqrt{2}}\Big[\Big(\frac{1}{h_a}\Big)^{\sqrt{2}}+\Big(\frac{1}{h_b}\Big)^{\sqrt{2}}+\Big(\frac{1}{h_c}\Big)^{\sqrt{2}}\Big]+3\sqrt{2}-3\geq 3\sqrt{2}$$

hay

$$\Big(\frac{1}{h_a}\Big)^{\sqrt{2}}+\Big(\frac{1}{h_b}\Big)^{\sqrt{2}}+\Big(\frac{1}{h_c}\Big)^{\sqrt{2}}\geq 3\Big(\frac{1}{3r}\Big)^{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài toán 1.26. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $\begin{cases} 6a + 4b + 3c \geqslant 36 \\ 3b + 2c \geqslant 12 \\ c \geqslant 4 \end{cases}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^{\sqrt{5}} + b^{\sqrt{5}} + c^{\sqrt{5}}.$$

Giải .

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{4} \geqslant 3 \\ \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{4} \geqslant 2 \\ \dfrac{c}{4} \geqslant 1 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (1.23), ta có

$$\Big(\frac{a}{2}\Big)^{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1 \geqslant \sqrt{5}\frac{a}{2} \tag{1.25}$$

$$\Big(\frac{b}{3}\Big)^{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1 \geqslant \sqrt{5}\frac{b}{3} \tag{1.26}$$

$$\Big(\frac{c}{4}\Big)^{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1 \geqslant \sqrt{5}\frac{c}{4} \tag{1.27}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức(1.25),(1.26) và (1.27) và sử dụng giả thiết, ta thu được

$$\Big(\frac{a}{2}\Big)^{\sqrt{5}} + \Big(\frac{b}{3}\Big)^{\sqrt{5}} + \Big(\frac{c}{4}\Big)^{\sqrt{5}} \geqslant \sqrt{5}\Big(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}\Big) + 3 - 3\sqrt{5} \geqslant 3, \tag{1.28}$$

Lại cộng các bất đẳng thức (1.26),(1.27) ta nhận được

$$\Big(\frac{b}{3}\Big)^{\sqrt{5}} + \Big(\frac{c}{4}\Big)^{\sqrt{5}} \geqslant \sqrt{5}\Big(\frac{b}{3} + \frac{c}{4}\Big) + 2 - 2\sqrt{5} \geqslant 2, \tag{1.29}$$

Ta có

$$P = 2^{\sqrt{5}}\left[\Big(\frac{a}{2}\Big)^{\sqrt{5}} + \Big(\frac{b}{3}\Big)^{\sqrt{5}} + \Big(\frac{c}{4}\Big)^{\sqrt{5}}\right] + \Big(3^{\sqrt{5}} - 2^{\sqrt{5}}\Big)\left[\Big(\frac{b}{3}\Big)^{\sqrt{5}} + \Big(\frac{c}{4}\Big)^{\sqrt{5}}\right]$$

$$+\Big(4^{\sqrt{5}} - 3^{\sqrt{5}}\Big)\Big(\frac{c}{4}\Big)^{\sqrt{5}}$$

Từ (1.28),(1.29) và giả thiết suy ra

$$P \geqslant 2^{\sqrt{5}}.3 + \left(3^{\sqrt{5}} - 2^{\sqrt{5}}\right).2 + \left(4^{\sqrt{5}} - 3^{\sqrt{5}}\right).1 = 2^{\sqrt{5}} + 3^{\sqrt{5}} + 4^{\sqrt{5}}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2^{\sqrt{5}} + 3^{\sqrt{5}} + 4^{\sqrt{5}}$ khi $a = 2, b = 3, c = 4$.

Bài toán 1.27. Cho tam giác ABC và $0 < \alpha < 1$. Chứng minh rằng

$$\cos^\alpha \frac{A}{2} + \cos^\alpha \frac{B}{2} + \cos^\alpha \frac{C}{2} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha.$$

Giải .Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (1.24), ta có

$$\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \alpha - 1 \leqslant \alpha.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \alpha - 1 \leqslant \alpha.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$\left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \alpha - 1 \leqslant \alpha.\frac{\cos\frac{C}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Cộng theo vế các ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + 3\alpha - 3 \leqslant \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right).$$

Lại có

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó

$$\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + 3\alpha - 3 \leqslant 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha + \left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^\alpha \leqslant 3$$

$$\Leftrightarrow \cos^\alpha\frac{A}{2} + \cos^\alpha\frac{B}{2} + \cos^\alpha\frac{C}{2} \leqslant 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha.$$

Ta được điều phải chứng minh.Dấu đẳng xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài toán 1.28. Cho $a, b, c > 0$ và $0 < \alpha < 1$. Chứng minh rằng

$$\Big(\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\Big)^\alpha \le 3\frac{1}{9^\alpha}.$$

Giải .Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\Big(\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}\Big)^\alpha \le 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli dạng (1.24), ta có

$$\Big(\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}\Big)^\alpha + \alpha - 1 \leqslant \alpha\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2},$$
$$\Big(\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}\Big)^\alpha + \alpha - 1 \leqslant \alpha\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2},$$
$$\Big(\frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}\Big)^\alpha + \alpha - 1 \leqslant \alpha\frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}.$$

Cộng theo vế các ba bất đẳng thức trên ta được

$$\Big(\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}\Big)^\alpha + 3\alpha - 3$$
$$\leqslant \alpha\Big(\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2} + \frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2} + \frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}\Big).$$

Đặt

$$M = \frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2} + \frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2} + \frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2} = \frac{9a^2}{(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)}.$$
$$\le a^2\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{2a^2+bc} + \frac{1}{2a^2+bc}\right).$$

Suy ra

$$M \le \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2a^2}{2a^2+bc} + \frac{2b^2}{2b^2+ca} + \frac{2c^2}{2c^2+ab}$$

$$= 1 + \frac{2a^2}{2a^2+bc} + \frac{2b^2}{2b^2+ca} + \frac{2c^2}{2c^2+ab} = 4 - (\frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab}).$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} \geq$$

$$\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(2a^2+bc)+ca(2b^2+ca)+ab(2c^2+ab)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2} = 1$$

Suy ra

$$M \leq 3.$$

Do đó

$$\Big(\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}\Big)^\alpha + 3\alpha - 3 \leqslant 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \Big(\frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{9b^2}{5b^2+(c+a)^2}\Big)^\alpha + \Big(\frac{9c^2}{5c^2+(a+b)^2}\Big)^\alpha \leqslant 3.$$

Từ đây ta thu được điều cần chứng minh.Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Chương 2

Một số bài toán nội suy bất đẳng thức

2.1 Nội suy bất đẳng thức bậc hai trên một đoạn.

Nhắc lại một số kiến thức cơ bản liên quan đến tam thức bậc hai với hệ số thực.

Định lý 2.1 (Xem [3])**.** Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Với $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có

i) Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

iii) Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, trong trường hợp này $af(x) < 0$ khi $x \in (x_1, x_2)$ và $af(x) > 0$ khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

Định lý 2.2 (Xem [3])**.** Điều kiện cần và đủ để tồn tại số α sao cho $af(\alpha) < 0$ là $\Delta > 0$ và $x_1 < \alpha < x_2$, trong đó x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Bây giờ, xét tam thức bậc hai $G(x) = Px^2 + Qx + R$.
Vấn đề đặt ra là bất đẳng thức $G(x) \geq 0$ thỏa mãn với mọi $x \in [a, b]$ xảy ra khi nào?

Bài toán 2.1. Giả sử $G(x) = Px^2 + Qx + R$. Cho

$$G(a) = \alpha \geq 0, G(b) = \beta \geq 0$$

$$G(\frac{a+b}{2}) - \Big(\frac{\sqrt{G(a)} + \sqrt{G(b)}}{2}\Big)^2 = \gamma$$

$$G(\frac{a+b}{2}) - \Big(\frac{\sqrt{G(a)} - \sqrt{G(b)}}{2}\Big)^2 = \delta$$

1) Xác định $G(x)$ khi biết α, β, γ. Ta gọi $G(x)$ trong trường hợp này là $G_\gamma(x)$.
2) Xác định $G(x)$ khi biết α, β, δ. Ta gọi $G(x)$ trong trường hợp này là $G_\delta(x)$.
Giải.
1) Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho tam thức bậc hai $G(x)$ tại các nút nội suy

$$G(a) = \alpha, G(b) = \beta, G(\frac{a+b}{2}) = \gamma + \Big(\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}\Big)^2$$

Ta có

$$G_\gamma(x) = \sum_{i=1}^{3} G(x_i)G_i(x)$$

với

$$x_1 = a, x_2 = \frac{a+b}{2}, x_3 = b$$

và

$$G_1(x) = \prod_{j=1.j\neq 1}^{3} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(2x-a-b)(x-b)}{(a-b)^2}$$

$$G_2(x) = \prod_{j=1.j\neq 2}^{3} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{4(x-a)(x-b)}{(a-b)^2}$$

$$G_3(x) = \prod_{j=1.j\neq 3}^{3} \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} = \frac{(2x-a-b)(x-a)}{(a-b)^2}$$

Vậy

$$G_\gamma(x) = \frac{1}{(a-b)^2}\Bigg[\alpha(2x-a-b)(x-b) - 4\Big(\gamma + \Big(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}\Big)^2\Big)(x-a)(x-b) + \beta\Big(2x-a-b\Big)\Big(x-a\Big)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\Bigg[\alpha\left[(x-a)+(x-b)\right](x-b) - 4\Big(\gamma + \Big(\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2}\Big)^2\Big)(x-a)(x-b)$$

$$+ \beta\left[(x-a)+(x-b)\right]\Big(x-a\Big)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\Big[\alpha(x-b)^2 + \beta(x-a)^2 - 2\sqrt{\alpha\beta}(x-a)(x-b) - 4\gamma\Big(x-a\Big)\Big(x-b\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\Big[\Big(\sqrt{\alpha}(x-b) - \sqrt{\beta}(x-a)\Big)^2 - 4\gamma\Big(x-a\Big)\Big(x-b\Big)\Big].$$

$$= \frac{1}{(a-b)^2}\Big[\Big(x(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}) - (b\sqrt{\alpha}-a\sqrt{\beta})\Big)^2 - 4\gamma(x-a)(x-b)\Big]$$

2) Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho tam thức bậc hai $G(x)$ tương tự câu 1) tại các nút nội suy

$$G(a) = \alpha, G(b) = \beta, G(\frac{a+b}{2}) = \delta + \Big(\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{2}\Big)^2$$

Ta có

$$G_\delta(x) = \frac{1}{(a-b)^2}\Big[\Big(x(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) - (b\sqrt{\alpha}+a\sqrt{\beta})\Big)^2 - 4\delta(x-a)(x-b)\Big]$$

Mệnh đề 2.1. Với $G_\gamma(x)$, $G_\delta(x)$ ở *Bài toán 2.1.* Khi đó
1) $G_\gamma(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a,b]$ khi $\gamma \geq 0$.
2) $G_\delta(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a,b]$ khi và chỉ khi $\delta \geq 0$.

Chứng minh.
1) Theo câu 1) của *Bài toán 2.1*, ta có

$$G_\gamma(x) = \frac{1}{(a-b)^2}\Big[\Big(x(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}) - (b\sqrt{\alpha}-a\sqrt{\beta})\Big)^2 - 4\gamma(x-a)(x-b)\Big]$$

Vì $(x-a)(x-b) \leq 0$ với mọi $x \in [a,b]$ và $\gamma \geq 0$ nên $-4\gamma(x-a)(x-b) \geq 0$. Do đó

$$G_\gamma(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [a,b].$$

2) Theo câu 2) của *Bài toán 2.1*, ta có

$$G_\delta(x) = \frac{1}{(a-b)^2}\Big[\Big(x(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) - (b\sqrt{\alpha}+a\sqrt{\beta})\Big)^2 - 4\delta(x-a)(x-b).\Big]$$

Nếu $\delta \geq 0$ thì tương tự như trên, ta có

$$G_\delta(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b].$$

Ngược lại, nếu $G_\delta(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$ thì ta cần chứng minh $\delta \geq 0$.
Thật vậy, xét

$$x_0 = \frac{b\sqrt{\alpha} + a\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}.$$

Vì

$$x_0 - a = \frac{b\sqrt{\alpha} + a\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} - a = \frac{\sqrt{\alpha}(b - a)}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \geq 0$$

và

$$x_0 - b = \frac{b\sqrt{\alpha} + a\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} - b = \frac{\sqrt{\beta}(a - b)}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \leq 0,$$

nên $x_0 \in [a, b]$.
Do $G_\delta(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$ nên

$$G_\delta(x_0) \geq 0 \Leftrightarrow -4\delta(x_0 - a)(x_0 - b) \geq 0.$$

Suy ra $\delta \geq 0$.

Hệ quả 2.1. Giả sử $G(x) = Px^2 + Qx + R$. Khi đó $G(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ khi và chỉ khi

$$G(a) \geq 0, G(b) \geq 0 \text{ và } G(\frac{a+b}{2}) \geq \Big(\frac{\sqrt{G(a)} - \sqrt{G(b)}}{2}\Big)^2.$$

Bài toán 2.2. Tìm tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 + 2x + 3 \geq 0$ đúng với mọi $x \in [-1; 1]$.
Giải. Đặt $G(x) = (m+1)x^2 + 2x + 3$.
-Xét trường hợp $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $G(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-3}{2}$, do đó $G(x) \geq 0, \ \forall x \in [-1; 1]$.
-Xét trường hợp $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.
Để $G(x) \geq 0, \ \forall x \in [-1; 1]$ thì
+) Hoặc $\Delta' \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 3(m+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{-2}{3}$.
+) Hoặc $G(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 \leq x_1 < x_2$ hoặc

$x_1 < x_2 \leq -1$, tức là ta cần có $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{S}{2} > 1 \\ G(1) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{S}{2} < -1 \\ G(-1) \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3(m+1) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{-1}{m+1} > 1 \\ m+6 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{-1}{m+1} < -1 \\ m+2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$-2 \leqslant m < -\dfrac{2}{3}$. Kết hợp với $m > -1$, suy ra $-1 < m < -\dfrac{2}{3}$.

- Xét trường hợp $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Để $G(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [-1; 1]$ thì $G(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq -1 < 1 \leq x_2$, tức là ta cần có $\begin{cases} G(1) \geqslant 0 \\ G(-1) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 \geqslant 0 \\ m+2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $m \geqslant -2$. Kết hợp với $m < -1$, suy ra $-2 \leq m < -1$.

Vậy kết hợp cả 3 trường hợp ta được $m \in [-2; +\infty)$.

Với bài toán này nếu sử dụng kết quả của *Hệ quả 2.1* thì ta có lời giải ngắn gọn như sau:

Sử dụng kết quả của *Hệ quả 2.1*,ta có $G(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} G(1) \geqslant 0 \\ G(-1) \geqslant 0 \\ G(0) \geqslant \left(\dfrac{\sqrt{G(1)} - \sqrt{G(-1)}}{2} \right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 \geqslant 0 \\ m+2 \geqslant 0 \\ 3 \geqslant \dfrac{(\sqrt{m+6} - \sqrt{m+2})^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geqslant$ -2.

Vậy $m \in [-2; +\infty)$.

Bài toán 2.3. Tìm tham số m để bất phương trình $mx^2 - (3m+1)x - 1 \leq 0$ đúng với mọi $x \in [0; 2]$.

Giải. Bất phương trình $mx^2 - (3m+1)x - 1 \leq 0$ đúng với mọi $x \in [0; 2]$ tương đương với bất phương trình$-mx^2 + (3m+1)x + 1 \geq 0$ đúng với mọi $x \in [0; 2]$.

Đặt $G(x) = -mx^2 + (3m+1)x + 1$.

- Xét trường hợp $-m = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Khi đó $G(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$, do đó $G(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [0; 2]$.

- Xét trường hợp $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Để $G(x) \geq 0, \ \forall x \in [0;2]$ thì

+) Hoặc $\Delta \leqslant 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 10m + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant m \leqslant -\dfrac{1}{9}$. Kết hợp với $m < 0$, suy ra $m \in \left[-1; -\dfrac{1}{9}\right]$.

+) Hoặc $G(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2 \leq x_1 < x_2$ hoặc $x_1 < x_2 \leq 0$, tức là ta cần có $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{S}{2} > 2 \\ G(2) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{S}{2} < 0 \\ G(0) \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 10m + 1 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3m+1}{2m} > 2 \\ 2m + 3 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3m+1}{2m} < 0 \\ 1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{9} < m < 0 \\ 0 < m < 1 \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m < 0$, suy ra $m \in \left(-\dfrac{1}{9}; 0\right)$.

- Xét trường hợp $-m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Để $G(x) \geq 0, \ \forall x \in [0;2]$ thì $G(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < 2 \leq x_2$, tức là ta cần có $\begin{cases} G(0) \geqslant 0 \\ G(2) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant 0 \\ 2m + 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

Kết hợp với $m > 0$, suy ra $m \in (0; +\infty)$.

Vậy kết hợp cả 3 trường hợp ta được $m \in [-1; +\infty)$.

Sử dụng kết quả của *Hệ quả 2.1* thì ta có lời giải như sau:

Theo Hệ quả 2.1, ta có $G(x) \geq 0, \ \forall x \in [0;2]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} G(0) \geqslant 0 \\ G(2) \geqslant 0 \\ G(1) \geqslant \left(\dfrac{\sqrt{G(2)} - \sqrt{G(0)}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geqslant 0 \\ 2m + 3 \geqslant 0 \\ 2m + 2 \geqslant \dfrac{1}{4}(\sqrt{2m+3} - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geqslant -1.$$

Vậy $m \in [-1; +\infty)$.

Bài toán 2.4. Tìm tham số m để bất phương trình

$$3x^2 - 2(m+1)x - 2m^2 + 3m - 2 \geq 0 \text{ đúng với mọi } x \in [2; +\infty).$$

Giải. Đặt $1 - y = \dfrac{x-2}{x}$, suy ra $x = \dfrac{2}{y}$. Do $x \in [2; +\infty)$ nên $y \in (0; 1]$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $(-2m^2 + 3m - 2)y^2 - 4(m+1)y + 12 \geq 0$ đúng với mọi $y \in (0; 1]$.

Đặt $G(y) = (-2m^2 + 3m - 2)y^2 - 4(m+1)y + 12$.
Theo *Hệ quả 2.1*, ta có $G(y) \geq 0, \ \ \forall y \in [0; 1]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} G(0) \geq 0 \\ G(1) \geq 0 \\ G(\frac{1}{2}) \geq \left(\frac{\sqrt{G(1)} - \sqrt{G(0)}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 \geq 0 \\ -\dfrac{m^2}{2} - \dfrac{5m}{4} + \dfrac{19}{2} \geq \left(\dfrac{\sqrt{-2m^2 - m + 6} - \sqrt{12}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy $m \in [-2; \frac{3}{2}]$.

Bài toán 2.5. Cho hai số a, b thỏa mãn $0 < a \leq 1; b \geq 2$. Chứng minh rằng

$$4a^2x^2 - 4a(a^2 + b^2)x + (a^2 + b^2)^2 \geq 0, \ \ \forall x \in [1; 2].$$

Giải. Trước hết ta chứng minh

$$4a^2x^2 - 4a(a^2 + b^2)x + (a^2 + b^2)^2 \geq 0, \ \ \forall x \in [a; b].$$

Đặt

$$G(x) = 4a^2x^2 - 4a(a^2 + b^2)x + (a^2 + b^2)^2.$$

Ta có

$$G(a) = 4a^4 - 4a^2(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 > 0,$$

$$G(b) = 4a^2b^2 - 4ab(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2 = (a - b)^4 > 0,$$

$$G(\frac{a+b}{2}) - \left(\frac{\sqrt{G(a)} - \sqrt{G(b)}}{2}\right)^2 = (a - b)^2(b^2 - a^2) > 0.$$

Khi đó theo *Hệ quả 2.1*,ta được

$$4a^2x^2 - 4a(a^2+b^2)x + (a^2+b^2)^2 \geq 0,\ \ \forall x \in [a;b].$$

Do $0 < a \leqslant 1, b \geqslant 2$ nên suy ra $[1;2] \subset [a;b]$ .Vì vậy

$$4a^2x^2 - 4a(a^2+b^2)x + (a^2+b^2)^2 \geq 0,\ \ \forall x \in [1;2].$$

Bài toán 2.6. Chứng minh rằng với mọi tam thức bậc hai

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

ta đều có $|f(x)| \leq 1,\ \ \forall x \in [a,b]$ xảy ra khi và chỉ khi

$$-1 - \sqrt{(1-f(a))(1-f(b))} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - 2f(\frac{a+b}{2}) \leq$$
$$\leq 1 + \sqrt{(1-f(a))(1-f(b))}.$$

Giải. Đặt

$$G_1(x) = 1 - f(x), G_2(x) = 1 + f(x),\ \ \forall x \in [a,b]$$

Khi đó, theo *Hệ quả 2.1*, ta có

$$G_1(x) \geq 0, G_2(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$$

khi và chỉ khi

$$|f(a)| \leq 1, |f(b)| \leq 1$$

và

$$\begin{cases} G_1(\frac{a+b}{2}) \geq \Big(\frac{\sqrt{G_1(a)} - \sqrt{G_1(b)}}{2}\Big)^2 \\ G_2(\frac{a+b}{2}) \geq \Big(\frac{\sqrt{G_2(a)} - \sqrt{G_2(b)}}{2}\Big)^2 \end{cases}$$

có nghĩa là

$$\begin{cases} 1 - f(\frac{a+b}{2}) \geq \Big(\frac{\sqrt{1-f(a)} - \sqrt{1-f(b)}}{2}\Big)^2 \\ 1 + f(\frac{a+b}{2}) \geq \Big(\frac{\sqrt{1+f(a)} - \sqrt{1+f(b)}}{2}\Big)^2 \end{cases}$$

hay

$$-1 - \sqrt{(1-f(a))(1-f(b))} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - 2f(\frac{a+b}{2}) \leq$$
$$\leq 1 + \sqrt{(1-f(a))(1-f(b))}.$$

2.2 Nội suy tam thức bậc tùy ý.

Xét bất đẳng thức Cauchy dưới dạng cơ bản:

$$x^2 + 1 \geq 2x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Ta nhân thấy (2.1) có thể xem như bất đẳng thức "tam thức bậc (2,1) "(ứng với lũy thừa 2 và lũy thừa 1 của x) trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Khi có nhu cầu mở rộng bất đẳng thức cho tam thức bậc $(\alpha, 1)$;$(\alpha > 1)$ để thu được bất đẳng thức có dạng tương tự như (2.1) bằng cách thay số 2 bởi số α sao cho dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ $x = 1$, ta thu được phép nội suy bất đẳng thức (2.1). Ta cần thiết lập bất đẳng thức dạng

$$x^\alpha + ? \geq \alpha x, \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2}$$

Thay $x = 1$ vào (2.2) suy ra $? = \alpha - 1$, ta thu được bất đẳng thức Bernoulli quen thuộc

$$x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.3}$$

Bất đẳng thức (2.3) xem như bất đẳng thức tam thức bậc $(\alpha, 1)$. Một câu hỏi đặt ra nếu dấu đẳng thức của (2.3) xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 (x_0 > 0)$ thì bất đẳng thức (2.3) có dạng như thế nào?
Trong (2.3) ta thay x bởi $\dfrac{x}{x_0}$, khi đó bất đẳng thức (2.3) trở thành

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha \frac{x}{x_0}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4}$$

Hoàn toàn tương tự ta có thể mở rộng cho tam thức bậc(α, β), $(\alpha > \beta > 0)$ để có được bất đẳng thức tương tự như dạng (2.1) bằng cách thay lũy thừa 2 của x bởi α và lũy thừa 1 của x bởi β.
Do đó ta cần thiết lập bất đẳng thức dạng

$$x^\alpha + ? \geq ??x^\beta, \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.5}$$

sao cho dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Đặt $x^\beta = y, \gamma = \dfrac{\alpha}{\beta} > 1$ thì $x^\alpha = y^\gamma$ và từ (2.5), (2.3) ta suy ra

$$y^\gamma + \gamma - 1 \geq \gamma y, \ \ \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = 1$
hay

$$x^{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta}x^{\beta},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^{+}; \alpha > \beta > 0. \tag{2.6}$$

Bất đẳng thức (2.6) là một dạng của bất đẳng thức Bernoulli đối với tam thức bậc (α, β), ứng với trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Để sử dụng bất đẳng thức (2.6) trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 > 0$ cho trước, ta cần thay bất đẳng thức (2.6) bởi bất đẳng thức sau

$$(\frac{x}{x_0})^{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta}(\frac{x}{x_0})^{\beta},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^{+}; \alpha > \beta > 0.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0$.

Sau đây là một số ứng dụng của các bất đẳng thức trên.

Bài toán 2.7. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $\begin{cases} max\,\{a,b,c\} = a \leqslant 5 \\ 4a + 5b \geqslant 2ab \\ 3a + 5c \geqslant 3ac \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3a^{\sqrt{3}} + 2b^{\sqrt{3}} + c^{\sqrt{3}}.$$

Giải.
Từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} a \geq b; a \geq c \\ \dfrac{5}{a} \geqslant 1 \\ \dfrac{5}{a} + \dfrac{4}{b} \geqslant 2 \\ \dfrac{5}{a} + \dfrac{3}{c} \geqslant 2 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.6), ta có

$$\left(\frac{3}{a}\right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geqslant \sqrt{3}\frac{5}{a} \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{4}{b}\right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geqslant \sqrt{3}\frac{4}{b} \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{3}{c}\right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \geqslant \sqrt{5}\frac{3}{c} \tag{2.9}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức(2.7), (2.8) và sử dụng giả thiết, ta thu được

$$\left(\frac{5}{a}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{4}{b}\right)^{\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}\left(\frac{5}{a} + \frac{4}{b}\right) + 2 - 2\sqrt{3} \geqslant 2, \tag{2.10}$$

Lại cộng các bất đẳng thức (2.7), (2.9) ta nhận được

$$\left(\frac{5}{a}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{3}{c}\right)^{\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}\left(\frac{5}{a} + \frac{3}{c}\right) + 2 - 2\sqrt{3} \geqslant 2, \tag{2.11}$$

Từ (2.10),(2.11) và giả thiết suy ra

$$5^{\sqrt{3}} + 4^{\sqrt{3}} = b^{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{5}{a}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{4}{b}\right)^{\sqrt{3}}\right] + (a^{\sqrt{3}} - b^{\sqrt{3}})\left(\frac{5}{a}\right)^{\sqrt{3}} \geqslant a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{3}},$$

$$5^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}} = c^{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{5}{a}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{3}{c}\right)^{\sqrt{3}}\right] + (a^{\sqrt{3}} - c^{\sqrt{3}})\left(\frac{5}{a}\right)^{\sqrt{3}} \geqslant a^{\sqrt{3}} + c^{\sqrt{3}}.$$

Khi đó

$$P = 2(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{3}})+a^{\sqrt{3}}+c^{\sqrt{3}} \leqslant 2(5^{\sqrt{3}}+4^{\sqrt{3}})+5^{\sqrt{3}}+4^{\sqrt{3}} = 3.5^{\sqrt{3}}+2.4^{\sqrt{3}}+3^{\sqrt{3}}.$$

Vậy $P_{\max} = 3.5^{\sqrt{3}} + 2.4^{\sqrt{3}} + 3^{\sqrt{3}}$ khi $a = 5, b = 4, c = 3$.

Bài toán 2.8. Cho $a, b, c, p > 0$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \geq 3^{1-n-p}(a+b+c)^{n+p}.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức (2.6), ta có

$$\left(3\frac{a}{a+b+c}\right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n}\left(3\frac{a}{a+b+c}\right)^{n}$$

$$\left(3\frac{b}{a+b+c}\right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n}\left(3\frac{b}{a+b+c}\right)^{n}$$

$$\left(3\frac{c}{a+b+c}\right)^{n+p} + \frac{n+p}{n} - 1 \geq \frac{n+p}{n}\left(3\frac{c}{a+b+c}\right)^{n}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta thu được

$$3^{n+p}\left[\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{n+p} + \left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{n+p} + \left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{n+p}\right] + 3\frac{n+p}{n} - 3$$

$$\geq \frac{n+p}{n}3^n\left[\Big(\frac{a}{a+b+c}\Big)^n+\Big(\frac{b}{a+b+c}\Big)^n+\Big(\frac{c}{a+b+c}\Big)^n\right]$$

Theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left[\Big(\frac{a}{a+b+c}\Big)^n+\Big(\frac{b}{a+b+c}\Big)^n+\Big(\frac{c}{a+b+c}\Big)^n\right](1+1+1)^{n-1}$$

$$\geq \Big(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\Big)^n$$

$$\Leftrightarrow \Big(\frac{a}{a+b+c}\Big)^n+\Big(\frac{b}{a+b+c}\Big)^n+\Big(\frac{c}{a+b+c}\Big)^n \geq 3^{1-n}$$

suy ra

$$3^{n+p}\left[\Big(\frac{a}{a+b+c}\Big)^{n+p}+\Big(\frac{b}{a+b+c}\Big)^{n+p}+\Big(\frac{c}{a+b+c}\Big)^{n+p}\right]+3\frac{n+p}{n}-3\geq 3\frac{n+p}{n}$$

$$\Leftrightarrow 3^{n+p}\left[\Big(\frac{a}{a+b+c}\Big)^{n+p}+\Big(\frac{b}{a+b+c}\Big)^{n+p}+\Big(\frac{c}{a+b+c}\Big)^{n+p}\right]\geq 3$$

$$\Leftrightarrow a^{n+p}+b^{n+p}+c^{n+p}\geq 3^{1-n-p}(a+b+c)^{n+p}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 2.9. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng

$$a^{3\sqrt{3}}+b^{3\sqrt{3}}\geqslant 2^{1-\sqrt{3}}[ab(a+b)]^{\sqrt{3}}.$$

Giải **.**Bất đẳng thức cần chứng tương đương với

$$\frac{a^{3\sqrt{3}}}{[ab(a+b)]^{\sqrt{3}}}+\frac{b^{3\sqrt{3}}}{[ab(a+b)]^{\sqrt{3}}}\geqslant 2^{1-\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}}+\left[\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}}\geqslant 2^{1-\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}}+\left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}}\geqslant 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.6), ta có

$$\left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\geqslant\sqrt{3}\left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2},$$

$$\left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\geqslant\sqrt{3}\left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + \left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 2$$

$$\geqslant \sqrt{3}\left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2} + \sqrt{3}\left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + \left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 2$$

$$, \geqslant 2\sqrt{3}\left[\frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a+b)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + \left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 2 \geqslant 2\sqrt{3}\frac{a^2 - ab + b^2}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + \left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - 2 \geqslant 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\frac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} + \left[\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^{2\sqrt{3}} \geqslant 2.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Bài toán 2.10. Cho $a, b, c > 0$ và $\alpha > 2$. Chứng minh rằng

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha \geqslant 3^{1-\alpha}\Big(a + b + c\Big)^\alpha.$$

Giải **.**Bất đẳng thức cần chứng tương đương với

$$\Big(3\frac{a}{a+b+c}\Big)^\alpha + \Big(3\frac{b}{a+b+c}\Big)^\alpha + \Big(3\frac{c}{a+b+c}\Big)^\alpha \geqslant 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.6), ta có

$$\Big(3\frac{a}{a+b+c}\Big)^\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1 \geqslant \frac{\alpha}{2}\Big(3\frac{a}{a+b+c}\Big)^2,$$

$$\Big(3\frac{b}{a+b+c}\Big)^\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1 \geqslant \frac{\alpha}{2}\Big(3\frac{b}{a+b+c}\Big)^2,$$

$$\Big(3\frac{c}{a+b+c}\Big)^\alpha + \frac{\alpha}{2} - 1 \geqslant \frac{\alpha}{2}\Big(3\frac{c}{a+b+c}\Big)^2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\Big(3\frac{a}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\Big(3\frac{b}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\Big(3\frac{c}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\frac{3}{2}\alpha-3\geqslant \frac{9\alpha}{2}\left[\Big(\frac{a}{a+b+c}\Big)^{2}+\Big(\frac{b}{a+b+c}\Big)^{2}+\Big(\frac{c}{a+b+c}\Big)^{2}\right].$$

$$\Leftrightarrow \Big(3\frac{a}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\Big(3\frac{b}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\Big(3\frac{c}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\frac{3}{2}\alpha-3\geqslant \frac{9\alpha}{2}\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}.$$

Do

$$a^2+b^2+c^2\geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

nên

$$\Big(3\frac{a}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\Big(3\frac{b}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\Big(3\frac{c}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\frac{3}{2}\alpha-3\geqslant \frac{3\alpha}{2}$$
$$\Leftrightarrow \Big(3\frac{a}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\Big(3\frac{b}{a+b+c}\Big)^{\alpha}+\Big(3\frac{c}{a+b+c}\Big)^{\alpha}\geqslant 3.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nếu trong bất đẳng thức (2.3), ta đặt $\alpha=\frac{1}{\beta}, y^{\beta}=x$ với $0<\beta<1$ thì bất đẳng thức (2.3) có thể viết

$$y^{\beta}+\beta-1\leq \beta y,\ \ \forall y\in\mathbb{R}^{+}.$$

Hay ta có bất đẳng thức Bernoulli dạng

$$x^{\alpha}+\alpha-1\leq \alpha x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^{+}; 0<\alpha<1. \tag{2.12}$$

Từ đây ta cũng được môt dạng của bất đẳng thức Bernoulli

$$x^{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}-1\leq \frac{\alpha}{\beta}x^{\beta},\ \ \forall x\in\mathbb{R}^{+}; 0<\alpha<\beta. \tag{2.13}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1$.
Trong bất đẳng thức (2.12), thay x bởi $\frac{a}{b}$ với $a,b>0$ thì ta được

$$\alpha a+(1-\alpha)b\geq a^{\alpha}b^{1-\alpha}.$$

Từ đây ta có bài toán sau:

Bài toán 2.11. Cho a, b, α, β là các số thực dương và $\alpha + \beta = 1$. Chứng minh rằng

$$\alpha a + \beta b \geq a^{\alpha} b^{\beta}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Bài toán 2.12. Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a^2 + 4b^2 \leq 4$. Chứng minh rằng

$$a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}} + a^{\frac{b}{a+b}} b^{\frac{a}{a+b}} \leqslant \sqrt{5}.$$

Giải. Ta có $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} = 1$.
Theo Bài toán 2.11, ta có

$$\frac{a}{a+b} a + \frac{b}{a+b} b \geqslant a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}},$$

$$\frac{b}{a+b} a + \frac{a}{a+b} b \geqslant a^{\frac{b}{a+b}} b^{\frac{a}{a+b}}.$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được

$$a^{\frac{a}{a+b}} b^{\frac{b}{a+b}} + a^{\frac{b}{a+b}} b^{\frac{a}{a+b}} \leqslant a + b.$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy,ta có

$$(a+b)^2 \leqslant (a^2 + 4b^2)(1 + \frac{1}{4}) \Leftrightarrow a + b \leqslant \sqrt{5}$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng.

Bài toán 2.13. Cho $x, y > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[4]{(1+x)^3(1+y)} \geq 1 + \sqrt[4]{x^3 y}.$$

Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\frac{1}{1+y}\Big)^{\frac{1}{4}} + \Big(\frac{x}{1+x}\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\frac{y}{1+y}\Big)^{\frac{1}{4}} \leq 1.$$

Theo Bài toán 2.11, ta có

$$\frac{3}{4}\Big(\frac{1}{1+x}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1+y}\Big) \geq \Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\frac{1}{1+y}\Big)^{\frac{1}{4}},$$

$$\frac{3}{4}\Big(\frac{x}{1+x}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{y}{1+y}\Big) \geq \Big(\frac{x}{1+x}\Big)^{\frac{3}{4}} \Big(\frac{y}{1+y}\Big)^{\frac{1}{4}}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được điều cần chứng minh.

2.3 Nội suy bất đẳng thức trong lớp hàm đơn điệu

Ta nhận thấy rằng ứng với a, b, c, α, β là các số dương, $\alpha > \beta$ thì ta luôn có
$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\alpha} + \Big(\frac{b}{c}\Big)^{\alpha} + \Big(\frac{c}{a}\Big)^{\alpha} \geq \Big(\frac{a}{b}\Big)^{\beta} + \Big(\frac{b}{c}\Big)^{\beta} + \Big(\frac{c}{a}\Big)^{\beta}$$
và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
Thật vậy,ta có
$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta}\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\beta},$$
$$\Big(\frac{b}{c}\Big)^{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta}\Big(\frac{b}{c}\Big)^{\beta},$$
$$\Big(\frac{c}{a}\Big)^{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq \frac{\alpha}{\beta}\Big(\frac{c}{a}\Big)^{\beta},$$
$$\Big(\frac{\alpha}{\beta} - 1\Big)\left[\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\beta} + \Big(\frac{b}{c}\Big)^{\beta} + \Big(\frac{c}{a}\Big)^{\beta}\right] \geq \Big(\frac{\alpha}{\beta} - 1\Big)3\sqrt[3]{\Big(\frac{abc}{abc}\Big)^{\beta}} = 3\Big(\frac{\alpha}{\beta} - 1\Big)$$
Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được điều phải chứng minh.

Bất đẳng thức trên có thể viết $g(\alpha) \geq g(\beta)$ với
$$g(x) := \Big(\frac{a}{b}\Big)^{x} + \Big(\frac{b}{c}\Big)^{x} + \Big(\frac{c}{a}\Big)^{x}$$
đồng biến trong $[0; +\infty)$.Vậy câu hỏi tự nhiên nảy sinh là từ một bất đẳng thức đã tường minh cách chứng minh ta có thể thiết lập được hay không các hàm đơn điệu mà vế trái và vế phải của bất đẳng thức đó là giá trị của hàm số tại hai tại vị cho trước ? Ta thu được bài toán nội suy bất đẳng thức

Bài toán 2.14. Cho a, b, c là các sô dương. Chứng minh rằng
$$\Big(\frac{4a}{3b+c}\Big)^2 + \Big(\frac{4b}{3c+a}\Big)^2 + \Big(\frac{4c}{3a+b}\Big)^2 \geq \frac{4a}{3b+c} + \frac{4b}{3c+a} + \frac{4c}{3a+b} \quad (2.14)$$

Giải. Ta có
$$\Big(\frac{4a}{3b+c}\Big)^2 + 1 \geq 2\frac{4a}{3b+c},$$
$$\Big(\frac{4b}{3c+a}\Big)^2 + 1 \geq 2\frac{4b}{3c+a},$$
$$\Big(\frac{4c}{3a+b}\Big)^2 + 1 \geq 2\frac{4c}{3a+b},$$

Theo bất đẳng thức Schwarz, ta có

$$\frac{4a}{3b+c}+\frac{4b}{3c+a}+\frac{4c}{3a+b}=\frac{4a^2}{a\Big(3b+c\Big)}+\frac{4b^2}{b\Big(3c+a\Big)}+\frac{4c^2}{c\Big(3a+b\Big)}$$

$$\geq \frac{4\Big(a+b+c\Big)^2}{4\Big(ab+bc+ca\Big)} \geq \frac{3\Big(ab+bc+ca\Big)}{\Big(ab+bc+ca\Big)}=3$$

hay

$$\frac{4a}{3b+c}+\frac{4b}{3c+a}+\frac{4c}{3a+b}\geq 3$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được điều cần chứng minh.
Bất đẳng thức (2.14) có thể viết dưới dạng

$$\Big(\frac{4a}{3b+c}\Big)^2+\Big(\frac{4b}{3c+a}\Big)^2+\Big(\frac{4c}{3a+b}\Big)^2 \geq \Big(\frac{4a}{3b+c}\Big)^1+\Big(\frac{4b}{3c+a}\Big)^1+\Big(\frac{4c}{3a+b}\Big)^1 \tag{2.15}$$

Liệu rằng vế trái và vế phải (2.15) có phải là hai trị của một hàm số đơn điệu nào đó tại 2 và 1 không ? Ta xét bài toán sau.

Bài toán 2.15. Cho a, b, c là các sô dương. Chứng minh rằng

$$F(t)=\Big(\frac{4a}{3b+c}\Big)^t+\Big(\frac{4b}{3c+a}\Big)^t+\Big(\frac{4c}{3a+b}\Big)^t$$

là hàm số đồng biến trong $[1;2]$.

Giải. Để ý rằng, với a, b, c dương bất kỳ và $t \geq 1$ thì

$$\Big(\frac{4a}{3b+c}\Big)^t+\Big(\frac{4b}{3c+a}\Big)^t+\Big(\frac{4c}{3a+b}\Big)^t \geq 3.$$

Thật vậy, ta có

$$\Big(\frac{4a}{3b+c}\Big)^t+t-1\geq t\frac{4a}{3b+c},$$
$$\Big(\frac{4b}{3c+a}\Big)^t+t-1\geq t\frac{4b}{3c+a},$$
$$\Big(\frac{4c}{3a+b}\Big)^t+t-1\geq t\frac{4c}{3a+b},$$
$$\frac{4a}{3b+c}+\frac{4b}{3c+a}+\frac{4c}{3a+b}\geq 3$$

Do đó

$$\left(\frac{4a}{3b+c}\right)^t + \left(\frac{4b}{3c+a}\right)^t + \left(\frac{4c}{3a+b}\right)^t \geq 3.$$

Với $\forall t_1, t_2 \in [1;2], t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1) \leq F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\left(\frac{4a}{3b+c}\right)^{t_2}+\left(\frac{4b}{3c+a}\right)^{t_2}+\left(\frac{4c}{3a+b}\right)^{t_2} \geq \left(\frac{4a}{3b+c}\right)^{t_1}+\left(\frac{4b}{3c+a}\right)^{t_1}+\left(\frac{4c}{3a+b}\right)^{t_1}.$$

Ta có

$$\left(\frac{4a}{3b+c}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\left(\frac{4a}{3b+c}\right)^{t_1}$$

$$\left(\frac{4b}{3c+a}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\left(\frac{4b}{3c+a}\right)^{t_1}$$

$$\left(\frac{4c}{3a+b}\right)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\left(\frac{4c}{3a+b}\right)^{t_1}$$

$$\left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right)\left[\left(\frac{4a}{3b+c}\right)^{t_1} + \left(\frac{4b}{3c+a}\right)^{t_1} + \left(\frac{3c}{2a+b}\right)^{t_1}\right] \geq 3\left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right)$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\left(\frac{4a}{3b+c}\right)^{t_2}+\left(\frac{4b}{3c+a}\right)^{t_2}+\left(\frac{4c}{3a+b}\right)^{t_2} \geq \left(\frac{4a}{3b+c}\right)^{t_1}+\left(\frac{4b}{3c+a}\right)^{t_1}+\left(\frac{4c}{3a+b}\right)^{t_1}.$$

hay $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1;2]$.

Bài toán 2.16. Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\left(\frac{2c}{2a+b-c}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{2a}{2b+c-a}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{2b}{2c+a-b}\right)^3}$$
$$\geq \frac{2c}{2a+b-c} + \frac{2a}{2b+c-a} + \frac{2b}{2c+a-b} \tag{2.16}$$

Giải. Ta có

$$\left(\frac{2c}{2a+b-c}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} - 1 \geq \frac{3}{2}\frac{2c}{2a+b-c},$$

$$\left(\frac{2a}{2b+c-a}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} - 1 \geq \frac{3}{2}\frac{2a}{2b+c-a},$$

$$\left(\frac{2b}{2c+a-b}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} - 1 \geq \frac{3}{2}\frac{2b}{2c+a-b},$$

suy ra

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{\frac{3}{2}}+\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{\frac{3}{2}}+\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}$$
$$\geq \frac{3}{2}\Big(\frac{2c}{2a+b-c}+\frac{2a}{2b+c-a}+\frac{2b}{2c+a-b}\Big)$$

Theo bất đẳng thức Schwarz, ta có

$$\frac{2c}{2a+b-c}+\frac{2a}{2b+c-a}+\frac{2b}{2c+a-b}$$
$$=\frac{2c^2}{c\Big(2a+b-c\Big)}+\frac{2a^2}{a\Big(2b+c-a\Big)}+\frac{2b^2}{b\Big(2c+a-b\Big)}$$
$$\geq \frac{2\Big(a+b+c\Big)^2}{3\Big(ab+bc+c\Big)-a^2-b^2-c^2}\geq \frac{6\Big(ab+bc+ca\Big)}{2\Big(ab+bc+ca\Big)}=3.$$

hay

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{2c}{2a+b-c}+\frac{2b}{2b+c-a}+\frac{2b}{2c+a-b}\Big)\geq\frac{3}{2}$$

Do đó

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{\frac{3}{2}}+\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{\frac{3}{2}}+\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{\frac{3}{2}}\geq$$
$$\frac{2c}{2a+b-c}+\frac{2a}{2b+c-a}+\frac{2b}{2c+a-b}.$$

Ta được điều cần chứng minh.

Ta nhận thấy rằng vế trái và vế phải của (2.16) là các giá trị $F(\frac{3}{2})$ và $F(1)$ với

$$F(t)=\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^t+\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^t+\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^t;\forall t\geq 1.$$

Liệu rằng hàm số này có đồng biến trên $\Big[1;\frac{3}{2}\Big]$ hay không ?

Bài toán 2.17. Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$F(t)=\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^t+\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^t+\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^t$$

là hàm số đồng biến trên $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Giải. Ta có nhận xét sau đây.

Với a,b,c là 3 cạnh của tam giác và $t\geq 1$ thì

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^t+\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^t+\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^t\geq 3.$$

Thật vậy, ta có

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^t+t-1\geq t\frac{2c}{2a+b-c},$$
$$\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^t+t-1\geq t\frac{2a}{2b+c-a},$$
$$\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^t+t-1\geq t\frac{2b}{2c+a-b},$$

suy ra

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^t+\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^t+\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^t+3t-3$$
$$\geq t\Big(\frac{2c}{2a+b-c}+\frac{2a}{2b+c-a}+\frac{2b}{2c+a-b}\Big)$$

Theo bất đẳng thức Schwarz, ta có

$$\frac{2c}{2a+b-c}+\frac{2a}{2b+c-a}+\frac{2b}{2c+a-b}$$
$$=\frac{2c^2}{c\Big(2a+b-c\Big)}+\frac{2a^2}{a\Big(2b+c-a\Big)}+\frac{2b^2}{b\Big(2c+a-b\Big)}$$
$$\geq\frac{2\Big(a+b+c\Big)^2}{3\Big(ab+bc+c\Big)-a^2-b^2-c^2}\geq\frac{6\Big(ab+bc+ca\Big)}{2\Big(ab+bc+ca\Big)}=3.$$

Do đó

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^t+\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^t+\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^t\geq 3,\ \ \forall t\geq 1.$$

Với $\forall t_1,t_2\in[1,+\infty),t_1<t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1)\leq F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{t_2}+\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{t_2}+\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{t_2}$$

$$\geq \Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{t_1}.$$

Ta có

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{t_1}$$

$$\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{t_1}$$

$$\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{t_1}$$

$$\Big(\frac{t_2}{t_1} - 1\Big)\left[\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{t_1}\right] \geq 3\Big(\frac{t_2}{t_1} - 1\Big).$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{t_2}$$

$$\geq \Big(\frac{2c}{2a+b-c}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{2a}{2b+c-a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{2b}{2c+a-b}\Big)^{t_1}, \ \forall t_2 > t_1 \geq 1,$$

hay $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1, +\infty)$.

Bài toán 2.18. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2c} + \frac{b^3}{c^2a} + \frac{c^3}{a^2b} \geq 3 \tag{2.17}$$

Áp dụng bất đẳng thức AG ta có ngay điều phải chứng minh. Tuy nhiên, ta viết (2.17) dưới dạng

$$\Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^1 + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^1 + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^1 \geq 1 + 1 + 1$$

hay

$$\Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^1 + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^1 + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^1 \geq \Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^0 + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^0 + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^0. \tag{2.18}$$

thì ta xem (2.18) như là $F(1) \geq F(0)$ với

$$F(t) = \Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^t + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^t + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^t, \ \forall t > 0.$$

Liệu hàm số này có đồng biến trên $(0, 1)$?

Ta xét bài toán sau .

Bài toán 2.19. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$F(t) = \Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^t + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^t + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^t$$

là hàm số đồng biến trên $(0, 1)$.

Giải. Với $\forall t_1, t_2 \in (0, 1), t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1) \leq F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^{t_2} \geq \Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^{t_1}, \ \forall t_2 > t_1 > 0.$$

Ta có

$$\Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{t_2}{t_1} - 1\Big)\left[\Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^{t_1}\right]$$

$$\geq 3\Big(\frac{t_2}{t_1} - 1\Big)\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2c}\frac{b^3}{c^2a}\frac{c^3}{a^2b}} = 3\Big(\frac{t_2}{t_1} - 1\Big)$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^{t_2} \geq \Big(\frac{a^3}{b^2c}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{b^3}{c^2a}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{c^3}{a^2b}\Big)^{t_1}, \ \forall t_2 > t_1 > 0,$$

hay $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0, 1)$.

Bài toán 2.20. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{9a^2}{a^2 + 2(b+c)^2} + \frac{9b^2}{b^2 + 2(c+a)^2} + \frac{9c^2}{c^2 + 2(a+b)^2} \geqslant \frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}}. \tag{2.19}$$

Giải. Trước hết ta chứng minh

$$\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\geq 3.$$

Đặt

$$A=\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}.$$

$$B=a\left[a^2+2(b+c)^2\right]+b\left[b^2+2(c+a)^2\right]+c\left[c^2+2(a+b)^2\right]$$

$$=a^3+b^3+c^3+2a^2b+2b^2a+2b^2c+2c^2b+2a^2c+2c^2a+12abc.$$

Theo bất đẳng thức Holder,ta có

$$A^2B\geq(a+b+c)^3.$$

Ta cần chứng minh $(a+b+c)^3\geq B$ hay

$$(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+2a^2b+2b^2a+2b^2c+2c^2b+2a^2c+2c^2a+12abc$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\geq 0.$$

Do đó $A\geq 1$. Từ đây suy ra

$$\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\geq 3.$$

Lại có

$$\frac{9a^2}{a^2+2(b+c)^2}=\Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\Big)^2+1\geqslant 2\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}},$$

$$\frac{9b^2}{b^2+2(c+a)^2}=\Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}\Big)^2+1\geqslant 2\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}},$$

$$\frac{9c^2}{c^2+2(a+b)^2}=\Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\Big)^2+1\geqslant 2\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}.$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{9a^2}{a^2+2(b+c)^2}+\frac{9b^2}{b^2+2(c+a)^2}+\frac{9c^2}{c^2+2(a+b)^2}\geqslant\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+$$

$$\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
Nhận xét rằng (2.19) có thể xem như tính chất $F(2) \geq F(1)$ của hàm số đồng biến với

$$F(t) = \Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}}\Big)^t + \Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}}\Big)^t + \Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}}\Big)^t, \ \forall t \geq 1.$$

Ta khẳng định nhận xét trên bởi bài toán sau.

Bài toán 2.21. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$F(t) = \Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}}\Big)^t + \Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}}\Big)^t + \Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}}\Big)^t$$

là hàm số đồng biến trên $[1, 2]$.
Giải. Ta theo chứng minh của bài toán trên, ta có

$$\frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}} \geq 3.$$

Với $t \geq 1$, ta có

$$\Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}}\Big)^t + t - 1 \geq t\frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}},$$

$$\Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}}\Big)^t + t - 1 \geq t\frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}},$$

$$\Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}}\Big)^t + t - 1 \geq t\frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}},$$

$$t\left[\frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}}\right] \geq 3t.$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}}\Big)^t + \Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}}\Big)^t + \Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}}\Big)^t \geq 3.$$

Với $\forall t_1, t_2 \in [1, 2], t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1) \leq F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}}\Big)^{t_2}$$

$$\geq \Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\Big)^{t_1}.$$

Ta có

$$\Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\Big)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}\Big)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\Big)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{t_2}{t_1}-1\Big)\Bigg[\Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\Big)^{t_1}\Bigg]$$

$$\geq 3\Big(\frac{t_2}{t_1}-1\Big).$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\Big)^{t_2}+\Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}\Big)^{t_2}+\Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\Big)^{t_2}$$

$$\geq \Big(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{3b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{3c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\Big)^{t_1}$$

hay $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1,2]$.

Bài toán 2.22 (JAPAN MO 2002). Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\geq\frac{3}{5}. \qquad (2.20)$$

Giải. Không mất tính tổng quát, ta cho $a+b+c=1$.Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}+\frac{4b^2-4b+1}{2b^2-2b+1}+\frac{4c^2-4c+1}{2c^2-2c+1}\geq\frac{3}{5}.$$

Xét hiệu

$$\frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}-[-\frac{54}{25}(a-\frac{1}{3})+\frac{1}{5}]=\frac{2(3a-1)^2(6a+1)}{25(2a^2-2a+1)}\geq 0.$$

Do đó

$$\frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1} \geq -\frac{54}{25}(a-\frac{1}{3})+\frac{1}{5}.$$

Tương tự,ta có

$$\frac{4b^2-4b+1}{2b^2-2b+1} \geq -\frac{54}{25}(b-\frac{1}{3})+\frac{1}{5}$$

$$\frac{4c^2-4c+1}{2c^2-2c+1} \geq -\frac{54}{25}(c-\frac{1}{3})+\frac{1}{5}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và kết hợp với $a+b+c=1$, ta được

$$\frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}+\frac{4b^2-4b+1}{2b^2-2b+1}+\frac{4c^2-4c+1}{2c^2-2c+1} \geq \frac{3}{5}.$$

Bất đẳng thức (2.20) có thể viết dưới dạng

$$\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq 3.$$

Từ đây ta xét bài toán sau.

Bài toán 2.23. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$F(t)=\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^t+\Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^t+\Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^t$$

là hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$

Giải. Với $t \geq 1$, ta có

$$\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^t+t-1 \geq t\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2},$$

$$\Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^t+t-1 \geq t\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2},$$

$$\Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^t+t-1 \geq t\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2},$$

$$t\left[\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\right] \geq 3t.$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^t+\Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^t+\Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^t \geq 3$$

Với $\forall t_1, t_2 \in [1; +\infty), t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1) \le F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^{t_1} \le$$

$$\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^{t_2}.$$

Ta có

$$\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \ge \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \ge \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \ge \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{t_2}{t_1}-1\Big)\Big[\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^{t_1}\Big] \ge 3\Big(\frac{t_2}{t_1}-1\Big).$$

Cộng theo vế bốn bất đẳng thức trên ta thu được

$$\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^{t_1} \le$$

$$\Big(\frac{5(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{5(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{5(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\Big)^{t_2}.$$

hay $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1, +\infty)$.

Bài toán 2.24. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^3 + \Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^3 + \Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^3$$

$$\ge \frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc} + \frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca} + \frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}. \tag{2.21}$$

Giải. Trước hết,ta chứng minh

$$\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc} + \frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca} + \frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab} \ge 3.$$

Thật vậy,bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(\sqrt{\frac{a}{b}})^2}{\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}}+\frac{(\sqrt{\frac{b}{c}})^2}{\sqrt{\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}}+\frac{(\sqrt{\frac{c}{a}})^2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}}\geq\frac{3}{2}.$$

Theo bất đẳng thức Schwarz,ta có

$$\frac{(\sqrt{\frac{a}{b}})^2}{\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}}+\frac{(\sqrt{\frac{b}{c}})^2}{\sqrt{\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}}+\frac{(\sqrt{\frac{c}{a}})^2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}}\geq\frac{\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\Big)^2}{2\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\Big)}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\Big)\geq\frac{3}{2}.$$

Ta có

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^3+2\geq 3\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc},$$

$$\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^3+2\geq 3\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca},$$

$$\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^3+2\geq 3\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab},$$

$$2\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}+\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}+\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)\geq 6.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^3+\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^3+\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^3$$

$$\geq\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}+\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}+\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.
Bất đẳng thức (2.21) có thể viết dưới dạng

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^3+\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^3+\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^3$$

$$\geq \Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^1 + \Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^1 + \Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^1. \qquad (2.22)$$

Ta thấy rằng (2.22) có dáng dấp của một hàm số đồng biến $F(3) \geq F(1)$ với

$$F(t) = \Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^t + \Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^t + \Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^t, \ \forall t \geq 1.$$

Ta xét bài toán sau để khẳng định nhận xét trên.

Bài toán 2.25. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$F(t) = \Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^t + \Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^t + \Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^t$$

là hàm số đồng biến trên $[1, 3]$.

Giải. Với $t \geq 1$, ta có

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^t + t - 1 \geq t\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc},$$

$$\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^t + t - 1 \geq t\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca},$$

$$\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^t + t - 1 \geq t\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab},$$

$$t\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc} + \frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca} + \frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big) \geq 3t.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^t + \Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^t + \Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^t \geq 3.$$

Với $\forall t_1, t_2 \in [1, 3], t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1) \leq F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^{t_2} + \Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^{t_2}$$

$$\geq \Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^{t_1} + \Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^{t_1}.$$

Ta có

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^{t_2} + \frac{t_2}{t_1} - 1 \geq \frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\geq\frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\geq\frac{t_2}{t_1}\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^{t_1},$$

$$\Big(\frac{t_2}{t_1}-1\Big)\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^{t_1}\geq 3\Big(\frac{t_2}{t_1}-1\Big).$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^{t_2}+\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^{t_2}+\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^{t_2}$$

$$\geq\Big(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{2\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+ca}\Big)^{t_1}+\Big(\frac{2\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}\Big)^{t_1}$$

hay $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[1,3]$.

Bài toán 2.26. Chứng minh rằng với mọi bộ số a, b, c, ta đều có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Đây là bất đẳng thức cơ bản (có trong tất cả các giáo trình về bất đẳng thức và có tên là bất đẳng thức *Nesbitt*) nhằm để mô tả các ứng dụng khác nhau của các bất đẳng thức cổ điển như bất đẳng thức Cauchy,bất đẳng thức AG,... để giải. Tuy nhiên, nếu viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng

$$\frac{a^1}{b^1+c^1}+\frac{b^1}{c^1+a^1}+\frac{c^1}{a^1+b^1}\geq\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}$$

hay

$$\frac{a^1}{b^1+c^1}+\frac{b^1}{c^1+a^1}+\frac{c^1}{a^1+b^1}\geq\frac{a^0}{b^0+c^0}+\frac{b^0}{c^0+a^0}+\frac{c^0}{a^0+b^0}\tag{2.23}$$

với quy ước $a^0=b^0=c^0=1$, thì ta có nhận xét rằng (2.23)có dáng dấp của một hàm đồng biến

$$F(1)\geq F(0),$$

với

$$F(t)=\frac{a^t}{b^t+c^t}+\frac{b^t}{c^t+a^\alpha}+\frac{c^t}{a^t+b^t},\ \ \forall t>0.$$

Ta xét bài toán sau

Bài toán 2.27. Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$F(t) = \frac{a^t}{b^t + c^t} + \frac{b^t}{c^t + a^t} + \frac{c^t}{a^t + b^t}.$$

là hàm số đồng biến trên $\Big(0; 1\Big)$

Giải. Với $\forall t_1, t_2 \in (0; 1), t_1 < t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1) \leq F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\frac{a^{t_2}}{b^{t_2} + c^{t_2}} + \frac{b^{t_2}}{c^{t_2} + a^{t_2}} + \frac{c^{t_2}}{a^{t_2} + b^{t_2}} \geq \frac{a^{t_1}}{b^{t_1} + c^{t_1}} + \frac{b^{t_1}}{c^{t_1} + a^{t_1}} + \frac{c^{t_1}}{a^{t_1} + b^{t_1}}.$$

Không giảm tính tổng quát, ta coi $a \geq b \geq c$, suy ra $b^t + c^t \leqslant a^t + c^t \leqslant a^t + b^t, \ \forall t \in (0; 1)$.
Ta có

$$T_1 = \frac{a^{t_2}}{b^{t_2} + c^{t_2}} - \frac{a^{t_1}}{b^{t_1} + c^{t_1}} = \frac{a_1^t b_1^t (a^{t_2 - t_1} - b^{t_2 - t_1}) + a^{t_1} c^{t_1} (a^{t_2 - t_1} - c^{t_2 - t_1})}{(b^{t_2} + c^{t_2})(b^{t_1} + c^{t_1})} \geqslant$$
$$\frac{a^{t_1} b^{t_1} (a^{t_2 - t_1} - b^{t_2 - t_1}) + a^{t_1} c^{t_1} (a^{t_2 - t_1} - c^{t_2 - t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1})},$$

$$T_2 = \frac{c^{t_2}}{a^{t_2} + b^{t_2}} - \frac{c^{t_1}}{a^{t_1} + b^{t_1}} = \frac{c^{t_1} a^{t_1} (c^{t_2 - t_1} - a^{t_2 - t_1}) + c^{t_1} b^{t_1} (c^{t_2 - t_1} - b^{t_2 - t_1})}{(a^{t_2} + b^{t_2})(a^{t_1} + b^{t_1})} \geqslant$$
$$\frac{c^{t_1} a^{t_1} (c^{t_2 - t_1} - a^{t_2 - t_1}) + c^{t_1} b^{t_1} (c^{t_2 - t_1} - b^{t_2 - t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1})},$$

$$T_3 = \frac{b^{t_2}}{c^{t_2} + a^{t_2}} - \frac{b^{t_1}}{c^{t_1} + a^{t_1}} = \frac{b^{t_1} a^{t_1} (b^{t_2 - t_1} - a^{t_2 - t_1}) + b^{t_1} c^{t_1} (b^{t_2 - t_1} - c^{t_2 - t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1})}.$$

Suy ra

$$T_1 + T_2 + T_3 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^{t_2}}{b^{t_2} + c^{t_2}} + \frac{b^{t_2}}{c^{t_2} + a^{t_2}} + \frac{c^{t_2}}{a^{t_2} + b^{t_2}} \geq \frac{a^{t_1}}{b^{t_1} + c^{t_1}} + \frac{b^{t_1}}{c^{t_1} + a^{t_1}} + \frac{c^{t_1}}{a^{t_1} + b^{t_1}},$$

hay $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

Bài toán 2.28. Chứng minh rằng với mọi bộ số a, b, c, d ta đều có

$$\frac{a}{b + c + d} + \frac{b}{a + c + d} + \frac{c}{a + b + d} + \frac{d}{a + b + c} \geq \frac{4}{3}.$$

Bài toán này có thể chứng minh bằng cách dựa vào bất đẳng thức Cauchy hoặc bất đẳng thức AG.

Tuy nhiên, nếu viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng

$$\frac{a^1}{b^1+c^1+d^1}+\frac{b^1}{a^1+c^1+d^1}+\frac{c^1}{a^1+b^1+d^1}+\frac{d^1}{a^1+b^1+c^1}\geq$$

$$\frac{1}{1+1+1}+\frac{1}{1+1+1}+\frac{1}{1+1+1}+\frac{1}{1+1+1}$$

hay

$$\frac{a^1}{b^1+c^1+d^1}+\frac{b^1}{a^1+c^1+d^1}+\frac{c^1}{a^1+b^1+d^1}+\frac{d^1}{a^1+b^1+c^1}\geq\frac{a^0}{b^0+c^0+d^0}+\frac{b^0}{a^0+c^0+d^0}$$

$$+\frac{c^0}{a^0+b^0+d^0}+\frac{d^0}{a^0+b^0+c^0} \tag{2.24}$$

với quy ước $a^0=b^0=c^0=d^0=1$, thì ta có nhận xét rằng (2.24)có dáng dấp của một hàm đồng biến

$$F(1)\geq F(0),$$

với

$$F(t)=\frac{a^t}{b^t+c^t+d^t}+\frac{b^t}{a^t+c^t+d^t}+\frac{c^t}{a^t+b^t+d^t},\ \ \forall t.$$

Để kiểm chứng nhận xét trên, ta xét bài toán sau

Bài toán 2.29. Với a,b,c,d là các số dương, Chứng minh rằng

$$F(t)=\frac{a^t}{b^t+c^t+d^t}+\frac{b^t}{a^t+c^t+d^t}+\frac{c^t}{a^t+b^t+d^t}$$

là hàm số đồng biến trong $(0;1)$.

Giải. Với $\forall t_1,t_2\in(0;1),t_1<t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1)\leq F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\frac{a^{t_2}}{b^{t_2}+c^{t_2}+d^{t_2}}+\frac{b^{t_2}}{a^{t_2}+c^{t_2}+d^{t_2}}+\frac{c^{t_2}}{a^{t_2}+b^{t_2}+d^{t_2}}$$
$$\geqslant\frac{a^{t_1}}{b^{t_1}+c^{t_1}+d^{t_1}}+\frac{b^{t_1}}{a^{t_1}+c^{t_1}+d^{t_1}}+\frac{d^{t_1}}{a^{t_1}+b^{t_1}+c^{t_1}}.$$

Không giảm tính tổng quát, ta coi $a \geq b \geq c \geq d$, suy ra

$$b^t + c^t + d^t \leqslant a^t + c^t + d^t \leqslant a^t + b^t + d^t \leqslant a^t + b^t + c^t, \ \ \forall t \geqslant 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{a^{t_2}}{b^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2}} - \frac{a^{t_1}}{b^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1}} = \\
&\quad \frac{a^{t_1}b^{t_1}(a^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1}) + a^{t_1}c^{t_1}(a^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1}) + a^{t_1}d^{t_1}(a^{t_2-t_1} - d^{t_2-t_1})}{(b^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(b^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})} \\
&\geqslant \frac{a^{t_1}b^{t_1}(a^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1}) + a^{t_1}c^{t_1}(a^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1}) + a^{t_1}d^{t_1}(a^{t_2-t_1} - d^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{b^{t_2}}{a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2}} - \frac{b^{t_1}}{a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1}} = \\
&\quad \frac{b^{t_1}a^{t_1}(b^{t_2-t_1} - a^{t_2-t_1}) + b^{t_1}c^{t_1}(b^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1}) + b^{t_1}d^{t_1}(b^{t_2-t_1} - d^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_1 + T_2 &\geqslant \frac{a^{t_1}c^{t_1}(a^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1}) + a^{t_1}d^{t_1}(a^{t_2-t_1} - d^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})} \\
&\quad + \frac{b^{t_1}c^{t_1}(b^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1}) + b^{t_1}d^{t_1}(b^{t_2-t_1} - d^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= \frac{c^{t_2}}{a^{t_2} + b^{t_2} + d^{t_2}} - \frac{c^{t_1}}{a^{t_1} + b^{t_1} + d^{t_1}} = \\
&\quad \frac{c^{t_1}a^{t_1}(c^{t_2-t_1} - a^{t_2-t_1}) + c^{t_1}b^{t_1}(c^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1}) + c^{t_1}d^{t_1}(c^{t_2-t_1} - d^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + b^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + b^{t_1} + d^{t_1})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{d^{t_2}}{a^{t_2} + b^{t_2} + c^{t_2}} - \frac{d^{t_1}}{a^{t_1} + b^{t_1} + c^{t_1}} = \\
&\quad \frac{d^{t_1}a^{t_1}(d^{t_2-t_1} - a^{t_2-t_1}) + d^{t_1}b^{t_1}(d^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1}) + d^{t_1}c^{t_1}(d^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + b^{t_2} + c^{t_2})(a^{t_1} + b^{t_1} + c^{t_1})} \\
&\geqslant \frac{d^{t_1}a^{t_1}(d^{t_2-t_1} - a^{t_2-t_1}) + d^{t_1}b^{t_1}(d^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1}) + d^{t_1}c^{t_1}(d^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + b^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + b^{t_1} + d^{t_1})}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_3 + T_4 &\geqslant \frac{c^{t_1}a^{t_1}(c^{t_2-t_1} - a^{t_2-t_1}) + c^{t_1}b^{t_1}(c^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + b^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + b^{t_1} + d^{t_1})} \\
&\quad + \frac{d^{t_1}a^{t_1}(d^{t_2-t_1} - a^{t_2-t_1}) + d^{t_1}b^{t_1}(d^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + b^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + b^{t_1} + d^{t_1})}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \geqslant$$

$$\frac{a^{t_1}c^{t_1}(a^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1}) + a^{t_1}d^{t_1}(a^{t_2-t_1} - d^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})}$$

$$+\frac{b^{t_1}c^{t_1}(b^{t_2-t_1} - c^{t_2-t_1}) + b^{t_1}d^{t_1}(b^{t_2-t_1} - d^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})}$$

$$+\frac{c^{t_1}a^{t_1}(c^{t_2-t_1} - a^{t_2-t_1}) + c^{t_1}b^{t_1}(c^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})}$$

$$+\frac{d^{t_1}a^{t_1}(d^{t_2-t_1} - a^{t_2-t_1}) + d^{t_1}b^{t_1}(d^{t_2-t_1} - b^{t_2-t_1})}{(a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2})(a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1})} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{t_2}}{b^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2}} + \frac{b^{t_2}}{a^{t_2} + c^{t_2} + d^{t_2}} + \frac{c^{t_2}}{a^{t_2} + b^{t_2} + d^{t_2}}$$

$$\geqslant \frac{a^{t_1}}{b^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1}} + \frac{b^{t_1}}{a^{t_1} + c^{t_1} + d^{t_1}} + \frac{d^{t_1}}{a^{t_1} + b^{t_1} + c^{t_1}}.$$

Ta được điều cần chứng minh.

Ta xét bài toán tổng quát sau

Bài toán 2.30. Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương, $\alpha \geq \beta \geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^\alpha}{a_2^\alpha + a_3^\alpha + \cdots + a_n^\alpha} + \frac{a_2^\alpha}{a_1^\alpha + a_3^\alpha + \cdots + a_n^\alpha} + \cdots + \frac{a_n^\alpha}{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_{n-1}^\alpha} \geqslant$$

$$\frac{a_1^\beta}{a_2^\beta + a_3^\beta + \cdots + a_n^\beta} + \frac{a_2^\alpha}{a_1^\beta + a_3^\beta + \cdots + a_n^\beta} + \cdots + \frac{a_n^\beta}{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_{n-1}^\beta}.$$

Giải. Xét hàm số

$$F(t) = \frac{a_1^t}{a_2^t + a_3^t + \cdots + a_n^t} + \frac{a_2^t}{a_1^t + a_3^t + \cdots + a_n^t} + \cdots + \frac{a_n^t}{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_{n-1}^t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Ta chứng $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.
Đặt

$$S = a_1^t + a_2^t + a_3^t + \cdots + a_n^t$$

Ta có

$$F'(t) = \sum_1^n \frac{a_1^t \ln a_1(a_2^t + a_3^t + \cdots + a_n^t) - a_1^t(a_2^t \ln a_2 + a_3^t \ln a_3 + \cdots + a_n^t \ln a_n)}{(S - a_1^t)^2}$$

$$= \sum_{1}^{n} \frac{a_1^t a_2^t(\ln a_1 - \ln a_2) + a_1^t a_3^t(\ln a_1 - \ln a_3) + a_1^t a_n^t(\ln a_1 - \ln a_n)}{(S - a_1^t)^2}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i^t a_j^t(\ln a_i - \ln a_j)}{(S - a_i^t)^2}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i^t a_j^t(\ln a_i - \ln a_j)\Big(\frac{1}{(S - a_i^t)^2} - \frac{1}{(S - a_j^t)^2}\Big)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i^t a_j^t(\ln a_i - \ln a_j)(a_i^t - a_j^t)\frac{2S - a_i^t - a_j^t}{(S - a_i^t)^2(S - a_j^t)^2} \geqslant 0.$$

Do đó $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$. Khi đó $\forall \alpha \geq \beta \geq 0$ ta luôn có

$$\frac{a_1^\alpha}{a_2^\alpha + a_3^\alpha + \cdots + a_n^\alpha} + \frac{a_2^\alpha}{a_1^\alpha + a_3^\alpha + \cdots + a_n^\alpha} + \cdots + \frac{a_n^\alpha}{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_{n-1}^\alpha} \geqslant$$
$$\frac{a_1^\beta}{a_2^\beta + a_3^\beta + \cdots + a_n^\beta} + \frac{a_2^\alpha}{a_1^\beta + a_3^\beta + \cdots + a_n^\beta} + \cdots + \frac{a_n^\beta}{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_{n-1}^\beta}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$.

Bài toán 2.31. Chứng minh rằng với mọi bộ số $\Big(a_i\Big)\ \Big(b_i\Big)$, ta luôn có bất đẳng thức sau

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) \geq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2. \tag{2.25}$$

Dấu đẳng thức trong (2.25) xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số $\Big(a_i\Big), \Big(b_i\Big)$ tỉ lệ với nhau, tức là tồn tại cặp số α, β không đồng thời bằng 0, sao cho

$$\alpha a_i + \beta b_i = 0,\ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Bài toán này là bất đẳng thức Cauchy rất nổi tiếng và cũng có rất nhiều cách chứng minh. Tuy nhiên, nếu ta viết lại bât đẳng thức này dưới dạng

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-0} b_i^0\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^0 b_i^{2-0}\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-1} b_i^1\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^1 b_i^{2-1}\Big) \tag{2.26}$$

với quy ước $a_k^0 = b_k^0 = 1 (k = 1, 2, \ldots, n)$, thì ta nhận thấy rằng (2.26) có dáng dấp của một hàm số nghịch biến

$$F(0) \geq F(1)$$

với

$$F(t) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-t} b_k^t\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^t b_k^{2-t}\Big), t \in [0; 1].$$

Nhân xét trên sẽ được khẳng định bởi bài toán sau.

Bài toán 2.32 (H.W.Melaughlin, F.T.Metcalf)**.** Chứng minh rằng với mọi cặp dãy số dương $(a_1, a_2, \ldots, a_n); (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ và với mọi $\alpha, \beta \in [0; 1]$, $\alpha \leq \beta$, ta đều có

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-\alpha} b_k^{\alpha}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\alpha} b_k^{2-\alpha}\Big) \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-\beta} b_k^{\beta}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\beta} b_k^{2-\beta}\Big).$$

Chứng minh. Xét hàm số $f(t) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{2-t} b_k^t\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^t b_k^{2-t}\Big)$ với $t \in [0; 1]$.

Ta có

$$f(t) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Big(\frac{b_k}{a_k}\Big)^t\right]\left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \Big(\frac{a_k}{b_k}\Big)^t\right];$$

$$f'(t) = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Big(\frac{b_k}{a_k}\Big)^t \ln\frac{b_k}{a_k}\right]\left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \Big(\frac{a_k}{b_k}\Big)^t\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Big(\frac{b_k}{a_k}\Big)^t\right]\left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \Big(\frac{a_k}{b_k}\Big)^t \ln\frac{a_k}{b_k}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k^2 b_k^2 \Big(\ln\frac{b_k}{a_k} + \ln\frac{a_k}{b_k}\Big) + \sum_{i \neq j}\left[a_i^2 b_j^2 \Big(\frac{b_i}{a_i}\frac{a_j}{b_j}\Big)^t \ln\frac{b_i}{a_i} + a_i^2 b_j^2 \Big(\frac{b_i}{a_i}\frac{a_j}{b_j}\Big)^t \ln\frac{a_j}{b_j}\right]$$

$$+ \sum_{i \neq j}\left[a_j^2 b_i^2 \Big(\frac{b_j}{a_j}\frac{a_i}{b_i}\Big)^t \ln\frac{b_j}{a_j} + a_j^2 b_i^2 \Big(\frac{b_j}{a_j}\frac{a_i}{b_i}\Big)^t \ln\frac{a_i}{b_i}\right]$$

$$= \sum_{i\neq j}\left[a_i^2b_j^2\Big(\frac{b_i}{a_i}\frac{a_j}{b_j}\Big)^t \ln\frac{a_jb_i}{a_ib_j} + a_j^2b_i^2\Big(\frac{b_j}{a_j}\frac{a_i}{b_i}\Big)^t \ln\frac{a_ib_j}{a_jb_i}\right]$$

$$= \sum_{i\neq j}\ln\frac{a_jb_i}{a_ib_j}\left[a_i^2b_j^2\Big(\frac{b_i}{a_i}\frac{a_j}{b_j}\Big)^t - a_j^2b_i^2\Big(\frac{b_j}{a_j}\frac{a_i}{b_i}\Big)^t\right]$$

$$= \sum_{i\neq j}(a_jb_i)^t(a_ib_j)^t\ln\frac{a_jb_i}{a_ib_j}\left[(a_ib_j)^{2(1-t)} - (a_jb_i)^{2(1-t)}\right]$$

$$= \sum_{i\neq j}(a_jb_i)^t(a_ib_j)^t\Big(\ln a_jb_i - \ln a_ib_j\Big)\left[(a_ib_j)^{2(1-t)} - (a_jb_i)^{2(1-t)}\right] \leqslant 0,\ \ \forall t\in[0;1]\,.$$

Do đó $f(t))$ là hàm số nghịch biến trên $[0;1]$. Khi đó với $0\le\alpha\le\beta\le 1$, ta có $f(\alpha)\ge f(\beta)$ hay

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k^{2-t}b_k^t\Big)\Big(\sum_{k=1}^n a_k^t b_k^{2-t}\Big) \geqslant \Big(\sum_{k=1}^n a_k^{2-\beta}b_k^{\beta}\Big)\Big(\sum_{k=1}^n a_k^{\beta}b_k^{2-\beta}\Big).$$

Kết luận

Luận văn đã trình bày được một số bất đẳng thức cổ điển và từ việc nội suy các bất đẳng thức đơn giản và quen thuộc đã khái quát được một số bài toán, từ đó có cái nhìn tổng quát từ một về một bài toán bất đẳng thức. Tiếp theo cho một số ví dụ minh hoạ và áp dụng để thiết lập các bất đẳng thức mới từ bất đẳng thức đồng bậc đã cho.

Tuy nhiên, bất đẳng thức là một lĩnh vực khó và vô cùng rộng lớn, mỗi bài toán về bất đẳng thức thì có nhiều cách giải khác nhau.Vì thế tác giả củng chỉ mong rằng luận văn này có thể góp một phần vào thực tiễn giảng dạy về một chuyên đề bất đẳng thức trong phổ thông.

Mặc dù đã hết sức cố gắng, song vì khuôn khổ bài viết và vì thời gian và khả năng có hạn nên chắc chắn luận văn sẽ không tránh khỏi khiếm khuyết. Tác giả mong muốn nhận nhiều ý kiến đóng góp của các thầy cô, cùng bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Đức Chính, *Bất đẳng thức*, NXB Giáo Dục Việt Nam, 1993.

[2] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lí và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2006.

[3] Nguyễn Văn Mậu, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2008.

[4] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo Dục, 2004.

[5] D, S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, " *Recent Advances in Geometric Inequalities*", Kluwer Academic Publishers, 1989.

[6] Eric W.Weisstein, " *CRS Concise Encyclopedia of Mathematics*", CRS Press, 1999.