

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**



NGUYỄN VĂN THÁI

**PHÂN DẠNG VÀ KỸ THUẬT TÍNH
TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN**

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN MINH KHOA

THÁI NGUYÊN - 2011

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**



NGUYỄN VĂN THÁI

**PHÂN DẠNG VÀ KỸ THUẬT TÍNH
TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2011

LỜI MỞ ĐẦU	2
Chương 1. Phép tính tích phân hàm một biến.....	4
1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định	4
1.2. Tích phân xác định.....	7
Chương 2. Phân dạng và kĩ thuật tính tích phân hàm một biến.....	12
2.1. Các dạng bài toán tích phân từng phần	12
2.2. Các dạng bài toán tích phân lượng giác	33
2.3. Các dạng bài toán tích phân hàm vô tỉ.....	54
2.4. Các dạng bài toán tích phân hữu tỉ	71
2.5. Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối và bất đẳng thức tích phân .	85
Chương 3. Ứng dụng của tích phân hàm một biến	90
3.1. Diện tích hình phẳng xác định bởi đường cong $y = f(x)$	90
3.2. Thể tích khối tròn xoay	96
KẾT LUẬN	100
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	101

LỜI MỞ ĐẦU

Phép tính tích phân bắt nguồn từ nhu cầu sáng tạo phương pháp tổng quát để tìm diện tích, thể tích từ cách đây rất lâu. Ngày nay, phép tính vi tích phân chiếm một vị trí hết sức quan trọng trong Toán học, và được ứng dụng rộng khắp trong các lĩnh vực như Xác suất thống kê, Vật lý, Thiên văn học, trong các ngành công nghiệp như đóng tàu, sản xuất ô tô, máy bay,...

Phép tính tích phân được giới thiệu cho các học sinh lớp 12, và được phổ biến tại các trường Đại học cho khối sinh viên năm thứ nhất và năm thứ 2. Đồng thời phép tính tích phân cũng là nội dung quan trọng trong các kì thi tốt nghiệp THPT, và tuyển sinh Đại học.

Trong luận văn này chúng tôi trình bày một số vấn đề “Phân dạng và kĩ thuật tính tích phân hàm một biến”, cùng bài toán ứng dụng tính diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay.

Luận văn bao gồm 3 chương.

Chương 1. Trình bày các khái niệm, tính chất cơ bản của nguyên hàm tích phân hàm một biến.

Chương 2. Tập chung vào việc phân dạng và các kĩ thuật tính tích phân hàm một biến.

Chương 3. Trình bày về hai ứng dụng của tích phân hàm một biến, đó là xác định diện tích hình phẳng và thể tích khối tròn xoay.

Mặc dù đã cố gắng học tập và nghiên cứu một cách nghiêm túc, song chắc chắn luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp để hiệu chỉnh tốt hơn luận văn của quý thầy cô, và bạn bè đồng nghiệp.

Luận văn được hoàn thành dưới sự chỉ dẫn trực tiếp của thầy hướng dẫn và sự trợ giúp của các thầy cô ở khoa Toán – Tin trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Tôi xin chân thành cảm ơn Thầy giáo, TS. Nguyễn Minh Khoa đã tận tình giảng dạy, chỉ bảo và ủng hộ trong suốt quá trình nghiên cứu viết luận văn của tôi. Cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại Học Khoa Học cùng

các thầy cô ở khoa Toán - Tin và bạn bè học viên lớp cao học Toán K3b, đã giúp đỡ động viên ủng hộ tôi trong suốt quá trình học tập, hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, ... tháng 10 năm 2011

Học viên

Nguyễn Văn Thái.

Chương 1. Phép tính tích phân hàm một biến

1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

1.1.1. Định nghĩa

Hàm số $y = F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ trên $(a; b)$ nếu: $F'(x) = f(x), \forall x \in (a; b)$.

Ví dụ 1.1.1.

Hàm số $y = \cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = -\sin x$ vì $(\cos x)' = -\sin x$

Hàm số $y = \arcsin x$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in (-1; 1)$ vì

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1.1.2. Định lý về dạng tổng quát của nguyên hàm

Nếu trong khoảng $(a; b)$ hàm số $y = f(x)$ có nguyên hàm là $y = F(x)$, thì trong khoảng ấy:

i) $y = F(x) + C$ với C là một hằng số tùy ý cũng là một nguyên hàm của $y = f(x)$.

ii) Mọi nguyên hàm của hàm số $y = f(x)$ đều có dạng $y = F(x) + C$, với C là hằng số tùy ý.

Chứng minh:

i) Vì $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ nên $F(x) + C$, với C là hằng số tùy ý là một nguyên hàm của $y = f(x)$.

ii) Giả sử hàm số $y = H(x)$ cũng là một nguyên hàm của $y = f(x), \forall x \in (a; b)$.

Ta có: $[H(x) - F(x)]' = H'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in (a; b)$.

Suy ra, $H(x) - F(x) = C, \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow H(x) = F(x) + C$ (đpcm).

1.1.3. Tính chất.

Tính chất 1. Cho $y = f(x)$ là hàm số có nguyên hàm, khi đó

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$$

Tính chất 2. Nếu $y = F(x)$ có đạo hàm, ta có $d(F(x)) = F'(x) + c$, c là hằng số.

Tính chất 3. Giả sử $f(x); g(x)$ là hai hàm số có nguyên hàm. Với hai số thực $\alpha; \beta$ bất kỳ: $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$

Tính chất 4. Nếu $\int f(t) dt = F(t) + c$ thì:

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + c = F(u) + c \text{ với } u = u(x)$$

1.1.4. Nguyên hàm một số hàm cơ bản

• $\int 0 dx = C$ • $\int dx = x + C$ • $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha + 1} + C$ • $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ • $\int \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + C$ • $\int \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x + C$ • $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$ • $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ • $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ • $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ • $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$	$u = u(x)$ • $\int du = u + C$ • $\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha + 1} u^{\alpha + 1} + C$ • $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ • $\int \sin \alpha u du = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha u + C$ • $\int \cos \alpha u du = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha u + C$ • $\int e^{\beta u} du = \frac{1}{\beta} e^{\beta u} + C$ • $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$ • $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\cot u + C$ • $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C$ • $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$
--	--

Ví dụ 1.1.2. Tính các nguyên hàm sau.

$$\bullet I_1 = \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \int (ax+b)^\alpha d(ax+b) = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + c$$

$$\bullet I_2 = \int \left(\frac{1}{x^4} + \sqrt[3]{x} \right) dx = \int x^{-4} dx + \int x^{\frac{1}{3}} dx = -\frac{1}{3} x^{-3} + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c$$

$$\begin{aligned} \bullet I_3 &= \int x(ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \int [(ax+b)-b](ax+b)^\alpha d(ax+b) \\ &= \frac{1}{a} \int (ax+b)^{\alpha+1} d(ax+b) - \frac{b}{a} \int (ax+b)^\alpha d(ax+b) \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{b}{a^2} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C. \end{aligned}$$

1.1.5. Một số nguyên hàm mở rộng

$\bullet \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ $\bullet \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$ $\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$ $\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad ; a > 0$ $\bullet \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \left \frac{x}{a} \right + C$ $\bullet \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a} \ln \left \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right + C$ $\bullet \int \ln(ax+b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax+b) - x + C$

Chú ý: Khi sử dụng một trong các công thức trên, ta cần phải chứng minh công thức đó bằng cách lấy đạo hàm hai vế.

1.2. Tích phân xác định

1.2.1. Định nghĩa

Định nghĩa tổng tích phân:

Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định và bị chặn trên $[a; b]$. Với phép phân hoạch bất kỳ δ của $[a; b]$ tức là chia đoạn $[a; b]$ thành: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, lấy bất kỳ điểm $\xi_k \in [x_{i-1}; x_i], i = \overline{1; n}$; gọi độ dài của $[x_{i-1}; x_i]$ là $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Khi đó:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i = f(\xi_1) \Delta_1 + f(\xi_2) \Delta_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta_n$$
 được gọi là tổng tích phân của hàm số $y = f(x)$ ứng với phép phân hoạch δ trên $[a; b]$.

Định nghĩa tích phân xác định:

Giả sử $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i = f(\xi_1) \Delta_1 + f(\xi_2) \Delta_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta_n$ là tổng tích phân của hàm số $y = f(x)$ ứng với phép phân hoạch δ trên $[a; b]$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{M \alpha \Delta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i = I$ thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$ và kí hiệu là:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Khi đó hàm $y = f(x)$ được gọi là khả tích trên $[a; b]$.

1.2.2. Công thức

Công thức Newton – Leibnitz. Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C, \forall x \in (a; b)$ thì:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Công thức đảo cận. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; b]$ thì: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

và $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Công thức tách cận. Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a; b]$ ta có:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \forall c \in (a; b)$$

Công thức tích phân từng phần. Giả sử $u = u(x); v = v(x)$ khả tích trên $[a; b]$

Ta có:

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du}$$

Công thức đổi biến. Giả sử $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $x = \varphi(t)$ khả vi liên tục trên $[c; d]$ và $\min \varphi(t)_{[c; d]} = a; \max \varphi(t)_{[c; d]} = b; \varphi(c) = a; \varphi(d) = b$. Ta có công thức đổi biến số.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

1.2.3. Tính chất

Tính chất 1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì nó khả tích trên $[a; b]$

Tính chất 2. Giả sử $f(x); g(x)$ khả tích trên $[a; b]$ và với $\forall \alpha; \beta \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Tính chất 3. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn và liên tục trên $[-a; a]$ thì,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Tính chất 4. Nếu $f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Tính chất 5. Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$

Tính chất 6. Nếu $f(x); g(x)$ là hai hàm liên tục và $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Tính chất 7. Cho $f(x); g(x)$ là hai hàm liên tục trên $[a; b]$ và $g(x) \leq f(x)$,

$$\forall x \in [a; b] \text{ khi đó, } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Tính chất 8. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a; b]$ và $f(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên $[a; b]$ khi đó, $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Tính chất 9. Cho $f(x); g(x)$ là hai hàm liên tục trên $[a; b]$ và $g(x) \leq f(x)$,
 $\forall x \in [a; b]$ đồng thời $f(x); g(x)$ không đồng nhất với nhau trên $[a; b]$ khi đó:
 $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

Tính chất 10. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a; b]$ và $m \leq f(x) \leq M$,
 $\forall x \in [a; b]$ đồng thời $f(x)$ không đồng nhất với m hoặc M trên $[a; b]$ khi đó,
 $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$.

Tính chất 11. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a; b] \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Mệnh đề 1.2.1. Cho $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a+b-x) = f(x) \forall x \in [a; b]$

$$\Rightarrow \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

Chứng minh: Đặt $t = a+b-x, \forall x \in [a; b]$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow xf(x)dx &= \int_a^b xf(a+b-x)dx \Leftrightarrow \int_a^b xf(x)dx = \int_b^a (a+b-t)f(t)d(a+b-t) \\ &\Leftrightarrow \int_a^b xf(x)dx = -\int_b^a (a+b-t)f(t)dt \Leftrightarrow \int_a^b xf(x)dx = (a+b) \int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b xf(x)dx = (a+b) \int_a^b f(x)dt - \int_a^b xf(x)dx \Rightarrow \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx \quad (\text{đpcm}).$$

Mệnh đề 1.2.2. Giả sử $y = f(x)$ là hàm xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T . Khi đó $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

Chứng minh.

$$\text{Ta có, } \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x = t + T \Rightarrow \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt \Rightarrow \int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad (2)$$

$$\text{Từ (1); (2)} \Rightarrow \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^T f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \quad (\text{đpcm}).$$

Hơn nữa, ta có công thức mở rộng: $\int_a^{a+nT} f(x)dx = n \int_0^T f(x)dx$

1.2.4. Ví dụ

$$\bullet I_1 = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}\right) \Big|_1^2 = \frac{16}{3}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^1 (e^x + 1) dx = \int_0^1 (e^x + 1) dx = (e^x + x) \Big|_0^1 = e - 1$$

$$\bullet I_3 = \int_0^\pi (\sin 2x + 1) dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x d(2x) + \int_0^\pi dx = (-\cos 2x) \Big|_0^\pi + x \Big|_0^\pi = \pi$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_4 &= \int (\cos x + 1)^4 dx = \int \cos^4 x dx + C_4^1 \int \cos^3 x + C_4^2 \int \cos^2 x dx + C_4^3 \int \cos x dx + \int dx \\
&= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx + 4 \int \left(\frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4} \right) dx + 3 \int (1 + \cos 2x) dx + 4 \sin x + x + C \\
&= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx + \frac{\sin 3x}{3} + 7 \sin x + 4x + \frac{3 \sin 2x}{2} + C \\
&= \frac{17x}{4} + 7 \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{7 \sin 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx + C \\
&= \frac{35x}{8} + 7 \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{7 \sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C
\end{aligned}$$

Chương 2. Phân dạng và kĩ thuật tính tích phân hàm một biến

2.1. Các dạng bài toán tích phân từng phần

Công thức tích phân từng phần.

Ta có $d(uv) = vdu + u dv \Rightarrow u dv = d(uv) - vdu$

$$\Leftrightarrow \int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

$$\Leftrightarrow \int u dv = uv - \int v du$$

Từ đây ta có công thức tích phân từng phần cho tích phân xác định.

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du}$$

Nhận xét: Một câu hỏi đặt ra là khi nào thì sử dụng công thức tích phân từng phần để tính tích phân. Câu trả lời nói chung là những tích phân mà hàm dưới dấu tích phân có cấu trúc tích hoặc là hàm hợp. Khi đó một vấn đề cốt yếu đặt ra là cần chọn hàm $u; dv$ phù hợp sao cho có thể đưa tích phân về dạng tích phân cơ bản. Cách phân dạng dưới đây chính là việc lựa chọn theo $u; dv$.

Dạng 1. $I = \int e^{\alpha x} \cdot P(x) dx$, $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{\alpha x} dx \end{cases}$

Như vậy nếu $P(x)$ là đa thức bậc n thì sau n lần tích phân từng phần ta sẽ thu được kết quả.

Ví Dụ 2.1.1. Tính các tích phân sau

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{e^x} dx; \quad I_2 = \int_1^2 e^{x+\ln x} dx; \quad I_3 = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx \quad (\text{ĐH Cần Thơ 1999})$$

Ta có:

$$\bullet I_1 = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 + x + 1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2x+1)dx \\ v = -e^{-x} \end{cases} \Rightarrow I_1 = -e^{-x} (x^2 + x + 1) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} (2x+1) dx$$

$$\text{Ta lại tính } I_{11} = \int_0^1 e^{-x} (2x+1) dx \text{ bằng cách đặt, } \begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I_{11} = -e^{-x} (2x+1) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^{-x} dx = -3e^{-1} + 1 - 2e^{-x} \Big|_0^1 = -5e^{-1} + 3$$

$$\Rightarrow I_1 = -3e^{-1} + 1 - 5e^{-1} + 3 = -8e^{-1} + 4.$$

$$\bullet I_2 = \int_1^2 e^{x+\ln x} dx = \int_1^2 x e^x dx = \int_1^2 x d(e^x) = x e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

$$\bullet I_3 = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx^2. \text{ Đặt } t = x^2 \text{ đổi cận } x=0 \rightarrow t=0; \quad x=1 \rightarrow t=1$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^t dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t d(e^t) = \frac{1}{2} t e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt = \frac{e}{2} - e = -\frac{e}{2}.$$

Dạng 2. $I = \int P(x) a^{\alpha x + \beta} dx$ $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = a^{\alpha x + \beta} dx \end{cases}$

Ví Dụ 2.1.2. Tính các tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^1 (x+1)^2 2^x dx$$

$$\text{Ta có, } I_1 = \int_0^1 (x+1)^2 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 (x+1)^2 d(2^x)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} 2^x (x+1)^2 \Big|_0^1 - \frac{2}{\ln 2} \int_0^1 2^x (x+1) dx = \frac{7}{\ln 2} - \frac{2}{\ln^2 2} \int_0^1 (x+1) d(2^x)$$

$$= \frac{7}{\ln 2} - \frac{2}{\ln^2 2} \cdot 2^x \cdot (x+1) \Big|_0^1 + \frac{2}{\ln^2 2} \int_0^1 2^x dx = \frac{7}{\ln 2} - \frac{6}{\ln^2 2} + \frac{2}{\ln^3 2} 2^x \Big|_0^1$$

$$= \frac{7}{\ln 2} - \frac{6}{\ln^2 2} + \frac{4}{\ln^3 2}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^1 (x-1)^2 3^{x+1} dx$$

$$\text{Ta có, } I_2 = \int_0^1 (x-1)^2 3^{x+1} dx = \frac{3}{\ln 3} \int_0^1 (x-1)^2 d(3^x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{\ln 3} 3^x (x-1)^2 \Big|_0^1 - \frac{6}{\ln 3} \int_0^1 3^x (x-1) dx = -\frac{3}{\ln 3} - \frac{6}{\ln^2 3} \int_0^1 (x-1) d(3^x) \\ &= -\frac{3}{\ln 3} - \frac{6}{\ln^2 3} 3^x (x-1) \Big|_0^1 + \frac{6}{\ln^2 3} \int_0^1 3^x dx = \frac{-3}{\ln 3} + \frac{6}{\ln^2 3} + \frac{6}{\ln^3 3} 3^x \Big|_0^1 = \frac{-3}{\ln 3} + \frac{6}{\ln^2 3} + \frac{12}{\ln^3 3} \end{aligned}$$

Dạng 3. $I = \int P(x) \sin \alpha x dx$, $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \sin \alpha x dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.3. Tính tích phân sau:

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin x \cos x dx \quad (\text{Bộ đề})$$

$$\text{Ta có: } \bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin x \cos x dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x d \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = -\frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{8} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{-1}{48} + \frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + x + 1) \sin(2x) dx$$

$$\text{Ta đặt } \begin{cases} u = x^2 + x + 1 \\ dv = \sin(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x + 1 \\ v = -\frac{\cos(2x)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{1}{2} (x^2 + x + 1) \cos(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \cos(2x) dx$$

$$= \frac{\pi^2 + 2\pi + 8}{8} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) d(\sin 2x)$$

$$= \frac{\pi^2 + 2\pi + 8}{8} + \frac{1}{4}(2x+1)\sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x d(2x) = \frac{\pi^2 + 2\pi + 8}{8} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 + 2\pi + 4}{8}$$

Dạng 4. $I = \int P(x) \cos \alpha x dx$ với $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \cos \alpha x dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.4. Tính tích phân sau:

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} x(\sin^4 x + \cos^4 x) dx$$

$$\text{Ta có, } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} x(\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} x(\sin^4 x + \cos^4 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} x\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{8}} x dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{8}} x \cos 4x dx = \frac{3}{8} x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{8}} x d(\sin 4x) = \frac{3\pi^2}{512} + \frac{1}{16} x \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin 4x dx$$

$$= \frac{3\pi^2}{512} + \frac{\pi}{128} + \frac{1}{64} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{3\pi^2}{512} + \frac{\pi}{128} - \frac{1}{64}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} x(\sin^6 x + \cos^6 x) dx \quad (\text{Bộ đề})$$

$$\text{Ta có, } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} x(\sin^6 x + \cos^6 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} x\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \sin^2 x \cos^2 x\right) dx = \frac{5}{8} \int_0^{\frac{\pi}{8}} x dx + \frac{3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{8}} x \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$= \frac{5}{8} x^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} - \frac{3}{32} \int_0^{\frac{\pi}{8}} x d(\cos 4x) = \frac{5\pi^2}{512} + \frac{3}{32} x \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} - \frac{3}{32} \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx$$

$$= \frac{5\pi^2}{512} - \frac{3}{128} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{5\pi^2}{512} - \frac{3}{128}$$

Dạng 5. $I = \int P(x) \ln \alpha x dx$ với $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = \ln \alpha x \\ dv = P(x) dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.5. Tính tích phân sau:

$$\bullet I_1 = \int_0^1 x \ln(x+1) dx \quad (DB - 2007)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(x+1) d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\ln(x+1))$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} (x-1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(x+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\bullet I_2 = \int_1^2 (x-2) \ln x dx \quad (DB - 2007)$$

$$= \int_1^2 \ln x d\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) d(\ln x) = -2 \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \frac{1}{x} dx$$

$$= -2 \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - 2\right) dx = -2 \ln 2 - \left(\frac{x^2}{4} - 2x\right) \Big|_1^2 = -2 \ln 2 + \frac{1}{4}.$$

Dạng 6. $I = \int P(x) \ln^k \alpha x dx$ với $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = \ln^k \alpha x \\ dv = P(x) dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.6. Tính tích phân sau:

$$\bullet I = \int_1^e x \ln^2 x dx \quad (\text{NT95/Đề 149 . Sách 150 đề Bộ Đại Học})$$

$$\text{Ta có, } I = \int_1^e x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} \int_1^e \ln^2 x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 d(\ln^2 x)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e \ln x d(x^2) = \frac{e^2}{2} - x^2 \ln x \Big|_1^e + \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{-e^2}{2} + \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = -\frac{e^2+1}{4}$$

$$\bullet J = \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$$

$$\text{Ta có, } J = \int_1^e x^2 \ln^2 x dx = \frac{1}{3} \int_1^e \ln^2 x d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^3 d(\ln^2 x) = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9} \int_1^e \ln x d(x^3) = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{9} \int_1^e \ln x d(x^3) = \frac{e^3}{3} - x^3 \ln x \Big|_1^e + \frac{2}{9} \int_1^e x^3 d(\ln x) = \frac{e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{9} \int_1^e x^2 dx$$

$$= \frac{e^3}{9} + \frac{2x^3}{27} \Big|_1^e = \frac{5e^3-2}{27}$$

Dạng 7. $I = \int P(x) \arcsin \alpha x dx$ với $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = \arcsin \alpha x \\ dv = P(x) dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.7. Tính tích phân sau:

$$\bullet I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arcsin x dx$$

$$\text{Ta có, } I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arcsin x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 d(\arcsin x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{144} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{144} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) = \frac{\pi}{144} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) \\ &= \frac{\pi}{144} + \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{18} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{144} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\bullet J = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (x^3 - 1) \arcsin(2x+1) dx$$

$$\text{Ta có, } J = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (x^3 - 1) \arcsin(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left(\left(\frac{2x+1-1}{2} \right)^3 - 1 \right) \arcsin(2x+1) d(2x+1)$$

$$\text{Đặt } t = 2x+1 \Rightarrow J = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{t-1}{2} \right)^3 - 1 \right) \arcsin t dt = \frac{1}{16} \int_0^1 (t^3 - 3t^2 + 3t - 9) \arcsin t dt$$

$$\text{Ta đặt, } \begin{cases} u = \arcsin t \\ dv = (t^3 - 3t^2 + 3t - 9) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ v = \frac{t^4}{4} - t^3 + \frac{3t^2}{2} - 9t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J &= \frac{1}{16} \left(\frac{t^4}{4} - t^3 + \frac{3t^2}{2} - 9t \right) \arcsin t \Big|_0^1 - \frac{1}{16} \int_0^1 \left(\frac{t^4}{4} - t^3 + \frac{3t^2}{2} - 9t \right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{-33\pi}{128} + \frac{1}{16} \int_0^1 \left(\frac{t^3}{4} - t^2 + \frac{3t}{2} - 9 \right) d(\sqrt{1-t^2}) \\
&= \frac{-33\pi}{128} + \frac{1}{16} \left(\frac{t^3}{4} - t^2 + \frac{3t}{2} - 9 \right) \sqrt{1-t^2} \Big|_0^1 - \frac{1}{16} \int_0^1 \left(\frac{3t^2}{4} - 2t + \frac{3}{2} \right) \sqrt{1-t^2} dt \\
&= \frac{-33\pi}{128} + \frac{9}{16} - \frac{1}{16} \int_0^1 \left(\frac{3t^2}{4} - 2t + \frac{3}{2} \right) \sqrt{1-t^2} dt
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \sin u \Rightarrow \begin{cases} dt = \cos u du \\ t = 0 \rightarrow u = 0; t = 1 \rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J &= \frac{-33\pi}{128} + \frac{9}{16} - \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\sin^2 u}{4} - 2\sin u + \frac{3}{2} \right) \cos^2 u du \\
&= \frac{-33\pi}{128} + \frac{9}{16} - \frac{3}{64} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin u \cos u)^2 du + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos^2 u du - \frac{3}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \\
&= \frac{-33\pi}{128} + \frac{9}{16} - \frac{3}{256} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u du - \frac{\cos^3 u}{8} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du \\
&= \frac{-33\pi}{128} + \frac{9}{16} - \frac{3}{256} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4u}{2} du + \frac{1}{8} - \frac{3}{32} \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{-36\pi}{128} + \frac{11}{16} - \frac{3}{256} \left(\frac{u}{2} - \frac{\sin 4u}{8} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-36\pi}{128} + \frac{11}{16} - \frac{3\pi}{1024} = \frac{11}{16} - \frac{291\pi}{1024}
\end{aligned}$$

Dạng 8. $I = \int (\arcsin \alpha x)^k dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = (\arcsin \alpha x)^k \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.8. Tính tích phân sau

$$\bullet I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 dx$$

$$\text{Ta có, } I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d(\arcsin^2 x) = \frac{\pi^2}{72} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{\pi^2}{72} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi^2}{72} + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} d(\arcsin x)$$

$$= \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1$$

$$\bullet J = \int_0^{\frac{1}{4}} (x+1)(\arcsin 2x)^2 dx$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow J = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (t+2)(\arcsin t)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin t)^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} t (\arcsin t)^2 dt = \frac{1}{2} I + \frac{1}{4} J_1 \quad \text{. Với } I = \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1 \quad (\text{theo trên})$$

$$\text{Xét } J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t (\arcsin t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin t)^2 d(t^2) = (t \arcsin t)^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 d(\arcsin^2 t)$$

$$= \frac{\pi^2}{144} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t dt = \frac{\pi^2}{144} + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) \arcsin t dt = \frac{\pi^2}{144} + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} \arcsin t dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin t dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{144} - \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t d(\arcsin t) + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} \arcsin t dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} \arcsin t dt + \frac{\pi^2}{144} - \frac{\arcsin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} \arcsin t dt - \frac{\pi^2}{144} \quad \text{. Đặt } u = \arcsin t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \sin u \\ dt = \cos u du \\ t = 0 \rightarrow u = 0; t = \frac{1}{2} \rightarrow u = \frac{\pi}{6} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow J_1 = \frac{-\pi^2}{144} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} u \cos^2 u du = \frac{-\pi^2}{144} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} u (1 + \cos 2u) du = \frac{-\pi^2}{144} + \frac{u^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} u d(\sin 2u)$$

$$= \frac{-\pi^2}{144} + \frac{\pi^2}{144} + \frac{u \sin 2u}{4} \Big|_0^{\pi/6} - \frac{1}{8} \int_0^{\pi/6} \sin 2u d(2u) = \frac{\pi\sqrt{3}}{48} + \frac{\cos 2u}{8} \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi\sqrt{3}}{48} - \frac{1}{16}$$

$$\text{Vậy, } J = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi\sqrt{3}}{48} - \frac{1}{16} \right)$$

Dạng 9. $I = \int P(x) \arctan \alpha x dx$ với $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = \arctan \alpha x \\ dv = P(x) dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.9. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_{-1}^1 x \arctan x dx$$

Ta có, $I_2 = \int_{-1}^1 x \arctan x dx = 2 \int_0^1 x \arctan x dx$ (do tính chất hàm chẵn)

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \arctan x d(x^2) = x^2 \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 x^2 d(\arctan x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{4} - 1 + \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Dạng 10. $I = \int (\arctan \alpha x)^k dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = (\arctan \alpha x)^k \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.10. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arctan^2(2x) dx$$

$$\text{Ta đặt, } t = 2x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \\ x = 0 \rightarrow t = 0; x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 (\arctan t)^2 dt = \frac{t(\arctan t)^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 t d(\arctan t) = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4} \ln(1+t^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\ln 2}{4}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx$$

Ta có, $I_2 = \int_0^1 x(\arctan x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan^2 x d(x^2 + 1)$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan^2 x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1) d(\arctan^2 x) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2) \cdot \frac{2\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi^2}{16} - x \arctan x \Big|_0^1 + \int_0^1 x d(\arctan x) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$$

Dạng 11. $I = \int P(x) \arccos \alpha x dx$ với $P(x)$ là đa thức. Ta đặt $\begin{cases} u = \arccos \alpha x \\ dv = P(x) dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.11. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \arccos x dx$$

Ta có, $I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \arccos x dx = \frac{1}{2} x \arccos x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$= -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\bullet I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \arccos x dx$$

Ta có, $I_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \arccos x d(x^2) = \frac{1}{2} x^2 \arccos x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow I_2 = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t d(\sin t)}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt$

$\Rightarrow I_2 = -\frac{\pi}{24} + \frac{1}{4} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{16}$

Dạng 12. $I = \int (\arccos \alpha x)^k dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = (\arccos \alpha x)^k \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.12. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arccos 2x)^2 dx$

Ta có, $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\arccos 2x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (\arccos 2x)^2 d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\arccos t)^2 dt$

$= \frac{1}{2} t (\arccos t)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 t d(\arccos t)^2 = -\frac{1}{2} \int_0^1 t \cdot \frac{2 \arccos t}{-\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \arccos t \cdot \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$= -\int_0^1 \arccos t d(\sqrt{1-t^2}) = -\sqrt{1-t^2} \cdot \arccos t \Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cdot d(\arccos t)$

$= \frac{-\pi}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{-\pi}{2} - \int_0^1 dt = \frac{-\pi}{2} - 1$

Dạng 13. $I = \int x R'(\sin x; \cos x) dx$ $R(\sin x; \cos x)$ là phân thức

Ta đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = R'(\sin x; \cos x) dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.13. Tính tích phân sau

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx \quad (\text{ĐHSP Vinh A, B - 2001})$$

Ta có, $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$ (do hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn)

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -2x \cdot \frac{1}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = -\frac{4\pi}{3} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$$

Xét $J = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$; đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ x=0 \rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{3} \rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$$\Rightarrow J = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1-t^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow I = -\frac{4\pi}{3} + \ln(2+\sqrt{3})$$

Dạng 14. $I = \int \sin f(x) dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \sin f(x) \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.14. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x) dx$$

Ta có, $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x) dx = x \cdot \sin(\ln x) \Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x d(\sin(\ln x)) = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x) dx = e^{\frac{\pi}{2}} - x \cdot \cos(\ln x) \Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} x d(\cos(\ln x)) = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(\ln x) dx = e^{\frac{\pi}{2}} - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt[3]{x} dx \quad (\text{ĐH TC năm 1998})$$

$$\text{Ta đặt } t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \begin{cases} x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0; x = \frac{\pi^3}{27} \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3t^2 \sin t dt = -3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} t^2 d(\cos t)$$

$$\begin{aligned} &= -(3t^2 \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} t \cos t dt = \frac{-\pi^2}{18} + 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} t \sin t dt = \frac{-\pi^2}{18} + 6t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t dt \\ &= \frac{-\pi^2}{18} + \pi \sqrt{3} + 6 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-\pi^2}{18} + \pi \sqrt{3} - 3 \end{aligned}$$

Dạng 15. $I = \int \cos f(x) dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \cos f(x) \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.15. Tính tích phân sau $I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } I &= \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x d(\cos(\ln x)) = -e^\pi - 1 - \int_1^{e^\pi} x d(\cos(\ln x)) \\ &= -e^\pi - 1 + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx = -e^\pi - 1 + x \sin(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x d(\sin(\ln x)) = -e^\pi - 1 - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx \\ \Rightarrow I &= -e^\pi - 1 - I \Leftrightarrow I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1) \end{aligned}$$

Dạng 16. $I = \int \arctan f(x) dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \arctan f(x) \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.18. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

$$\text{Ta có, } I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = x \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d \left(\arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot \frac{dx}{1 + \frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arctan(2x) dx$$

$$\text{Ta có, } I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arctan(2x) dx = x \arctan(2x) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x d(\arctan 2x)$$

$$= \frac{\pi}{8} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x dx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$$

$$\bullet I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \arctan \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) dx$$

$$\text{Ta có, } I_3 = x \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 x d \left(\arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right)$$

$$= \frac{\pi}{6} - \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right)' \cdot \frac{dx}{1 + \frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{\pi}{6} - \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \frac{-1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \cdot x^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{6} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6} - \int_{\frac{1}{2}}^1 d(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{6} - (\sqrt{1-x^2}) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dạng 17. $I = \int \operatorname{arccotf}(x) dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \operatorname{arccotf}(x) \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.19. Tính tích phân sau $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) dx$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } I_1 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) dx = x \cdot \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 x d \left(\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right) \\ &= -\frac{\pi}{12} + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right)' \cdot \frac{dx}{1 + \frac{1-x^2}{x^2}} = -\frac{\pi}{12} + \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \frac{-1}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \cdot x^2 dx \\ &= -\frac{\pi}{12} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{12} + \int_{\frac{1}{2}}^1 d(\sqrt{1-x^2}) = -\frac{\pi}{12} + \sqrt{1-x^2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Dạng 18. $I = \int \arcsin f(x) dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \arcsin f(x) \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.20. Tính tích phân sau $I = \int_1^{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } I &= \int_1^{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} x d \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right) \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2} - \int_1^{\sqrt{3}} x \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2} + \ln(1+x^2) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

Dạng 19. $I = \int \arccos f(x) dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \arccos f(x) \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.21. Tính tích phân sau $I = \int_1^{\sqrt{3}} \arccos \frac{2x}{1+x^2} dx$

$$\text{Ta có, } I = \int_1^{\sqrt{3}} \arccos \frac{2x}{1+x^2} dx = x \cdot \arccos \frac{2x}{1+x^2} \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} x d \left(\arccos \frac{2x}{1+x^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \int_1^{\sqrt{3}} x \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2xdx}{1+x^2} \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \ln(1+x^2) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \ln 2
\end{aligned}$$

Dạng 20. $I = \int \ln f(x) dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \ln f(x) \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.22. Tính tích phân sau:

$$\bullet I_1 = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$\text{Ta có, } I_1 = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 - \int_0^1 x d(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))$$

$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$$

$$\bullet I_2 = \int_{-3}^0 x \ln \sqrt{1-x} dx$$

$$\text{Ta có, } I_2 = \int_{-3}^0 x \ln \sqrt{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^0 \ln \sqrt{1-x} d(x^2)$$

$$= \frac{x^2 \ln \sqrt{1-x}}{2} \Big|_{-3}^0 - \frac{1}{2} \int_{-3}^0 x^2 d(\ln \sqrt{1-x}) = -\frac{9 \ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_{-3}^0 x^2 \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$= -\frac{9 \ln 2}{2} + \frac{1}{4} \int_{-3}^0 \frac{x^2 dx}{1-x} = -\frac{9 \ln 2}{2} + \frac{1}{4} \int_{-3}^0 \left(\frac{1}{1-x} - (1+x) \right) dx$$

$$= -\frac{9 \ln 2}{2} - \frac{1}{4} \ln |1-x| \Big|_{-3}^0 - \frac{1}{4} \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 = -\frac{9 \ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{15}{8} = -4 \ln 2 + \frac{3}{8}$$

Dạng 21. $I = \int f(x).g'(x) dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g'(x) dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.23. Tính tích phân sau:

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx \quad (\text{HVQS} - 1995)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (\tan^2 x + 1) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x) - \frac{\pi^2}{32} \\ &= -\frac{\pi^2}{32} + x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx \quad (\text{A} - 2011)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x + (x+1) \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x \sin x + \cos x) + x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(x \sin x + \cos x)'}{x \sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \ln(x \sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\pi \sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Dạng 22. $I = \int \sqrt{x^2 + b^2} dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + b^2} \\ dv = dx \end{cases}$

Nếu biểu thức trong căn là dạng bậc hai đầy đủ, thì ta biến đổi.

$$ax^2 + bx + c = (\alpha x + \beta)^2 + \gamma^2$$

Ví dụ 2.1.24. Tính tích phân sau:

$$I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx$$

$$\text{Ta có, } I = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 3} dx = x \sqrt{x^2 + 3} \Big|_0^1 - \int_0^1 x d(\sqrt{x^2 + 3}) = 2 - \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$= 2 - \int_0^1 \left(\sqrt{x^2 + 3} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) dx = 2 - I + 3 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$\Rightarrow 2I = 2 - 3 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

Vì $\left(\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$

$$\Rightarrow 2I_1 = 2 - 3 \ln(x + \sqrt{x^2 + 3}) \Big|_0^1 = 2 - 3 \ln \sqrt{3} \Rightarrow I = \frac{2 - 3 \ln \sqrt{3}}{2}$$

Dạng 23. $I = \int \sqrt{x^2 - b^2} dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - b^2} \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.25. Tính tích phân sau $I = \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$

Ta có, $I = \int_{\sqrt{3}}^2 \sqrt{x^2 - 1} dx = x\sqrt{x^2 - 1} \Big|_{\sqrt{3}}^2 - \int_{\sqrt{3}}^2 x d(\sqrt{x^2 - 1}) = 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1} \right) dx = 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - I - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow 2I = 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Vì $\left(\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$

$$\Rightarrow 2I = 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \Big|_{\sqrt{3}}^2 = 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right)$$

Dạng 24. $I = \int \sqrt{b^2 - x^2} dx$. Ta đặt $\begin{cases} u = \sqrt{b^2 - x^2} \\ dv = dx \end{cases}$

Ví dụ 2.1.26. Tính tích phân sau $I = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx$

Ta có, $I = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2} dx = x\sqrt{4-x^2} \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} x d(\sqrt{4-x^2}) = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow \begin{cases} dx = 2 \cos t dt \\ x = \sqrt{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{3}; x = 2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t dt = 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dạng 25. Dạng tách tích phân $I = I_1 + I_2$ với I_1, I_2 tính bằng tích phân từng phần.

Ví dụ 2.1.27. Tính tích phân sau

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

Ta có, $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d(\tan x) + \int_0^{\frac{\pi}{3}} x d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$

$$= \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin x - 1} - \frac{1}{\sin x + 1} \right) d(\sin x)$$

$$= \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx \quad (\text{Được -2000})$$

Ta có, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} e^x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \tan \frac{x}{2} \right)^2 e^x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} + 2 \tan \frac{x}{2} \right) e^x dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) e^x d\left(\frac{x}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} dx \\
&= e^x \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \tan \frac{x}{2} dx = e^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Dạng 26. Dạng tích phân truy hồi từng phần $I_n = \int_{\alpha}^{\beta} f(x; n) dx$

Ví dụ 2.1.28. Cho $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$. Chứng minh $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có, } I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-1} d(\cos x) \\
&= -\cos x \cdot (\sin x)^{n-1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(\sin x)^{n-1} = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (\sin x)^{n-2} dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) (\sin x)^{n-2} dx = (n-1) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \right] = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
\Rightarrow I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ (đpcm)}
\end{aligned}$$

Một số bài luyện tập.

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin x dx$$

$$2) L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(2 \cos^2 x - 1) dx \quad \text{ĐHTCKToán 98}$$

$$3) I = \int_0^1 (x-1) e^{2x} dx \quad \text{ĐHDLNN.Th 97}$$

- 4) $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ ĐH.Huế 98
- 5) $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$ ĐH CĐ KD .2004
- 6) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x dx$ ĐHANinh 97
- 7) $I = \int_0^1 (x^2 + 2x) e^{-x} dx$ CĐGTVTài 2003
- 8) $I = \int_0^1 (4x^2 - 2x - 1) e^{2x} dx$ CĐGTVTài 2004
- 9) $I = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ ĐHANinh 98
- 10) $I = \int_1^{10} x \lg^2 x dx$ ĐHDược 2001
- 11) $I = \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$ CĐKTế HDương 2002
- 12) $I = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$ ĐHCĐoàn 2000
- 13) $I = \int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} \ln x dx$ ĐH-CĐ-KD.DBị 2-2003
- 14) $I = \int_{-1}^0 (e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) x dx$ ĐH-CĐ-DBị 4-2002
- 15) $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ Dự Bị 1. ĐH.CĐ Khối D -2003
- 16) $I = \int_0^1 (x-2) e^{2x} dx$ ĐH.CĐ Khối D -2006

2.2. Các dạng bài toán tích phân lượng giác

Dạng 1: Sử dụng các nguyên hàm lượng giác cơ bản

Bằng các phép biến đổi lượng giác, sử dụng các công thức lượng giác ta đưa nguyên hàm tích phân về những dạng nguyên hàm lượng giác cơ bản.

Ví Dụ 2.2.1. Tính các nguyên hàm tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

Cách 1: Ta có, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos^2(\frac{\pi}{2} - x)} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} = -\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

Cách 2: Hoặc ta đổi biến $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{(1+t^2)} = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t)^2} = \left. \frac{-2}{1+t} \right|_0^1 = 1$$

$$\bullet I_2 = \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$$

$$\begin{aligned} \bullet I_3 &= \int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int \tan^3 x d(\tan x) - \int \tan^3 x dx \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan x (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

Nhiều bài toán việc đưa về dạng nguyên hàm cơ bản sẽ cần qua vài bước biến đổi bằng cách sử dụng kết hợp các công thức lượng giác, đổi biến, ...

Dạng 2. $I = \int (\sin x)^n (\cos x)^m dx$

$$\checkmark \quad \text{Nếu } n=0 \text{ hoặc } m=0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \int (\sin x)^n dx \\ I_2 = \int (\cos x)^m dx \end{cases}$$

Khi đó, có thể tìm nguyên hàm bằng cách tích phân từng phần, hoặc làm theo cách sau.

Nếu n chẵn hoặc $n \leq 3$ ta sử dụng công thức hạ bậc.

Nếu n lẻ và $n \geq 3$ ta biến đổi.

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^n dx &= \int (\sin x)^{2k+1} dx = \int (\sin x)^{2k} \sin x dx \\ &= -\int (1 - \cos^2 x)^k d(\cos x) = -\int \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i (\cos^2 x)^i d(\cos x) \quad (*) \end{aligned}$$

- ✓ Nếu m, n cùng chẵn ta hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.
- ✓ Nếu m, n cùng lẻ ta biến đổi theo (*).
- ✓ Nếu m, n không cùng chẵn lẻ.

Ta biến đổi theo cách: Chẵn thì hạ bậc, lẻ biến đổi theo (*).

Ví Dụ 2.2.2. Tính các nguyên hàm tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int \sin^3 x dx = \int \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4} dx = \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x + C$$

$$\begin{aligned} \bullet I_2 &= \int \cos^4 3x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 6x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 6x + \cos 12x) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{12} \sin 6x + \frac{1}{96} \sin 12x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet I_3 &= \int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x d(\sin x) = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C \end{aligned}$$

Dạng 3.
$$I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \quad (a-b \neq k\pi)$$

Ta biến đổi,
$$I = \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \left[\int \frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} dx - \int \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} dx \right] = \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C
\end{aligned}$$

Chú ý: Phương pháp trên cũng được sử dụng cho dạng tích phân sau.

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}. \text{ Ta sử dụng đồng nhất, } 1 = \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(a-b)}.$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}. \text{ Ta sử dụng đồng nhất, } 1 = \frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\cos(a-b)}.$$

Ví Dụ 2.2.3. Tính các nguyên hàm tích phân sau

$$\begin{aligned}
\bullet I_1 &= \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} \int \frac{\cos\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x\right]}{\sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \sqrt{2} \cdot \left[\int \frac{\cos x}{\sin x} dx + \int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx \right] = \sqrt{2} \cdot \ln \left| \frac{\sin x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \right| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet I_2 &= \int \frac{dx}{\cos 2x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} \\
\text{Ta có, } I_2 &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \int \frac{\sin\left[2x - \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right]}{\cos 2x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sin 2x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} d(2x) - \int \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} d\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{\cos 2x} \right| + C
\end{aligned}$$

Dạng 4.
$$I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin \alpha}$$

Ta biến đổi như sau, $I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin \frac{x+\alpha}{2} \cos \frac{x-\alpha}{2}} \Rightarrow$ **Dạng 3.**

Cách làm trên cũng áp dụng cho nguyên hàm dạng: $\begin{cases} I = \int \frac{dx}{\sin x + \gamma}; |\gamma| \leq 1 \\ J = \int \frac{dx}{\cos x + \cos \alpha} \end{cases}$

Ví Dụ 2.2.4. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 2\sin x}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin \frac{6x+\pi}{12} \cos \frac{6x-\pi}{12}} = \frac{1}{4 \cos \frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \left(\frac{6x+\pi}{12} - \frac{6x-\pi}{12} \right)}{\sin \frac{6x+\pi}{12} \cos \frac{6x-\pi}{12}} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{6x+\pi}{12} \cos \frac{6x-\pi}{12} + \sin \frac{6x+\pi}{12} \sin \frac{6x-\pi}{12}}{\sin \frac{6x+\pi}{12} \cos \frac{6x-\pi}{12}} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{6x+\pi}{12}}{\sin \frac{6x+\pi}{12}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{6x-\pi}{12}}{\cos \frac{6x-\pi}{12}} dx \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sin \frac{6x+\pi}{12}}{\cos \frac{6x-\pi}{12}} \right| \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(\tan \frac{\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

Dạng 5. $I = \int \tan(x+\alpha) \tan(x+\beta) dx$

$$\begin{aligned} \text{Ta biến đổi như sau, } I &= \int \frac{\sin(x+\alpha) \sin(x+\beta)}{\cos(x+\alpha) \cos(x+\beta)} dx \\ &= \int \left(\frac{\cos(x+\alpha) \cos(x+\beta) + \sin(x+\alpha) \sin(x+\beta)}{\cos x \cos(x+\beta)} - 1 \right) dx \\ &= \cos \cos(\alpha - \beta) \int \frac{dx}{\cos x \cos(x+\alpha)} - x \Rightarrow \text{Dạng 3.} \end{aligned}$$

Cách làm trên cũng áp dụng cho nguyên hàm dạng:

$$J = \int \cot(x + \alpha) \cot(x + \beta) dx$$

Ví Dụ 2.2.5. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\left[\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] - \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - 1 \right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Để tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$, ta có thể làm theo một trong hai cách sau.

Cách 1: biến đổi theo **Dạng 3**

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left[\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - x\right]}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin x}{\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= \sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} dx \right] = \sqrt{2} \ln \left| \frac{\cos x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \right| \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x}{\cos x - \sin x} \right| \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \left[\sqrt{2} \ln \sqrt{2} - \sqrt{2} \ln |1 - \tan x| \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \Rightarrow I = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

Cách 2: Thực hiện biến đổi

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x \cos(x + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x (\cos x - \sin x)} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x (1 - \tan x)} \\
&= -\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(1 - \tan x)}{(1 - \tan x)} = -\sqrt{2} \ln |1 - \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow I = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)
\end{aligned}$$

Dạng 6.
$$I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

Thực hiện đổi biến, $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Ví Dụ 2.2.6. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$$

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, \text{ đổi cận } \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_1 &= \int_0^1 \frac{2dt}{3(2t) + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+3)^2} = 2 \int_0^1 \frac{d(t+3)}{(t+3)^2} \\
&= 2 \cdot \left. \frac{-1}{t+3} \right|_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2} \quad (\text{ĐHNN1 - 99})$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, \text{ đổi cận } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_2 &= \int_0^1 \frac{2dt}{(2t)+(1-t^2)+2(1+t^2)} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2+2t+3} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{2+(t+1)^2} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{d(t+1)}{2+(t+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d(\frac{t+1}{\sqrt{2}})}{1+(\frac{t+1}{\sqrt{2}})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t+1}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arctan \sqrt{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Dạng 7. $I = \int \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x} dx$

Ta biến đổi, $I = \int \frac{\alpha (c \sin x + d \cos x) + \beta (c \cos x - d \sin x)}{c \sin x + d \cos x} dx$

$$= \alpha \int dx + \beta \int \frac{(c \cos x - d \sin x) dx}{c \sin x + d \cos x} = \alpha x + \beta \ln |c \sin x + d \cos x| + C$$

Ví Dụ 2.2.7. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$

Ta có, $4 \sin x + 3 \cos x = A(\sin x + 2 \cos x) + B(\cos x - 2 \sin x)$

$$\Leftrightarrow 4 \sin x + 3 \cos x = (A - 2B) \sin x + (2A + B) \cos x$$

Đồng nhất hai vế ta được: $\begin{cases} A - 2B = 4 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$

Vậy, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(\sin x + 2 \cos x) - (\cos x - 2 \sin x)}{\sin x + 2 \cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - 2 \sin x) dx}{\sin x + 2 \cos x}$

$$= 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \ln |\sin x + 2 \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - \ln \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

Dạng 8.

$$I = \int \frac{a.\sin x + b.\cos x}{(c.\sin x + d.\cos x)^2} dx$$

$$\text{Ta biến đổi, } I = \int \frac{a.\sin x + b.\cos x}{(c.\sin x + d.\cos x)^2} dx = \int \frac{\alpha(c.\sin x + d.\cos x) + \beta(c.\cos x - d.\sin x)}{(c.\sin x + d.\cos x)^2} dx$$

$$= \alpha \int \frac{dx}{c.\sin x + d.\cos x} + \beta \int \frac{(c.\cos x - d.\sin x) dx}{(c.\sin x + d.\cos x)^2} = \alpha \int \frac{dx}{c.\sin x + d.\cos x} - \frac{\beta}{c.\sin x + d.\cos x}$$

với $J = \int \frac{dx}{c.\sin x + d.\cos x}$ xác định theo **Dạng 6**

$$\text{Ví Dụ 2.2.8. Tính tích phân sau } I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 2} dx$$

$$\text{Ta có, } I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 2} dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2}$$

$$\text{Giả sử: } \cos x = A(\sqrt{3} \sin x + \cos x) + B(\sqrt{3} \cos x - \sin x) \Leftrightarrow \cos x = (A\sqrt{3} - B) \sin x + (A + B\sqrt{3}) \cos x$$

$$\text{Đồng nhất hai vế ta được, } \begin{cases} A\sqrt{3} - B = 0 \\ A + B\sqrt{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{3} \sin x + \cos x) + \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3} \cos x - \sin x)}{(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{(\sqrt{3} \cos x - \sin x) dx}{(\sqrt{3} \sin x + \cos x)^2} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} + \frac{1}{4} \cdot J = 0 + \frac{1}{4} \cdot J \end{aligned}$$

$$\text{Với } J = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} \text{ xác định như sau:}$$

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, \text{ đổi cận } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow t = \sqrt{3} \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1-t^2+2\sqrt{3}t} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{4-(t-\sqrt{3})^2} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{2^2-(t-\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}+2} - \frac{1}{t-\sqrt{3}-2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}+2}{t-\sqrt{3}-2} \right| \Big|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow I = -\frac{1}{8} \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dạng 9.
$$I = \int \frac{a \sin x + b \cos x + c}{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma} dx$$

Ta biến đổi,
$$I = \int \frac{A(\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma) + B(\alpha \cos x - \beta \sin x) + C}{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma} dx$$

$$= A \int dx + B \int \frac{\alpha \cos x - \beta \sin x}{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma} dx + C \int \frac{dx}{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma} = Ax + B \ln |\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma| + J$$

Với $J = \int \frac{dx}{\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma}$, được xác định theo **Dạng 6**.

Ví Dụ 2.2.9. Tính tích phân sau
$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{5 \sin x}{2 \sin x - \cos x + 1} dx$$

Giả sử, $5 \sin x = A(2 \sin x - \cos x + 1) + B(2 \cos x + \sin x) + C$

$$\Leftrightarrow 5 \sin x = (2A + B) \sin x + (2B - A) \cos x + (A + C)$$

Đồng nhất hai vế ta có,
$$\begin{cases} 2A + B = 5 \\ 2B - A = 0 \\ A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{2(2\sin x - \cos x + 1) + (2\cos x + \sin x) - 2}{2\sin x - \cos x + 1} dx = 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{(2\cos x + \sin x) dx}{2\sin x - \cos x + 1} - 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1}$$

$$= 2x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + \ln |2\sin x - \cos x + 1| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} - 2J = \frac{2\pi}{3} + \ln \frac{3 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} + 2J$$

Ta có, $J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 1}$

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$, đổi cận $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow t = \sqrt{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{2(2t) - (1-t^2) + 1 + t^2} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 2t} = \frac{1}{2} \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t} - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{d(t+2)}{t+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{t}{t+2} \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow I = \frac{2\pi}{3} + \ln \frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \ln \frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Dạng 10. $I = \int \frac{a.\sin^2 x + b.\sin x \cos x + c.\cos^2 x}{\alpha \sin x + \beta \cos x} dx$

Ta biến đổi, $a.\sin^2 x + b.\sin x \cos x + c.\cos^2 x = (A \sin x + B \cos x)(\alpha \sin x + \beta \cos x) + C$

$$\Rightarrow I = \int (A \sin x + B \cos x) dx + C \int \frac{dx}{\alpha \sin x + \beta \cos x} = -A \cos x + B \sin x + C.J$$

Với $J = \int \frac{dx}{\alpha \sin x + \beta \cos x}$ xác định theo **Dạng 6**.

Ví Dụ 2.2.10. Tính tích phân sau $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\sin^2 x + 1}{\cos x + \sqrt{3}\sin x} dx$

Giả sử, $4\sin^2 x + 1 = (A\sin x + B\cos x)(\cos x + \sqrt{3}\sin x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x + 1 = (A\sqrt{3} + C)\sin^2 x + (A + B\sqrt{3})\sin x \cos x + (B + C)\cos^2 x$$

Đồng nhất hai vế ta có,
$$\begin{cases} A\sqrt{3} + C = 4 \\ A + B\sqrt{3} = 0 \\ B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{3} \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sqrt{3}\sin x - \cos x)(\cos x + \sqrt{3}\sin x) + 2}{\cos x + \sqrt{3}\sin x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3}\sin x - \cos x) dx + 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x + \sqrt{3}\sin x} = \left(-\sqrt{3}\cos x - \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + J = 2 - \sqrt{3} + J$$

Với $J = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x + \sqrt{3}\sin x}$ xác định được theo **Dạng 3** (hoặc **Dạng 6**).

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x + \sqrt{3}\sin x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin(x + \frac{\pi}{6})} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2 \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}) \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}) \cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\left[\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})\right]}{\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12})} = \ln \left| \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}) \right| \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln 3.$$

Dạng 11.
$$I = \int \frac{dx}{a.\sin^2 x + b.\sin x \cos x + c.\cos^2 x}$$

Ta biến đổi, $I = \int \frac{d(\tan x)}{a \tan^2 x + b \tan x + c}$. Đặt $t = \tan x$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c} = \int \frac{dt}{(\alpha t + \beta)^2 + \gamma}$$

Ví Dụ 2.2.11. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$

Ta có, $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\tan x)}{3 \tan^2 x - 2 \tan x - 1}$ đặt $t = \tan x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{3t^2 - 2t - 1} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{d\left(t - \frac{1}{3}\right)}{\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{d\left(t - \frac{1}{3}\right)}{\left(t - \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{d\left(t - \frac{1}{3}\right)}{\left(t - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\ln|t - 1| - \ln|3t - 1| \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{8} \ln 3 \end{aligned}$$

Dạng 12. $I = \int R(\sin x; \cos x) dx$, $R(\sin x; \cos x)$ là phân thức đối với $\sin x; \cos x$.

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

Ví Dụ 2.2.12. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sin 2x - 2 \cos 2x - 1}{3 \cos 2x + 4 \sin 2x + 5} dx$

$$\text{Đặt } t = \tan x \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}, \text{ đổi cận } \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

Ta có,
$$I = \int_0^1 \frac{3(2t) - 2(1-t^2) - (1+t^2)}{3(1+t^2) + 4(2t) + 5(1+t^2)} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2 + 6t - 3}{(t+2)^2(1+t^2)} dt$$

Giả sử,
$$\frac{t^2 + 6t - 3}{(t+2)^2(1+t^2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 6t - 3 = A(t+2)(1+t^2) + B(1+t^2) + (Ct+D)(t+2)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 6t - 3 = (A+C)t^3 + (B+2A+4C+D)t^2 + (A+4C+4D)t + (2A+B+4D)$$

Đồng nhất hai vế, $\Rightarrow A = -\frac{34}{25}; B = \frac{-11}{5}$ (cho $t = -2$); $C = \frac{34}{25}; D = \frac{12}{25}$

$$\Rightarrow 2I = \frac{-34}{25} \int_0^1 \frac{dt}{t+2} - \frac{11}{5} \int_0^1 \frac{dt}{(t+2)^2} + \frac{1}{25} \int_0^1 \frac{24t+12}{1+t^2} dt$$

$$= \frac{-34}{25} \ln 3 + \frac{46}{25} \ln 2 + \frac{3\pi}{25} - \frac{11}{10} \Rightarrow I = \frac{-17}{25} \ln 3 + \frac{23}{25} \ln 2 + \frac{3\pi}{50} - \frac{11}{20}$$

Dạng 13. $I = \int R(\sin x; \cos x) dx$, $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$. Đặt $t = \cos x$

Ví Dụ 2.2.13. Tính tích phân sau

$$\bullet I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^2 x}{1+\cos x} (\sin x dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4(1-\cos^2 x)}{1+\cos x} d(\cos x) = 4 \int_1^0 (1-t) dt = 4 \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^0 = 2$$

$$\bullet J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cos^6 x}$$

Ta có,
$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cos^6 x} = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x) \cos^6 x} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^6(1-t^2)} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{t^4+t+1}{t^6} \right) dt$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^5} - \frac{1}{t^6} \right) dt = \left(\ln \frac{1-t}{1+t} + \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{5t^5} \right) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} = \frac{139}{15} - \ln 3 - 2 \ln(\sqrt{2}-1) - \frac{37\sqrt{2}}{15}$$

Dạng 14. $I = \int R(\sin x; \cos x) dx$, $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$. Đặt $t = \sin x$

Ví Dụ 2.2.14. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x \cos x}{2 + \sin x} dx$$

$$\text{Ta có, } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x) \cos x}{2 + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)}{2 + \sin x} d(\sin x)$$

$$= \int_0^1 \frac{(1+t)}{2+t} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2+t}\right) dt = (t - \ln|2+t|) \Big|_0^1 = 1 - \ln 3 + \ln 2$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx \quad (\text{ĐH ĐN - 98})$$

$$\text{Ta có, } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x)}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{2 - t^2}} = \int_0^1 \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Dạng 15. $I = \int R(\sin x; \cos x) dx$, $R(-\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; -\cos x)$. Đặt $t = \tan x$

Ví Dụ 2.2.15. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt[4]{\tan^3 x \cos^8 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt[4]{\tan^3 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\tan x)}{\sqrt[4]{\tan^3 x}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = 4\sqrt[4]{t} \Big|_0^1 = 4.$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x (\sin x - \cos x)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x (\tan x - 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\tan x)}{(\tan x - 1)} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t - 1} = \ln|t - 1| \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

Dạng 16. $I = \int R(\sin x; \cos x) dx$, $R(\sin x; \cos x)$ là phân thức đối xứng đối với $\sin x; \cos x$.

Nói chung ta đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$

Ví Dụ 2.2.16. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \quad (\text{ĐHGT - 95})$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}} d\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} dt$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \Rightarrow 2I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} + \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x + \sin^6 x} dx \quad (\text{ĐH.Huế - 95})$$

$$\text{Đặt } t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos^6\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin^6\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} d\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$$\Rightarrow I_2 = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^6 t}{\cos^6 x + \sin^6 x} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 x}{\cos^6 x + \sin^6 x} dx$$

$$\Rightarrow 2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^6 x}{\cos^6 x + \sin^6 x} + \frac{\cos^6 x}{\cos^6 x + \sin^6 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{4}$$

Dạng 17.
$$I = \int_a^b R(x; \sin x; \cos x) dx$$

Với hàm dưới dấu tích phân thỏa mãn **Mệnh đề 1.2.1.**

Đặt $t = a + b - x, \forall x \in [a; b]$.

Ví Dụ 2.2.17. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{9 + 4 \cos^2 x} dx$$

Đặt $t = \pi - x, \forall x \in [0; \pi]$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{9 + 4 \cos^2 x} dx = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{9 + 4 \cos^2(\pi - t)} d(\pi - t) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{9 + 4 \cos^2 t} dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{9 + 4 \cos^2 t} - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{9 + 4 \cos^2 t} dt$$

$$\Rightarrow I_1 = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{9 + 4 \cos^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{9 + 4 \cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{9 + 4 \cos^2 x} - I_1$$

$$\Rightarrow 2I_1 = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{9 + 4 \cos^2 x} = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{9 + 4 \cos^2 x} = -\frac{\pi}{8} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cos^2 x}$$

$$= -\frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{2 \cos x}{3}\right) \Big|_0^{\pi} \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{6} \arctan \frac{2}{3}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos 2x} dx$$

Đặt $t = \pi - x, \forall x \in [0; \pi] \Rightarrow dx = -dt$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos 2t} d(\pi - t) = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{1 + \cos 2t} - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos 2t} dt$$

$$\Leftrightarrow I_2 = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos 2x} - I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \cos 2x} = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{2 \cos^2 x} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\cos x} \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

Dạng 18. $I = \int \frac{R(\sin x; \cos x)}{a^x + 1} dx$; $R(\sin x; \cos x)$ là hàm chẵn

Nói chung, ta sử dụng phép đổi biến: $x = -t$

Ví Dụ 2.2.18. Tính tích phân sau

$$\bullet I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx \quad (\text{ĐH.Mỏ - 2001})$$

$$\text{Ta có, } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx$$

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 t + \cos^6 t}{6^{-t} + 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin^6 t + \cos^6 t)6^t}{6^t + 1} dt$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin^6 x + \cos^6 x)6^x}{6^x + 1} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin^6 x + \cos^6 x)6^x}{6^x + 1} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin^6 x + \cos^6 x)6^x}{6^x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^6 x + \cos^6 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8} \right) dx = \left(\frac{3}{32} \sin 4x + \frac{5}{8} x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi}{32}$$

$$\bullet J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx \quad (\text{ĐH.Ng.Th})$$

$$\text{Ta có, } J = \int_{-\pi}^0 \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx$$

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow \int_{-\pi}^0 \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx = - \int_{\pi}^0 \frac{\sin^2 t}{3^{-t} + 1} dt = \int_0^{\pi} \frac{3^t \sin^2 t}{3^t + 1} dt \Rightarrow \int_{-\pi}^0 \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx = \int_0^{\pi} \frac{3^x \sin^2 x}{3^x + 1} dx$$

$$\Rightarrow J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx = \int_0^{\pi} \frac{3^x \sin^2 x}{3^x + 1} dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Dạng 19.} \quad I = \int R(\sin x; \cos x) dx$$

Sử dụng tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của $R(\sin x; \cos x)$. Nếu hàm dưới dấu tích phân thỏa mãn **Mệnh đề 1.2.2**. Ta đổi biến $x = t + T$, với T là chu kỳ của $R(\sin x; \cos x)$

Ví Dụ 2.2.19. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{2011\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

Do hàm $f(x) = \sqrt{1 - \cos 2x}$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T = \pi$, suy ra

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_{\pi}^{\pi+\pi} f(x) dx = \int_{2\pi}^{3\pi} f(x) dx = \dots = \int_{2010\pi}^{2011\pi} f(x) dx \\ \Rightarrow I_1 &= \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\pi+\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{3\pi} f(x) dx + \dots + \int_{2010\pi}^{2011\pi} f(x) dx \\ &= 2011 \int_0^{\pi} f(x) dx = 2011 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = 2011 \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = -2011 \sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi} = 4022\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\bullet I_2 = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

$$\text{Ta có, } I_2 = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^4 x (1 + \tan^4 x)} dx = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan x}{\cos^2 x (1 + \tan^4 x)} dx$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \tan x}{(1 + \tan^4 x)} d(\tan x) = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\tan^2 x)}{\cos^2 x (1 + \tan^4 x)}$$

$$= \arctan(\tan^2 x) \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

Dạng 20. Dạng ghép tổ hợp $I_1 = \int R_1(\sin x; \cos x) dx$

Cần tìm $I_2 = \int R_2(\sin x; \cos x) dx$ sao cho: $\begin{cases} a.I_1 + b.I_2 = \alpha \\ c.I_1 - d.I_2 = \beta \end{cases}$

Ví Dụ 2.2.20. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$$

$$\text{Xét, } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} \text{ suy ra: } \begin{cases} I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dx & (1) \\ I_1 - I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow I_1 + I_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \Leftrightarrow I_1 - I_2 = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = - \ln |\sin x + \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = - \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{\pi}{3} \\ I_1 - I_2 = - \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ I_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \quad (\text{ĐH.GVVT.HCM - 99})$$

$$\text{Xét, } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \text{ suy ra: } \begin{cases} I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx & (1) \\ I_1 - I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow I_1 - I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin 2x)}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin 2x)}{2 - \sin^2 2x}$$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{\pi}{3} \\ I_1 - I_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{\pi}{4} \\ I_2 = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{4}$$

Một số Bài Luyện Tập:

$$1) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\cos^4 x + \sin^4 x) dx \quad (BK - 98)$$

$$2) I = \int_0^{\pi} (2 \sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x) dx \quad (NN1 - 97)$$

$$3) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x dx}{1 + \cos x} \quad ; I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right)^2 dx$$

$$4) I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx \quad (TL - 97)$$

$$5) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \cos x} \quad (NNg1 - 98)$$

$$6) I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^3 x - \sin x}}{\sin^3 x} \cot x dx \quad (HVKTQS - 97)$$

$$7) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos^3 x dx}{1 + \cos^2 x} \quad (HV.BCVT - 98)$$

$$8) I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1 + \cos^2 x}$$

$$9) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^x (\sin x + \cos x + 1)}{(1 + \cos x)^2} dx \quad (BCVT1-98)$$

$$10) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(1 + \sin x)^{1 + \cos x}}{1 + \cos x} dx \quad ; I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$$

$$11) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}) dx$$

$$12) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} \quad (A-2006)$$

$$13) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \sin x}} dx \quad (A-2005)$$

$$14) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx \quad (D-2005); I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos^2 x dx \quad (DB1)$$

$$15) I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(\operatorname{tg} x) dx \quad (DB2-2005)$$

$$16) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x dx}{1 + \sin^2 x} \quad (SP2-96)$$

$$17) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2} \quad (SP.HCM)$$

$$18) I = \int_0^{\pi} \sin^{11} x dx \quad (HV.QHQT-96)$$

$$19) I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sin 2x} dx \quad (CD.TCHQ)$$

$$20) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx \quad (B-2005)$$

2.3 . Các dạng bài toán tích phân hàm vô tỉ

Để xác định nguyên hàm, tích phân của các hàm số vô tỉ, ta cần sử dụng linh hoạt các phép biến đổi, phương pháp đổi biến, phương pháp tích phân từng phần. Dưới đây là một số kết quả phân dạng cho lớp bài toán tích phân hàm vô tỉ.

Dạng 1.
$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}}$$

Ta đặt $\sqrt{x^2 + b} = t - x$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{t^2 + b}{2t^2} \\ \sqrt{x^2 + b} = t - \frac{t^2 - b}{2t} = \frac{t^2 + b}{2t} \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |x + \sqrt{x^2 + b}| + C$$

Ví Dụ 2.3.1. Tính tích phân sau

$$\begin{aligned} \bullet I &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3x + 9}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(x\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2 + \frac{63}{8}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d\left(x\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}}\right)}{\sqrt{\left(x\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2 + \frac{63}{8}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \left(x\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}}\right) + \sqrt{\left(x\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2 + \frac{63}{8}} \right|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}}}{3 - \frac{3}{\sqrt{8}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(6\sqrt{2} - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet J &= \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 1}} = \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2}} = \int_{-3}^0 \frac{dx}{|3x-1|} = -\frac{1}{3} \int_{-3}^0 \frac{d(3x-1)}{3x-1} \\ &= -\frac{1}{3} \ln |3x-1| \Big|_{-3}^0 = \frac{\ln 10}{3} \end{aligned}$$

Dạng 2.
$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} \quad (b > 0)$$

Ta đặt, $x = b \sin t$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \arcsin \frac{x}{b} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \int dt = t + C = \arcsin \frac{x}{b} + C \\ dx = b \cos t dt \end{cases}$$

Ví Dụ 2.3.2. Tính tích phân sau

$$\bullet J = \int \frac{dx}{\sqrt{7-8x-10x^2}}$$

$$\text{Ta có, } J = \int \frac{dx}{\sqrt{7-8x-10x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{\frac{7}{9} - (x+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + C$$

$$\bullet J = \int \frac{dx}{\sqrt{7-8x-10x^2}} = \sqrt{10} \int \frac{d(x-\frac{2}{5})}{\sqrt{\frac{41}{50} - (x-\frac{2}{5})^2}} = \sqrt{10} \arcsin \frac{(x-\frac{2}{5})\sqrt{50}}{\sqrt{41}} + C$$

Dạng 3.
$$I = \int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Ta biến đổi, $(\alpha x + \beta) = \frac{\alpha}{2a}(2ax + b) + (\beta - \frac{\alpha b}{2a})$. Khi đó:

$$I = \frac{\alpha}{2a} \int \frac{(2ax + b) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\alpha}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \left(\beta - \frac{\alpha b}{2a}\right) J$$

Với $J = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ được suy ra từ **Dạng 1** và **Dạng 2**.

Ví Dụ 2.3.3. Tính tích phân sau

$$I = \int_0^1 \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$$

$$\begin{aligned} \bullet I &= \int_0^1 \frac{(x+4)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \int_0^1 \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} + 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2 + 4x + 5)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} + 2 \int_0^1 \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \Big|_0^1 + J = \sqrt{10} - \sqrt{5} + J \end{aligned}$$

Với $J = 2 \int_0^1 \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = 2 \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Ta đặt $\sqrt{x^2+1} = t - x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t^2-1}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2+1}{2t^2} \\ \sqrt{x^2+1} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t} \\ x=2 \rightarrow t=2+\sqrt{5}; x=3 \rightarrow t=3+\sqrt{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int_{2+\sqrt{5}}^{3+\sqrt{10}} \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_{2+\sqrt{5}}^{3+\sqrt{10}} = \ln \frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow J = 2 \ln \frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}} \Rightarrow I = \sqrt{10} - \sqrt{5} + 2 \ln \frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}$$

Dạng 4.
$$I = \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Đặt $(\alpha x + \beta) = \frac{1}{t} \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{t} - \beta \right)$, khi đó ta đưa tích phân về **Dạng 1, 2.**

Ví Dụ 2.3.4. Tính tích phân sau $I = \int_2^3 \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2-2x+2}}$ (Bộ đề)

$$\text{Đặt } x-1 = \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{t} + 1 \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \\ x=2 \rightarrow t=1; x=3 \rightarrow t=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \frac{-dt/t^2}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2 - 2\left(1+\frac{1}{t}\right) + 2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \ln \frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$$

Dạng 5.
$$I = \int \frac{(mx+n)dx}{(\alpha x + \beta) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Ta biến đổi $\frac{mx+n}{\alpha x+\beta} = A + \frac{B}{\alpha x+\beta}$, khi đó:

$$I = A \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + B \int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}. \text{ Với } I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \text{ xác định}$$

theo **Dạng 1** và **Dạng 2** và $I_2 = \int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ xác định theo **Dạng 4**.

Ví Dụ 2.3.5. Tính tích phân sau $I = \int_0^1 \frac{(2x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ (Bộ Đề)

$$\text{Ta có, } I = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} = 2I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int_0^1 \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \ln \left| x+1 + \sqrt{(x+1)^2+1} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$\text{Đặt } x+1 = \frac{1}{t} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{t} - 1 \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \\ x=0 \rightarrow t=1; x=1 \rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = - \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt/t^2}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 2\left(\frac{1}{t}-1\right) + 2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2+1} \right| \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \ln \frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow I = 2I_1 + I_2 = 2 \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} + \ln \frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{5}}.$$

Dạng 6. $I = \int \frac{xdx}{(ax^2+b)\sqrt{cx^2+d}}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{cx^2 + d} \Rightarrow \begin{cases} cx^2 = t^2 - d \\ xdx = \frac{tdt}{c} \end{cases}$$

Khi đó tích phân đưa về dạng $I = \int \frac{dt}{At^2 + B}$. Nếu mẫu là dạng tam thức bậc hai đầy đủ thì ta biến đổi đưa về **Dạng 6**

Ví Dụ 2.3.6. Tính tích phân sau $I = \int_0^1 \frac{xdx}{(3x^2 - 5)\sqrt{2 - x^2}}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 - t^2 \\ xdx = -tdt \\ x = 0 \rightarrow t = \sqrt{2}; x = 1 \rightarrow t = 1 \end{cases}, \text{ khi đó:}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{xdx}{(3x^2 - 5)\sqrt{2 - x^2}} = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-tdt}{(1 - 3t^2)t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{d(t\sqrt{3})}{1 - (t\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + t\sqrt{3}}{1 - t\sqrt{3}} \right| \Big|_1^{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{6} - 1} - \ln \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \right) \end{aligned}$$

Dạng 7. $I = \int \frac{dx}{(ax^2 + b)\sqrt{nx^2 + m}}$

$$\text{Đặt } xt = \sqrt{nx^2 + m} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{m}{t^2 - n} \\ xdx = \frac{-mtdt}{(t^2 - n)^2} \end{cases} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{At^2 + B}$$

Ví Dụ 2.3.7. Tính tích phân sau

$$\bullet I = \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{(3x^2 - 1)\sqrt{5x^2 - 2}}$$

$$\text{Đặt } xt = \sqrt{5x^2 - 2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{-2}{t^2 - 5} \\ xdx = \frac{tdt}{(t^2 - 5)^2} \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow t = 1; x = 1 \rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases}, \text{ khi đó:}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{(3x^2 - 1)\sqrt{5x^2 - 2}} &= \frac{tdt}{x(t^2 - 5)^2 (xt) \left(\frac{-6}{t^2 - 5} - 1 \right)} = \frac{dt}{x^2 (t^2 - 5)^2 \left(\frac{-6}{t^2 - 5} - 1 \right)} \\ &= \frac{dt}{\frac{-2}{t^2 - 5} (t^2 - 5)^2 \left(\frac{-t^2 - 1}{t^2 - 5} \right)} = \frac{dt}{2(t^2 + 1)} \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(t^2 + 1)} = \frac{1}{2} \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Dạng 8.
$$I = \int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{(ax^2 + b)\sqrt{nx^2 + m}}$$

Ta đưa về tổng của hai tích phân **Dạng 6** và **Dạng 7**.

Ví Dụ 2.3.8. Tính tích phân sau

$$I = \int_2^3 \frac{(4x + 3) dx}{(x^2 - 2x - 4)\sqrt{3x^2 - 6x + 5}}$$

$$\text{Ta có, } I = \int_2^3 \frac{(4x + 3) dx}{(x^2 - 2x - 4)\sqrt{3x^2 - 6x + 5}} = \int_2^3 \frac{(4(x-1) + 7) dx}{((x-1)^2 - 5)\sqrt{3(x-1)^2 + 2}} = \int_1^2 \frac{(4t + 7) dt}{(t^2 - 5)\sqrt{3t^2 + 2}}$$

$$\text{Bài toán trở thành tính tích phân } I = \int_1^2 \frac{(4x + 7) dx}{(x^2 - 5)\sqrt{3x^2 + 2}} = J_1 + J_2.$$

$$\text{Với } J_1 = 4 \int_1^2 \frac{xdx}{(x^2 - 5)\sqrt{3x^2 + 2}} \text{ và } J_2 = 7 \int_1^2 \frac{dx}{(x^2 - 5)\sqrt{3x^2 + 2}}$$

$$\text{Xét } J_1 = 4 \int_1^2 \frac{xdx}{(x^2 - 5)\sqrt{3x^2 + 2}}, \text{ đặt } t = \sqrt{3x^2 + 2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{t^2 - 2}{3} \\ xdx = \frac{1}{3}tdt \\ x=1 \rightarrow t=\sqrt{5}; x=2 \rightarrow t=\sqrt{14} \end{array} \right. \Rightarrow J_1 = 4 \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}} \frac{dt}{t^2 - 17} = \frac{2}{\sqrt{17}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{17}}{t + \sqrt{17}} \right| \Bigg|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}}$$

Xét $J_2 = 7 \int_1^2 \frac{dx}{(x^2 - 5)\sqrt{3x^2 + 2}}$, đặt $xt = \sqrt{3x^2 + 2}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{2}{t^2 - 3} \\ xdx = \frac{-2tdt}{(t^2 - 3)^2} \\ x=1 \rightarrow t=\sqrt{5}; x=2 \rightarrow t=\frac{\sqrt{14}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{dx}{(x^2 - 5)\sqrt{3x^2 + 2}} = \frac{-2tdt}{(t^2 - 3)^2 \left(\frac{2}{t^2 - 3} - 5 \right) \frac{2t}{t^2 - 3}} = \frac{-dt}{5t^2 - 17}$$

$$\Rightarrow J_2 = 7 \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}/2} \frac{-dt}{5t^2 - 17} = -\frac{7}{\sqrt{5}} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}/2} \frac{d(t\sqrt{5})}{(t\sqrt{5})^2 - 17} = -\frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{17}} \ln \left| \frac{t\sqrt{5} - \sqrt{17}}{t\sqrt{5} + \sqrt{17}} \right| \Bigg|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}/2}$$

Như vậy, $J = J_1 + J_2 = \frac{2}{\sqrt{17}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{17}}{t + \sqrt{17}} \right| \Bigg|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}} - \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{17}} \ln \left| \frac{t\sqrt{5} - \sqrt{17}}{t\sqrt{5} + \sqrt{17}} \right| \Bigg|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{14}/2}$

Dạng 9. $I = \int f(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$. Ta đặt $x = a \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

Ví Dụ 2.3.9. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$

$$\text{Đặt } x = \sin t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dx = \cos t dt \\ x=0 \rightarrow t=0; x=\frac{1}{2} \rightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\sqrt{(1 - \sin^2 t)^5}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t dt}{\cos^4 t} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{dt}{\cos^2 t} \right) \tan^2 t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 t d(\tan t) = \frac{1}{3} \tan^3 t \Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}$$

Dạng 10. $I = \int f\left(x; \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$. Ta đặt $x = \frac{a}{\cos t}$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Ví Dụ 2.3.10. Tính tích phân sau $I = \int_4^8 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x} dx$

$$\text{Ta đặt } x = \frac{4}{\cos t} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{4 \sin t}{\cos^2 t} dt \\ x = 4 \rightarrow t = 0; x = 8 \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{16\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)}}{\frac{4}{\cos t}} \frac{4 \sin t}{\cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[(1 + \tan^2 t) - 1\right] dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 t) dt - 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt = 4 \tan t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Dạng 11. $I = \int f\left(x; \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$

Ta đặt $t = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ hoặc $x = a \tan t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ví Dụ 2.3.11. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^1 x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$\text{Ta có, } I_1 = \int_0^1 x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \int_0^1 x \sqrt{(x-1)^2 + 1} dx = \int_{-1}^0 (u+1) \sqrt{u^2 + 1} du \quad (u = x-1)$$

$$\Rightarrow I_1 = - \int_0^1 (x+1) \sqrt{x^2 + 1} dx$$

$$\text{Ta đặt } x = \tan t \Rightarrow \begin{cases} dx = (1 + \tan^2 t) dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0; x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_1 &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan t) \sqrt{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan t}{\cos^2 t} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} dt \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan t}{\cos^3 t} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t + \cos t}{\cos^4 t} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t dt}{\cos^4 t} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t dt}{(1 - \sin^2 t)^2} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos t)}{\cos^4 t} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{(1 - \sin^2 t)^2} = \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3} - J \\
J &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1 - x^2)^2} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right]^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{(1 - x)^2} + \frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{2}{(1 - x)(1 + x)} \right] dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1 - x)^2} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1 + x)^2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{1}{4(1 - x)} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{4(1 + x)} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} - \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \ln(3 + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \ln(3 + \sqrt{2}) \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \ln(3 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

$$\bullet I_2 = \int \sqrt{x^2 + a} dx$$

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{x^2 + a} \Rightarrow t - x = \sqrt{x^2 + a} \Rightarrow (t - x)^2 = x^2 + a \Rightarrow x = \frac{t^2 - a}{2t}$$

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó, } I_2 &= \int \sqrt{x^2 + a} dx = \int (t - x) dx = \int t dx - \int x dx = tx - \int x dt - \frac{x^2}{2} \\
&= tx - \int \frac{t^2 - a}{2t} dt - \frac{x^2}{2} = tx - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \left(t - \frac{a}{t} \right) dt = tx - \frac{x^2}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{a}{2} \ln|t| + C \\
&= tx - \frac{x^2}{2} - \frac{a + 2tx}{4} + \frac{a}{2} \ln|t| + C = \frac{tx}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{a}{2} \ln|t| + \left(C - \frac{a}{4} \right) \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} \right) - \frac{x^2}{2} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \\
&= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C
\end{aligned}$$

Dạng 12. $I = \int f\left(x, \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right) dx$. Ta đặt $x = a \cos 2t$, $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Đối với nguyên hàm dạng $J = f\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) dx$ ta cũng dùng phép đổi biến trên.

Ví Dụ 2.3.12. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

Cách 1:

$$\text{Ta đặt } x = \cos 2t \Rightarrow \begin{cases} dx = -2 \sin 2t dt \\ x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= -2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{1-\cos 2t}} dt = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t dt \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = (2t + \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Cách 2: Ta đặt :

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ dx = \frac{4t dt}{(1+t^2)^2} \\ x = 0 \rightarrow t = 1; x = \frac{1}{2} \rightarrow t = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow I = 4 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}$$

Tiếp tục đặt $t = \tan u \Rightarrow I = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 u du = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2u) du = (2u - \sin 2u) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dạng 13. $I = \int f\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad (ad-bc \neq 0)$

Đặt $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a}$

Ví Dụ 2.3.13. Tính tích phân sau

• $I_1 = \int_0^1 x \sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}} dx$

Đặt $t = \sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2(t^3-1)}{t^3+1} \\ dx = \frac{12t^2}{(t^3+1)^2} dt \\ x=0 \rightarrow t=1; x=1 \rightarrow t=\sqrt[3]{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 8 \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{t^3-1}{(t^3+1)^2} d(t^3) = 8 \int_1^{\sqrt[3]{3}} \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = 8 \int_1^{\sqrt[3]{3}} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right] d(x+1)$$

$$= 8 \ln|x+1| \Big|_1^{\sqrt[3]{3}} + \frac{16}{x+1} \Big|_1^{\sqrt[3]{3}} = 8 \ln 2 - 4$$

• $I_2 = \int_0^1 x^3 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2(t^2-1)}{t^2+1} \\ dx = \frac{8t}{(t^2+1)^2} dt \\ x=0 \rightarrow t=1; x=1 \rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{8(t^2-1)^3}{(t^2+1)^3} \cdot \frac{8tdt}{(t^2+1)^2} = 32 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(t^2-1)^3}{(t^2+1)^5} d(t^2) = 32 \int_1^3 \frac{(x-1)^2}{(x+1)^5} dx$$

Đặt $u = x+1 \Rightarrow x = u-1$. Ta có:

$$I_2 = 32 \int_2^4 \frac{(u-2)^2}{u^5} du = 32 \int_2^4 \frac{u^2 - 2u + 1}{u^5} du = 32 \int_2^4 \left(\frac{1}{u^3} - \frac{2}{u^4} + \frac{1}{u^5} \right) du = 32 \left(\frac{-1}{2u^2} + \frac{2}{3u^3} - \frac{1}{4u^4} \right) \Big|_2^4 = \frac{109}{96}$$

Dạng 14.
$$I = \int \frac{f(x)}{\sqrt{[g(x)]^2 \pm \alpha}} dx$$

Giả sử,
$$\frac{f(x)}{\sqrt{[g(x)]^2 \pm \alpha}} = \frac{A(g^2(x) \pm \alpha)}{\sqrt{[g(x)]^2 \pm \alpha}} + \frac{Bg(x)}{\sqrt{[g(x)]^2 \pm \alpha}} + \frac{C}{\sqrt{[g(x)]^2 \pm \alpha}}$$

Đồng nhất hai vế ta xác định hệ số $A; B; C$

Ví Dụ 2.3.14. Tính tích phân sau $I = \int_1^2 \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$ (Bộ Đề)

Giả sử,
$$\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{(x+1)^2-1}} = \frac{A[(x+1)^2-1]}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + \frac{B(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + \frac{C}{\sqrt{(x+1)^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{Ax^2 + (2A+B)x + B+C}{\sqrt{(x+1)^2-1}} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ 2A+B=0 \\ B+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-4 \\ C=5 \end{cases}$$

Khi đó,
$$I = \int_1^2 \left[\frac{2[(x+1)^2-1]}{\sqrt{(x+1)^2-1}} - \frac{4(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-1}} + \frac{5}{\sqrt{(x+1)^2-1}} \right] dx$$

Đặt $t = x+1 \Rightarrow I = \int_2^3 \left[\frac{2(t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{4t}{\sqrt{t^2-1}} + \frac{5}{\sqrt{t^2-1}} \right] dt$

$$= 2 \int_2^3 \sqrt{t^2-1} dt - 4 \int_2^3 \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} + 5 \int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = 2I_1 - 4 \sqrt{t^2-1} \Big|_2^3 + 5I_2 = 2I_1 - 4(\sqrt{8}-\sqrt{3}) + 5I_2$$

Xét $I_1 = \int_2^3 \sqrt{t^2-1} dt$. Đặt $u = t + \sqrt{t^2-1}$ và theo Ví Dụ 2.3.11 ta suy ra:

$$I_1 = \int_2^3 \sqrt{t^2-1} dt = \left(\frac{t}{2} \sqrt{t^2-1} + \frac{-1}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2-1} \right| \right) \Big|_2^3 = 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$$

Xét $I_2 = \int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$ (có thể sử dụng cách đặt $u = t + \sqrt{t^2-1}$)

Ta thấy $\left[\ln(t + \sqrt{t^2-1}) \right]' = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \Rightarrow \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln(t + \sqrt{t^2-1}) + C$

$$\Rightarrow I_2 = \int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln(t + \sqrt{t^2-1}) \Big|_2^3 = \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow I = 2 \left(3\sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}} \right) - 4(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 5 \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 4 \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}$$

Dạng 15. Phương pháp thế Euler

Để khử $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ta có thể đổi biến theo cách sau:

Nếu $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$

Nếu $c > 0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$

Nếu $ax_0^2+bx_0+c=0$, đặt $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_0)$

Ví Dụ 2.3.15. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

Vì $c=1>0$, ta đặt $\sqrt{x^2+x+1} = t-x \Rightarrow x+1 = t^2-2tx \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t+1}$

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{3}-2}^0 \frac{d\left(\frac{t^2-1}{2t+1}\right)}{\frac{t^2-1}{2t+1}\left(t-\frac{t^2-1}{2t+1}\right)} = \int_{\sqrt{3}-2}^0 \frac{2dt}{t^2-1} = 2 \int_{\sqrt{3}-2}^0 \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_{\sqrt{3}-2}^0 = -\ln \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = -\frac{\ln 3}{2}$$

$$\bullet I_2 = \int_3^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x^2-4x+3}} dx$$

$$\text{Vì } x^2-4x+3=(x-1)(x+3), \text{ đặt } t(x-1)=\sqrt{x^2-4x+3} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{t^2-3}{t^2-1} \\ dx=\frac{4tdt}{(t^2-1)^2} \\ x=3 \rightarrow t=0; x=4 \rightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4tdt}{(t^2-1)\left[1+t\left(\frac{t^2-1}{t^2-3}-1\right)\right]} = 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{tdt}{t^2-2t-1} = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{(2t-2+2)dt}{t^2-2t-1}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left[\frac{(2t-2)}{t^2-2t-1} + \frac{2}{t^2-2t-1} \right] dt = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{d(t^2-2t-1)}{t^2-2t-1} + 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t^2-2t-1}$$

$$= 2 \ln |t^2-2t-1| \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + 4 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{\left[t-(1-\sqrt{2})\right]\left[t-(1+\sqrt{2})\right]}$$

$$= 2 \ln \frac{2+2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{2\sqrt{2}} \left[\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t-(1+\sqrt{2})} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{t-(1-\sqrt{2})} \right] = 2 \ln \frac{2+2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{t-(1+\sqrt{2})}{t-(1-\sqrt{2})} \right| \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= 2 \ln \frac{2+2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} \left[\ln \left| \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}} \right| - \ln(3+2\sqrt{2}) \right]$$

Dạng 16. $I = \int x^p (ax^q + b)^k dx \quad (p, q \in \mathbb{Q}; k \in \mathbb{Z})$

Giả sử $\alpha = MSCNN(p; q)$, ta đặt $t = \sqrt[q]{x}$

Ví Dụ 2.3.16. Tính tích phân sau $I = \int_1^9 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$

Ta có, $I = \int_1^9 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} = \int_1^9 x^{-1} (x^{1/2} + 1)^{-1} dx$, đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$

$$\Rightarrow I = \int_1^3 \frac{2tdt}{t^2(1+t)} = 2 \int_1^3 \frac{dt}{t(1+t)} = 2 \int_1^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = 2 \int_1^3 \frac{dt}{t} - 2 \int_1^3 \frac{d(t+1)}{t+1} = 2 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right|_1^3 = 2 \ln \frac{3}{2}$$

Dạng 17. $I = \int x^p (ax^q + b)^k dx \quad \left(p, q, k \in \mathbb{Q}, \frac{p+1}{q} \in \mathbb{Z} \right)$

Giả sử $k = \frac{\alpha}{\beta}$, ta đặt $t^\beta = ax^q + b$

Ví Dụ 2.3.17. Tính tích phân sau $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

Ta có, $I = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int_0^1 x \left(x^{\frac{2}{3}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} dx$, vì $p=1; q=\frac{2}{3}; k=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p+1}{q} = 3 \in \mathbb{Z}$

nên đặt $t^2 = \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1} \Rightarrow (t^2 - 1)^3 = x^2 \Rightarrow \begin{cases} xdx = 3t(t^2 - 1)^6 dt \\ x=0 \rightarrow t=1; x=1 \rightarrow t=\sqrt{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 3 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t(t^2-1)^2 dt}{t} = 3 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)^2 dt = 3 \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - 2t^2 + 1) dt = 3 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{5} - \frac{8}{5}$$

Dạng 18. $I = \int x^p (ax^q + b)^k dx \quad \left(p, q, k \in \mathbb{Q}, \frac{p+1}{q} + k \in \mathbb{Z} \right)$

Giả sử $k = \frac{\alpha}{\beta}$, ta đặt $t = \sqrt[\beta]{\frac{ax^q + b}{x^p}}$

Ví Dụ 2.3.18. Tính tích phân sau $I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}}$

Ta có, $I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}} = \int_0^1 x^{\frac{-1}{3}} (2-x^3)^{\frac{-1}{3}} dx$, vì $p=-3; q=3; k=\frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{p+1}{q} + k = -1 \in \mathbb{Z}$ nên

$$\text{đặt } t = \frac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x} \Rightarrow t^3 = \frac{2-x^3}{x^3} \Rightarrow x^3 = \frac{2}{t^3+1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 dx = \frac{-2t^2 dt}{(t^3+1)^2} \\ x=1 \rightarrow t=1; x=\sqrt[3]{2} \rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}} = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2 dx}{(x^3)^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{2-x^3}}{x}} = \int_1^0 \frac{1}{4t} \cdot \frac{-2t^2 dt}{(t^3+1)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^0 t dt = \frac{-t^2}{4} \Big|_1^0 = \frac{1}{4}$$

Dạng 19. $I = \int R \left(x; x^{\frac{p_1}{q_1}}; x^{\frac{p_2}{q_2}}; \dots; x^{\frac{p_j}{q_j}} \right) dx$

Giả sử $k = \text{BSCNN}(q_1; \dots; q_j)$, khi đó ta đặt $t = \sqrt[k]{x} \Rightarrow I = \int S(t) dt$

Ví Dụ 2.3.19. Tính tích phân sau $I = \int_1^{81} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(1+\sqrt[4]{x})} dx$

$$\text{Ta có, } I = \int_1^{81} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(1+\sqrt[4]{x})} dx = \int_1^{81} \frac{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{8}}}{x \left(1 + x^{\frac{1}{4}} \right)} dx$$

$$\text{Vì } \text{BSCNN}(4; 8) = 8 \text{ nên ta đặt } t = \sqrt[8]{x} \Rightarrow x = t^8 \Rightarrow \begin{cases} dx = 8t^7 dt \\ x=1 \rightarrow t=1; x=81 \rightarrow t=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{8(t^2 - t)t^7 dt}{t^8(t^2 + 1)} = 8 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t-1}{t^2+1} dt = 4 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} - 8 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = 4 \ln(t^2+1) \Big|_1^{\sqrt{3}} - 8 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} \\ &= \left(4 \ln 4 - \frac{8\pi}{3} \right) - (4 \ln 2 - 2\pi) = 4 \ln 2 - \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Dạng 20.
$$I = \int R \left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_2}{q_2}}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_j}{q_j}} \right) dx$$

$$\text{Đặt } t = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{dt-b}{-ct+a} \\ dx = \frac{ad-bc}{(-ct+a)^2} dt \end{cases} \Rightarrow I = R \left(\frac{dt-b}{-ct+a}; t^{\frac{p_1}{q_1}}; t^{\frac{p_2}{q_2}}; \dots; t^{\frac{p_j}{q_j}} \right) \frac{ad-bc}{(-ct+a)^2} dt$$

Giả sử $k = \text{BSCNN}(q_1; \dots; q_j)$, khi đó ta đặt $u = \sqrt[k]{t} \Rightarrow I = \int S(u) du$

Ví Dụ 2.3.20. Tính tích phân sau $I = \int_4^6 \sqrt{\frac{x-4}{x+2}} \cdot \frac{dx}{x+2}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x-4}{x+2}} \Rightarrow t^2 = 1 - \frac{6}{x+2} \Rightarrow x+2 = \frac{6}{1-t^2} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{12tdt}{(1-t^2)^2} \\ x=4 \rightarrow t=0; x=6 \rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} t \cdot \frac{1-t^2}{6} \cdot \frac{12tdt}{(1-t^2)^2} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2 dt}{1-t^2} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-t^2} - 1 \right) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= 2 \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 2 \ln 3 - 1$$

Một số Bài Luyện Tập:

$$1) I = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{(2+5x^4)^7}}$$

$$2) I = \int_{-1}^0 \frac{(x+2) dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$3) I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$4) I = \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$5) I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx$$

$$6) I = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(3x-4) dx}{(1-2x)\sqrt{4x^2+2x+5}}$$

$$7) I = \int \frac{x^3 dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$8) I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{(5x^2 - 11)\sqrt{7 - 3x^2}}$$

$$9) I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}$$

$$10) I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

2.4. Các dạng bài toán tích phân hữu tỉ

Các Định Nghĩa:

Phân thức hữu tỉ có dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x); Q(x)$ là các đa thức với hệ số thực.

Phân thức thực sự là phân thức hữu tỉ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ với $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

Phân thức đơn giản là phân thức ở dạng sau đây:

$$\frac{A}{x-a}; \frac{A}{(x-a)^k}; \frac{Bx+C}{x^2+px+q}; \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} \quad (\Delta = p^2 - 4q < 0; k \in \mathbb{N})$$

Định lý tổng quát về phân tích đa thức:

Mọi đa thức $Q(x)$, $\deg Q(x) = n$ với hệ số thực đều có sự phân tích duy nhất như sau:

$$Q(x) = a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_i)^{\alpha_i}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots (x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j}$$

với $a \neq 0$; $(x_1, \dots, x_i)$ là nghiệm của $Q(x)$ và $\Delta_j = p_j^2 - 4q_j < 0$; $n = \sum \alpha_i + 2\sum \beta_j$

Xét $I^ = \int \frac{P^*(x)}{Q(x)} dx$ với $\frac{P^*(x)}{Q(x)}$ là phân thức hữu tỉ. Nếu $\deg P^*(x) \geq \deg Q(x)$ thì ta chia đa thức tử cho đa thức mẫu.*

$$\Rightarrow \int \frac{P^*(x)}{Q(x)} dx = \int H(x) dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad (\deg P(x) < \deg Q(x))$$

Và ta cần xác định $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, $\deg P(x) \leq \deg Q(x)$. Các dạng toán dưới đây sẽ phân nào giúp định hướng được cách ngắn nhất để xác định nguyên hàm $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, $\deg P(x) \leq \deg Q(x)$.

Dạng 1. $I = \int \frac{dx}{ax+b}$

Ta có: $I = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{axb} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$

Ví Dụ 2.4.1. Tính tích phân sau

- $I_1 = \int_4^6 \frac{dx}{5x+2} = \frac{1}{5} \int_4^6 \frac{d(5x+2)}{5x+2} = \frac{1}{5} \ln|5x+2| \Big|_4^6 = \frac{1}{5} \ln \frac{16}{11}$
- $I_2 = \int_0^1 \frac{2x-1}{x+3} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{7}{x+3} \right) dx = (2x - 7 \ln|x+3|) \Big|_0^1 = 2 + 7 \ln \frac{3}{4}$
- $I_3 = \int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

Dạng 2. $I = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Ta có: $ax^2+bx+c = \begin{cases} (\alpha x + \beta)^2 + p^2 \\ (\alpha x + \beta)^2 - p^2 \end{cases}$

Khi đó ta biến đổi nguyên hàm về một trong các dạng sau:

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan u + C \quad \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \quad \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$$

Ví Dụ 2.4.2. Tính tích phân sau

- $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{4x^2+8x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(2x+2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(2x+2)}{(2x+2)^2 - (\sqrt{3})^2}$
- $= \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2x+2-\sqrt{3}}{2x+2+\sqrt{3}} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\ln \frac{4-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} - \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right)$

$$\begin{aligned} \bullet I_2 &= \int_0^1 \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 4x + 8} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{x^2 - 4x + 8} \right) dx = x \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2 + 4} \\ &= 1 - 3 \int_0^1 \frac{d(x-2)}{(x-2)^2 + 2^2} = 1 - \frac{3}{2} \arctan \frac{x-2}{2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{3}{2} \left(\arctan \left(\frac{-1}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Dạng 3. $I = \int \frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx+c}$

Ta biến đổi: $\int \frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{ax^2+bx+c} dx = \alpha \int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c} + \beta \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Ví Dụ 2.4.3. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^2} \quad (\text{HVKTQS - 95})$$

Ta có $I = \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(2x+2) dx}{(x+1)^2} - \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2+2x+1)}{x^2+2x+1} - \int_0^1 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+1| \Big|_0^1 + \frac{1}{x+1} \Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{(x+1)^2} \quad (\text{ĐHSP.Vinh - 98})$$

Ta có, $I_2 = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{(x+1)^2} = \int_0^3 \frac{(x^3+1)-1}{(x+1)^2} dx = \int_0^3 \frac{x^2-x+1}{x+1} dx - \int_0^3 \frac{dx}{(x+1)^2}$

$$= \int_0^3 \left(x-2 + \frac{3}{x+1} \right) dx - \int_0^3 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 3 \ln |x+1| \right) \Big|_0^3 + \frac{1}{x+1} \Big|_0^3 = -\frac{9}{4} + 6 \ln 2$$

Dạng 4. $I_k = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}, k \in \mathbb{N}$

Ta xét trường hợp $k=1 \Rightarrow I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

Nếu $k > 1$, Ta có $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, đặt $t = x + \frac{b}{2a}$

$$\Rightarrow I_k = \frac{1}{a^k} \int \frac{dt}{(t^2 + A)^k} \text{ .Tiếp tục tích phân từng phần với}$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(t^2 + A)^k} \Rightarrow \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{2ktdt}{(t^2 + A)^{k+1}} \\ v = t \end{cases} \text{ .Từ đó ta thu được hệ thức truy hồi .}$$

Ví Dụ 2.4.4. Tính tích phân sau $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 4x + 3)^3}$ (Bộ Đề)

$$\text{Xét } I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 4x + 3)^n}$$

$$\text{Với } n=1, \Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2}$$

$$\text{Xét } n > 1, \text{ ta đặt } t = x + 2 \Rightarrow I_n = \int_2^3 \frac{dt}{(t^2 - 1)^n}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{(t^2 - 1)^n} \Rightarrow \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-2ntdt}{(t^2 - 1)^{n+1}} \\ v = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{t}{(t^2 - 1)^n} \Big|_2^3 + 2n \int_2^3 \frac{(t^2 - 1) + 1}{(t^2 - 1)^{n+1}} dt = \frac{3}{8^n} - \frac{2}{3^n} + 2n(I_n + I_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow 2nI_{n+1} = I_n - \frac{3}{8^n} + \frac{2}{3^n} - 2nI_n \Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left[-\frac{3}{8^n} + \frac{2}{3^n} + (1 - 2n)I_n \right]$$

$$\text{Vậy } I_2 = \frac{1}{2.1} \left[-\frac{3}{8^1} + \frac{2}{3^1} + (1-2.1)I_1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{24} + \frac{\ln 3 - \ln 2}{2} \right) = \frac{7}{48} + \frac{\ln 3 - \ln 2}{4}$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{2.2} \left[-\frac{3}{8^2} + \frac{2}{3^2} + (1-2.2)I_2 \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{101}{576} - 3 \left(\frac{7}{48} + \frac{\ln 3 - \ln 2}{4} \right) \right]$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{-151}{2304} - \frac{3}{16} \ln \frac{3}{2}$$

Dạng 5. $I_k = \int \frac{(mx+n)dx}{(ax^2+bx+c)^k}, k \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có } mx+n = \frac{m}{2a}(2a+b)x + n - \frac{mb}{2a}$$

$$\Rightarrow I_k = \frac{m}{2a} \int \frac{(2ax+b)dx}{(ax^2+bx+c)^k} + \left(n - \frac{mb}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k} \text{ theo Dạng 4 ta thu được kết quả.}$$

Ví Dụ 2.4.5. Tính tích phân sau $I = \int_0^1 \frac{(2x+1)dx}{(x^2+4x+3)^3}$

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \frac{(2x+4)-3}{(x^2+4x+3)^3} dx = \int_0^1 \frac{d(x^2+4x+3)}{(x^2+4x+3)^3} - 3 \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+4x+3)^3}$$

$$= \frac{-1}{2(x^2+4x+3)^2} \Big|_0^1 - 3 \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+4x+3)^3} = \frac{-55}{1152} - 3 \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+4x+3)^3}$$

$$\text{Mặt khác, theo Ví Dụ 2.4.4 ta có } \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+4x+3)^3} = \frac{-151}{2304} - \frac{3}{16} \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{nên suy ra } I = \frac{-55}{1152} - 3 \left(\frac{-151}{2304} - \frac{3}{16} \ln \frac{3}{2} \right)$$

Dạng 6. $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Với $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức thực sự, và $Q(x) = \alpha(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

Giả sử, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$. Thực hiện đồng nhất hai vế ta thu được hệ số $A_1, \dots, A_n$.

Ví Dụ 2.4.6. Tính tích phân sau $I = \int_2^3 \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

Ta có, $I = \int_2^3 \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int_2^3 \frac{2x^2 - 5x - 3}{x(x-1)(x+2)} dx$

Giả sử, $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=2 \\ A+2B-C=-5 \\ -2A=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=-2 \\ C=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2} \int_2^3 \frac{dx}{x} - 2 \int_2^3 \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{2} \int_2^3 \frac{dx}{x+2} = \left(\frac{3}{2} \ln|x| - 2 \ln|x-1| + \frac{5}{2} \ln|x+2| \right) \Big|_2^3 = \frac{3 \ln 3 + 5 \ln 5 - 17 \ln 2}{2}$$

Dạng 7. $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Với $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức thực sự, và $Q(x) = \alpha(x-x_1)\dots(x-x_i)^k \dots(x-x_n)$.

Giả sử, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{i-1}}{x-x_{i-1}} + \left[\frac{B_1}{x-x_i} + \frac{B_2}{(x-x_i)^2} \dots \frac{B_k}{(x-x_i)^k} \right] + \frac{A_{i+1}}{x-x_{i+1}} \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$

Thực hiện đồng nhất hai vế ta thu được hệ số $A_1, \dots, A_{i-1}, B_1, \dots, B_k, A_{i+1}, \dots, A_n$.

Ví Dụ 2.4.7. Tính tích phân sau $I = \int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x^2 - 4x + 3)^2} dx$

Ta có, $I = \int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x^2-4x+3)^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x-1)^2(x-3)^2} dx$

Giả sử, $\frac{x+1}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2}$

$$\Leftrightarrow x+1 = (A+C)x^3 + (-7A+B-5C+D)x^2 + (15A-6B+7C-2D)x - 9A+9B-3C+D$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -7A+B-5C+D=0 \\ 15A-6B+7C-2D=1 \\ -9A+9B-3C+D=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{4} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=-\frac{3}{4} \\ D=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{3}{4} \int_{-1}^0 \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{3}{4} \int_{-1}^0 \frac{dx}{x-3} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-3)^2} \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2(x-1)} \Big|_{-1}^0 - \frac{3}{4} \ln|x-3| \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{(x-3)} \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{4} \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dạng 8. $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Với $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức thực sự, và:

$$Q(x) = \alpha(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x^2+px+q)(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \quad (p^2-4q < 0)$$

Giả sử, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{i-1}}{x-x_{i-1}} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q} + \frac{A_{i+1}}{x-x_{i+1}} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$.

Thực hiện đồng nhất hai vế ta thu được hệ số $A_1, \dots, A_{i-1}, B, C, A_{i+1}, \dots, A_n$.

Ví Dụ 2.4.8. Tính tích phân sau $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)}$ (Bộ Đề)

Ta có, $I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)(x^2-x+1)}$

Giả sử $\frac{1}{x(x^3+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x^3+1) + Bx(x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)x \quad (*)$$

Cho $x=0 \Rightarrow A=1$ và cho $x=-1 \Rightarrow B = \frac{-1}{3}$.

$$(*) \Leftrightarrow 1 = (A+B+C)x^3 + (-B+C+D)x^2 + (B+D)x + A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{-1}{3} \\ B+D=0 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=\frac{-1}{3} \\ C=\frac{-2}{3} \\ D=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} = \ln|x|_1^2 - \frac{1}{3} \ln|x+1|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} \\ &= \ln 2 - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} \ln|x^2-x+1|_1^2 = \frac{4\ln 2}{3} - \frac{2\ln 3}{3} \end{aligned}$$

Dạng 9. $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Với $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là phân thức thực sự, và:

$$Q(x) = \alpha(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x^2+px+q)^k(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \quad (k \in \mathbb{N}, p^2-4q < 0)$$

Giả sử, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{i-1}}{x-x_{i-1}} + \left[\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \dots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k} \right] + \frac{A_{i+1}}{x-x_{i+1}} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$.

Thực hiện đồng nhất hai vế ta thu được hệ số $A_1, \dots, A_{i-1}, B_j, C_j, A_{i+1}, \dots, A_n$ ($j = \overline{1, k}$)

Ví Dụ 2.4.9. Tính tích phân sau $I = \int_1^5 \frac{2x^2+18}{(x^2-6x+13)^2} dx$

Giả sử, $\frac{2x^2+18}{(x^2-6x+13)^2} = \frac{Ax+B}{x^2-6x+13} + \frac{Cx+D}{(x^2-6x+13)^2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2+18 = Ax^3 + (-6A+B)x^2 + (13A-6B+C)x + (13B+D)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ -6A+B=2 \\ 13A-6B+C=0 \\ 13B+D=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=12 \\ D=-8 \end{cases} \Rightarrow I = 2 \int_1^5 \frac{dx}{x^2-6x+13} + \int_1^5 \frac{12x-8}{(x^2-6x+13)^2} dx$$

$$= 2 \int_1^5 \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4} + \int_1^5 \frac{6(2x-6)+28}{(x^2-6x+13)^2} dx = \arctan \frac{x-3}{2} \Big|_1^5 + 6 \int_1^5 \frac{d(x^2-6x+13)}{(x^2-6x+13)^2} + 28 \int_1^5 \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{6}{x^2-6x+13} \Big|_1^5 + 28 \int_1^5 \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2} = \frac{\pi}{2} + 28 \int_1^5 \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2}$$

Xét $J = \int_1^5 \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2} = \int_1^5 \frac{d(x-3)}{[(x-3)^2+4]^2} = \int_{-2}^2 \frac{dt}{(t^2+4)^2} = 2 \int_0^2 \frac{dt}{(t^2+4)^2}$

Đặt $t = 2 \tan u \Rightarrow \begin{cases} dt = 2(1+\tan^2 u) du \\ t^2+4 = 4(1+\tan^2 u) \\ t=0 \rightarrow u=0; t=2 \rightarrow u=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow J = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1+\tan^2 u) du}{16(1+\tan^2 u)^2} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2u) du = \frac{1}{8} \left(u + \frac{\sin 2u}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{32} + \frac{1}{16}$$

Vậy $I = \frac{\pi}{2} + 28 \left(\frac{\pi}{32} + \frac{1}{16} \right) = \frac{11\pi+14}{8}$

Dạng 10. $I = \int \frac{u'(x)P(u(x))}{Q(u(x))} dx$. Ta đặt $t = u(x) \Rightarrow I = \int \frac{P(t)dt}{Q(t)}$

Ví Dụ 2.4.10. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^8-4)^2}$$

$$\text{Đặt } t = x^4 \Rightarrow \begin{cases} dt = 4x^3 dx \\ x = 0 \rightarrow t = 0; x = 1 \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 - 4)^2} = \frac{1}{64} \int_0^1 \frac{[(t+2) - (t-2)]^2}{(t^2 - 4)^2} dt = \frac{1}{64} \int_0^1 \left[\frac{1}{(t-2)^2} - \frac{2}{(t-2)(t+2)} + \frac{1}{(t+2)^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{64} \left(\frac{-1}{t-2} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| - \frac{1}{t+2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{64} \left(\frac{2}{3} + \frac{\ln 3}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\bullet I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3} \quad (\text{Bộ Đề})$$

$$\text{Ta có, } I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x+1)dx}{(x^2 + x + 1)^2 - 4}$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = (2x+1)dx \\ x = 0 \rightarrow t = 1; x = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow I_2 = \int_1^{\frac{7}{4}} \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \Bigg|_1^{\frac{7}{4}} = \frac{-\ln 5}{4}$$

Dạng 11. $I = \int \frac{P(x)Q'(x)}{Q^n(x)} dx$

$$\text{Ta sử dụng phương pháp tích phân từng phần với } \begin{cases} u = P(x) \\ dv = \frac{Q'(x)dx}{Q^n(x)} \end{cases}$$

Ví Dụ 2.4.11. Tính tích phân sau $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{(x^2 - 1)^3}$

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{(x^2 - 1)^3} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \cdot \frac{xdx}{(x^2 - 1)^3}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^3 \\ dv = \frac{xdx}{(x^2 - 1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3x^2 \\ v = \frac{-1}{4(x^2 - 1)^2} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{-x^3}{4(x^2 - 1)^2} \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 dx}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{-1}{18} + \frac{3}{16} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{[(x+1)+(x-1)]^2 dx}{(x^2-1)^2} = \frac{-1}{18} + \frac{3}{16} \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$= \frac{-1}{18} + \frac{3}{16} \left(\frac{-1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{18} + \frac{3}{16} \left(\frac{4}{3} - \ln 3 \right) = \frac{7}{36} - \frac{3 \ln 3}{16}$$

Dạng 12. Sử dụng khai triển Taylor

Đa thức $P_n(x)$ có khai triển Taylor tại điểm $x=a$ là:

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P'_n(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''_n(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ví Dụ 2.4.12. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{(x-1)^5}$$

Ta có, $x^4 = P_4(x) = P_4(1) + \frac{P'_4(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''_4(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P_4^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P_4^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$

$$\Leftrightarrow x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4}{(x-1)^5} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)^{-5} dx + 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)^{-4} dx + 6 \int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)^{-3} dx + 4 \int_0^{\frac{1}{2}} (x-1)^{-2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{-1}{4} (x-1)^{-4} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} (x-1)^{-3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 3 (x-1)^{-2} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{(x-1)} \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ln |x-1| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{-29}{144} - \ln 2$$

$$\bullet I_2 = \int \frac{x^3 + x + 1}{(x-2)^{2011}} dx$$

Đặt $P_3(x) = x^3 + x + 1$, khi đó ta có khai triển:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= P_3(2) + \frac{P_3'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P_3''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P_3^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3 \\
\Leftrightarrow P_3(x) &= 11 + 13(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3 \\
\Rightarrow I_2 &= \int \frac{11 + 13(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3}{(x-2)^{2011}} dx \\
&= 11 \int (x-2)^{-2011} dx + 13 \int (x-2)^{-2010} dx + 6 \int (x-2)^{-2009} dx + \int (x-2)^{-2008} dx \\
&= -\frac{11}{2010}(x-2)^{-2010} - \frac{13}{2009}(x-2)^{-2009} - \frac{6}{2008}(x-2)^{-2008} - \frac{1}{2007}(x-2)^{-2007} + C
\end{aligned}$$

Dạng 13. $I_k = \int \frac{dx}{x(ax^n + b)^k} \quad (2 \leq k \in \mathbb{N})$

Ta có,
$$I_k = \int \frac{dx}{x(ax^n + b)^k} = \frac{1}{b} \int \frac{(ax^n + b) - ax^n}{x(ax^n + b)^k} dx = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{x(ax^n + b)^{k-1}} + \frac{1}{nb} \int \frac{d(ax^n + b)}{(ax^n + b)^k}$$

$$\Leftrightarrow I_k = \frac{1}{b} I_{k-1} + \frac{(ax^n + b)^{-k+1}}{nb(-k+1)} + C.$$
 Như vậy sau k lần tính tích phân ta thu được kết quả.

Ví Dụ 2.4.13. Tính tích phân sau

$$I_1 = \int_1^e \frac{dx}{3x^{2011} + 5x}$$

Ta có,
$$I_1 = \int_1^e \frac{dx}{3x^{2011} + 5x} = \int_1^e \frac{dx}{x(3x^{2010} + 5)} = \frac{1}{5} \int_1^e \frac{(3x^{2010} + 5) - 3x^{2010}}{x(3x^{2010} + 5)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \left[\int_1^e \frac{dx}{x} - \int_1^e \frac{3x^{2009} dx}{3x^{2010} + 5} \right] = \frac{1}{5} \ln|x|_1^e - \frac{1}{5} \int_1^e \frac{d(3x^{2010} + 5)}{3x^{2010} + 5} \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \ln|3x^{2010} + 5|_1^e = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \ln \frac{3e^{2010} + 5}{8}
\end{aligned}$$

$$\bullet I_2 = \int_1^e \frac{dx}{x(3x^{10} + 5)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } I_2 &= \int_1^e \frac{(3x^{10} + 5) - 3x^{10}}{x(3x^{10} + 5)^2} dx = \int_1^e \frac{dx}{x(3x^{10} + 5)} - \int_1^e \frac{3x^9 dx}{(3x^{10} + 5)^2} \\ &= \int_1^e \frac{(3x^{10} + 5) - 3x^{10}}{x(3x^{10} + 5)} dx - \int_1^e \frac{d(3x^{10} + 5)}{(3x^{10} + 5)^2} = \int_1^e \frac{dx}{x} - \int_1^e \frac{d(3x^{10} + 5)}{(3x^{10} + 5)} - \int_1^e \frac{d(3x^{10} + 5)}{(3x^{10} + 5)^2} \\ &= \ln \left| \frac{x}{3x^{10} + 5} \right|_1^e - \frac{1}{3x^{10} + 5} \Big|_1^e = \frac{1}{8} - \frac{1}{3e^{10} + 5} + \ln \frac{8e}{3e^{10} + 5} \end{aligned}$$

Dạng 14. Sử dụng tổng hợp các phương pháp phân tích khác nhau

Trong phần này ta cùng xem xét vài bài toán được giải bằng các thủ thuật đặc biệt khác. Và mục đích quan trọng nhất là phương pháp suy luận qua mỗi ví dụ.

Ví Dụ 2.4.14. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx \quad (\text{HV.KTMM} - 2000)$$

$$\text{Ta có, } I = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx = \int_0^1 \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x^3)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow I = \arctan x \Big|_0^1 + \frac{1}{3} \arctan x^3 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

$$\bullet I_2 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^6 + 1}$$

$$\text{Ta có, } I_2 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(x^4 + 1) - (x^4 - 1)}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^4 - 1}{x^6 + 1} dx$$

$$\text{Với, } \int_{-1}^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx = \arctan x \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{3} \arctan x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$J = \int_{-1}^1 \frac{x^4 - 1}{x^6 + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 1} = \int_{-1}^1 \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3}$$

Đặt $t = \left(x + \frac{1}{x}\right)$ ta có, $J = \int_0^2 \frac{dt}{t^2 - 3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| \Big|_0^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln(2 - \sqrt{3})$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2 - \sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \bullet I_3 &= \int_2^3 \frac{dx}{x^8 - x^4} = \int_2^3 \frac{dx}{x^4(x^4 - 1)} = \int_2^3 \frac{x^4 - (x^4 - 1)}{x^4(x^4 - 1)} dx = \int_2^3 \frac{dx}{x^4 - 1} - \int_2^3 \frac{dx}{x^4} \\ &= \int_2^3 \frac{dx}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} + \frac{1}{3x^3} \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx - \frac{1}{72} \\ &= -\frac{1}{72} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^3 - \frac{1}{2} \arctan x \Big|_2^3 = -\frac{1}{72} + \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} - \frac{\arctan 3 - \arctan 2}{2} \end{aligned}$$

$$\bullet I_4 = \int \frac{(x^3 - 1) dx}{x(x^3 - 4)(x^4 - 4x + 1)}$$

Ta có, $I_4 = \int \frac{(x^3 - 1) dx}{x(x^3 - 4)(x^4 - 4x + 1)} = \int \frac{(x^3 - 1) dx}{(x^4 - 4x)(x^4 - 4x + 1)}$

Vì $(x^4 - 4x + 1) - (x^4 - 4x) = 1$ nên ta biến đổi,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{[(x^4 - 4x + 1) - (x^4 - 4x)](x^3 - 1) dx}{(x^4 - 4x)(x^4 - 4x + 1)} = \int \frac{(x^3 - 1) dx}{x^4 - 4x} - \int_1^2 \frac{(x^3 - 1) dx}{x^4 - 4x + 1} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 - 4x)}{x^4 - 4x} - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4 - 4x + 1)}{x^4 - 4x + 1} = \frac{1}{4} \ln |x^4 - 4x| - \frac{1}{4} \ln |x^4 - 4x + 1| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^4 - 4x}{x^4 - 4x + 1} \right| + C \end{aligned}$$

Một số bài luyện tập:

$$\begin{array}{lll}
1) I = \int_0^1 \frac{x+11}{x^2+5x+6} dx & 2) I = \int_0^3 \frac{2x-7}{x^2-3x+2} dx & 3) I = \int_2^3 \frac{(x+2)^2}{x(x-1)^2} dx \\
4) I = \int_1^2 \frac{2dx}{x(1+x^2)} & 5) I = \int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} & 6) I = \int_1^2 \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx \\
7) I = \int_{-1}^2 \frac{3x+1}{(x+3)^3} dx & 8) I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{x^2-1} & 9) I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{3x^2+2}{x^2+1} dx \\
10) I = \int_1^2 \frac{1-x^4}{x(1+x^4)} dx & 11) I = \int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^3} & 12) I = \int_1^2 \frac{dx}{x(x^5+1)} \text{ (TL-99)}
\end{array}$$

2.5. Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối và bất đẳng thức tích phân

2.5.1. Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối

Xét tích phân $I = \int_a^b |f(x;m)| dx$, khi đó ta cần thực hiện phá dấu giá trị tuyệt đối trên $[a;b]$.

$$\text{Giả sử } |f(x;m)| = \begin{cases} f(x;m), & \forall x \in [a;c] \\ -f(x;m), & \forall x \in [c;b] \end{cases} \Rightarrow I = \int_a^c f(x;m) dx - \int_c^b f(x;m) dx$$

Như vậy có hai dạng tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối, đó là nguyên hàm chứa tham số và không chứa tham số. Nhưng bản chất vẫn là công việc phá dấu giá trị tuyệt đối trên $[a;b]$.

Ví Dụ 2.5.1.1. Tính tích phân sau

$$\bullet I_1 = \int_{-1}^4 |x^2 - 3x + 2| dx$$

Ta xét $f(x) = x^2 + 3x + 2 \quad \forall x \in [-1;4]$ ta có bảng xét dấu:

x	-1	1	2	4			
f(x)		+	0	-	0	+	

Khi đó, $I_1 = \int_{-1}^4 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 2) dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_2^4 (x^2 - 3x + 2) dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^4 = \frac{19}{2}$$

• $I_2 = \int_0^3 |(2^x - 4)(x - 1)| dx$

Đặt $f(x) = (2^x - 4)(x - 1)$ ta có bảng xét dấu:

x	0	1	2	3
$f(x)$		+	-	+

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^1 (2^x - 4)(x - 1) dx - \int_1^2 (2^x - 4)(x - 1) dx + \int_2^3 (2^x - 4)(x - 1) dx$$

Xét, $J = \int (2^x - 4)(x - 1) dx = \int 2^x (x - 1) dx - 4 \int (x - 1) dx$

$$= \frac{1}{\ln 2} \int (x - 1) d(2^x) - 2x^2 + 4x = \frac{1}{\ln 2} (x - 1) 2^x - \frac{1}{\ln 2} \int 2^x dx - 2x^2 + 4x$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (x - 1) 2^x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - 2x^2 + 4x + C$$

$$\Rightarrow I_2 = \left[\frac{1}{\ln 2} (x - 1) 2^x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - 2x^2 + 4x \right] \Big|_0^1 - \left[\frac{1}{\ln 2} (x - 1) 2^x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - 2x^2 + 4x \right] \Big|_1^2 + \left[\frac{1}{\ln 2} (x - 1) 2^x - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - 2x^2 + 4x \right] \Big|_2^3$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{9}{\ln 2} - \frac{3}{(\ln 2)^2} - 2$$

Ví Dụ 2.5.1.2. Tính tích phân sau

$$I = \int_0^1 x|x-a|dx \quad (a > 0) \quad (\text{ĐHYD.HCM.96})$$

Ta xét các trường hợp sau:

$$\text{Nếu } a \geq 1 \Rightarrow I = -\int_0^1 x(x-a)dx = -\int_0^1 (x^2 - ax)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\bigg|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\text{Nếu } 0 < a < 1 \Rightarrow I = -\int_0^a x(x-a)dx + \int_a^1 x(x-a)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\bigg|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\bigg|_a^1$$

$$\Rightarrow I = -\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{1}{6}$$

2.5.2. Bất đẳng thức tích phân

Giả sử $f(x); g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a; b]$. Khi đó:

i. Để chứng minh $A \leq \int_a^b h(x)dx \leq B$ ta cần xác định $f(x); g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a; b]$ sao cho.

$$\begin{cases} f(x) \leq h(x) \leq g(x) & \forall x \in [a; b] \\ \int_a^b f(x)dx = A; \int_a^b g(x)dx = B \end{cases}$$

$$\text{Hoặc là ta đi tìm } \begin{cases} m = \min_{[a; b]} h(x) \\ M = \max_{[a; b]} h(x) \end{cases} \Rightarrow A = \int_a^b m dx \leq \int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b M dx = B$$

ii. Để chứng minh $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ ta chứng minh $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a; b]$, sau đó lấy tích phân hai vế.

Do bất đẳng thức là dạng toán phức tạp với nhiều kỹ thuật, ở đây chúng ta chỉ minh họa vài ví dụ đơn giản.

Ví Dụ 2.5.2.1. Chứng minh rằng: $\frac{\pi}{16} < \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^3 x} < \frac{\pi}{10}$

Xét $f(x) = \frac{1}{5+3\cos^3 x}$ liên tục trên $[0; \frac{\pi}{2}]$

Vì $0 \leq \cos x \leq 1 \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 0 \leq \cos^3 x \leq 1 \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{5+3\cos^3 x} \leq \frac{1}{5} \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Suy ra, $\frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} dx < \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^3 x} < \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} dx \Leftrightarrow \frac{\pi}{16} < \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^3 x} < \frac{\pi}{10}$ (đpcm).

Ví Dụ 2.5.2.2. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{x} < \frac{1}{2}$

Xét $f(x) = \frac{\sin x}{x} \forall x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$. Ta có $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. Đặt

$g(x) = x \cos x - \sin x \Rightarrow g'(x) = -x \sin x < 0 \forall x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$,

do đó $g(x) = x \cos x - \sin x$ nghịch biến $\forall x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}] \Rightarrow g(x) < g(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi\sqrt{3}-6}{12} < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ nên $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nghịch biến $\forall x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}] \Rightarrow f(\frac{\pi}{3}) < f(x) < f(\frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} < \frac{\sin x}{x} < \frac{3}{\pi} \Rightarrow \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{x} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3}{\pi} dx \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{x} < \frac{1}{2}$ (đpcm).

Ví Dụ 2.5.2.3. Chứng minh rằng: $\ln 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \frac{\pi}{4}$

Ta có, $0 \leq x \leq 1$ nên $x \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq x\sqrt{x} \leq x \Leftrightarrow 1+x^2 \leq 1+x\sqrt{x} \leq 1+x$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Vậy $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \Leftrightarrow \ln 2 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \frac{\pi}{4}$ (đpcm).

Một số bài luyện tập:

Bài 1: Tính các tích phân sau.

$$\begin{array}{lll}
 1) I = \int_2^5 \frac{x+11}{|x^2+5x-6|} dx & 2) I = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx & 3) I = \int_0^3 |2^x - 4| dx \\
 4) I = \int_{-1}^1 \sqrt{4-|x|} dx & 5) I = \int_0^\pi \sqrt{1-\sin 2x} dx & 6) I = I = \int_0^\pi \sqrt{2+2\cos 2x} dx \\
 7) I = \int_{-1}^3 |x| e^{|x^2-4|} dx & 8) I = \int_0^{1/2} \left| e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right| dx & 9) I = \int_1^{\sqrt{3}} |x^2 - (a+1)x + a| dx
 \end{array}$$

Bài 2: Chứng minh rằng $\int_0^\pi e^{\sin^2 x} dx > \frac{3\pi}{2}$

Bài 3: Chứng minh rằng $0 < \int_0^\pi x \sqrt{\tan x} dx < \frac{\pi^2}{32}$

Bài 4: Chứng minh $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} < \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

Bài 5: Chứng minh $\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}} dx > \frac{\pi+4}{4}$

Chương 3. Ứng dụng của tích phân hàm một biến

3.1. Diện tích hình phẳng xác định bởi đường cong $y = f(x)$

3.1.1. Diện tích hình thang cong giới hạn bởi:

$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \quad (a < b) \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \int_a^b |f(x)| dx} \quad (1)$$

Khi vào bài toán cụ thể, ta cần tìm đủ 4 đường trên và thực hiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối theo phương pháp đồ thị hoặc phương pháp đại số.

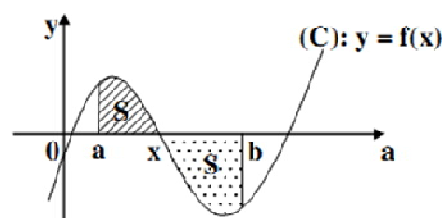
Phương pháp đồ thị: Vẽ đồ thị $(C): y = f(x) \forall x \in [a; b]$, có các trường hợp sau.

i. Đồ thị nằm trên trục hoành ($f(x) \geq 0$) $\Rightarrow (1) \Leftrightarrow S = \int_a^b f(x) dx$

ii. Đồ thị nằm dưới trục hoành ($f(x) \leq 0$) $\Rightarrow (1) \Leftrightarrow S = -\int_a^b f(x) dx$

iii. Đồ thị $(C) \cap Ox = x_0 \in [a; b]$ (Hình vẽ)

$$(1) \Leftrightarrow S = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$



Phương pháp đại số:

Giải phương trình $f(x) = 0$ (*). Tìm nghiệm $x_0 \in [a; b]$, lập bảng xét dấu.

Với bảng.

x	a	x_0	b
f(x)	+	0	-

$$\Rightarrow S = \int_a^{x_0} f(x) dx - \int_{x_0}^b f(x) dx$$

Chú ý:

Diện tích $S \geq 0$.

Với câu hỏi “Tính diện tích giới hạn bởi (C): $y = f(x)$ và trục hoành”. Thì ta phải đi tìm thêm hai đường $x = a; x = b$ làm hai cận của tích phân (1). $x = a; x = b$ chính là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Đối với một số hàm có tính chất đối xứng như: parabol, đường tròn, elip...Ta nên sử dụng tính chất đối xứng của hàm để tính một phần S , sau đó suy ra diện tích cần tìm.

Nên dùng phương pháp đồ thị để tìm S sẽ hiệu quả hơn so với việc sử dụng phương pháp đại số. Trừ khi đồ thị của $y = f(x)$ khá khó vẽ đồ thị, thì ta mới sử dụng phương pháp đại số.

$$\text{Nếu } f(x) \text{ không đổi dấu trên } [a; b] \text{ thì } S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Ví dụ 3.1.1.1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x\sqrt{1+x^2}$, trục Ox và đường $x = 1$.

Ta có, (C): $y = x\sqrt{1+x^2}$ giao với Ox tại hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $x\sqrt{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Do } x\sqrt{1+x^2} \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1] \text{ nên } S &= \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1+x^2)^{1/2} d(1+x^2) = \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3} (\text{đvdt}). \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.1.2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$, và đường $x = 1; x = e$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } y = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} > 0 \quad \forall x \in [1; e] \Rightarrow S &= \left| \int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx \right| \\ \Leftrightarrow S &= \left| \int_1^e \sqrt{1+\ln x} \left(\frac{dx}{x} \right) \right| = \left| \int_1^e (1+\ln x)^{1/2} d(\ln x) \right| = \left| \frac{2}{3} (1+\ln x)^{3/2} \Big|_1^e \right| = \frac{2}{3} (2\sqrt{2}-1) (\text{đvdt}). \end{aligned}$$

3.1.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi.

$$\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \\ x = a \\ x = b \quad (a < b) \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx} \quad (2)$$

Công thức khai triển.

i. Nếu $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a; b] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$

ii. Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; b] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow S = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$

iii. Mỗi $x_0 \in [a; b] \Rightarrow (2) \Leftrightarrow S = \int_a^{x_0} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_0}^b |f(x) - g(x)| dx$

Phương pháp giải.

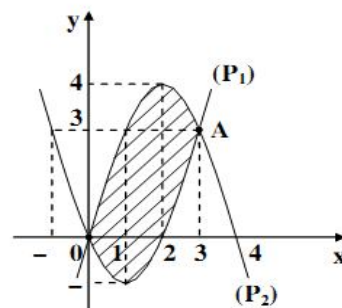
Ta sử dụng phương pháp đồ thị hoặc phương pháp đại số để bỏ dấu trị tuyệt đối của (2).

Ví dụ 3.1.2.1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$(P_1): y = x^2 - 2x \text{ và } (P_2): y = -x^2 + 4x.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$



Qua đồ thị ta có,

$$S = \int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)] dx \Rightarrow S = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left(\frac{-2x^3}{3} + 3x^2 \right) \Big|_0^3 = 9(\text{đvdt}).$$

Ví dụ 3.1.2.2. Parabol $y^2 = 2x (P)$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường tròn: $x^2 + y^2 = 8 (C)$ thành hai phần, tính diện tích mỗi phần.

Hoành độ giao điểm của (P) và đường tròn là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 < 0 \text{ (L)} \\ x = 2 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$$

Gọi tọa độ giao điểm lần lượt là: B (2;2) và C (2;-2).

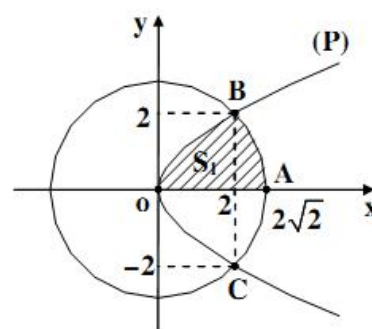
$$\text{Khi đó, } S_{AOB} = \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2} \Big|_0^2 + I = \frac{8}{3} + I.$$

$$\text{Đặt } x = 2\sqrt{2} \sin t \Rightarrow \begin{cases} dx = 2\sqrt{2} \cos t \\ x = 2 \rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = 2\sqrt{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sqrt{2} \cos t \sqrt{8-8\sin^2 t} dt = 8 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

$$= 4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 4 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \pi - 2$$

$$\Rightarrow S_{AOB} = \frac{8}{3} + \pi - 2 = \pi + \frac{2}{3}$$



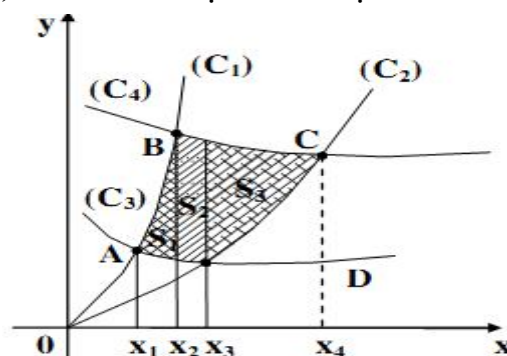
Do tính đối xứng nên $S_{AOBC} = 2S_{AOB} = 2\pi + \frac{4}{3}$ (đvdt). Suy ra phần diện tích

còn lại là: $S = \pi R^2 - S_{AOBC} = 8\pi - 2\pi + \frac{4}{3} = 6\pi - \frac{4}{3}$ (đvdt).

3.1.3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi nhiều đường cong.

Giả sử có 4 đường cong $(C_1); (C_2); (C_3); (C_4)$ có đồ thị như hình vẽ. Để xác định diện tích hình phẳng giới hạn bởi chúng, cần vẽ đồ thị và xác định hoành độ giao điểm chung $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ giữa chúng.

Khi đó $S = S_1 + S_2 + S_3$



$$\Leftrightarrow S = \int_{x_1}^{x_2} (C_1 - C_3) dx + \int_{x_2}^{x_3} (C_4 - C_3) dx + \int_{x_3}^{x_4} (C_4 - C_2) dx$$

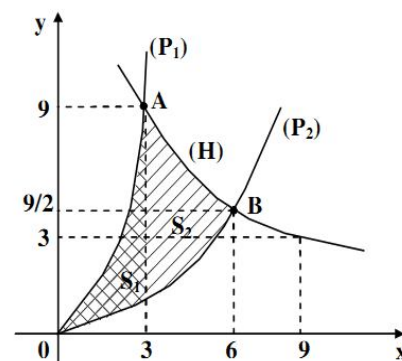
Ví dụ 3.1.3.1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

cong $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{8}$; $y = \frac{27}{x}$.

Giải:

Xét đồ thị của $(P_1): y = x^2$; $(P_2): y = \frac{x^2}{8}$; $(H): y = \frac{27}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (H) là $x^2 = \frac{27}{x} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3; 9)$.



Phương trình hoành độ giao điểm của (P_2) và (H) là:

$$\frac{x^2}{8} = \frac{27}{x} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow B(6; \frac{9}{2})$$

Diện tích miền giới hạn cần tìm là:

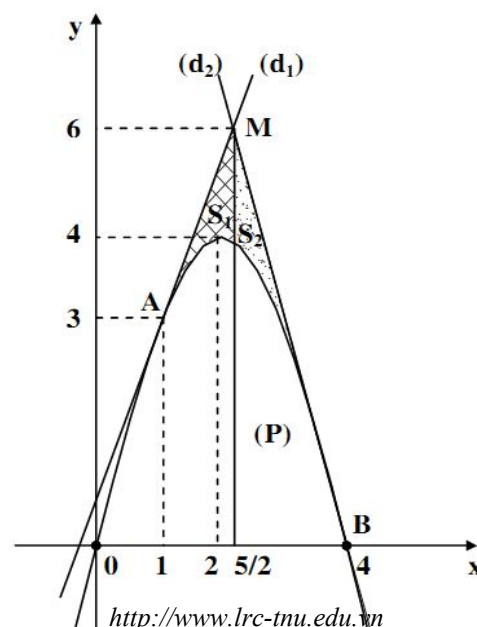
$$S = S_1 + S_2 = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_3^6 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \frac{7x^3}{24} \Big|_0^3 + \left(27 \ln x - \frac{x^3}{24} \right) \Big|_3^6$$

$$\Rightarrow S = 27 \ln 2 \text{ (đvdt)}.$$

Ví dụ 3.1.3.2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong

$(P): y = 4x - x^2$ và tiếp tuyến của (P) , biết tiếp tuyến đi qua $M(\frac{5}{2}; 6)$.

Giả sử $(d): y = k(x - \frac{5}{2}) + 6$ là tiếp tuyến của (P) . Ta có hệ:



$$\begin{cases} 4x - x^2 = k(x - \frac{5}{2}) + 6 \\ k = 4 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow k = 1 \\ x = 4 \Rightarrow k = -4 \end{cases}$$

Suy ra tiếp tuyến của (P) là: $(d_1): y = 2x + 1; (d_2): y = -4x + 16$

$$\text{Do đó, } S = \int_1^{\frac{5}{2}} (2x + 1 - 4x + x^2) dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (-4x + 16 - 4x + x^2) dx$$

$$\Rightarrow S = \frac{(x-1)^2}{3} \Big|_1^{\frac{5}{2}} + \frac{(x-4)^2}{3} \Big|_{\frac{5}{2}}^4 = \frac{9}{4} \text{ (đvdt).}$$

Một số bài luyện tập:

Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P): $y = x^2 - 4x + 3$ và Ox .

Bài 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P): $y = x^2 - 4x + 3$ và
(d): $y = x - 1; x = 2; x = 4$.

Bài 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2 - 2x + 2$;

$$y = x^2 + 4x + 5; y = x^2 - 4x + 3 \text{ và } y = 1.$$

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $x + y + 1 = 0; y^3 = x + 1$.

Bài 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = xe^x$ và $y = 0; x = -1; x = 2$.

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x$ và $y = (x+1)^5; x = 1$.

Bài 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \left| \frac{x^2}{2} + 2x \right|; y = x + 4$.

Bài 8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x + \sin x; y = x; x = 0; x = \pi$.

3.2. Thể tích khối tròn xoay

Khi tìm thể tích của khối tròn xoay, ta cần xác định:

Miền hình phẳng (H) sinh ra: các đường giới hạn của (H).

Nếu (H) xoay quanh trục Ox thì khi đó hàm dưới dấu tích phân là $y = f(x)$, biến là x .

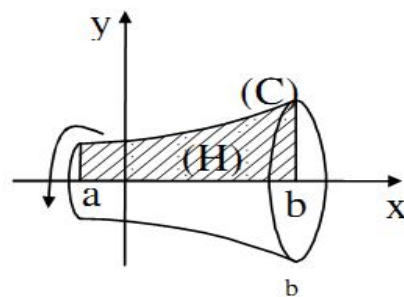
Nếu (H) xoay quanh trục Oy thì khi đó hàm dưới dấu tích phân là $x = f(y)$, biến là y .

3.2.1. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Ox

Bài Toán 1.

$$(C): \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a; x = b \quad (a < b) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



Bài Toán 2.

$$(C): \begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \\ 0 \leq f(x) \leq g(x) \\ x = a; x = b \end{cases} \Rightarrow V = V_x = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)] dx$$

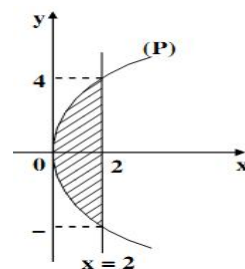
Nếu bài toán chỉ cho $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$, thì ta cần xác định cận tích phân bằng cách giải phương trình $f(x) = g(x) \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$

Ví dụ 3.2.1. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi $P(x): y^2 = 8x$ và $x=2$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox.

Ta có, $P(x): y^2 = 8x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{8x} \quad (x \geq 0)$.

Thể tích của khối xoay khi (H) quay quanh trục Ox là.

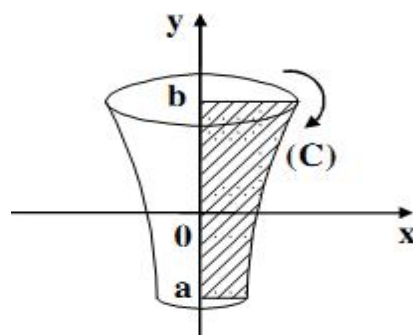
$$V = V_x = \pi \int_0^2 (\sqrt{8x})^2 dx = 8\pi \int_0^2 x dx = 16\pi \text{ (đvtt)}.$$



3.2.2. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi diện tích S quay xung quanh trục Oy .

Bài Toán 1. $(C): \begin{cases} x = f(y) \\ x = 0 \\ y = a; y = b \quad (a < b) \end{cases}$

$$\Rightarrow V = V_y = \pi \int_a^b f^2(y) dy$$



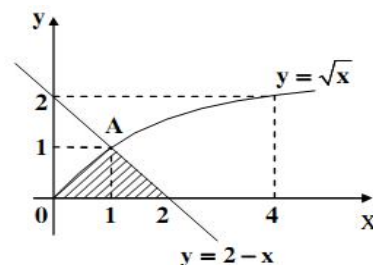
Bài Toán 2.

$$(C): \begin{cases} (C_1): x = f(y) \\ (C_2): x = g(y) \\ 0 \leq f(y) \leq g(y) \\ y = a; y = b \end{cases} \Rightarrow V = V_y = \pi \int_a^b [g^2(y) - f^2(y)] dy$$

Ví dụ 3.2.2.1. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi $(C_1): y = \sqrt{x}$; $(C_2): y = 2 - x$ và $y=0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Oy .

Ta có, $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = f(y) = y^2$ và $y = 2 - x \Leftrightarrow x = g(y) = 2 - y$.

Tọa độ giao điểm $A = (C_1) \cap (C_2)$ là nghiệm, $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1)$



Do đó thể tích khối tròn xoay khi (H) quay quanh trục Oy là.

$$V_y = \pi \int_0^1 \left[(2-y)^2 - y^4 \right] dy = \pi \int_0^1 (4 - 4y^2) dy = \pi \left(4y - \frac{4y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{32\pi}{15} \quad (\text{đvtt}).$$

Ví dụ 3.2.2.2. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi $(P): y = 2x - x^2$ và $(Ox): y = 0$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay (H) quanh:

a) trục Ox .

b) trục Oy .

Ta có:

a) Thể tích của khối tròn xoay khi (H) quanh trục hoành là

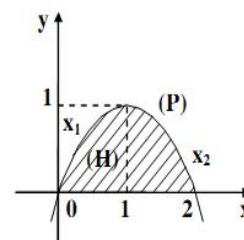
$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15} \quad (\text{đvtt}).$$

b) Ta có, $(P): y = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y = 0 (*)$. Vì $\Delta' = 1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0; 1]$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{1-y} \\ x_2 = 1 + \sqrt{1-y} \end{cases} \quad (x_1, x_2 \in [0; 1]).$$

Thể tích của khối tròn xoay khi (H) quanh trục tung là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (x_2^2 - x_1^2) dy = \pi \int_0^1 (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) dy = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-y} dy \\ &= -\frac{8\pi}{3} (1-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3} \quad (\text{đvtt}). \end{aligned}$$



Một số bài luyện tập:

1) Tính V_{Ox} biết: $D = \{y = x \ln x, y = 0, x = 1, x = e\}$ (ĐHXDHN.97)

2) Cho D là miền giới hạn bởi đồ thị $y = tg^2 x; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{4}$

a) Tính diện tích miền phẳng D

b) Cho D quay quanh Ox , tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành.

(CĐSP.BTre.A. 2002)

- 3) Tính V_{Ox} biết: $D = \left\{ y = \frac{x^3}{3}, y = x^2 \right\}$ (ĐH.HH.99)
- 4) Tính V_{Ox} biết: $D = \{ y = 2x^2; y = 2x + 4 \}$ (ĐH.Luật 96)
- 5) Tính V_{Ox} biết: $D = \{ y = x^2 - 4x + 6; y = -x^2 - 2x + 6 \}$ (ĐHQGHN .99B)
- 6) Tính V_{Ox} biết: $D = \{ y = x^2; y = \sqrt{x} \}$ (ĐH.NN1 HN .98)
- 7) Tính V_{Ox} biết: $D = \{ y = x\sqrt{\ln(1+x^2)}; y = 0; x = 1 \}$ (HV.NH. TPHCM .99)
- 8) Tính V_{Oy} biết: $D = \left\{ y = e^x; y = \frac{1}{e}; y = 0; x = 0 \right\}$ (CĐ.CN.HN .03)

KẾT LUẬN

Trong luận văn này chúng tôi đã hoàn thành được những việc sau.

Trình bày được khái quát về phép tính tích phân hàm một biến. Và phân nào phân dạng phép tích tích phân hàm một biến với khoảng trên 80 dạng toán, với lượng bài tập được lấy ra từ các bộ đề và trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng.

Trong những năm gần đây, các bài toán tích phân luôn là vấn đề khó tiếp cận của các em học sinh phổ thông. Chúng tôi thực hiện đề tài này với mục đích là có thêm một tài liệu bổ ích giúp các em học sinh tiếp cận dễ dàng hơn với các bài toán tích phân trong các kỳ thi tuyển sinh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. A.K. SHARMA. *Text book of innegral calculus*. Discovery Publishing house New Delhi – 110002. 2005
- [2]. Mir publishers Moscow. 1981. *ACourse of Mathematical analysis*
- [3]. Nguyễn Đình Trí. *Toán cao cấp – Tập II*. Nhà xuất bản Đại học và trung học chuyên nghiệp – 1985.