

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Cao Thị Kim Anh

PHÂN THỨC HỮU TỶ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2011

Mục lục

Mở đầu	2
1 Phân thức hữu tỷ và các bài toán liên quan	4
1.1 Phân thức hữu tỷ và các tính chất liên quan	4
1.1.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản	4
1.1.2 Phân tích phân thức hữu tỷ thành nhân tử	7
1.1.3 Một số tính toán trên phân thức hữu tỷ	9
1.1.4 Một số lớp phương trình với hàm phân thức hữu tỷ . .	13
1.1.5 Phương trình hàm trong lớp hàm phân thức hữu tỷ . .	21
1.2 Một số thuật toán tìm nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỷ	24
1.2.1 Phương pháp Ostrogradski	25
1.2.2 Áp dụng công thức nội suy Lagrange	28
1.2.3 Áp dụng công thức nội suy Hermite	30
1.2.4 Phương pháp Horowitz	37
2 Phân thức hữu tỷ với hệ số nguyên và phân thức nhận giá trị hữu tỷ	42
2.1 Hàm phân thức chính quy hữu tỷ	42
2.1.1 Hàm phân thức chính quy hữu tỷ một biến	42
2.1.2 Hàm phân thức chính quy hữu tỷ nhiều biến	43
2.2 Tính chất của hàm phân thức nhận giá trị hữu tỷ	46
2.3 Dãy số sinh bởi hàm phân thức hữu tỷ	52
3 Bất đẳng thức với các hàm phân thức hữu tỷ	57
3.1 Phương pháp bất đẳng thức Cauchy đối với hàm phân thức hữu tỷ	57
3.2 Kỹ thuật cộng mẫu số Engel của bất đẳng thức Chebyshev .	65
3.2.1 Bất đẳng thức Chebyshev và Chebyshev dạng Engel .	65
3.2.2 Phương pháp cộng mẫu số Engel	69
3.3 Dạng phân thức của các đa thức đối xứng cơ bản	76
Kết luận	82
Tài liệu tham khảo	84

Mở đầu

Phân thức hữu tỷ là một trong những khái niệm cơ bản của chương trình Toán ở bậc học phổ thông. Đặc biệt, ở các trường THPT chuyên và các lớp chuyên toán có rất nhiều dạng toán liên quan đến hàm phân thức. Trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán trong nước và các kỳ thi Olympic Toán của các nước trên thế giới, có nhiều bài toán về dãy số, bất đẳng thức, phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình ... sinh bởi các hàm số dạng phân thức và vì thế cần biết cách giải vận dụng tính đặc thù của biểu thức phân thức đã cho. Hiện nay các tài liệu có tính hệ thống về vấn đề này còn chưa được đề cập nhiều.

Để đáp ứng nhu cầu học tập và giảng dạy môn toán ở bậc phổ thông, luận văn *Phân thức hữu tỷ và các bài toán liên quan* nhằm hệ thống và giải quyết các bài toán liên quan đến phân thức hữu tỷ. Luận văn được chia ra làm ba chương.

Chương 1 xét các phân thức hữu tỷ và các bài toán liên quan.

Chương này nêu lên một số kiến thức cơ bản về phân thức hữu tỷ và các tính chất cơ bản của nó, tập trung chủ yếu vào việc phân tích phân thức hữu tỷ thành phân thức đơn giản và giới thiệu một số phương pháp đặc biệt sử dụng công thức nội suy để xây dựng thuật toán tìm nguyên hàm của hàm hữu tỷ như phương pháp Ostrogradski, áp dụng công thức nội suy Lagrange, áp dụng công thức nội suy Hermite, và phương pháp Horowitz. Ngoài việc giới thiệu các thuật toán, trong từng mục đều có xây dựng các ví dụ minh họa và phân tích chi tiết các lược đồ giải.

Trong chương này cũng xét một số tính toán trên các phân thức hữu tỷ và khảo sát một số lớp phương trình với hàm phân thức hữu tỷ.

Chương 2 khảo sát các phân thức hữu tỷ với hệ số nguyên và phân thức nhận giá trị hữu tỷ.

Xét lớp các hàm phân thức hữu tỷ đặc biệt, đó là lớp hàm phân thức chính quy hữu tỷ. Chứng minh định lý cơ bản về giá trị nhỏ nhất của hàm

phân thức chính quy hữu tỷ một biến, hai biến và nhiều biến trên tập các số dương.

Tiếp theo, xét tính chất của hàm phân thức nhận giá trị hữu tỷ. Tương tự như đối với số hữu tỷ, ta cũng chứng minh được rằng mọi phân thức hữu tỷ nhận giá trị hữu tỷ trên tập các số tự nhiên đều có dạng phân thức hữu tỷ với hệ số nguyên.

Mục cuối của Chương 2 nhằm khảo sát một số lớp bài toán về dãy số sinh bởi một số hàm phân thức hữu tỷ.

Chương 3 nhằm khảo sát một số dạng bất đẳng thức với hàm phân thức hữu tỷ.

Trước hết xét các kỹ thuật cơ bản về sử dụng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh các bất đẳng thức dạng phân thức.

Tiếp theo, dựa vào sắp thứ tự của dãy số để vận dụng kỹ thuật cộng mẫu số Engel của bất đẳng thức Chebyshev để chứng minh một số dạng bất đẳng thức có dạng phân thức đặc biệt.

Phần cuối của chương là xét một số dạng phân thức của các đa thức đối xứng cơ bản. Đây là những dạng bất đẳng thức loại khó cần sự phối kết hợp cách chứng minh quy nạp với các biểu diễn tương ứng.

Để hoàn thành luận văn này, trước nhất tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã dành thời gian hướng dẫn, chỉ bảo tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình xây dựng đề tài cũng như hoàn thiện luận văn.

Tiếp theo, tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành các thầy cô đã đọc, kiểm tra, đánh giá và cho những ý kiến quý báu để luận văn được đầy đủ hơn, phong phú hơn. Qua đây, tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu, phòng sau Đại học, phòng Đào tạo, khoa Toán - Tin Trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian, trình độ và điều kiện nghiên cứu còn hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái nguyên, Tháng 07 năm 2011

Cao Thị Kim Anh

Chương 1

Phân thức hữu tỷ và các bài toán liên quan

1.1 Phân thức hữu tỷ và các tính chất liên quan

1.1.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Định nghĩa 1.1 (xem [4]). Đa thức bậc n với các hệ số thực là hàm số cho bởi công thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

với $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$ và $a_n \neq 0$.

Định nghĩa 1.2 (xem [4]). Hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là phân thức hữu tỷ nếu tồn tại các đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ sao cho

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \quad (1.1)$$

Khi $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức nguyên tố cùng nhau (không có ước chung) thì (1.1) được gọi là phân thức hữu tỷ chính tắc.

Về sau, nhằm mục tiêu giải quyết các bài toán bậc THPT, ta chỉ xét đa thức và phân thức trên trường số thực (biến thực và với hệ số thực). Những trường hợp đặc biệt cần sử dụng số phức sẽ được chú dẫn riêng.

Những phân thức hữu tỷ dạng $\frac{b}{(x-a)^n}$ hay $\frac{q(x)}{[p(x)]^n}$ với $n \geq 1$ được gọi là những phân thức đơn giản.

Bây giờ ta xét biểu diễn mỗi phân thức hữu tỷ thông qua các phân thức hữu tỷ đơn giản (các biểu diễn kèm theo thuật toán cụ thể dùng cho việc

tính các nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỷ sẽ được trình bày trong các mục sau của chương).

Định lý 1.1 (xem [4]). Nếu hai đa thức $g(x), h(x)$ nguyên tố cùng nhau với $\deg g(x) = m$ và $\deg h(x) = n$ thì đa thức bất kỳ $f(x)$ với $\deg f(x) < m + n$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng $f(x) = r(x)g(x) + s(x)h(x)$, $\deg r(x) < n$ và $\deg s(x) < m$.

Chứng minh. Vì $g(x)$ và $h(x)$ nguyên tố cùng nhau, nên tồn tại các đa thức $a(x), b(x)$ sao cho đồng nhất thức $1 = a(x)g(x) + b(x)h(x)$ được thỏa mãn.

Nhân hai vế của hệ thức này với $f(x)$ ta nhận được

$$f(x) = f(x)a(x)g(x) + f(x)b(x)h(x).$$

Thực hiện phép chia $f(x)a(x)$ cho $q(x)h(x)$, ta thu được biểu diễn $f(x)a(x) = q(x)h(x) + r(x)$ với $\deg r(x) < n$. Khi đó

$$f(x) = f(x)a(x)g(x) + f(x)b(x)h(x) = r(x)g(x) + [q(x)g(x) + f(x)b(x)]h(x).$$

Đặt $s(x) = q(x)g(x) + f(x)b(x)$. Khi đó $f(x) = r(x)g(x) + s(x)h(x)$. Vì $\deg f(x) < m + n$ và $\deg r(x)g(x) < m + n$ nên $\deg s(x) < m$ (đpcm).

Bổ đề 1.1. Giả sử hai đa thức $g(x), h(x)$ nguyên tố cùng nhau và đa thức $f(x)$ với $\deg f(x) < \deg g(x) + \deg h(x)$. Khi đó ta có biểu diễn sau:

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{r(x)}{h(x)} + \frac{s(x)}{g(x)},$$

trong đó $\deg r(x) < \deg h(x)$ và $\deg s(x) < \deg g(x)$.

Chứng minh. Theo định lý 1.1, thì $f(x) = r(x)g(x) + s(x)h(x)$ với $\deg r(x) < \deg h(x)$ và $\deg s(x) < \deg g(x)$. Chia hai vế hệ thức này cho $g(x)h(x)$, ta nhận được

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{r(x)}{h(x)} + \frac{s(x)}{g(x)}.$$

Định lý 1.2. Mỗi phân thức hữu tỷ $\frac{f(x)}{g(x)}$ với $\deg f(x) < \deg g(x)$ đều phân tích được thành tổng các phân thức hữu tỷ đơn giản.

Chứng minh. Ta bắt đầu bằng việc xét các phân thức đơn giản dạng $\frac{r(x)}{[p(x)]^m}$ với $\deg r(x) < \deg p(x)$. Sử dụng phép chia đa thức, ta có biểu diễn

$$\begin{aligned} r(x) &= s_1(x)[p(x)]^{m-1} + r_1(x), \\ r_1(x) &= s_2(x)[p(x)]^{m-2} + r_2(x), \\ &\dots\dots\dots \\ r_{m-2}(x) &= s_{m-1}(x)p(x) + r_{m-1}(x). \end{aligned}$$

Khi đó

$$\frac{r(x)}{[p(x)]^m} = \frac{s_1(x)}{p(x)} + \frac{s_2(x)}{[p(x)]^2} + \dots + \frac{s_m(x)}{[p(x)]^m}.$$

Trong trường hợp đặc biệt, khi $p(x) = (x - a)$, ta có biểu diễn

$$\frac{r(x)}{(x - a)^m} = \frac{b_1}{(x - a)} + \frac{b_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{b_m}{(x - a)^m}.$$

Tiếp theo, ta xét trường hợp phân thức có dạng $\frac{r(x)}{(x - a)^m p(x)}$ với $p(a) \neq 0$.

Biểu diễn phân thức thành dạng

$$\frac{r(x)}{(x - a)^m p(x)} = \frac{b}{(x - a)^m} + \frac{q(x)}{(x - a)^{m-1} p(x)}.$$

Quy đồng các phân thức, ta được đồng nhất thức

$$r(x) = bp(x) + (x - a)q(x).$$

Cho $x = a$, ta có $b = \frac{r(a)}{p(a)}$ và $q(x) = \frac{r(x) - bp(x)}{x - a}$.

Trong trường hợp tổng quát, giả sử ta có phân tích

$$g(x) = (x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_s)^{n_s} p_1(x)^{m_1} \dots p_r(x)^{m_r},$$

trong đó các $p_i(x)$ là những đa thức bất khả quy với bậc lớn hơn 1.

Theo các kết quả đã nhận được ở trên, ta có biểu diễn

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{b_{1i}}{(x - a_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{n_s} \frac{b_{si}}{(x - a_s)^i} + \sum_{i=1}^{m_1} \frac{s_{1i}(x)}{[p_1(x)]^i} + \dots + \sum_{i=1}^{m_r} \frac{s_{ri}(x)}{[p_r(x)]^i}.$$

Như vậy $\frac{f(x)}{g(x)}$ phân tích được thành tổng các phân thức đơn giản (đpcm).

Hệ quả 1.1. Mỗi phân thức hữu tỷ $\frac{f(x)}{g(x)}$ đều phân tích được thành tổng của một đa thức và các phân thức hữu tỷ đơn giản.

Chứng minh. Nếu $\deg f(x) < \deg g(x)$ thì ta có ngay kết quả chứng minh (Định lý 1.2).

Nếu $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ thì ta biểu diễn $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ với $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Khi đó $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ và kết quả cần chứng minh được suy ra từ Định lý 1.2.

Với mỗi đa thức $g(x)$ bất khả quy trong $\mathbb{R}[x]$ (trên trường số thực) chứa biểu thức dạng $x^2 + bx + c$ với $\Delta = b^2 - 4c < 0$, thì $g(x)$ viết được thành dạng

$$g(x) = \prod_{i=1}^s (x - a_i)^{n_i} \prod_{i=1}^r (x^2 + b_i x + c_i)^{m_i}.$$

Từ đó ta có hệ quả sau

Hệ quả 1.2. Mỗi phân thức hữu tỷ $\frac{f(x)}{g(x)}$ đều biểu diễn được dưới dạng

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} \frac{b_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x^2 + b_j x + c_j)^j},$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức.

1.1.2 Phân tích phân thức hữu tỷ thành nhân tử

Ta đã biết rằng đối với mỗi đa thức đại số $P(x)$, khi $x = x_0$ là một nghiệm của nó thì đa thức $P(x)$ chia hết cho $x - x_0$, tức là

$$P(x) = (x - x_0)P_1(x), \quad \deg P_1(x) = \deg P(x) - 1.$$

Tương tự như đối với đa thức, ta cũng có kết quả sau đây đối với phân thức hữu tỷ.

Định lý 1.3 (Định lý về phân tích thành nhân tử đối với hàm phân thức).

Xét phân thức hữu tỷ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ với $(p(x), q(x)) = 1$. Với mỗi x_0 sao cho

$f(x_0)$ có nghĩa, ta luôn có biểu diễn

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \frac{h(x)}{q(x)},$$

trong đó $h(x)$ là đa thức và $\deg h(x) \leq \deg p(x) - 1$.

Chứng minh. Với phép chia đa thức, ta có thể biểu diễn

$$p(x) = (x - x_0)p_1(x) + r$$

và

$$q(x) = (x - x_0)q_1(x) + s,$$

trong đó $p_1(x), q_1(x)$ là các đa thức và r, s là các hằng số (Định lý 1.1). Vậy nên

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \frac{p(x)q(x_0) - p(x_0)q(x)}{q(x)q(x_0)} \\ &= \frac{[(x - x_0)p_1(x) + p(x_0)]q(x_0) - p(x_0)[(x - x_0)q_1(x) + q(x_0)]}{q(x)q(x_0)} \\ &= (x - x_0) \left[\frac{p_1(x)}{q(x)} - \frac{p(x_0)}{q(x_0)} \frac{q_1(x)}{q(x)} \right] = (x - x_0) \frac{p_1(x) - f(x_0)q_1(x)}{q(x)}. \end{aligned}$$

Do vậy, ta có biểu diễn $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \frac{h(x)}{q(x)}$.

Trường hợp đặc biệt khi $q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ và có biểu diễn

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x - x_k} = \sum_{k=1}^n \frac{p(x_k)}{q'(x_k)(x - x_k)},$$

ở đây $x_i \neq x_j$ với $i \neq j$ và $\deg p(x) < n$, thì với

$$h(x) = (x - x_1)f(x) = a_1 + \sum_{k=2}^n \frac{p(x_k)}{q'(x_k)(x - x_k)},$$

ta luôn có

$$h(x) - h(\alpha) = (x - \alpha) \sum_{k=2}^n \frac{p(x_k)(x_1 - x_k)}{q'(x_k)(\alpha - x_k)(x - x_k)}, \alpha \neq x_k.$$

1.1.3 Một số tính toán trên phân thức hữu tỷ

Ví dụ 1.1. Ta luôn có

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{a^{k+1}} + \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)}, \quad \forall a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Theo Định lý 1.3 với phân thức $f(x) = \frac{1}{a-x}$, $x_0 = 0$, ta có

$$\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} = \frac{x}{a} \frac{1}{a-x}$$

Lặp lại sau n lần ta thu được

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{a^{k+1}} + \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a-x)}.$$

Ví dụ 1.2. Giả sử cho bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Khi đó

- (i) $\frac{a_1 - a_2}{(a_1 + a)(a_2 + a)} + \dots + \frac{a_{n-1} - a_n}{(a_{n-1} + a)(a_n + a)} + \frac{a_n - a_1}{(a_n + a)(a_1 + a)} = 0$,
- (ii) Với hàm phân thức $f(x, u) = \frac{1}{u+a} \frac{x-u}{x+a}$ và coi $a_{n+1} = a_1$, ta luôn

có đồng nhất thức

$$\prod_{k=1}^n (f(x, a_k) - f(a_{k+1}, a_k)) = \prod_{k=1}^n f(x, a_k).$$

Giải.

- (i) Dễ dàng kiểm tra đồng nhất thức

$$\frac{x-a_1}{x+a} - \frac{a_2-a_1}{a_2+a} = \frac{a_1+a}{a_2+a} \frac{x-a_2}{x+a}.$$

Như vậy, ta luôn có các hệ thức dưới đây:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1+a} \frac{x-a_1}{x+a} - \frac{a_2-a_1}{(a_1+a)(a_2+a)} &= \frac{1}{a_2+a} \frac{x-a_2}{x+a} \\ \frac{1}{a_2+a} \frac{x-a_2}{x+a} - \frac{a_3-a_2}{(a_2+a)(a_3+a)} &= \frac{1}{a_3+a} \frac{x-a_3}{x+a} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{a_{n-1}+a} \frac{x-a_{n-1}}{x+a} - \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_{n-1}+a)(a_n+a)} &= \frac{1}{a_n+a} \frac{x-a_n}{x+a} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a_n + a} \frac{x - a_n}{x + a} - \frac{a_1 - a_n}{(a_n + a)(a_1 + a)} = \frac{1}{a_1 + a} \frac{x - a_1}{x + a}.$$

Cộng các vế theo cột dọc, ta thu được đồng nhất thức cần chứng minh.

(ii) Tương tự, nhân các vế theo cột dọc, ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.3. Với mọi đa thức $p(x)$ có $\deg p(x) < n$, ta luôn có

$$\frac{p(x)}{x^n + 1} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{x + \alpha_k}{x - \alpha_k} p(\alpha_k) + \frac{1}{2} p(0),$$

trong đó $\alpha_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Từ đó suy ra các đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{2n} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} = 0$$

và

$$\sum_{k=1}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{2n} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} = n.$$

Giải. Ta có

$$\frac{p(x)}{x^n + 1} = \sum_{k=1}^n \frac{p(\alpha_k)}{n\alpha_k^{n-1}(x - \alpha_k)} = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k p(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Cho $x = 0$, ta có $p(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(\alpha_k)$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{x^n + 1} - \frac{1}{2} p(0) &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{2\alpha_k p(\alpha_k)}{x - \alpha_k} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n p(\alpha_k) \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{x + \alpha_k}{x - \alpha_k} p(\alpha_k). \end{aligned}$$

Do vậy

$$\frac{p(x)}{x^n + 1} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{x + \alpha_k}{x - \alpha_k} p(\alpha_k) + \frac{1}{2} p(0).$$

Khi chọn $p(x) = x$ và $x = 1$, ta có

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{1 + \alpha_k}{1 - \alpha_k} \alpha_k.$$

Dễ dàng biến đổi được

$$\frac{1 + \alpha_k}{1 - \alpha_k} \alpha_k = i \cot \frac{(2k+1)\pi}{2n} \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \right].$$

Vậy nên

$$\sum_{k=1}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{2n} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} = 0$$

và

$$\sum_{k=1}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{2n} \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} = n.$$

Ví dụ 1.4. . Với mọi đa thức $p(x)$ có $\deg p(x) < n$, ta luôn có

$$\frac{p(x)}{x^n - 1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{x + \alpha_k}{x - \alpha_k} p(\alpha_k) - \frac{1}{2} p(0)$$

trong đó $\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Từ đây suy ra

$$\frac{2n}{2^n - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{2 \cos \frac{4k\pi}{n} - \cos \frac{2k\pi}{n}}{5 - 4 \cos \frac{2k\pi}{n}}.$$

Giải. Ta có

$$\frac{p(x)}{x^n - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{p(\alpha_k)}{n \alpha_k^{n-1} (x - \alpha_k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k p(\alpha_k)}{x - \alpha_k}.$$

Cho $x = 0$, ta nhận được $p(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p(\alpha_k)$.

Khi đó, ta có

$$\frac{p(x)}{x^n - 1} + \frac{1}{2} p(0) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{2\alpha_k p(\alpha_k)}{x - \alpha_k} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n p(\alpha_k) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{x + \alpha_k}{x - \alpha_k} p(\alpha_k).$$

Do vậy

$$\frac{p(x)}{x^n - 1} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{x + \alpha_k}{x - \alpha_k} p(\alpha_k) - \frac{1}{2} p(0).$$

Chọn $p(x) = x$ ta thu được

$$\frac{x}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{x - \alpha_k}.$$

Cho $x = 2$, ta nhận được

$$\frac{2}{2^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{2 - \alpha_k}.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{2n}{2^n - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{2 \cos \frac{4k\pi}{n} - \cos \frac{2k\pi}{n}}{5 - 4 \cos \frac{2k\pi}{n}}.$$

Ví dụ 1.5. Với số nguyên dương n và số thực

$x \notin \{-2n, -n, -2n+2, -n+1, \dots, -2, -1, 0\}$, ta luôn có:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{x+k} &= \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}. \\ \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{x+2k} &= \frac{n!2^n}{\prod_{k=0}^n (x+2k)}. \end{aligned}$$

Giải. Từ việc tách các phân thức (theo công thức nội suy Lagrange)

$$\frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{x+k}$$

và

$$\frac{n!2^n}{\prod_{k=0}^n (x+2k)} = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{x+2k},$$

ta suy ra kết quả cần chứng minh.

1.1.4 Một số lớp phương trình với hàm phân thức hữu tỷ

Ví dụ 1.6. Giả sử các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ đôi một khác nhau và $\alpha_i + j \neq 0$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Hãy giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{1 + \alpha_1} + \frac{x_2}{2 + \alpha_1} + \dots + \frac{x_n}{n + \alpha_1} = 1 \\ \frac{x_1}{1 + \alpha_2} + \frac{x_2}{2 + \alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{n + \alpha_2} = 1 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{x_1}{1 + \alpha_n} + \frac{x_2}{2 + \alpha_n} + \dots + \frac{x_n}{n + \alpha_n} = 1 \end{cases}.$$

Giải. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho. Xét hàm số $f(x) = \frac{x_1}{1+x} + \frac{x_2}{2+x} + \dots + \frac{x_n}{n+x} - 1 = \frac{p(x)}{\prod_{i=1}^n (i+x)}$ với đa thức $p(x)$ bậc n .

Vì $f(\alpha_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, nên $p(\alpha_i) = 0$

Do đó

$$f(x) = -\frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)}{(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)}.$$

Từ hệ thức

$$\frac{x_1}{1+x} + \frac{x_2}{2+x} + \dots + \frac{x_n}{n+x} - 1 = -\frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)}{(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)},$$

ta suy ra

$$\begin{aligned} & x_1(x+2)(x+3) \dots (x+n) + x_2(x+1)(x+3) \dots (x+n) \\ & + x_3(x+1)(x+2)(x+4) \dots (x+n) + x_4(x+1)(x+2) \dots (x+n) \\ & + \dots + x_n(x+1)(x+2) \dots (x+n-1) - (x+1)(x+2) \dots (x+n) \\ & = -(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n). \end{aligned}$$

Ta nhận được các nghiệm

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)}{(n-1)!} \text{ với } x = -1 \\ x_2 = \frac{(-1)^{n-2} \prod_{i=1}^n (2 + \alpha_i)}{1!(n-2)!} \text{ ứng với } x = -2 \\ x_3 = \frac{(-1)^{n-3} \prod_{i=1}^n (3 + \alpha_i)}{2!(n-3)!} \text{ ứng với } x = -3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \frac{(-1)^{n-n} \prod_{i=1}^n (n + \alpha_i)}{(n-1)!} \text{ ứng với } x = -n \end{array} \right.$$

và hệ đã được giải xong.

Ví dụ 1.7. Giả sử $\varphi(x) = \prod_{i=1}^n (x + \alpha_i)$. Khi đó

- (i) $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \varphi(i) = (-1)^n n!$.
- (ii) $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i i^n = (-1)^n n!$.
- (iii) $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i C_{n+1}^i = (-1)^n$.

Giải.

- (i) Từ cách giải ở trên ta suy ra đồng nhất thức sau đây:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i} \varphi(i)}{(x+i)(i-1)!(n-i)!} - 1 = -\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Với $x = 0$ ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-1} \varphi(i)}{i!(n-i)!} - 1 = \frac{(-1)^{n+1} \varphi(0)}{n!}$$

hay ta nhận được công thức

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i \varphi(i) = (-1)^n n!.$$

(Chú ý rằng công thức này cũng đúng cho cả trường hợp các α_i có thể bằng nhau).

- (ii) Công thức $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i i^n = (-1)^n n!$. đúng cho mọi α_i nên khi lấy $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, ta thu được $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i i^n = (-1)^n n!$
- (iii) Khi lấy $\alpha_i = i$ ứng với mọi i , ta có $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i C_{n+i}^i = (-1)^n$.

Ví dụ 1.8. Giả sử $\varphi(x) = \prod_{i=1}^n (x + \alpha_i)$. Khi đó

- (i) $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i C_n^i \varphi(i)}{2i-1} = \frac{4n!}{c} + (-1)^n \varphi(0)$.
- (ii) $\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} 2i-1 C_n^i i^n}{2i-1} = \frac{2^n (n!)^2}{2n}$.

Giải. Xuất phát từ đẳng thức

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{x_1}{1+x} + \frac{x_1}{2+x} + \dots + \frac{x_1}{n+x} - \frac{4}{2x+1} \\ &= -\frac{c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}{(2x+1)(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, \end{aligned}$$

ta suy ra (i) khi thay $x_1, x_2, \dots, x_n$ và x bởi x_0 ; còn (ii) được suy ra từ (i).

Ví dụ 1.9. Giả sử các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn hệ phương trình sau

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+r} = \frac{4}{2r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2k+1} < 1.$$

Giải. Xét

$$f(x) = \prod_{k=1}^n (x+k) \left(x + \frac{1}{2} \right) \left[\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x+k} - \frac{2}{x+\frac{1}{2}} \right]$$

là đa thức bậc n của x . Bởi vì $f(r) = 0$ với $r = 1, 2, \dots, n$, nên

$$f(x) = a \prod_{r=1}^n (x - r).$$

Cho $x = -\frac{1}{2}$, ta được

$$a = -2 \prod_{r=1}^n \frac{r - \frac{1}{2}}{-r - \frac{1}{2}}.$$

Như vậy

$$\prod_{k=1}^n (x + k) \left(x + \frac{1}{2} \right) \left[\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k + x} - \frac{2}{x + \frac{1}{2}} \right] = -2 \prod_{r=1}^n \frac{r - \frac{1}{2}}{-r - \frac{1}{2}} \prod_{r=1}^n (x - r).$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k + x} - \frac{2}{x + \frac{1}{2}} = -2 \prod_{k=1}^n \frac{(x - k)(-k + \frac{1}{2})}{(x + k)(k + \frac{1}{2})}.$$

Với $x = \frac{1}{2}$, ta thu được

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2k + 1} - 2 = -\frac{2}{(2n + 1)^2}.$$

Do vậy $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2k + 1} < 1$.

Ví dụ 1.10. Với ba số a, b, c phân biệt và $a, b, c \notin \{0, -1, -2, -3\}$, giả sử các số x, y, z thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{1 + a} + \frac{y}{1 + b} + \frac{z}{1 + c} = 1 \\ \frac{2}{2 + a} + \frac{2}{2 + b} + \frac{2}{2 + c} = 1 \\ \frac{3}{3 + a} + \frac{3}{3 + b} + \frac{3}{3 + c} = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 + \frac{6}{abc}$.

Giải. Xét $f(t) = \frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+t} + \frac{z}{c+t} - 1 = -\frac{p(t)}{(a+t)(b+t)(c+t)}$ với đa thức $p(t)$ bậc 3. Vì $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ nên $p(1) = p(2) = p(3) = 0$ và như vậy

$$\frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+t} + \frac{z}{c+t} - 1 = -\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(a+t)(b+t)(c+t)}.$$

Với $t = 0$, ta được $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 + \frac{6}{abc}$.

Ví dụ 1.11. Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $x^3 + ax + b = 0$ với $a + b \neq -1$. Hãy tính các giá trị

$$D_1 = \frac{1}{(1-x_1)^2} + \frac{1}{(1-x_2)^2} + \frac{1}{(1-x_3)^2}$$

và

$$D_2 = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2.$$

Giải. Vì $x^3 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ nên

$$3x^2 + a = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_3)(x - x_1) + (x - x_2)(x - x_1).$$

Từ đây suy ra

$$D_2 = -(a + 3x_1^2)(a + 3x_2^2)(a + 3x_3^2) = -4a^3 - 27b^2.$$

Ta lại có

$$\frac{1}{(x - x_1)} + \frac{1}{(x - x_2)} + \frac{1}{(x - x_3)} = \frac{3x^2 + a}{x^3 + ax + b}.$$

Vậy nên

$$\frac{1}{(x - x_1)^2} + \frac{1}{(x - x_2)^2} + \frac{1}{(x - x_3)^2} = \frac{3x^4 - 6bx + a^2}{(x^3 + ax + b)^2}.$$

Với $x = 1$ có

$$D_1 = \frac{1}{(1 - x_1)^2} + \frac{1}{(1 - x_2)^2} + \frac{1}{(1 - x_3)^2} = \frac{3 - 6b + a^2}{(1 + a + b)^2}.$$

Ví dụ 1.12. Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $x^3 + ax + b = 0$ với $b \neq a + 1$.

$$\text{Tính } T = \frac{x_1^2}{(x_2 + 1)(x_3 + 1)} + \frac{x_2^2}{(x_3 + 1)(x_1 + 1)} + \frac{x_3^2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}.$$

Giải. Vì $x^3 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ nên

$$\frac{x_1^2}{(x_2 + 1)(x_3 + 1)} = \frac{x_1^2(1 + x_1)}{1 + a - b},$$

$$\frac{x_2^2}{(x_1 + 1)(x_3 + 1)} = \frac{x_2^2(1 + x_2)}{1 + a - b},$$

và

$$\frac{x_3^2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = \frac{x_3^2(1 + x_3)}{1 + a - b},$$

$$\text{suy ra } T = \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{1 + a - b} = \frac{-2a - 3b}{1 + a - b}.$$

Ví dụ 1.13. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 2$$

có ba nghiệm thực phân biệt

Giải. Xét tổng các phân thức

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - 2 = -\frac{2x^3 - 15x^2 + 34x - 23}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Đặt $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 34x - 23$. Vì $g(1) < 0, g(2) > 0, g(3) < 0$ và $g(4) > 0$ nên $g(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt. Do vậy $f(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Ví dụ 1.14. Giả sử $f(x)$ là đa thức bậc $n \geq 2$ có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n$. Khi đó $\forall$ đa thức $g(x)$ bậc $\leq n-1$, ta luôn có

$$(i) \quad \frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{g(x_k)}{f'(x_k)(x - x_k)} \text{ với mọi } x \neq x_k, k = 1, 2, \dots, n,$$

Từ đó hãy tính tổng

$$T_s = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^s}{f'(x_k)}, \quad 0 \leq s \leq n-2$$

và tổng

$$T_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^{n-1}}{f'(x_k)}.$$

(ii) Tính tổng

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_k}{x - \varepsilon_k}$$

với $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$.

Giải. Theo định lý Lagrange, ta có

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{g(x_k)}{f'(x_k)(x - x_k)}$$

với mọi $x \neq x_k, k = 1, 2, \dots, n$, và đa thức $g(x)$ có bậc $\leq n - 1$.

Chọn $g(x) = x^s$, từ $x^s = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^s f(x)}{f'(x_k)(x - x_k)}$, suy ra

$$T_s = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^s}{f'(x_k)} = 0, \quad 0 \leq s \leq n - 2.$$

Với $s = n - 1$, có tổng

$$T_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^{n-1}}{f'(x_k)} = 1.$$

(ii) Từ $x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \varepsilon_k)$, suy ra

$$\frac{nx^{n-1}}{x^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - \varepsilon_k}.$$

Do đó

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_k}{x - \varepsilon_k} = \frac{nx^n}{x^n - 1} - n = \frac{n}{x^n - 1}.$$

Ví dụ 1.15. Phân tích

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)(x^2 + 2^2) \dots (x^2 + n^2)}$$

(trên $\mathbb{R}$) thành tổng các phân thức đơn giản. Từ đó hãy tính tổng dưới đây

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(n+k)!(n-k)!(1+k^2)}.$$

Giải. Theo Định lý 1.2, ta có $f(x) = \frac{a}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k x + b_k}{x^2 + k^2}$.

Từ đây suy ra

$$f(x) = \frac{1}{(n!)^2 x} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x}{(n+k)!(n-k)!(x^2 + k^2)}.$$

Cho $x = 1$, ta nhận được

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(n+k)!(n-k)!(1+k^2)} = \frac{1}{4(1+2^2) \dots (1+n^2)} - \frac{1}{2(n!)^2}.$$

Ví dụ 1.16. Cho ba số thực phân biệt $a_1, a_2, a_3 \neq \{0, -1, -2\}$. Khi đó có

$$\det D \neq 0, \text{ với } D = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} \\ \frac{1}{a_1+1} & \frac{1}{a_2+1} & \frac{1}{a_3+1} \\ \frac{1}{a_1+2} & \frac{1}{a_2+2} & \frac{1}{a_3+2} \end{pmatrix}$$

Giải. Nếu định thức $\det D = 0$ thì các dòng của ma trận D là phụ thuộc tuyến tính. Khi đó có u_0, u_1, u_2 không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\frac{u_0}{a_i} + \frac{u_1}{a_i+1} + \frac{u_2}{a_i+2} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Xét hàm

$$f(x) = \frac{u_0}{a_i} + \frac{u_1}{a_i+1} + \frac{u_2}{a_i+2} = \frac{p(x)}{x(x+1)(x+2)}$$

với đa thức $p(x)$ có bậc ≤ 2 . Vì $f(a_i) = 0$ nên $p(a_i) = 0$ với $i = 1, 2, 3$.

Vậy $p(x) \equiv 0$ hay $f(x) \equiv 0$ khi $x \neq \{0, -1, -2\}$.

Nếu tồn tại $u_i \neq 0$ thì khi $x \rightarrow -i$ ta có $\frac{u_i}{x+i} \rightarrow \infty$.

Khi đó $f(x) \rightarrow \infty$. Do đó, khi x đủ gần $-i$ có $|f(x)|$ quá lớn, mâu thuẫn với $f(x) \equiv 0$. Điều này chỉ xảy ra $u_0 = u_1 = u_2 = 0$, hay điều giả sử là sai. Vậy $\det D \neq 0$.

Ví dụ 1.17 (xem [4]). Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)} + \frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(x-b)} + \\ & \frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)} + \frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)} \\ & = \frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}. \end{aligned}$$

Giải. Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b+c+d)-a}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-x)} + \frac{(a+b+c+d)-b}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-x)} \\ & + \frac{(a+b+c+d)-c}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-x)} + \frac{(a+b+c+d)-d}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-x)} \\ & + \frac{(a+b+c+d)-x}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)} = 0. \end{aligned}$$

Áp dụng công thức nội suy Lagrange với $f(y) = a+b+c+d-y$, $y_1 = a$, $y_2 = b$, $y_3 = c$, $y_4 = d$, $y_5 = x$, ta thu được điều phải chứng minh.

1.1.5 Phương trình hàm trong lớp hàm phân thức hữu tỷ

Trong mục này ta xét một số bài toán về phương trình hàm liên quan đến hàm phân thức hữu tỷ.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng không tồn tại hai đa thức thực $f(x), g(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Giải. Giả sử tồn tại $f(x), g(x)$ sao cho $\sqrt{x^2+1} = \frac{f(x)}{g(x)}$. Ta có thể coi $(f(x), g(x)) = 1$. Khi đó, $g(x)^2(x^2+1) = f(x)^2$. Vì x^2+1 là bất khả quy nên $f(x) : x^2+1$ hay $f(x) = (x^2+1)h(x)$.

Vậy $g(x)^2 = (x^2+1)^2 h(x)^2$ và như thế $g(x) : x^2+1$, mâu thuẫn với việc chọn $(f(x), g(x)) = 1$.

Bài toán 1.2 (xem [4]). Tìm các hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x, \quad \forall x \neq \pm 1. \quad (1.2)$$

Giải. Đặt $\frac{x-3}{x+1} = t$ thì $x = \frac{3+t}{1-t}$. Khi đó 1.2) trở thành

$$f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t}, \quad \forall t \neq \pm 1. \quad (1.3)$$

Đặt $\frac{3+x}{1-x} = t$ thì $x = \frac{t-3}{t+1}$. Khi đó

$$(1.2) \Leftrightarrow f\left(\frac{3+t}{1-t}\right) + f(t) = \frac{t-3}{t+1}, \quad \forall t \neq \pm 1 \quad (1.4)$$

Cộng vế với vế của (1.3) và (1.4), ta thu được

$$\frac{3+t}{1-t} + \frac{t-3}{t+1} = 2f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) + f\left(\frac{3+t}{1-t}\right), \quad \forall t \neq \pm 1.$$

Suy ra $\frac{8t}{1-t^2} = 2f(t) + t$, $\forall t \neq \pm 1$, hay $f(t) = -\frac{t}{2} + \frac{4t}{1-t^2}$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{4x}{1-x^2}$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 1.3 (xem [4]). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(2010) = 2009 \quad (1.5)$$

$$f(x) \cdot f_4(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

trong đó $f_n(x) = f(f \dots (f(x)))$, n lần f . Hãy tính $f(2008)$.

Giải. Đặt $I_f = f(\mathbb{R})$. Khi đó, ta có $xf_3(x) = 1$, $\forall x \in I_f$. Từ (1.5)) cho ta $2009 \in I_f$. Trong (1.6) thế $x = 2010$ thì $f_4(2010) = \frac{1}{2009}$ hay $\frac{1}{2009} \in I_f$. Mặt khác, f liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $D := \left[\frac{1}{2009}; 2009\right] \subset I_f$. Do đó $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in D$. Suy ra f là đơn ánh trên D .

Hơn nữa, f liên tục trên D nên f đơn điệu giảm trên D .

Giả sử $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$.

Sử dụng tính đơn điệu giảm của $f(x)$, ta có

$$f(x_0) > \frac{1}{x_0} \quad \text{hay} \quad f_2(x_0) < f\left(\frac{1}{x_0}\right). \quad (1.7)$$

Suy ra $\frac{1}{x_0} = f_3(x_0) > f_2\left(\frac{1}{x_0}\right)$. Do đó

$$f\left(\frac{1}{x_0}\right) < f_3\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0. \quad (1.8)$$

Từ (1.7) và (1.8), ta thu được $x_0 > f_2(x_0)$, hay $f(x_0) < f_3(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(x_0) > \frac{1}{x_0}$.

Chúng minh tương tự, ta thu được kết quả không tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) < \frac{1}{x_0}$. Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D$.

Hiển nhiên, $2008 \in D$ nên $f(2008) = \frac{1}{2008}$.

Bài toán 1.4 (xem [4]). Đặt $S = (-1; +\infty)$, tìm tất cả các hàm số $f : S \rightarrow S$ thỏa mãn các điều kiện

$$f[x + f(y) + xf(y)] = y + f(x) + yf(x), \quad \forall x, y \in S \quad (1.9)$$

$$\frac{f(x)}{x} \text{ tăng trên } (-1; 0) \text{ và } (0; +\infty). \quad (1.10)$$

Giải. Nếu tồn tại $a \in S$ sao cho $f(a) = 0$ thì ta có $a = 0$.

Thật vậy, trong điều kiện (1.9) cho $x = y = a$, ta được

$$f[a + f(a) + af(a)] = a + f(a) + af(a),$$

suy ra $f(a^2 + 2a) = a^2 + 2a$ (vì $f(a) = a$).

Đặt $b = a^2 + 2a$ suy ra $f(b) = b$. Ta xét ba trường hợp

$$\begin{aligned} & \text{- Nếu } b = a \text{ thì } a^2 + 2a = a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases} \quad (\text{loại}) \quad \Leftrightarrow a = 0 \\ & \text{- Nếu } b > a \text{ thì } a^2 + 2a > a \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < -1 \end{cases} \quad (\text{loại}) \quad \Leftrightarrow a > 0 \end{aligned}$$

Vì $b > a > 0$ thì $\frac{f(b)}{b} > \frac{f(a)}{a}$ (vì $\frac{f(x)}{x}$ tăng trên $(0; +\infty)$). Suy ra $1 > 1$ (điều này vô lý).

- Nếu $b < a$ thì $a^2 + 2a < a \Leftrightarrow -1 < a < 0$ hay $-1 < b < a < 0$ suy ra $\frac{f(b)}{b} > \frac{f(a)}{a}$ (vì $\frac{f(x)}{x}$ tăng trên $(0; +\infty)$). Do vậy $1 < 1$ (vô lý).

Vậy nếu $\begin{cases} a \in S \\ f(a) = a \end{cases}$ thì $a = 0$.

Trong (1.9) cho $y = x$, ta được

$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x)$. Suy ra $x + f(x) + xf(x) = 0$ hay $f(x) = \frac{-x}{1+x}$. Thử lại ta thấy $f(x) = \frac{-x}{1+x}$ thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Bài toán 1.5 (xem [4]). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$xf(xf(y)) = f(f(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad (1.11)$$

Giải . Đặt $f(1) = a$, thay x bởi $\frac{1}{f(y)}$ ta có $\frac{1}{f(y)}f(1) = f(f(y))$ hay $f(f(y)) = \frac{a}{f(y)}$.

Thay x bởi $\frac{1}{f(x)}$ ta được $\frac{1}{f(x)}f\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right) = f(f(y)) = \frac{a}{f(y)}$. Suy ra

$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right) = a \frac{f(x)}{f(y)}. \quad (1.12)$$

Viết lại điều kiện bài ra dưới dạng $x = \frac{f(f(y))}{f(xf(y))}$.

Theo công thức (1.12) ta được $f(x) = f\left(\frac{f(f(y))}{f(xf(y))}\right) = a \frac{f(xf(y))}{f(f(y))} = \frac{a}{x}$.

Dễ dàng kiểm tra hàm số này thỏa mãn các điều kiện bài ra.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = \frac{a}{x}$, $\forall x > 0$ với a là hằng số dương.

1.2 Một số thuật toán tìm nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỷ

Định lý Laplace khẳng định rằng mọi hàm hữu tỷ đều có nguyên hàm sơ cấp. Tuy nhiên, việc đi tìm các nguyên hàm này không phải là một công việc đơn giản. Nội dung của chương này sẽ tìm hiểu một số thuật toán tìm nguyên hàm của một hàm số hữu tỷ cho trước, theo thứ tự từ đơn giản đến phức tạp.

Chú ý 1.1. Giả sử $\frac{p(x)}{q(x)}$ là một hàm số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện $(p(x), q(x)) = 1$ và hệ số của số hạng chứa bậc cao nhất của $q(x)$ bằng 1. Áp dụng phép chia Euclide ta được hai đa thức $s(x), r(x)$ sao cho $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$ với $r(x) = 0$ hoặc $\deg r < \deg q$. Khi đó, ta có $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int s(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$.

Việc tính $\int s(x) dx$ là dễ dàng, ta cần giải quyết bài toán tìm $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ với $\deg r < \deg q$.

Sau đây là một số thuật toán giải bài toán trên.

1.2.1 Phương pháp Ostrogradski

Phương pháp Ostrogradski cho phép ta tính được tích phân hàm hữu tỷ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ trong đó đa thức mẫu $Q(x)$ có nghiệm bội và phương pháp này đôi khi đơn giản hơn phương pháp phân tích thành các phần tử đơn giản.

Ta giả sử $\frac{P(x)}{Q(x)}$ là một phân thức thực sự, nghĩa là bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$. Giả sử mẫu số phân tích được dưới dạng

$$Q(x) = C(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{h_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{h_s}.$$

Ta biết khi đó ta có phân tích

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_1^{(1)}}{x - a_1} + \dots \\ &\dots + \frac{B_{h_s}^{(s)}x + C_{h_s}^{(s)}}{(x^2 + p_sx + q_s)^{h_s}} + \dots + \frac{B_1^{(s)}x + C_1^{(s)}}{(x^2 + p_sx + q_s)}. \end{aligned}$$

Tích phân hai vế đẳng thức vừa nêu, như ta đã thấy ở trên, những tích phân ở vế phải dạng $\int \frac{dx}{(x - a)^k}$ với $k > 1$ cho ta những hàm dạng $\frac{A}{(x - a)^{k-1}}$, còn những hạng thức dạng $\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} dx$ với $m > 1$ cho ta tổng của một

hàm hữu tỷ dạng $\frac{Dx + E}{(x^2 + px + q)^{m-1}}$ và một tích phân dạng $\int \frac{B'x + C'}{(x^2 + px + q)^m dx}$.
 Tính lùi dần ta được

$$\int \frac{Bx + c}{(x^2 + px + q)^m} dx = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \frac{B''x + C''}{(x^2 + px + q)dx},$$

trong đó $F(x)$ là đa thức bậc bé hơn $m - 1$.

Như vậy, tích phân hai vế cuối này, ta có

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{(x - a_1)_!^k \dots (x^2 + p_s x + q_s)_s^h} dx &= \frac{P_1(x)}{(x - a_1)^{k_1-1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{h_s-1}} + \\ &+ \dots + \int \frac{A_i}{x - a_i} dx + \dots + \int \frac{B_j x + C_j}{x^2 + p_j x + q_j} dx + \dots \end{aligned}$$

Nghĩa là ở vế phải ta chỉ cần tính những tích phân với mẫu số là các lũy thừa bậc 1 của $(x - a_i)$ và của $(x^2 + p_j + q_j)$ mà thôi. Nếu bằng một cách nào đó mà ta biết được đa thức $P_1(x)$ và các hằng số A_i, B_j, C_j thì việc tích phân thực hiện được một cách dễ dàng. Ta có thể tính được đa thức $P_1(x)$ bằng cách viết nó dưới dạng hệ số bất định mà ta sẽ nói rõ hơn sau đây.

Ta chú ý rằng nếu ta ký hiệu

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^h,$$

$Q_1(x) = (x - a_1)^{k_1-1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{h_s-1}$, $Q_2(x) = (x - a_1) \dots (x^2 + p_s x + q_s)$,
 thì dễ thấy $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$ và $Q_1(x)$ chính là ước chung lớn nhất của $Q(x)$ và đạo hàm $Q'(x)$ của nó và do đó $Q_1(x)$ có thể thu được bằng thuật toán Ôclít.

Ta viết

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx.$$

$P_1(x), P_2(x)$ (bậc bé hơn bậc của mẫu tương ứng), được coi có các hệ số bất định. Đạo hàm hai vế, ta có

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right]' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Việc xác định các hệ số bất định của $P_1(x), P_2(x)$ được thực hiện theo phương pháp đã biết, hoặc là sau khi khử mẫu số, ta khai triển hai vế và đồng nhất

hệ số các số hạng cùng lũy thừa của x , hoặc là ta gán cho x những giá trị đặc biệt.

Ví dụ 1.18. Tính

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} dx.$$

Dễ thấy rằng

$$(x^3 + x^2 + x + 1)^2 = (x + 1)^2(x^2 + 1)^2.$$

Ta có $Q_1(x) = Q_2(x) = (x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$. Ta viết

$$\begin{aligned} & \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} dx \\ &= \frac{Ax^2 + Bx + C}{(x^3 + x^2 + x + 1)} + \int \frac{D}{x + 1} dx + \int \frac{Ex + F}{x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Từ đó, lấy đạo hàm hai vế

$$\frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} = \left[\frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + x^2 + x + 1} \right]' + \frac{D}{x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}, \quad (1.13)$$

hay

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8 &= (2Ax + B)(x^3 + x^2 + x + 1) \\ &- (Ax^2 + Bx + C)(3x^2 + 2x + 1) + D(x^2 + 1)(x^3 + x^2 + x + 1) \\ &+ (Ex + F)(x + 1)(x^3 + x^2 + x + 1). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ta có thể khai triển hai vế và cân bằng hệ số, tuy nhiên phép tính sẽ phức tạp. Ta sẽ cho hai vế những giá trị đặc biệt, tính toán sẽ đơn giản hơn.

Đa thức $x^3 + x^2 + x + 1$ triệt tiêu khi tại $x = -1$ và $x = i$. Ta cho $x \rightarrow -1$, khi đó

$$A - B + C = -6.$$

Cho $x \rightarrow i$, sau đó cân bằng phần thực, phần ảo, ta được

$$A - C = 3, B = 1.$$

Ba hệ thức trên cho ta

$$A = -1, B = 1, C = -4.$$

Nhân hai vế (1.13) với x , $x \rightarrow \infty$, với chú ý bậc của tử số của vế trái và của hạng thức đầu vế phải đều bé kém bậc của mẫu số tương ứng hai đơn vị, ta được

$$D + E = 0.$$

Cho $x \rightarrow 0$ trong (1.14), chú ý $B = 1, C = -4$, ta có

$$D + F = 3.$$

Cho $x \rightarrow 1$, chú ý $A = -1, B = 1, C = -4$, ta được

$$D + E + F = 3.$$

Ba hệ thức cuối cùng cho ta

$$D = 0, E = 0, F = 3.$$

Tóm lại

$$A = -1, B = 1, C = -4, D = 0, E = 0, F = 3.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x^3 + x^2 + x + 1)^2} dx &= -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3 \arctan x + C. \end{aligned}$$

Phương pháp Ostrogradski mang lại sự tính toán đơn giản hơn so với phương pháp phân tích hàm dưới dấu tích phân thành các phần tử đơn giản, nhất là trong trường hợp khi mẫu số $Q(x)$ có chứa thừa số $(ax^2 + bx + c)^m$ với m đủ lớn. Chẳng hạn nếu $m = 3$, thì theo phương pháp phân tích hàm dưới dấu tích phân thành các phần tử đơn giản, ta phải tính I_3 qua I_2 , I_2 qua I_1 (theo công thức truy hồi), còn phương pháp Ostrogradski tránh được điều này.

1.2.2 Áp dụng công thức nội suy Lagrange

Trong mục này, sẽ giới thiệu một thuật toán tìm nguyên hàm của hàm số hữu tỉ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - x_i)}$ trong đó $P(x)$ là một đa thức, $x_i \neq x_j$

với mọi $i \neq j$.

Ta nhắc lại công thức nội suy Lagrange: Cho n số $x_1, x_2, \dots, x_n$ phân biệt và n số $a_1, a_2, \dots, a_n$ tùy ý. Khi đó tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ với bậc không vượt quá $n-1$, thỏa mãn điều kiện $P(x_j) = a_j$, với mọi $j = 1, 2, \dots, n$. Đa thức này được xác định theo công thức $P(x) = \sum_{j=1}^n a_j \prod_{i=1, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$.

Từ công thức trên, chúng ta có một phương pháp tìm nguyên hàm hữu hiệu của hàm số hữu tỉ mà mẫu thức bậc n có n nghiệm đơn phân biệt.

Để tìm nguyên hàm của hàm số hữu tỉ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - x_i)}$, trong

đó $P(x)$ là một đa thức và $x_i \neq x_j$ với mọi $i \neq j$, ta tiến hành theo trình tự như sau.

Bước 1. Áp dụng công thức nội suy Lagrange, ta phân tích $P(x)$ thành dạng tổng

$$\sum_{j=1}^n a_j \prod_{i=1, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad a_j = P(x_j), \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Bước 2. Thực hiện phép chia $P(x)$ cho $\prod_{i=1}^n (x - x_i)$ ta sẽ thu được tích phân bất định dạng đơn giản.

Ví dụ 1.19 (xem [3]). Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

Giải. Xét $P(x) = x^2$ với bốn nút nội suy là $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3; x_4 = 4$. Ta có $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange, ta được

$$P(x) = -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{2}{3}(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{9}{2}(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{8}{3}(x-1)(x-2)(x-3).$$

Rút gọn $f(x)$, ta thu được hàm số sau

$$f(x) = \frac{-1}{6(x-1)} + \frac{2}{(x-2)} - \frac{9}{2(x-3)} + \frac{8}{3(x-4)}.$$

Từ đây, ta suy ra nguyên hàm của hàm số cần tìm là

$$\int f(x) dx = \frac{-1}{6} \ln|x-1| + 2 \ln|x-2| - \frac{9}{2} \ln|x-3| + \frac{8}{3} \ln|x-4| + C,$$

trong đó C là một hằng số.

Ví dụ 1.20. [xem [3]] Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x(x-1)(x-2)(x+2)}.$$

Giải. Đặt $P(x) = 3x^2 + 4x + 1$ và xét bốn nút nội suy là $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = -2$. Ta có $a_1 = 1, a_2 = 8, a_3 = 21, a_4 = 5$.

Áp dụng công thức nội suy Lagrange, ta được

$$P(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x+1) - \frac{8}{3}x(x-2)(x+2) + \frac{21}{8}x(x-1)(x+2) - \frac{5}{24}x(x-1)(x-2).$$

Rút gọn $f(x)$, ta được hàm số sau.

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{8}{3(x-1)} + \frac{21}{8(x-2)} - \frac{5}{24(x+2)}.$$

Từ đây, ta suy ra nguyên hàm của hàm số cần tìm là

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{8}{3} \ln|x-1| + \frac{21}{8} \ln|x-2| - \frac{5}{24} \ln|x+2| + C,$$

trong đó C là một hằng số.

1.2.3 Áp dụng công thức nội suy Hermite

Trong mục này, sẽ giới thiệu phương pháp tìm nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ có dạng $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$, với $q(x) = \prod_{i=1}^k q_i(x)^{i_i}$ và mỗi $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) là đa thức có hệ số của hạng tử cao nhất bằng 1, $q_i(x)$ không chính phương, $(q_i(x), q_j(x)) = 1$ với mọi $i \neq j$ và $\deg q_k(x) > 0$.

Chú ý 1.2.

1). Với mọi đa thức $q(x)$, ta đều có biểu diễn $q(x) = \prod_{i=1}^k q_i^i(x)$, trong đó mỗi $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) là đa thức có hệ số của hạng tử cao nhất

bằng 1, $q_i(x)$ không chính phương và $(q_i(x), q_j(x)) = 1$ với mọi $i \neq j$ và $\deg q_k(x) > 0$.

2) Nếu $p(x)$ và $q(x)$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau (tức $(p(x), q(x)) = 1$) thì tồn tại hai đa thức $s(x)$ và $t(x)$ sao cho

$$p(x)s(x) + q(x)t(x) = 1.$$

3) Theo công thức nội suy Hermite (xem [3]), nếu $(p(x), q(x)) = 1$ và hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của q bằng 1 và $\deg p(x) < \deg q(x)$, thì

i) Ta có

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{c(x)}{d(x)} + \int \frac{a(x)}{b(x)} dx, \quad (1.15)$$

trong đó a, b, c, d là các đa thức với $\deg a(x) < \deg b(x)$ và $\deg c(x) < \deg d(x)$.

ii) Vì $q = \prod_{i=1}^k q_i^i$ nên

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \int \frac{p_{ij}(x)}{q_i^j(x)} dx, \quad (1.16)$$

trong đó $\deg p_j(x) < \deg q_i(x)$.

iii) Trong (1.15), ta có $b(x) = \prod_{i=1}^k q_i(x)$, $d(x) = \prod_{i=2}^k q_i^{i-1}(x)$.

Ta có $q(x) = \prod_{i=1}^k q_i^i(x)$, với mỗi $q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) là đa thức có hệ số của hạng tử cao nhất bằng 1, không chính phương, $(q_i(x), q_j(x)) = 1$ với mọi $i \neq j$ và $\deg(q_k) > 0$. Ta biểu diễn $\frac{r}{q}$ dưới dạng

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \frac{r_{ij}(x)}{q_i^j(x)},$$

trong đó $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq i$, $r_{ij}(x)$ là các đa thức với $\deg r_{ij}(x) < \deg q_i(x)$ khi $\deg q_i(x) > 0$ và $r_{ij}(x) = 0$ khi $q_i(x) = 1$. Khi đó, ta có

$$\int \frac{r(x)}{q(x)} dx = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \int \frac{r_{ij}(x)}{q_i^j(x)} dx.$$

Tiếp theo, ta sẽ tính $\int \frac{r_{ij}(x)}{q_i^j(x)} dx$.

Trường hợp 1. Nếu $j = 1$ thì $\int \frac{r_{ij}}{q_i^j} dx$ đã tính được.

Trường hợp 2. Nếu $j > 1$, ta xem xét hàm số dưới dấu tích phân $\int \frac{r_{ij}(x)}{q_i^j(x)} dx$.

Vì $q_i(x)$ không chính phương nên $(q_i, q_i') = 1$. Do đó luôn tồn tại các đa thức $s, t \in K[x]$ sao cho $sq_i + tq_i' = r_{ij}$, trong đó $\deg(s) < \deg(q_i) - 1$ và $\deg(t) < \deg(q_i)$. Khi đó

$$\int \frac{r_{ij}}{q_i^j} dx = \int \frac{s}{q_i^{j-1}} dx + \int \frac{tq_i'}{q_i^j} dx.$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần (đặt $u = t$; $dv = \frac{q_i'}{q_i^j} dx$), ta được

$$\int \frac{t \cdot q_i'(x)}{q_i^j(x)} dx = \frac{-t}{(j-1) q_i^{j-1}(x)} + \int \frac{t'}{(j-1) q_i^{j-1}(x)} dx.$$

Từ đây ta suy ra

$$\int \frac{r_{ij}(x)}{q_i^j(x)} dx = \frac{\frac{(-t)}{(j-1)}}{(j-1) q_i^{j-1}(x)} + \int \frac{s + \frac{t'}{(j-1)}}{q_i^{j-1}(x)} dx.$$

Tiếp tục quá trình trên đến khi $j - 1 = 1$ thì việc tìm nguyên hàm sẽ hoàn thành vì khi đó ta thu được trường hợp 1.

Tiếp theo, xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.21. Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{r}{q} = \frac{4x^9 + 21x^6 + 2x^3 - 3x^2 - 3}{(x^7 - x + 1)^2}.$$

Giải. Ta có $q = x^7 - x + 1$ và $q' = 7x^6 - 1$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau. Từ đó suy ra tồn tại hai đa thức s, t sao cho $qs + q's = p$. Vì $\deg(q) = 7$ và $\deg(q') = 6$ nên không mất tính tổng quát ta có thể chọn đa thức s và t như sau.

$$s = a_0 + a_1x + a_2x^2, t = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3.$$

Từ đẳng thức $qs + q's = p$, thực hiện phép đồng nhất ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a_2 + 7b_3 &= 4 \\ a_1 + 7b_2 &= 0 \\ a_0 + 7b_1 &= 0 \\ 7b_0 &= 21 \\ -a_2 - b_3 &= 2 \\ -a_0 + a_1 - b_1 &= 0 \\ a_0 - b_0 &= -3 \\ -a_1 + a_2 - b_2 &= -3. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được nghiệm là $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -3, b_0 = 3, b_1 = 0, b_2 = 0$ và $b_3 = 1$. Từ đó suy ra

$$\int f(x)dx = \int \frac{-3x^2}{x^7 - x + 1}dx + \int (x^3 + 3) \frac{7x^6 - 1}{(x^7 - x + 1)^2}dx.$$

Áp dụng phương pháp tích phân từ phần bằng cách đặt $u(x) = x^3 + 3, dv = \frac{7x^6 - 1}{(x^7 - x + 1)^2}dx$, ta tính được

$$\int (x^3 + 3) \frac{7x^6 - 1}{(x^7 - x + 1)^2}dx = -\frac{x^3 + 3}{x^7 - x + 1} - \int \frac{-3x^2}{x^7 - x + 1}dx.$$

Do đó

$$\int f(x)dx = -\frac{x^3 + 3}{x^7 - x + 1} + C,$$

với C là một hằng số.

Ví dụ 1.22. Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{r}{q} = \frac{2x + 3}{(x + 1)^3(x + 2)}.$$

Giải. Ta có $q = (x + 1)^3(x + 2) = \prod_{i=1}^3 q_i^i = q_1 q_2^2 q_3^3$, trong đó $q_1 = x + 2$; $q_2 = 1$, và $q_3 = x + 1$. Theo thuật toán Hermite, ta viết $\frac{r}{q}$ dưới dạng

$$\frac{r}{q} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{(x + 1)^2} + \frac{d}{(x + 1)^3},$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số. Đồng nhất thức, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b &= 0 \\ 3a + 4b + c &= 0 \\ 3a + 5b + 3c + d &= 2 \\ a + 2b + 2c + 2d &= 3. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta tìm được nghiệm là $a = 1, b = -1, c = 1$ và $d = 1$. Do đó

$$\frac{r}{q} = \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}.$$

Từ đó suy ra

$$\int \frac{r}{q} dx = \int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int \frac{1}{(x+1)^3} dx.$$

Vậy, nguyên hàm của hàm số cần tìm là

$$\int \frac{r}{q} dx = \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{2(x+1)^2} = \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| + \frac{-2x-3}{2(x+1)^2} + C,$$

trong đó C là một hằng số.

Ví dụ 1.23. Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{r}{q} = \frac{5x^3 - 3x^2 - 21x + 22}{(x-1)^3(2x-3)^2}.$$

Giải. Ta có $q = (x-1)^3(2x-3)^2 = \prod_{i=1}^3 q_i^i = q_1 q_2^2 q_3^3$, với $q_1 = 1; q_2 = 2x-3$

và $q_3 = x-1$. Theo thuật toán Hermite, ta viết $\frac{r}{q}$ dưới dạng

$$\frac{r}{q} = \frac{a}{2x-3} + \frac{b}{(2x-3)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{e}{(x-1)^3},$$

trong đó a, b, c, d, e là các hằng số. Đồng nhất thức, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + 4c &= 0 \\ -9a + b - 24c + 4d &= 5 \\ 15a - 3b + 33c - 16d + 4e &= -3 \\ -11a + 3b - 30c + 21d - 12e &= -21 \\ 3a - b + 9c - 9d + 9e &= 22. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $a = 0, b = 5, c = 0; d = 0$ và $e = 3$. Do đó

$$\frac{r}{q} = \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{5}{(2x-3)^2}.$$

Ta có $\int \frac{3}{(x-1)^3} dx = \frac{-3}{2(x-1)^2} + C_1$ và $\int \frac{5}{(2x-3)^2} dx = \frac{-5}{2(2x-3)} + C_2$, với C_1, C_2 là các hằng số. Từ đó suy ra

$$\int f(x) dx = \frac{-3}{2(x-1)^2} + \frac{-5}{2(2x-3)} = \frac{-\frac{5}{2}x^2 + 2x + 2}{(x-1)^2(2x-3)} + C,$$

với C là một hằng số.

Ví dụ 1.24. Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 + x^2 - x + 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4}.$$

Giải. Ta có $f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 + x^2 - x + 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4} = x + 1 + \frac{x^3 - x + 1}{(x^2 - x + 2)^2}.$

Đặt $\frac{r}{q} = \frac{x^3 - x + 1}{(x^2 - x + 2)^2}$. Ta có $q = \prod_{i=1}^2 q_i^i = q_1 q_2^2$, trong đó $q_1 = 1; q_2 = x^2 - x + 2$.

Theo thuật toán Hermite, ta viết $\frac{r}{q}$ dưới dạng

$$\frac{r}{q} = \frac{ax + b}{x^2 - x + 2} + \frac{cx + d}{(x^2 - x + 2)^2},$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số. Đồng nhất hai vế, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a &= 1 \\ -a + b &= 0 \\ 2a - b + c &= -1 \\ 2b + d &= 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $a = 1, b = 1, c = -2$ và $d = -1$. Từ đó suy ra

$$\frac{r}{q} = \frac{x + 1}{x^2 - x + 2} + \frac{-2x - 1}{(x^2 - x + 2)^2}.$$

Bây giờ, ta sẽ tìm $\int \frac{x + 1}{x^2 - x + 2} dx$. Ta có

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 2} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2})(x + \frac{1 + \sqrt{7}}{2})} dx.$$

Từ đó suy ra

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 2) + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}}{x + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}} \right| + C_1,$$

với C_1 là hằng số.

Tiếp sau đây chúng ta sẽ tìm $\int \frac{-2x-1}{(x^2-x+2)^2} dx$. Theo thuật toán Hermite ta có

$$-2x-1 = t(x^2-x+2) + (ux+v)(2x-1),$$

với t, u, v là các hằng số. Đồng nhất hai vế, ta được

$$t = \frac{-8}{7}; u = \frac{4}{7}; v = \frac{-9}{7}.$$

Từ đó suy ra

$$\int \frac{-2x-1}{(x^2-x+2)^2} dx = \int \frac{-\frac{8}{7}}{x^2-x+2} dx + \int \frac{(\frac{4}{7}x - \frac{9}{7})(2x-1)}{(x^2-x+2)^2} dx.$$

Ta dễ dàng tìm được nguyên hàm

$$\int \frac{-\frac{8}{7}}{x^2-x+2} dx = -\frac{8}{7} \ln \left| \frac{x - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}}{x + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}} \right| + C_2,$$

với C_2 hằng số.

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = \frac{4}{7}x - \frac{9}{7}$ và

$$dv = \frac{2x-1}{(x^2-x+2)^2} dx, \text{ ta được}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(\frac{4}{7}x - \frac{9}{7})(2x-1)}{(x^2-x+2)^2} dx &= -\frac{(\frac{4}{7}x - \frac{9}{7})}{x^2-x+2} + \int \frac{\frac{4}{7}}{x^2-x+2} dx \\ &= -\frac{(\frac{4}{7}x - \frac{9}{7})}{x^2-x+2} + \frac{4}{7} \ln \left| \frac{x - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}}{x + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}} \right| + C_3, \end{aligned}$$

với C_3 là một hằng số.

Như vậy, ta có

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \\ \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \ln |x^2-x+2| - \frac{4x-9}{7(x^2-x+2)} + \frac{13}{14} \ln \left| \frac{2x - (1-i\sqrt{7})}{2x + (1-i\sqrt{7})} \right| + C, \end{aligned}$$

với C là một hằng số.

Cũng với mục đích giải quyết những bài toán trên, để tính tích phân (1.15), Horowitz đã đưa ra một cách khác để xác định các đa thức $d(x), b(x)$. Từ đó, ta có một thuật toán mới như sau.

1.2.4 Phương pháp Horowitz

Định lý 1.4. Cho $\frac{p(x)}{q(x)}$ với $(p(x), q(x)) = 1$ và hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của $q(x)$ bằng 1 và $\deg p(x) < \deg q(x)$. Khi đó, các đa thức $d(x)$ và $b(x)$ trong công thức (1.15) được xác định như sau:

$$d(x) = \text{ƯCLN}(q(x), q'(x)); \quad b(x) = \frac{q(x)}{d(x)}.$$

Chứng minh. Vì $q(x) = \prod_{i=1}^k q_i^i(x)$ nên theo (1.16), ta có

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \int \frac{p_{ij}(x)}{q_i^j(x)} dx.$$

Hơn nữa, theo công thức nội suy Hermite (xem [3]) thì

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{c(x)}{d(x)} + \int \frac{a(x)}{b(x)} dx, \quad \deg a(x) < \deg b(x); \quad \deg c(x) < \deg d(x)$$

và

$$b(x) = \prod_{i=1}^k q_i(x), \quad d(x) = \prod_{i=2}^k q_i^{i-1}(x).$$

Từ đó suy ra

$$(q(x), q'(x)) = \prod_{i=2}^k q_i^{i-1}(x) = d(x), \quad \frac{q(x)}{(q(x), q'(x))} = \prod_{i=1}^k q_i(x) = b(x).$$

Từ nội dung định lý trên, ta xây dựng được thuật toán tìm nguyên hàm của hàm số hữu tỉ như sau.

Giả sử, ta cần tính $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, trong đó $(p(x), q(x)) = 1$, $\deg p(x) < \deg q(x)$ và hệ số của hạng tử chứa bậc cao nhất của $q(x)$ bằng 1. Ta tiến hành theo trình tự sau.

Bước 1. Xác định hai đa thức $d(x) = \text{ƯCLN}(q(x), q'(x))$ và $b(x) = \frac{q(x)}{d(x)}$.

Bước 2. Để xác định hai đa thức $a(x), c(x)$, ta gọi $m = \deg b(x)$; $n = \deg d(x)$. Khi đó $a(x), c(x)$ là các đa thức có bậc tương ứng nhỏ hơn m, n . Giả sử

$$\begin{aligned} a(x) &= a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0, \\ c(x) &= c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0. \end{aligned}$$

Đạo hàm hai vế của đẳng thức $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{c(x)}{d(x)} + \int \frac{a(x)}{b(x)} dx$, ta được

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{d(x)c'(x) - c(x)d'(x)}{d^2(x)} + \frac{a(x)}{b(x)}.$$

Vì $q(x) = b(x)d(x)$ nên $p(x) = b(x)c'(x) - c(x)\left(\frac{b(x)d'(x)}{d(x)}\right) + a(x)d(x)$. Thực hiện phép đồng nhất thức, ta tìm được hai đa thức $a(x)$ và $c(x)$.

Bước 3. Ta có $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{c(x)}{d(x)} + \int \frac{a(x)}{b(x)} dx$. Ta tìm $\int \frac{a(x)}{b(x)} dx$ từ đó ta tìm được tích phân $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$.

Sau đây, chúng tôi giới thiệu vài ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.25. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x+3}{(x+1)^3(x+2)}$.

Giải. Ta có $d = \text{ƯCLN}(q(x), q'(x)) = x^2 + 2x + 1$ và $b(x) = \frac{q(x)}{d(x)} = x^2 + 3x + 2$.

Từ đó suy ra hai đa thức $a(x)$ và $c(x)$ có dạng

$$\begin{aligned} a(x) &= a_1x + a_0, \\ c(x) &= c_1x + c_0. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức $p(x) = b(x)c'(x) - c(x)\left(\frac{b(x)d'(x)}{d(x)}\right) + a(x)d(x)$, thực hiện

phép đồng nhất ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ a_0 - c_1 &= 0 \\ 2a_0 - c_1 - 2c_0 &= 2 \\ a_0 + 2c_1 - 4c_0 &= 3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $a_0 = -1, a_1 = 0, c_0 = -\frac{3}{2}$ và $c_1 = -1$. Từ đó suy ra

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{-x - \frac{3}{2}}{(x+1)^2} + \int \frac{-1}{(x+1)(x+2)} dx = \frac{-2x-3}{2(x+1)^2} + \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| + C,$$

với C là một hằng số.

Đây chính là kết quả ta đã biết trong Ví dụ 1.22 của thuật toán Hermite.

Ví dụ 1.26. Tìm nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{5x^3 - 3x^2 - 21x + 22}{(x-1)^3(2x-3)^2}.$$

Giải. Ta có $d(x) = \text{ƯCLN}(q(x), q'(x)) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$ và $b(x) = \frac{q(x)}{d(x)} = 2x^2 - 5x + 3$. Từ đó suy ra hai đa thức $a(x)$ và $c(x)$ có dạng

$$\begin{aligned} a(x) &= a_1x + a_0, \\ c(x) &= c_2x^2 + c_1x + c_0. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức $p(x) = b(x)c'(x) - c(x)\left(\frac{b(x)d'(x)}{d(x)}\right) + a(x)d(x)$, thực hiện phép đồng nhất ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1 &= 0 \\ 2a_0 - 7a_1 - 2c_2 &= 5 \\ -7a_0 + 8a_1 - 4c_1 - 2c_2 &= -3 \\ 8a_0 - 3a_1 - 6c_0 + 3c_1 + 6c_2 &= -21 \\ -3a_0 + 8c_0 + 3c_1 &= 22. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $a_0 = 0, a_1 = 0, c_0 = 2, c_1 = 2$ và $c_2 = -\frac{5}{2}$. Từ đó ta tính được $\int \frac{p}{q} dx = \frac{-\frac{5}{2}x^2 + 2x + 2}{(x-1)^2(2x-3)} + C$, với C là một hằng số.

Đây chính là kết quả ta đã biết trong Ví dụ 1.23 của thuật toán Hermite.

Ví dụ 1.27. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 - x + 1}{(x^2 - x + 2)^2}$.

Giải. Ta có $d(x) = \text{ƯCLN}(q(x), q'(x)) = x^2 - x + 2$ và $b(x) = \frac{q(x)}{d(x)} = x^2 - x + 2$. Từ đó suy ra hai đa thức $a(x)$ và $c(x)$ có dạng

$$\begin{aligned} a(x) &= a_1x + a_0, \\ c(x) &= c_1x + c_0. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức $p(x) = b(x)c'(x) - c(x)\left(\frac{b(x).d'(x)}{d(x)}\right) + a(x)d(x)$, thực hiện phép đồng nhất ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1 &= 1 \\ -a_1 + a_0 - c_1 &= 0 \\ 2a_1 - a_0 - 2c_0 &= -1 \\ 2a_0 + 2c_1 + c_0 &= 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được $a_1 = 1, a_0 = \frac{3}{7}, c_1 = -\frac{4}{7}$ và $c_0 = \frac{9}{7}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \int \frac{p(x)}{q(x)} dx &= \frac{-\frac{4}{7}x + \frac{9}{7}}{x^2 - x + 2} + \int \frac{x + \frac{3}{7}}{x^2 - x + 2} dx \\ &= -\frac{4x - 9}{7(x^2 - x + 2)} + \frac{1}{2} \int \frac{(2x - 1) + \frac{13}{7}}{x^2 - x + 2} dx \\ &= -\frac{4x - 9}{7(x^2 - x + 2)} + \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 2| + \frac{13}{14} \ln \left| \frac{2x - (1 - i\sqrt{7})}{2x + (1 - i\sqrt{7})} \right| + C, \end{aligned}$$

với C là một hằng số.

Đây là một kết quả ta đã biết trong Ví dụ 1.24 của thuật toán Hermite.

Ví dụ 1.28. Tìm nguyên hàm của hàm số

$$\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{x^7 - 24x^4 - 4x^2 + 8x - 8}{x^8 + 6x^6 + 12x^4 + 8x^2}.$$

Giải. Ta có $d(x) = \text{ƯCLN}(q(x), q'(x)) = (x^4 + 4x^2 + 4)x$ và $b(x) = \frac{q(x)}{d(x)} = (x^2 + 2)x$. Từ đó suy ra hai đa thức $a(x)$ và $c(x)$ có dạng

$$\begin{aligned} a(x) &= a_2x^2 + a_1x + a_0, \\ c(x) &= c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức $p(x) = b(x)c'(x) - c(x)\left(\frac{b(x).d'(x)}{d(x)}\right) + a(x)d(x)$, thực hiện phép đồng nhất ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a_2 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ 4a_2 + a_0 - 2c_3 &= 0 \\ 4a_1 - 3c_2 &= -24 \\ 4a_2 + 4a_0 + 4c_3 - 4c_1 &= 0 \\ 4a_1 + 2c_2 - 5c_0 &= -4 \\ 4a_0 &= 8 \\ -2c_0 &= -8. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được

$$a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 2, c_3 = 3, c_2 = 8, c_1 = 6, c_0 = 4.$$

Từ đó suy ra

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{3x^3 + 8x^2 + 6x + 4}{x(x^4 + 4x^2 + 4)} + \int \frac{dx}{x} = \frac{3x^3 + 8x^2 + 6x + 4}{x(x^4 + 4x^2 + 4)} + \ln|x| + C,$$

với C là một hằng số.

Chương 2

Phân thức hữu tỷ với hệ số nguyên và phân thức nhận giá trị hữu tỷ

2.1 Hàm phân thức chính quy hữu tỷ

2.1.1 Hàm phân thức chính quy hữu tỷ một biến

Trước hết, ta nhắc lại khái niệm hàm phân thức chính quy một biến (xem [2]).

Định nghĩa 2.1 (Hàm phân thức chính quy một biến). *Hàm số $f(x) (\neq 0)$ xác định trên tập $\mathbb{R}^+$ được gọi là phân thức chính quy, nếu*

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^{\alpha_k}, \quad (2.1)$$

trong đó

$$a_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{k=1}^n a_k x^{\alpha_k} = 0.$$

Ví dụ 2.1. Dễ dàng kiểm chứng hàm số sau đây là phân thức chính quy

$$f_2(x) = 4x + 5\frac{1}{x} + \frac{\sin \alpha}{x^{\sin \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{x^{\cos \alpha}}.$$

Trong phần này, ta khảo sát lớp các hàm phân thức chính quy với hệ số nguyên. Đó là lớp hàm số được sử dụng nhiều trong các bài toán về cực trị của các biểu thức đại số.

Định nghĩa 2.2 (Hàm phân thức chính quy hữu tỷ một biến). *Hàm số*

$f(x) (\neq 0)$ xác định trên tập $\mathbb{R}^+$ được gọi là phân thức chính quy, nếu

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^{\alpha_k}, \quad (2.2)$$

trong đó

$$a_k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{k=1}^n a_k x^{\alpha_k} = 0.$$

Ví dụ 2.2. Dễ dàng kiểm chứng hàm số sau đây là phân thức chính quy hữu tỷ

$$f_1(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}.$$

Từ định nghĩa, ta dễ dàng kiểm tra các tính chất sau đây.

Tính chất 2.1. Nếu $f(x)$ là các hàm phân thức chính quy hữu tỷ, thì $f(x) > 0$ ứng với mọi $x > 0$.

Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm phân thức chính quy hữu tỷ, thì với mọi cặp số nguyên dương α, β , hàm số

$$h(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$$

cũng là hàm phân thức chính quy hữu tỷ.

Nếu $f(x)$ là các hàm phân thức chính quy hữu tỷ, thì $h(x) := [f(x)]^m, m \in \mathbb{N}^*$. cũng là hàm phân thức chính quy hữu tỷ.

2.1.2 Hàm phân thức chính quy hữu tỷ nhiều biến

Định nghĩa 2.3 (xem [2]). /Hàm phân thức chính quy hữu tỷ nhiều biến/ Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \neq 0$ được gọi là hàm phân thức chính quy hữu tỷ m biến, nếu

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^n a_k x_1^{\alpha_{k1}} x_2^{\alpha_{k2}} \dots x_m^{\alpha_{km}},$$

trong đó

$$\begin{cases} a_k \in \mathbb{N}, \alpha_{kj} \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m, \\ a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21} + \dots + a_n\alpha_{n1} = 0 \\ a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22} + \dots + a_n\alpha_{n2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_1\alpha_{1n} + a_2\alpha_{2n} + \dots + a_n\alpha_{nm} = 0 \end{cases}$$

Từ định nghĩa trên, ta dễ dàng kiểm tra tính chất sau:

Tính chất 2.2. Hàm số $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ là hàm phân thức chính quy hữu tỷ khi và chỉ khi các hàm phân thức thành phần của $f(1, 1, \dots, x_k, 1, \dots, 1)$ cũng là các hàm phân thức chính quy hữu tỷ.

Tiếp theo, ta chứng minh định lý cơ bản sau đây.

Định lý 2.1. Với mỗi hàm phân thức chính quy $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ trên tập $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ dạng

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^n a_k x_1^{\alpha_{k1}} x_2^{\alpha_{k2}} \dots x_m^{\alpha_{km}},$$

trong đó

$$\begin{cases} a_k \in \mathbb{N}, \alpha_{kj} \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m, \\ a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21} + \dots + a_n\alpha_{n1} = 0 \\ a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22} + \dots + a_n\alpha_{n2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_1\alpha_{1n} + a_2\alpha_{2n} + \dots + a_n\alpha_{nm} = 0 \end{cases}$$

ta đều có

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq \sum_{k=1}^n a_k.$$

Chứng minh. Để chứng minh định lý, ta nhắc lại bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân AM-GM: Với mỗi bộ số không âm $u_1, u_2, \dots, u_n$, ta đều có

$$\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \geq \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = 1.$$

Sử dụng kết quả này, ta thu được

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k x_1^{\alpha_{k1}} x_2^{\alpha_{k2}} \dots x_n^{\alpha_{km}}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$.

Nhận xét 2.1. Với mọi hàm số dạng

$$g(x) = \sum_{k=1}^m a_k x^{\alpha_k}; a_k \geq 0,$$

đặt

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_m &= p, \\ a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_m \alpha_m &= q, \end{aligned}$$

thì hàm số

$$f(x) := x^{-\frac{q}{p}} g(x)$$

là một hàm phân thức chính quy.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$f(x) = x^{-\frac{q}{p}} \sum_{k=1}^m a_k x^{\alpha_k} = \sum_{k=1}^m a_k x^{\alpha_k - \frac{q}{p}}$$

và vì vậy

$$\sum_{k=1}^m a_k \left(\alpha_k - \frac{q}{p} \right) = \sum_{k=1}^m a_k \alpha_k - \sum_{k=1}^m a_k \frac{q}{p} = q - p \frac{q}{p} = q - p = 0,$$

điều phải chứng minh.

Từ đây, ta thu được một kết quả quan trọng sau đây.

Định lý 2.2. Mọi hàm dạng

$$g(x) = \sum_{k=1}^m a_k x^{\alpha_k}; a_k \geq 0;$$

đều có tính chất

$$g(x) \geq g(1) x^{\frac{q}{p}}, \text{ với mọi } x > 0$$

trong đó

$$p = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$

$$q = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m.$$

Chứng minh. Thật vậy, theo nhận xét ở trên, ta có

$$f(x) = x^{-\frac{q}{p}} \sum_{k=1}^m a_k x^{\alpha_k}$$

là một phân thức chính quy, nên theo định lý 1.2, thì

$$f(x) \geq f(1).$$

Mà $f(1) = g(1)$, nên ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 2.3. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = x^{\alpha_1} + 2x^{\alpha_2} + 3x^{\alpha_3} + \cdots + 9x^{\alpha_9}; x > 0$$

Giải. Xét

$$\frac{f(x)}{45} = \frac{1}{45}x^{\alpha_1} + \frac{2}{45}x^{\alpha_2} + \frac{3}{45}x^{\alpha_3} + \cdots + \frac{9}{45}x^{\alpha_9} \geq x^{\frac{\alpha_1}{45}} \cdot x^{\frac{2\alpha_2}{45}} \cdots x^{\frac{9\alpha_9}{45}} = 1.$$

Suy ra $\frac{f(x)}{45} \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 45$. Do đó $\min f(x) = 45$ khi và chỉ khi $x = 1$.

2.2 Tính chất của hàm phân thức nhận giá trị hữu tỷ

Trong phần này ta xét một số tính chất của phân thức hữu tỷ tương tự như đối với số hữu tỷ trong số học.

Trước tiên, ta xét một số dạng toán liên quan đến đa thức nhận giá trị hữu tỷ và đa thức nhận giá trị nguyên.

Bài toán 2.1. Xác định các hệ số của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ để $f(x) \in \mathbb{Q}$ khi $x \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Viết đa thức $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = \alpha \frac{(x-1)(x-2)}{2} + \beta(x-1) + \gamma, \quad (2.3)$$

trong đó

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha}{2} \\ b = -\frac{3}{2}\alpha + \beta \\ c = \alpha = \beta + \gamma \end{cases}$$

Từ (2.3), ta thu được $f(x) \in \mathbb{Q}$ khi $x \in \mathbb{N}^*$ khi và chỉ khi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}$ khi $x \in \mathbb{N}^*$ là các hệ số a, b, c hữu tỷ.

Bây giờ ta chuyển sang chứng minh kết quả của bài toán tổng quát.

Định lý 2.3. Đa thức

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

thỏa mãn điều kiện $P(x) \in \mathbb{Q}$ khi $x \in \mathbb{N}^*$, điều kiện cần và đủ là các hệ số của đa thức đã cho đều là số hữu tỷ.

Chứng minh. Viết đa thức $P(x)$ dưới dạng

$$P(x) = p_0 \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!} + p_1 \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{(n-1)!} + \cdots + p_n, \quad (2.4)$$

trong đó

$$\begin{cases} a_0 = \frac{p_0}{n!} \\ a_1 = -\frac{1+2+\cdots+n}{n!}p_0 + \frac{1}{(n-1)!}p_1 \\ \cdots \\ a_n = p_0 - p_1 + \cdots - p_{n-1} + p_n \end{cases}$$

Từ (2.4), ta thu được $P(x) \in \mathbb{Q}$ khi $x \in \mathbb{N}^*$ khi và chỉ khi $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Q}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để đa thức $P(x) \in \mathbb{Q}$ khi $x \in \mathbb{N}^*$ là tất cả các hệ số của nó là các số hữu tỷ.

Bài toán 2.2. Xác định các hệ số của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ để $f(x) \in \mathbb{Z}$ khi $x \in \mathbb{N}^*$.

Giải. Viết tam thức bậc hai $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = \alpha \frac{(x-1)(x-2)}{2} + \beta(x-1) + \gamma, \quad (2.5)$$

trong đó

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha}{2} \\ b = -\frac{3}{2}\alpha + \beta \\ c = \alpha = \beta + \gamma \end{cases}$$

Từ (2.5), sử dụng tính chất của số học là tích của 2 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 2 ta thu được kết luận $f(x) \in \mathbb{Z}$ với $x \in \mathbb{N}^*$ khi và chỉ khi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}$ khi $x \in \mathbb{N}^*$ là các hệ số a, b, c có dạng

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha}{2} \\ b = -\frac{3}{2}\alpha + \beta \\ c = \alpha = \beta + \gamma \end{cases}$$

trong đó $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

Dựa vào kết quả và phương pháp chứng minh của bài toán này, ta có thể giải bài toán tổng quát.

Bài toán 2.3. Cho $1 < n \in \mathbb{N}$. Xác định các hệ số của đa thức

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \text{ để } P(x) \in \mathbb{Z} \text{ khi } x \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Viết đa thức $P(x)$ dưới dạng

$$P(x) = p_0 \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} + p_1 \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{(n-1)!} + \dots + p_n, \quad (2.6)$$

trong đó

$$\begin{cases} a_0 = \frac{p_0}{n!} \\ a_1 = -\frac{1+2+\dots+n}{n!}p_0 + \frac{1}{(n-1)!}p_1 \\ \dots \\ a_n = p_0 - p_1 + \dots - p_{n-1} + p_n \end{cases}$$

Từ (2.6) và sử dụng tính chất của số học là tích của n số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho $n!$, ta thu được kết luận: $P(x) \in \mathbb{Z}$ với $x \in \mathbb{N}^*$ khi và chỉ

khi

$$\begin{cases} a_0 = \frac{p_0}{n!} \\ a_1 = -\frac{1+2+\dots+n}{n!}p_0 + \frac{1}{(n-1)!}p_1 \\ \dots \\ a_n = p_0 - p_1 + \dots - p_{n-1} + p_n \end{cases}$$

trong đó $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$.

Bây giờ ta chuyển sang xét tính chất của hàm phân thức hữu tỷ.

Bài toán 2.4. Chứng minh rằng nếu hàm phân thức

$$Q(x) := \frac{1}{cx + d} \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*, \quad (2.7)$$

thì $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = \frac{A}{Cx + D}, \quad (2.8)$$

trong đó $A, C, D \in \mathbb{Z}$.

Giải. Theo giả thiết thì $H(x) = cx + d \in \mathbb{Q}$, do đó theo bài toán ?? thì các hệ số c, d là các số hữu tỷ. Vậy $c = \frac{M_1}{N_1}$ và $d = \frac{M_2}{N_2}$, trong đó M_1, M_2, N_1, N_2 là các số nguyên. Từ đây ta có

$$Q(x) := \frac{1}{cx + d} = \frac{1}{\frac{M_1}{N_1}x + \frac{M_2}{N_2}} = \frac{N_1N_2}{M_1N_2x + M_2N_1}, \quad (2.9)$$

đpcm.

Bài toán 2.5. Chứng minh rằng nếu hàm phân thức

$$Q(x) := \frac{ax + b}{cx + d} \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*, \quad (2.10)$$

thì $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D}, \quad (2.11)$$

trong đó $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$.

Giải. Xét $Q(x) - Q(1)$. Theo định lý phân tích phân thức hữu tỷ thành nhân tử (xem Định lý 1.3), ta thu được

$$\frac{Q(x) - Q(1)}{x - 1} = \frac{e}{cx + d} \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*, n > 1.$$

Theo kết quả của Bài toán 2.4 thì

$$\frac{Q(x) - \frac{M_3}{N_3}}{x-1} = \frac{M}{Cx + D},$$

trong đó M_3, N_3, M, C, D là các số nguyên. Từ đây, chuyển vế ta thu được biểu diễn (2.11).

Bài toán 2.6. Chứng minh rằng nếu hàm phân thức

$$Q(x) := \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

thì $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{Dx + E}, \quad (2.13)$$

trong đó $A, B, C, D, E \in \mathbb{Z}$.

Giải. Xét $Q(x) - Q(1)$. Theo định lý phân tích phân thức hữu tỷ thành nhân tử (xem Định lý 1.3), ta thu được

$$\frac{Q(x) - Q(1)}{x-1} = \frac{px + q}{cx + d} \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*, n > 1.$$

Theo kết quả của Bài toán 2.5 thì

$$\frac{Q(x) - \frac{M_3}{N_3}}{x-1} = \frac{M_1x + N_1}{M_2x + N_2},$$

trong đó $M_3, N_3, M_2, N_2, M_1, N_1$ là các số nguyên. Từ đây, chuyển vế ta thu được biểu diễn (2.13).

Bài toán 2.7. Chứng minh rằng nếu hàm phân thức

$$Q(x) := \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad (2.14)$$

thì $Q(x)$ có dạng

$$Q(x) = Cx + D \text{ hoặc } Q(x) = Ax^2 + Bx + C \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad (2.15)$$

trong đó $C, D \in \mathbb{Z}$.

Giải. Nhận xét rằng nếu $d = 0$ thì ta có ngay kết luận

$$Q(x) = Ax^2 + Bx + C \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

Xét trường hợp $d \neq 0$. Khi đó ta viết (2.14) dưới dạng

$$\frac{Q(x) - Q(0)}{x} = \frac{a_1x + b_1}{dx + e} \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Theo Bài toán 2.5 thì

$$\frac{Q(x) - M}{x} = \frac{A_1x + B_1}{Dx + E},$$

với A_1, B_1, D, E, M là các số nguyên. Vậy nên

$$\frac{Q(x) - M}{x} = \frac{A_1}{D} + \frac{A_2}{Dx + E} \in \mathbb{Z}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^* \quad (2.16)$$

với A_1, A_2, D, E, M là các số nguyên.

Từ đây suy ra $A_2 = 0$ và vì vậy A_1 chia hết cho D , ta thu được đpcm.

Bài toán 2.8. Cho hàm phân thức hữu tỷ

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \in \mathbb{Q} \quad \forall x \in \mathbb{Z}, (P(x)Q(x)) = 1.$$

Chứng minh rằng $f(x)$ có thể biểu diễn được dưới dạng phân thức của hai đa thức với hệ số nguyên.

Giải. Giả sử

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m,$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n.$$

Tại $x = j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m+n$) hàm $f(x)$ nhận các giá trị hữu tỷ tương ứng là c_j . Khi đó ta có hệ phương trình tuyến tính với $m+n+2$ ẩn

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$$

có dạng

$$a_0 + a_1k + \cdots + a_mk^m - b_0c_k - b_1c_k - \cdots - b_nc_kk^n = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m+n.$$

Hai nghiệm của hệ này cho ta hai cặp đa thức tương ứng $P(x), Q(x)$ và $P_1(x), Q_1(x)$ có tính chất

$$P(k) - c_kQ(k) = 0, P_1(k) - c_kQ_1(k) = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, m+n.$$

Hai cặp nghiệm này cho ta đa thức

$$g(x) = P(x)Q_1(x) - P_1(x)Q(x), \deg g(x) \leq m + n$$

nhận giá trị 0 tại $m + n + 1$ điểm nên $g(x) \equiv 0$. Do $P(x), Q(x)$ nguyên tố cùng nhau nên $P(x) = cP_1(x), Q(x) = cQ_1(x)$. Vậy hệ đã cho chỉ có một nghiệm với sự sai khác một tỷ lệ và như vậy tồn tại ma trận cấp $m + n + 1$ trong ma trận hệ số của hệ phương trình để định thức của nó khác 0 và nghiệm nhận được là các số hữu tỷ, điều phải chứng minh.

Nhận xét 2.2. Ta cũng có thể giải bài toán này bằng phương pháp quy nạp toán học dựa trên kết quả của các bài toán đã giải ở mục này (Bài toán 2.4).

2.3 Dãy số sinh bởi hàm phân thức hữu tỷ

Bài toán 2.9. Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi :

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{3a_n}\right) \quad \text{với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , số $A_n = \frac{3}{3a_n^2 - 1}$ là một số chính phương.

Giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng $3A_{n+1} = 4A_n(A_n + 3)$ với mọi n nguyên dương.

Thật vậy, ta có

$$A_n + 3 = \frac{3}{3a_n^2 - 1} + 3 = \frac{9a_n^2}{3a_n^2 - 1}$$

nên

$$4A_n(A_n + 3) = 36A_n \frac{9a_n^2}{3a_n^2 - 1} = \frac{108a_n^2}{(3a_n^2 - 1)^2}.$$

Mặt khác, thì

$$3A_{n+1} = \frac{9}{3a_n^2 - 1} = \frac{9}{3 \cdot \frac{1}{2^2}\left(a_n + \frac{1}{3a_n}\right)^2 - 1},$$

điều phải chứng minh.

Hơn nữa, ta tính được $A_n = 9$ nên dễ dàng thấy rằng A_n luôn chia hết cho 3 với mọi n .

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $\frac{A_n}{3} + 1$ là số chính phương với mọi n .

Với $n = 1$, thì $\frac{A_1}{3} + 1 = 4$ là một số chính phương.

Giả sử với $n = k$, mệnh đề trên cũng đúng, tức là tồn tại số tự nhiên p sao cho $\frac{A_k}{3} + 1 = p^2$.

Ta có

$$\frac{A_{k+1}}{3} + 1 = \frac{4A_k(A_k + 3)}{9} + 1 = 4 \cdot \frac{A_k}{3} \cdot \left(1 + \frac{A_k}{3}\right) + 1 = 4p^2(p^2 - 1) + 1 = (2p^2 - 1)^2$$
cũng là một số chính phương.

Suy ra $\frac{A_n}{3} + 1$ cũng đúng với $n = k + 1$, điều phải chứng minh.

Từ $3A_{n+1} = 4A_n(A_n + 3)$ suy ra $A_{n+1} = 4A_n \cdot \left(\frac{A_n}{3} + 1\right)$ ta cũng dễ dàng chứng minh được bằng quy nạp rằng A_n là số chính phương với mọi n .

Bài toán 2.10 (VMO 1982). Giả sử a và z là những số thực, n là số nguyên dương. Nếu $0 \leq a \leq 1$ và $a^{n+1} \leq z \leq 1$ thì ta có

$$\prod_{k=1}^n \left| \frac{z - a^k}{z + a^k} \right| \leq \prod_{k=1}^n \frac{1 - a^k}{1 + a^k}.$$

Giải Nếu $a = 1$ thì $z = 1$ và bất đẳng thức đúng vì hai vế đều bằng không.

Nếu $a = 0$ thì cả hai vế đều bằng 1 và bất đẳng thức cũng đúng.

Xét $0 < a < 1$. Vì $1 > a > a^2 > \dots > a^n > 0$ và $a^{n+1} \leq z \leq 1$

nên có số n nguyên dương r để $a^{r+1} < z \leq a^r$.

Vậy $\left| \frac{z - a^k}{z + a^k} \right| = \frac{z - a^k}{z + a^k}$ khi $k > r$

và $\left| \frac{z - a^k}{z + a^k} \right| = -\frac{z - a^k}{z + a^k}$ khi $k \leq r$

ta có

$$\left| \frac{z - a^k}{z + a^k} \right| - \frac{1 - a^k}{1 + a^k} = \frac{z - a^k}{z + a^k} - \frac{1 - a^k}{1 + a^k} = \frac{2a^k(z - 1)}{(1 + a^k)(z + a^k)} \leq 0, k > r$$

$$\left| \frac{z - a^i}{z + a^i} \right| - \frac{1 - a^k}{1 + a^k} = \frac{a^i - z}{z + a^i} - \frac{1 - a^k}{1 + a^k} = \frac{2a^{r+1-z}}{(1 + a^k)(z + a^i)} \leq 0, k, i \leq r$$

và chọn $i + k = r + 1$. Từ các bất đẳng thức trên suy ra hai bất đẳng thức sau:

$$\prod_{k=1}^n \left| \frac{z - a^k}{z + a^k} \right| \leq \prod_{k=1}^n \frac{1 - a^k}{1 + a^k} \cdot \text{và} \quad \prod_{k=r+1}^n \left| \frac{z - a^k}{z + a^k} \right| \leq \prod_{k=r+1}^n \frac{1 - a^k}{1 + a^k}.$$

$$\text{Do đó nhận được } \prod_{k=1}^n \left| \frac{z - a^k}{z + a^k} \right| \leq \prod_{k=1}^n \frac{1 - a^k}{1 + a^k}.$$

Ta nhắc lại định nghĩa về dãy tuần hoàn.

Định nghĩa 2.4. Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại số $s \in \mathbb{N}^*$ sao cho $u_{n+s} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Số s như vậy được gọi là chu kỳ của dãy. Chu kỳ (nguyên dương) nhỏ nhất của một dãy số tuần hoàn còn được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy số đó. Trong thực hành, để chứng minh một dãy số là tuần hoàn không nhất thiết phải xác định chu kỳ cơ sở của nó.

Từ định nghĩa trên ta thấy ngay một dãy số là tuần hoàn chu kỳ 1 khi và chỉ khi dãy số đó là dãy số hằng. Bởi vậy, nói đến chu kỳ của một dãy số tuần hoàn, khác dãy hằng, hiển nhiên ta phải coi chu kỳ đó lớn hơn 1.

Bài toán 2.11. Cho dãy số u_n xác định bởi $u_1 = 2$; $u_n + 1 = \frac{2 + u_n}{1 - 2u_n}$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng

- a) $u_n \neq 0$ với mọi n nguyên dương.
- b) Dãy không tuần hoàn.

Giải. Chọn α là góc sao cho $\tan \alpha = 2$, khi đó

$$u_1 = \tan \alpha; u_2 = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \tan 2\alpha$$

Bằng phương pháp quy nạp ta có $u_n = \tan n\alpha$.

$$\text{Mặt khác } u_{n+1} = \frac{2 + u_n}{1 - 2u_n} = \frac{2 + \tan(n\alpha)}{1 - 2 \tan(n\alpha)} = \frac{\tan \alpha + \tan(n\alpha)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(n\alpha)}.$$

Vậy

$$u_{n+1} = \tan(n+1)\alpha$$

- a) Từ công thức $u_n = \tan(n\alpha)$ ta suy ra $u_{2n} = \frac{2u_n}{1 - u_n^2}$. Từ đó suy ra nếu tồn tại n sao cho $u_n = 0$ thì sẽ tồn tại n lẻ để $u_n = 0$.

Giả sử $u_2s + 1 = 0$ tức là $\frac{2 + u_2s}{1 - 2u_2s} = 0$ khi đó $u_2s = -2$ và ta có $-2 = u_2s = \frac{2u_s}{1 - u_2s}$. Do đó $U_s^2 + u_s - 1 = 0$, suy ra u_k vô tỷ.

Điều này vô lý vì theo công thức truy hồi đã cho trong giả thiết thì u_k là hữu tỷ. Vậy $u_n \neq 0$ với mọi n nguyên dương.

b) Giả sử dãy số đã cho là dãy số tuần hoàn.

Khi đó tồn tại hai số nguyên dương n và k , ($n > k$) sao cho $u_n = u_k$ hay $\tan n\alpha = \tan k\alpha \Rightarrow (n - k)\alpha = m\pi \Rightarrow u_{n-k} = 0$. Mâu thuẫn với kết quả phần a) điều này chứng tỏ dãy u_n đã cho không tuần hoàn

Bài toán 2.12. Cho hàm số $f(x) = \frac{x \tan \frac{\pi}{4} - 1}{x + \tan \frac{\pi}{4}}$.

Chứng minh rằng hàm số đã cho là hàm tuần hoàn với chu kỳ bằng 3.

Giải. Ta có

$$f(x) = \frac{x \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}}{x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}}.$$

Suy ra

$$f(f(x)) = \frac{x \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} - x \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{x}.$$

Biến đổi tương tự như trên, ta được $f(f(f(x))) = x$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn với chu kỳ 3.

Bài toán 2.13. Cho hàm số $f(x) = \frac{x \tan \frac{\pi}{3} - 1}{x + \tan \frac{\pi}{3}}$. Chứng minh rằng hàm số

đã cho là hàm tuần hoàn với chu kỳ bằng 6.

Giải. Ta có $f(x) = \frac{x \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}}{x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}}$. Suy ra

$$f(f(x)) = \frac{x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{2\pi}{3} - x \sin \frac{2\pi}{3}},$$

$$f(f(f(x))) = \frac{x \sin 0 - \cos \pi}{x \cos \pi + \sin \pi} = \frac{-1}{x},$$

$$f(f(f(f(x)))) = -\frac{x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}}{x \sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}},$$

$$f(f(f(f(f(x)))))) = \frac{x \sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3}}{x \cos \frac{2\pi}{3} + x \sin \frac{2\pi}{3}},$$

$$f(f(f(f(f(f(x)))))) = \frac{x \cos \pi + \sin \pi}{\cos \pi - x \sin \pi} = x.$$

Bài toán 2.14. Giả sử $f(x) = \frac{\sqrt{3}x - 1}{x + \sqrt{3}}$. Xác định $g(x) = f(f \dots (f(x)) \dots)$.
(n lần f).

Giải. Ta viết

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6}}{x \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta dễ dàng chứng minh được

$$g(x) = \frac{x \cos \frac{n\pi}{6} - \sin \frac{n\pi}{6}}{x \sin \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{6}}.$$

Chương 3

Bất đẳng thức với các hàm phân thức hữu tỷ

3.1 Phương pháp bất đẳng thức Cauchy đối với hàm phân thức hữu tỷ

Trong mục này chúng ta thường sử dụng bất đẳng thức trung gian sau đây.

Bài toán 3.1 (xem [2]). Với a, b, c là những số thực dương, chứng minh rằng

$$a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n} \geq a^m b^n + b^m c^n + c^m a^n.$$

Giải. Ta có $\frac{m \cdot a^{m+n} + nb^{m+n}}{m+n} \geq a^m b^n$ (bất đẳng thức Cauchy với $m+n$ số),

$$\frac{mb^{m+n} + nc^{m+n}}{m+n} \geq b^m c^n,$$

$$\frac{mc^{m+n} + na^{m+n}}{m+n} \geq c^m a^n.$$

Cộng các vế tương ứng của ba bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Để có được phương pháp giải đối với các bất đẳng thức dạng phân thức đơn giản này chúng ta rút ra những nhận xét từ những bài toán cụ thể.

Bài toán 3.2 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Giải. Ta có :

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{b^2} + ab^2 &\geq 2a^3 \\ \frac{b^5}{c^2} + bc^2 &\geq 2b^3 \\ \frac{c^5}{a^2} + ca^2 &\geq 2c^3 \\ a^3 + b^3 + c^3 &\geq ab^2 + bc^2 + ca^2\end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét 3.1. Để mô tả các số hạng của vế phải ta phải sử dụng các số hạng có chứa mẫu số của các số hạng vế trái như ab^2, bc^2, ca^2 .

Bài toán 3.3 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ca} + \frac{c^5}{ab} \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Giải. Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{bc} + abc &\geq 2a^3 \\ \frac{b^5}{ca} + abc &\geq 2b^3 \\ \frac{c^5}{ab} + abc &\geq 2c^3 \\ a^3 + b^3 + c^3 &\geq 3abc\end{aligned}$$

Cộng bốn bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.4 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}.$$

Giải. Ta có $\frac{a^5}{b^3} + ab \geq 2 \cdot \frac{a^3}{b}$.

$$\text{Suy ra } \frac{a^5}{b^3} + 2ab \geq \frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{b} + ab \geq \frac{a^3}{b} + 2a^2.$$

Tương tự, cũng có

$$\frac{b^5}{c^3} + 2bc \geq \frac{b^3}{c} + 2b^2$$

$$\frac{c^5}{a^3} + 2ca \geq \frac{c^3}{a} + 2c^2$$

Sử dụng bất đẳng thức $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$.

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.5 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương phân biệt thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a^{102}}{b^{100}} + \frac{b^{102}}{c^{100}} + \frac{c^{102}}{a^{100}} < 1.$$

Chứng minh rằng luôn tồn tại các số thực tự nhiên k ($0 \leq k \leq 99$) sao cho bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{a^{k+3}}{b^{k+1}} + \frac{b^{k+3}}{c^{k+1}} + \frac{c^{k+3}}{a^{k+1}} \leq \frac{1}{100} + \frac{a^{k+2}}{b^k} + \frac{b^{k+2}}{c^k} + \frac{c^{k+2}}{a^k}.$$

Giải. Vì a, b, c là các số dương phân biệt nên ta có dãy bất đẳng thức sau:

$$0 < a^2 + b^2 + c^2 < \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} < \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} < \dots < \frac{a^{102}}{b^{100}} + \frac{b^{102}}{c^{100}} + \frac{c^{102}}{a^{100}} < 1.$$

Chia đoạn $[0, 1]$ thành 100 đoạn nhỏ bằng nhau có độ dài $\frac{1}{100}$. Suy ra từ 101 biểu thức phải có hai biểu thức cùng thuộc một đoạn. Từ kết luận đó ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét 3.2. Để sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta cần chú ý

1. Thêm các hệ số để dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra.
2. Có thể thêm nhiều số hạng khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy khử mẫu số.

Bài toán 3.6 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{9a^3}{a+2b} + a(a+2b) &\geq 6a^2 \\ \frac{9b^3}{b+2c} + b(b+2c) &\geq 6b^2 \\ \frac{9c^3}{c+2a} + c(c+2a) &\geq 6c^2\end{aligned}$$

và kết hợp với $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca)$.

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.7 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(b+c)^2} + \frac{b^3}{(c+a)^2} + \frac{c^3}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{8a^3}{(b+c)^2} + (b+c) + (b+c) &\geq 6a, \\ \frac{8b^3}{(c+a)^2} + (c+a) + (c+a) &\geq 6b, \\ \frac{8c^3}{(a+b)^2} + (a+b) + (a+b) &\geq 6c.\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.8 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{4a^3}{b(c+a)} + 2b + (c+a) &\geq 6a, \\ \frac{4b^3}{c(a+b)} + 2c + (a+b) &\geq 6b, \\ \frac{4c^3}{a(b+c)} + 2a + (b+c) &\geq 6c.\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.9 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{bc^2} + \frac{b^4}{ca^2} + \frac{c^4}{ab^2} \geq a + b + c.$$

Giải. Ta có

$$\frac{a^4}{bc^2} + b + c + c \geq 4a,$$

$$\frac{b^4}{ca^2} + c + a + a \geq 4b,$$

$$\frac{c^4}{ab^2} + a + b + b \geq 4c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.10 (xem [4]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4}(a+b+c).$$

Giải. Ta có:

$$\frac{8a^3}{(a+b)(b+c)} + (a+b) + (b+c) \geq 6a$$

$$\frac{8b^3}{(b+c)(c+a)} + (b+c) + (c+a) \geq 6b$$

$$\frac{8c^3}{(c+a)(a+b)} + (c+a) + (a+b) \geq 6c$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 3.11 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Giải. Ta có bất đẳng thức

$$\frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{b^2} + \frac{a^3}{c^2} \geq a + b + c$$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^3}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^3}{\left(\frac{1}{b}\right)^2} + \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{\left(\frac{1}{c}\right)^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}, \quad (\text{đpcm}).$$

Bài toán 3.12 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương phân biệt thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3abc$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{bc}{a^3(c+2b)} + \frac{ca}{b^3(a+2c)} + \frac{ab}{c^3(b+2a)} \geq 1.$$

Giải. Ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2). \quad (3.1)$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} \frac{9a^3}{b+2c} + a(b+2c) &\geq 6a^2 \\ \frac{9b^3}{c+2a} + b(c+2a) &\geq 6b^2 \\ \frac{9c^3}{a+2b} + c(a+2b) &\geq 6c^2 \\ 3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 3(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức (3.1). Áp dụng (3.1), ta thu được

$$\begin{aligned} P &= \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{b} + \frac{2}{c}} + \frac{\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{c} + \frac{2}{a}} + \frac{\frac{1}{c^3}}{\frac{1}{a} + \frac{2}{b}} \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{a+b+c}{abc} \right) = 1, \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Bài toán 3.13 (xem [2]). Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq ab^2 + bc^2 + ca^2.$$

Giải. Ta có

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2, \quad (\text{đpcm}).$$

Tiếp theo, xét một số ví dụ liên quan đến ước lượng một số dạng phân thức hữu tỷ cụ thể.

Bài toán 3.14 (xem [2]). Cho p là một số nguyên dương, $q \in (0, 1)$. Giả sử $x \in [q^{p+1}, 1]$ và

$$f(x) = \prod_{k=1}^p \frac{x - p^k}{x + q^k}.$$

Chứng minh rằng

$$f(x) \leq \prod_{k=1}^p \frac{1 - q^k}{1 + q^k}.$$

Chứng minh. Ta có

$$0 < q^{p+1} < q^p < \dots < q < 1.$$

Với $q^{j+1} \leq x \leq q^j$ thì khi $i \geq j + 1$, ta có $x \geq q^i$.

Vậy nên

$$\left| \frac{x - q^i}{x + q^i} \right| = \frac{x - q^i}{x + q^i}.$$

Xét hiệu

$$\frac{x - q^i}{x + q^i} - \frac{1 - q^i}{1 + q^i} = \frac{2q^i(x - 1)}{(x + q^i)(1 + q^i)} \leq 0.$$

Do đó

$$\prod_{k=j+1}^p \left| \frac{x - p^k}{x + q^k} \right| \leq \prod_{k=j+1}^p \frac{1 - q^k}{1 + q^k}. \quad (3.2)$$

Với $k = 1, 2, \dots, j$, thì ta có

$$\left| \frac{x - q^{j-(k-1)}}{x + q^{j-(k-1)}} \right| = \frac{q^{j-(k-1)} - x}{q^{j-(k-1)} + x}.$$

Ta có

$$\frac{q^{j-(k-1)} - x}{q^{j-(k-1)} + x} - \frac{1 - q^k}{1 + q^k} = \frac{2(q^{j+1} - x)}{(1 + q^k)[x + q^{j-(k-1)}]} \leq 0.$$

Vậy nên

$$\prod_{k=1}^j \left| \frac{x - q^k}{x + q^k} \right| \leq \prod_{k=1}^j \frac{1 - q^k}{1 + q^k}. \quad (3.3)$$

Từ (3.2) và (3.3), ta thu được

$$\prod_{k=1}^p \left| \frac{x - q^k}{x + q^k} \right| \leq \prod_{k=1}^p \frac{1 - q^k}{1 + q^k}.$$

hay

$$|f(x)| \leq \prod_{k=1}^p \frac{1 - q^k}{1 + q^k}.$$

Bài toán 3.15 (xem [2]). Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$ và $\sum_{k=1}^n a_k = 1$. Với $a \in (0, 1)$ và $a > a_k$ với mọi k , ta luôn có bất đẳng thức

$$\prod_{k=1}^n \frac{a - a_k}{a + a_k} < \frac{\prod_{k=1}^n (1 - a_k)}{(n + 1)^n \prod_{k=1}^n a_k}.$$

Giải. Theo Định lý 1.3, thì

$$\frac{a - \gamma}{a + \gamma} - \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} = \frac{2\gamma(a - 1)}{(a + \gamma)(1 + \gamma)} < 0$$

ứng với mọi $\gamma \in (0, a)$.

Như vậy

$$\prod_{k=1}^n \frac{a - a_k}{a + a_k} < \frac{\prod_{k=1}^n (1 - a_k)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k)}.$$

Bởi vì bất đẳng thức

$$1 + a_k = \sum_{i=1}^n a_i + a_k \geq (n + 1) \sqrt[n+1]{a_k \prod_{i=1}^n a_i}$$

đúng cho mỗi k , nên ta có

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq (n + 1)^n \prod_{k=1}^n a_k.$$

Vậy nên

$$\prod_{k=1}^n \frac{a - a_k}{a + a_k} < \frac{\prod_{k=1}^n (1 - a_k)}{(n + 1)^n \prod_{k=1}^n (a_k)}.$$

3.2 Kỹ thuật cộng mẫu số Engel của bất đẳng thức Chebyshev

Như các bạn đã biết Bất đẳng thức Chebyshev là một công cụ mạnh để giải quyết một lớp các bất đẳng thức. Trước khi đến với bài viết này tôi xin nhắc lại một chút về bất đẳng thức này.

3.2.1 Bất đẳng thức Chebyshev và Chebyshev dạng Engel

1a. Bất đẳng thức Chebyshev trên 2 dãy đơn điệu cùng chiều.

Cho 2 dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó, nếu có

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$$

thì ta có

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Đấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

Bất đẳng thức Chebyshev suy rộng:

Nếu

$$\begin{cases} a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} a_1 \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \dots \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \leq \dots \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \end{cases}$$

thì $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$.

1b. Bất đẳng thức Chebyshev trên 2 dãy đơn điệu ngược chiều

Cho 2 dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó, nếu có

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$$

thì ta có

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

Bất đẳng thức Chebyshev suy rộng.

Nếu

$$\begin{cases} a_1 \geq \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \dots \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \leq \dots \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} a_1 \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \dots \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \\ b_1 \geq \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \dots \geq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \end{cases}$$

thì $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$.

Bây giờ trở lại với bài toán. Nếu ta thay dãy $b_1, b_2, \dots, b_n$ bởi dãy $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ thì khi đó

2a. Nếu có

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \end{cases}$$

thì ta có:

$$n \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

2b. Nếu có

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \end{cases}$$

thì ta có

$$n \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right).$$

Tuy nhiên trong một số trường hợp, ta không thể đánh giá theo 2 dãy này. Khi đó ta có một cách khác phục, đó là

3a. Nếu có $\begin{cases} \frac{a_1}{x_1} \geq \frac{a_2}{x_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{x_n} \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \frac{a_1}{x_1} \leq \frac{a_2}{x_2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{x_n} \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \end{cases}$ thì ta có

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \leq \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Chứng minh. theo 1a, ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right) (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ & \leq n \left(\frac{a_1}{x_1} x_1 + \frac{a_2}{x_2} x_2 + \dots + \frac{a_n}{x_n} x_n \right) = n(a_1 + a_2 + \dots + a_n). \end{aligned}$$

Do đó $\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \leq \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$.

3b. Nếu có

$$\begin{cases} \frac{a_1}{x_1} \leq \frac{a_2}{x_2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{x_n} \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \end{cases}$$

hoặc

$$\begin{cases} \frac{a_1}{x_1} \geq \frac{a_2}{x_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{x_n} \\ x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \end{cases}$$

thì ta có

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \geq \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Chứng minh. theo 1b, ta có

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \right) (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ & \geq n \left(\frac{a_1}{x_1} x_1 + \frac{a_2}{x_2} x_2 + \dots + \frac{a_n}{x_n} x_n \right) = n(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

Do đó $\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \geq \frac{n(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$

Mặc dù hai bất đẳng thức này được phát biểu đơn giản và được suy ra từ bất đẳng thức Chebyshev cổ điển, trong một số trường hợp, việc đánh giá theo 2a và 2b nhiều khi không hiệu quả. Vì thế, 3a và 3b kết hợp với việc thêm biến thích hợp lại trở nên hiệu quả đối với các bất đẳng thức đối xứng ba biến có chứa hàm phân thức hữu tỷ.

Ngoài ra ta còn có một dạng bất đẳng thức Chebyshev khác nữa là:

Với $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Nếu

$$\frac{a_1}{x_1} \geq \frac{a_2}{x_2} \geq \dots \geq \frac{a_n}{x_n}, \frac{b_1}{x_1} \geq \frac{b_2}{x_2} \geq \dots \geq \frac{b_n}{x_n},$$

thì ta sẽ có

$$\frac{a_1 b_1}{x_1} + \frac{a_2 b_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n b_n}{x_n} \geq \frac{1}{n} \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

Bất đẳng thức này đúng và hoàn toàn có thể chứng minh bằng quy nạp.

3.2.2 Phương pháp cộng mẫu số Engel

Bài toán 3.16 (Italia - 2007). Cho các số thực dương a, b, c sao cho $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \geq 1$.

Chứng minh rằng $a + b + c \geq ab + bc + ca$.

Giải. Ta có

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} = \frac{a}{a+ab+ac} + \frac{b}{b+bc+ba} + \frac{c}{c+ca+cb}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ thì $a + ab + ac \geq b + bc + ca \geq c + ca + cb$ và

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+ab+ac} &\geq \frac{b}{b+bc+ba} \geq \frac{c}{c+ca+cb} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a+b} \geq \frac{1}{1+b+c} \geq \frac{1}{1+c+a} \\ &\Leftrightarrow b+c \leq c+a \leq a+b. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng.

Từ đó theo 3a, thì

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} &= \frac{a}{a+ab+ac} + \frac{b}{b+bc+ba} + \frac{c}{c+ca+cb} \\ &\leq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+2(ab+bc+ca)}. \end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết ta suy ra

$$\frac{3(a+b+c)}{a+b+c+2(ab+bc+ca)} \geq 1 \Rightarrow a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 3.17. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+\tan A+\tan B} + \frac{1}{1+\tan B+\tan C} + \frac{1}{1+\tan C+\tan A} \leq \frac{3}{1+2\sqrt{3}}$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+\tan A+\tan B} + \frac{1}{1+\tan B+\tan C} + \frac{1}{1+\tan C+\tan A} \\ &\leq \frac{3(\tan A + \tan B + \tan C)}{\tan A + \tan B + \tan C + 2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A)} \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức $ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}$ và đẳng thức $\sum \tan A = \prod \tan A$, ta có

$$\begin{aligned} & \frac{3(\tan A + \tan B + \tan C)}{\tan A + \tan B + \tan C + 2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A)} \\ &= \frac{3}{1 + \frac{2(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A)}{\tan A + \tan B + \tan C}} \\ &\leq \frac{3}{1 + 2\sqrt{\frac{3\prod \tan A(\sum \tan A)}{\sum \tan A}}} = \frac{3}{1 + 2\sqrt{\frac{3\prod \tan A}{\sum \tan A}}} = \frac{3}{1 + 2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài toán 3.18. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab + \frac{9}{4}}{ab + a + b} + \frac{bc + \frac{9}{4}}{bc + b + c} + \frac{ca + \frac{9}{4}}{ca + c + a} \geq \frac{13}{4}.$$

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có $(a+1)(b-c) \geq 0$ nên $ab + a + b \geq ac + a + c$,

tương tự ta suy ra $ab + a + b \geq ac + a + c \geq bc + b + c$.

Lại có $\frac{ab + \frac{9}{4}}{ab + a + b} \leq \frac{ca + \frac{9}{4}}{ca + c + a} \Leftrightarrow (b-c)(3-a)\left(a + \frac{3}{4}\right) \geq 0$ (luôn đúng).

Tương tự, ta suy ra $\frac{ab + \frac{9}{4}}{ab + a + b} \leq \frac{ca + \frac{9}{4}}{ca + c + a} \leq \frac{bc + \frac{9}{4}}{bc + b + c}$

Từ đó theo 3b, thì

$$\begin{aligned} \frac{ab + \frac{9}{4}}{ab + a + b} + \frac{bc + \frac{9}{4}}{bc + b + c} + \frac{ca + \frac{9}{4}}{ca + c + a} &\geq \frac{3(ab + bc + ca + \frac{27}{4})}{ab + bc + ca + 2(a + b + c)} \\ &= \frac{3(ab + bc + ca + 9)}{ab + bc + ca + 6}. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{3(\sum ab + 9)}{ab + bc + ca + 6} \geq \frac{13}{4} \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3$.

Bất đẳng thức trên đúng do $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$.

Vậy, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 3.19. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{1+ab} + \frac{c+a}{1+ca} + \frac{b+c}{1+bc} \leq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó $1+ab \geq 1+ac \geq 1+bc$.

Ta chỉ cần thiết lập thêm $\frac{a+b}{1+ab} \geq \frac{c+a}{1+ca} \geq \frac{b+c}{1+bc}$.

Thật vậy, ta có

$$\frac{a+b}{1+ab} \geq \frac{c+a}{1+ca} \Leftrightarrow (b-c)(1-a^2) \geq 0 \Leftrightarrow (b-c)(b^2+c^2) \geq 0.$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{c+a}{1+ca} \geq \frac{b+c}{1+bc} \Leftrightarrow (a-b)(a^2+b^2) \geq 0.$$

Do đó theo 3a, ta có

$$\frac{a+b}{1+ab} + \frac{c+a}{1+ca} + \frac{b+c}{1+bc} \leq \frac{6(a+b+c)}{3+ab+bc+ca}.$$

Và ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{6(a+b+c)}{3+ab+bc+ca} &\leq \frac{9}{2(a+b+c)} \Leftrightarrow 4(a+b+c)^2 \leq 3(3+ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2) + 8(ab+bc+ca) &\leq 9(a^2+b^2+c^2) + 3(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng, đpcm.

Bài toán 3.20 (Poland - 1992). Cho các số thực x, y, z sao cho $x+y+z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

Giải. Ta có

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leq \frac{|x|}{x^2+1} + \frac{|y|}{y^2+1} + \frac{|z|}{z^2+1}.$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $x, y, z > 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$ thì $x^2+1 \geq y^2+1 \geq z^2+1$.

Tiếp tục ta có

$$\frac{x}{x^2+1} \geq \frac{y}{y^2+1} \Leftrightarrow (x-y)(1-xy) \geq 0.$$

Do $1 = x + y + z \geq x + y \geq 2\sqrt{xy}$ nên $xy < 1$ và bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Tương tự ta suy ra

$$\frac{x}{x^2+1} \geq \frac{y}{y^2+1} \geq \frac{z}{z^2+1}.$$

Từ đó theo 3a, ta có

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \leq \frac{3(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2+3} \leq \frac{3}{\frac{1}{3}(x+y+z)^2+3} = \frac{9}{10}.$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài toán 3.21. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} \geq 1$. Chứng minh rằng $a + b + c \geq 3abc$.

Giải. Ta có

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} = \frac{a}{a+2abc} + \frac{b}{b+2abc} + \frac{c}{c+2abc}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$ thì $a+2abc \geq b+2abc \geq c+2abc$ và

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+2abc} &\geq \frac{b}{b+2abc} \geq \frac{c}{c+2abc} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1+2ab} &\geq \frac{1}{1+2ca} \geq \frac{1}{1+2bc} \Leftrightarrow ab \geq ac \geq bc. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng với $a \geq b \geq c$.

Từ đó theo 3a, ta có

$$\frac{1}{1+2ab} + \frac{1}{1+2bc} + \frac{1}{1+2ca} = \frac{a}{a+2abc} + \frac{b}{b+2abc} + \frac{c}{c+2abc} \leq \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+6abc}.$$

Kết hợp với giả thiết suy ra

$$\frac{3(a+b+c)}{a+b+c+6abc} \geq 1 \Rightarrow a+b+c \geq 3abc.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 3.22 (Mathlinks Contest). Cho các số thực dương a, b, c sao cho. Chứng minh

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{3}{1+2abc}.$$

Giải. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+2abc} - \frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+2abc} \\ & - \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+2abc} - \frac{1}{1+c^2(a+b)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a(1-bc)}{1+a(3-bc)} + \frac{b(1-ac)}{1+b(3-ac)} + \frac{c(1-ab)}{1+c(3-ab)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1-bc}{1+abc(3-bc)} + \frac{1-ac}{1+abc(3-ac)} + \frac{1-ab}{1+abc(3-ab)} \geq 0. \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, thì

$$1+abc(3-ab) \leq 1+abc(3-ac) \leq 1+abc(3-bc),$$

và

$$\frac{1-bc}{1+abc(3-bc)} \geq \frac{1-ac}{1+abc(3-ac)} \geq \frac{1-ab}{1+abc(3-ab)}$$

(do $3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2}$ nên $abc \leq 1$).

Do đó theo 3b, ta có

$$\frac{1-bc}{1+abc(3-bc)} + \frac{1-ac}{1+abc(3-ac)} + \frac{1-ab}{1+abc(3-ab)}$$

$$\geq \frac{3(1 - bc + 1 - ac + 1 - ab)}{1 + abc(3 - bc) + 1 + abc(3 - ac) + 1 + abc(3 - ab)} = 0.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 3.23 (Serbian National Olympiad 2008). Cho các số thực dương x, y, z sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{yz + x + \frac{1}{x}} + \frac{1}{zx + y + \frac{1}{y}} + \frac{1}{xy + z + \frac{1}{z}} \leq \frac{27}{31}.$$

Giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{x}{xyz + x^2 + 1} + \frac{y}{xyz + y^2 + 1} + \frac{z}{xyz + z^2 + 1} \leq \frac{27}{31}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó $xyz + x^2 + 1 \geq xyz + y^2 + 1 \geq xyz + z^2 + 1$.

Từ giả thiết này ta cũng có $\frac{x}{xyz + x^2 + 1} \geq \frac{y}{xyz + y^2 + 1}$.

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{1}{yz + x + \frac{1}{x}} \geq \frac{1}{zx + y + \frac{1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow yz + x + \frac{1}{x} \leq zx + y + \frac{1}{y} \Leftrightarrow (x - y) \left(\frac{1}{xy} - 1 + z \right) \geq 0.$$

Chú ý rằng từ điều kiện $1 = x + y + z \geq x + y \geq 2\sqrt{xy}$ suy ra $xy < 1$ nên $\frac{1}{xy} - 1 + z > 0$ và theo giả thiết trên $x \geq y$. Do đó bất đẳng thức trên là đúng.

Tương tự ta cũng suy ra được

$$\frac{y}{xyz + y^2 + 1} \geq \frac{z}{xyz + z^2 + 1} \Rightarrow \frac{x}{xyz + x^2 + 1} \geq \frac{y}{xyz + y^2 + 1} \geq \frac{z}{xyz + z^2 + 1}.$$

Do đó theo 3a, ta được

$$\left(\frac{x}{xyz + x^2 + 1} + \frac{y}{xyz + y^2 + 1} + \frac{z}{xyz + z^2 + 1} \right)$$

$$(xyz + x^2 + 1 + xyz + y^2 + 1 + xyz + z^2 + 1) \leq 3(x + y + z) = 3.$$

Suy ra

$$\frac{x}{xyz + x^2 + 1} + \frac{y}{xyz + y^2 + 1} + \frac{z}{xyz + z^2 + 1} \leq \frac{3}{3xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 3}.$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức Schur, ta có

$$\frac{9xyz}{x + y + z} \geq 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2),$$

suy ra

$$3xyz \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 - \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Vậy nên

$$3xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq \frac{10}{3} + \frac{1}{9}(x + y + z)^2 = \frac{31}{9}.$$

Do đó

$$\frac{x}{xyz + x^2 + 1} + \frac{y}{xyz + y^2 + 1} + \frac{z}{xyz + z^2 + 1} \leq \frac{3}{3xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 3} \leq \frac{27}{31}.$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

Bài toán 3.24. Cho các số thực dương a, b, c sao cho $ab + bc + ca + abc = 4$.

Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \geq (a + 2)(b + 2)(c + 2)$$

Giải. Từ điều kiện bài toán ta có thể đặt $a = \frac{2x}{y + z}, b = \frac{2y}{z + x}, c = \frac{2z}{x + y}$.

Và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{x + y}{z}} + \sqrt{\frac{y + z}{x}} + \sqrt{\frac{z + x}{y}}\right)^2 \geq \frac{8(x + y + z)^2}{(x + y)(y + z)(z + x)}.$$

Từ bất đẳng thức $(x + y)(y + z)(z + x) \geq \frac{8}{9}(x + y + z)(xy + yz + zx)$

ta chỉ cần chứng minh $\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{x + y}{z}} + \sqrt{\frac{y + z}{x}} + \sqrt{\frac{z + x}{y}}\right)^2 \geq \frac{9(x + y + z)^2}{xy + yz + zx},$

$$\text{hay } \sqrt{\frac{x + y}{z}} + \sqrt{\frac{y + z}{x}} + \sqrt{\frac{z + x}{y}} \geq \frac{\sqrt{6}(x + y + z)}{\sqrt{xy + yz + zx}}.$$

Ta có $\sqrt{\frac{x+y}{z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} = \frac{x+y}{\sqrt{xz+yz}} + \frac{x+z}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{y+z}{\sqrt{xy+zx}}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó $xz + yz \leq xy + yz \leq xy + zx$, và

$$\sqrt{\frac{x+y}{z}} \geq \sqrt{\frac{y+z}{x}} \geq \sqrt{\frac{z+x}{y}}.$$

Suy ra

$$\frac{x+y}{\sqrt{xz+yz}} \geq \frac{x+z}{\sqrt{xy+yz}} \geq \frac{y+z}{\sqrt{xy+zx}}.$$

Do đó theo 3b và từ bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+y}{z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} &= \frac{x+y}{\sqrt{xz+yz}} + \frac{x+z}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{y+z}{\sqrt{xy+zx}} \\ &\geq \frac{3(x+y+z+x+y+z)}{\sqrt{xz+yz} + \sqrt{xy+yz} + \sqrt{xy+zx}}. \end{aligned}$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

3.3 Dạng phân thức của các đa thức đối xứng cơ bản

Bài toán 3.25 (xem [4]). Cho số tự nhiên n ($n \geq 2$) và $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \frac{1}{1 + n(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}.$$

Giải. Đặt $1 - x_i = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Nhận xét rằng $0 \leq a_i \leq 1$ và bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{(1-a_1) + (1-a_2) + \dots + (1-a_n)}{n} \leq \frac{1}{1 + na_1a_2\dots a_n}$$

hay

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 + na_1a_2\dots a_n) \geq n^2a_1a_2\dots a_n.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n},$$

$$1 + na_1a_2\dots a_n \geq 1 + (n-1)a_1a_2\dots a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}.$$

Từ hai bất đẳng thức cuối này ta thu được điều phải chứng minh.

Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a - 1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

hay

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1.$$

Bài toán 3.26 (xem [4]). Cho $(a_1 \dots a_n)$ là các số thực dương. Đặt $P_0 = 1, P_k = P_k(a_1, \dots, a_n); E_r = E_r(a_1, \dots, a_n)$. Chứng minh rằng

$$P_{k-1}P_{k+1} \leq P_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Chứng minh. Giả sử

$$f(x, y) = (x + a_1y)(x + a_2y) \dots (x + a_ny) = E_0x^n + E_2x^{n-1}y + \dots + E_ny^n,$$

E_i là tổng tất cả các tích số khác nhau,

$$P_k = \frac{k!(n-k)!}{n!} E_k.$$

Vì tất cả các $a_i > 0$ và $\frac{x}{y} = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $f(x, y) = 0$ nên $\frac{x}{y} = 0$ không phải là nghiệm bội trong các phương trình nhận từ đạo hàm của nó.

Từ đó ta có thể kết luận rằng các số P_i dương, tức là phương trình

$$P_{k-1}x^2 + 2P_kxy + P_{k+1}y^2 = 0$$

nhận được từ $f(x, y) = 0$ bằng cách lấy vi phân liên tiếp theo x và y . Do phương trình này có nghiệm thực nên $P_{k-1}P_{k+1} \leq P_k^2$.

Nhận xét rằng, nếu các a_i đều dương và không đồng thời bằng nhau thì ta có dấu bất đẳng thức thực sự.

Bài toán 3.27 (xem [4]). Chứng minh bất đẳng thức

$$E_{r-1}E_{r+1} \leq E_r^2.$$

Chứng minh. Từ bất đẳng thức Markuc-Lopes, ta có

$$P_{k-1}P_{k+1} \leq P_k^2.$$

Suy ra

$$\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!}E_{k-1} \frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}E_{k+1} < \left(\frac{k!(n-k)!}{n!}\right)E_k^2$$

hay

$$\frac{(k-1)(n-k+1)}{k(n-k)}E_{k-1}E_{k+1} < E_k^2E_{k-1}E_{k+1} < E_k^2.$$

Bài toán 3.28 (xem [4]). Cho các số $a_i > 0$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) phân biệt. Chứng minh bất đẳng thức

$$P_1 > P_2^{\frac{1}{2}} > P_3^{\frac{1}{3}} > \dots > P_n^{\frac{1}{n}}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} P_0P_2 &< P_1^2, \\ (P_1P_3)^2 &< P_2^4 \\ (P_{r-1}P_{r+1})^r &< P_r^{2r} \end{aligned}$$

suy ra

$$\begin{aligned} (P_0P_2)(P_1P_3)^2 \dots (P_{r-1}P_{r+1})^r &< P_1^2P_2^4 \dots P_r^{2r} \\ P_{r+1}^r &< P_r^{r+1}P_r^{\frac{1}{r}} < P_{r+1}^{r+1}. \end{aligned}$$

Nhận xét 3.3. Ta có thể chứng minh $P_{r-1}P_{r+1} < P_r^2$ bằng phương pháp quy nạp.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n-1$ số dương $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ và đặt E'_r, P'_r là các E_r, P_r tạo bởi $n-1$ số ấy và giả sử tất cả các số đó không đồng thời bằng nhau.

Khi đó

$$E'_r = a_n E'_{r-1} P_r = \frac{r}{n} P'_r + \frac{r}{n} a_n P'_{r-1}.$$

Từ đó suy ra

$$n^2(P_{r-1}P_{r+1} - P_r^2) = A + Ba_n + Ca_n^2,$$

trong đó

$$\begin{aligned} A &= \{(n-r)^2 - 1\}P'_{r-1}P'_{r+1} - (n-r)^2P'_r \\ B &= (n-r+1)(r+1).P'_{r-1}P'_{r+1} + (n-r-1)(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1} - 2(r-1)P'_{r-2}P'_{r+1} \\ C &= (r^2 - 1)P'_{r-2}P'_r - r^2P'^2_{r-1}. \end{aligned}$$

Vì các a_i không đồng thời bằng nhau nên theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} P'_{r-1}P'_{r+1} &< P'_rP'_{r-2} - P'_r < P'_{r-1}, \\ P'_{r-2}P'_{r+1} &< P'_{r-1}P'_rA < -P'_rB < 2P'_{r-1}P'_rC \\ &< P'_{r-1}n^2(P'_{r-1}P'_{r+1} - P'_r) < -(P'_r) - a_nP'_{r-1} \leq 0. \end{aligned}$$

Nhận xét rằng bất đẳng thức vẫn đúng khi $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$. Khi đó $a_n \neq a_1$.

Bài toán 3.29 (xem [4]). Cho $a_1, \dots, a_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ và các số thực dương $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k}{1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k} \geq \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{1 - a_k}\right)^{\alpha_k}.$$

Giải. Xét hàm số $y(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ với $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Hàm số $y(x)$ đơn điệu tăng và lõm trên $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ nên theo bất đẳng thức Jensen ta có

$$\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k}{1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k}\right) \geq \sum_{k=1}^n \alpha_k \ln\left(\frac{a_k}{1 - a_k}\right) = \ln \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{1 - a_k}\right)^{\alpha_k}$$

và như vậy ta có bất đẳng thức

$$\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k a_k}{1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k} \geq \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{1 - a_k}\right)^{\alpha_k}.$$

Bài toán 3.30 (xem [4]). Cho $a_1, \dots, a_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ ta luôn có bất đẳng thức dưới đây

$$\frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\left[\sum_{k=1}^n a_k\right]^n} \leq \frac{\prod_{k=1}^n (1 - a_k)}{\left[\sum_{k=1}^n (1 - a_k)\right]^n}.$$

Giải. Bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra từ ví dụ trên với $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \frac{1}{n}$.

Bài toán 3.31 (xem [5]). Cho $\triangle ABC$ với độ dài các cạnh là a, b, c và bán kính đường tròn là r . Chứng minh rằng

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \leq \frac{p^2}{4r^2} - \frac{27}{4}.$$

Giải. Vì a, b, c , là nghiệm của phương trình (xem [2],[5])

$$x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0,$$

nên dễ dàng kiểm tra hệ thức

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2(p^2 + r^2 + 4Rr)}{4Rr} - 9.$$

Như vậy

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} = \frac{2(p^2 + r^2)}{4Rr} - 7.$$

Bởi vì $R \geq 2r$, nên

$$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \leq \frac{2(p^2 + r^2)}{8r^2} - 7 = \frac{p^2}{4r^2} - \frac{27}{4}.$$

Bài toán 3.32 (xem [5]). Cho $\triangle ABC$ với bán kính đường tròn nội tiếp là r với độ dài ba cạnh là a, b, c . Chứng minh rằng bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

Giải. Vì a, b, c , là nghiệm của $x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$ (xem [2],[5]) nên

$$f(x) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = (x-a)(x-b)(x-c).$$

Lấy hai lần đạo hàm ta thu được $3x - 2p = (x - a) + (x - b) + (x - c)$.

Khi đó

$$\frac{3x - 2p}{f(x)} = \frac{1}{(x - a)(x - b)} + \frac{1}{(x - b)(x - c)} + \frac{1}{(x - c)(x - a)}.$$

Cho $x = p$, ta thu được

$$\frac{1}{(p - a)(p - b)} + \frac{1}{(p - b)(p - c)} + \frac{1}{(p - c)(p - a)} = \frac{1}{r^2}.$$

Vậy

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{1}{4(p - a)(p - b)} + \frac{1}{4(p - b)(p - c)} + \frac{1}{4(p - c)(p - a)} \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Bài toán 3.33. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác không cân. Chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(1 + a^2)} + \frac{1}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)(1 + b^2)} \\ & + \frac{1}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)(1 + c^2)} \leq \frac{1}{8abc}. \end{aligned}$$

Giải. Biểu diễn

$$T(x) := \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} = \frac{Ax + A'}{x^2 + a^2} + \frac{Bx + B'}{x^2 + b^2} + \frac{Cx + C'}{x^2 + c^2}.$$

Tính A, A', B, B', C, C' và cho $x = 1$, ta nhận được biểu thức

$$T = \frac{1}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)} \leq \frac{1}{8abc}.$$

Kết luận

Luận văn "Phân thức hữu tỷ và các bài toán liên quan" đã đạt được một số kết quả sau:

- Hệ thống hóa một số kiến thức cơ bản về phân thức hữu tỷ và các tính chất cơ bản của nó, chứng minh định lý phân tích phân thức hữu tỷ thành nhân tử (Định lý 1.3).

- Phân tích phân thức hữu tỷ thành phân thức đơn giản và giới thiệu một số phương pháp đặc biệt sử dụng công thức nội suy để xây dựng thuật toán tìm nguyên hàm của hàm hữu tỷ như phương pháp Ostrogradski, áp dụng công thức nội suy Lagrange, áp dụng công thức nội suy Hermite, và phương pháp Horowitz.

Ngoài việc giới thiệu các thuật toán, trong từng mục đều có xây dựng các ví dụ minh họa và phân tích chi tiết các lược đồ giải.

- Xét một số tính toán trên các phân thức hữu tỷ.
- Khảo sát một số lớp phương trình với hàm phân thức hữu tỷ.
- Khảo sát lớp các hàm phân thức hữu tỷ đặc biệt, đó là lớp hàm phân thức chính quy hữu tỷ. Chứng minh định lý cơ bản về giá trị nhỏ nhất của hàm phân thức chính quy hữu tỷ một biến, hai biến và nhiều biến.
- Khảo sát các tính chất của hàm phân thức nhận giá trị hữu tỷ. Tương tự như đối với số hữu tỷ, ta cũng chứng minh được rằng mọi phân thức hữu tỷ nhận giá trị hữu tỷ trên tập các số tự nhiên đều có dạng phân thức hữu tỷ với hệ số nguyên.
- Khảo sát một số lớp bài toán về dãy số sinh bởi một số hàm phân thức hữu tỷ.
- Khảo sát một số dạng bất đẳng thức với hàm phân thức hữu tỷ. Trước hết xét các kỹ thuật cơ bản về sử dụng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh các bất đẳng thức dạng phân thức.

Tiếp theo, dựa vào sắp thứ tự của dãy số để vận dụng kỹ thuật cộng mẫu

số Engel của bất đẳng thức Chebyshev để chứng minh một số dạng bất đẳng thức có dạng phân thức đặc biệt.

Phần cuối của chương là xét một số dạng phân thức của các đa thức đối xứng cơ bản. Đây là những dạng bất đẳng thức loại khó cần phối kết hợp cách chứng minh quy nạp với các biểu diễn tương ứng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Phan Đức Chính, *Bất đẳng thức*, NXB Giáo Dục Việt Nam, 1993.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2006.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2008.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo Dục, 2004.
- [5] Tạ Duy Phương, *Phương trình bậc ba và các bài toán trong tam giác*, NXB Giáo Dục, 2006.
- [6] Tạp chí toán học và tuổi trẻ, *Tuyển tập 5 năm*, NXB Giáo Dục, 2003.
- [7] Tài liệu từ Internet.