ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————————

NGUYỄN THỊ HƯƠNG LAN

PHÉP TÍNH SAI PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN VĂN MINH

Thái Nguyên - Năm 2010

Mục lục

Mở đầu

Phương pháp sai phân là phương pháp được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học, kỹ thuật cũng như trong thực tiễn. Nội dung của nó là đưa các bài toán cần xét về việc giải phương trình sai phân hoặc hệ phương trình sai phân. Bằng phương pháp sai phân có thể giải phương trình vi phân thường hoặc phương trình đạo hàm riêng. Trong lĩnh vực toán bậc THPT phương trình sai phân cũng có rất nhiều ứng dụng. Với mục đích tìm hiểu, nghiên cứu về lý thuyết phương trình sai phân để từ đó áp dụng vào việc giải toán bậc THPT, phục vụ cho công tác giảng dạy tại trường phổ thông, luận văn này tập trung trình bày về sai phân, phương trình sai phân tuyến tính và một số ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính trong giải toán bậc phổ thông.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản về sai phân, một số ứng dụng của sai phân và phương trình sai phân tuyến tính.

Chương 2 trình bày các kiến thức về phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 và phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng số và hệ số biến thiên.

Chương 3 đề cập tới vấn đề tuyến tính hóa phương trình sai phân và các ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính trong giải toán bậc phổ thông như: bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số khi công thức truy hồi là biểu thức tuyến tính, là hệ biểu thức tuyến tính hay công thức truy hồi có dạng phân tuyến tính với hệ số hằng, ứng dụng của phương trình sai phân

trong các bài toán mang tính chất số học, ứng dụng của phương trình sai phân vào giải các phương trình hàm.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn trực tiếp của TS Nguyễn Văn Minh. Nhân dịp này tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành về sự chỉ bảo, hướng dẫn tận tâm, nhiệt tình của thầy trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo trong Ban giám hiệu, phòng đào tạo đại học và sau đại học, khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học.

Tôi xin chân thành cám ơn các thầy cô đồng nghiệp ở tổ Toán trường THPT Phú Bình, Ban giám hiệu trường THPT Phú Bình, đã quan tâm tạo điều kiện thuận lợi để tôi thực hiện kế hoạch học tập của mình. Xin chân thành cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã động viên cổ vũ tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Mặc dù rất nghiêm túc và cố gắng trong quá trình làm luận văn, nhưng nội dung của luận văn không tránh khỏi những khiếm khuyết. Vì vậy tác giả mong nhận được những ý kiến, góp ý của các thầy cô, các anh chị và các đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2010.

Học viên

Nguyễn Thị Hương Lan

Chương 1

Một số khái niệm cơ bản về sai phân và phương trình sai phân

1.1 Sai phân và một số tính chất cơ bản

1.1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, đặt $x_k = x_0 + kh$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ với $x_0 \in \mathbb{R}; h \in \mathbb{R}$, bất kỳ, cho trước. Gọi $y_k = f(x_k)$ là giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = x_k$. Khi đó:

- Hiệu số $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp một của hàm số $y = f(x)$.
- Hiệu số $\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = \Delta(\Delta y_k)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp hai của hàm số $y = f(x)$.
- Tổng quát, $\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \Delta(\Delta^{i-1} y_k)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp i của hàm số $y = f(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$.

1.1.2 Một số tính chất cơ bản của sai phân

Tính chất 1.1. *(Sai phân của hằng số) Sai phân mọi cấp của hằng số đều bằng* 0.

Tính chất 1.2. *(Biểu diễn sai phân theo giá trị của hàm số) Sai phân mọi cấp đều có thể biểu diễn theo các giá trị của hàm số, tức là*

$$\Delta^i y_k = \sum_{s=0}^{i} (-1)^s C_i^s y_{k+i-s} \quad (i \in \mathbb{N}^*).$$

Tính chất 1.3. *(Tính chất tuyến tính của sai phân) Sai phân mọi cấp là một toán tử tuyến tính trên tập các hàm số, tức là*

$$\forall i \in \mathbb{N}^*; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall f(x), g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ ta luôn có:}$$

$$\Delta^i(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \Delta^i f(x) + \beta \Delta^i g(x).$$

Tính chất 1.4. *(Sai phân của đa thức) Sai phân cấp i của một đa thức bậc n*

i) Là một đa thức bậc $n - i$ khi $i < n$.

ii) Là hằng số khi $i = n$.

iii) Bằng 0 khi $i > n$.

Chứng minh. Do sai phân mọi cấp là một toán tử tuyến tính nên ta chỉ cần chứng minh tính chất cho đa thức $y = P_n(x) = x^n$.

i) Khi $i < n$ ta có

- Với $i = 1$ thì: $\Delta x^n = (x + h)^n - x^n = P_{n-1}(x)$ là đa thức bậc $n - 1$ đối với x. Vậy khẳng định đúng với $i = 1$.

- Giả sử khẳng định đúng với $i = k < n$ tức là $\Delta^k x^n = P_{n-k}(x)$ là đa thức bậc $n - k$ đối với x. Khi đó

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} x^n &= \Delta(\Delta^k x^n) = \Delta^k((x+h)^n) - \Delta^k(x^n) \\ &= P_{n-k}(x+h) - P_{n-k}(x) = P_{n-k-1}(x) \end{aligned}$$

là đa thức bậc $n-k-1$ đối với x. Vậy khẳng định đúng với $i=k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, suy ra khẳng định đúng với $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

ii) Khi $i=n$ thì theo trên, $\Delta^n(x^n)$ là đa thức bậc $n-n=0$ đối với x, nên là hằng số.

iii) Khi $i>n$ thì

$$\Delta^i(x^n) = \Delta^{i-n}(\Delta^n(x^n)) = \Delta^{i-n}C = 0, (C = const).$$

□

Tính chất 1.5. *Công thức sai phân từng phần*

$$\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k.$$

Tính chất 1.6. *Tổng các sai phân*

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta y_k = y_{n+1} - y_1.$$

1.2 Ứng dụng của sai phân

Dựa vào khái niệm và tính chất của sai phân ta có thể giải một số bài toán thường gặp ở phổ thông như:
- Tìm quy luật của một dãy số.
- Tính tổng hữu hạn.

1.2.1 Tìm quy luật của một dãy số.

Ví dụ 1.1. *Cho dãy số* $1; 3; 15; 43; 93; 171; 283; \cdots$.
Hãy tìm ra một quy luật của dãy số đó và tìm hai số hạng kế tiếp theo quy luật đó.

Bài giải. Lập bảng một số sai phân ban đầu

y	1		3		15		43		93		171		283
Δy		2		12		28		50		78		112	
$\Delta^2 y$			10		16		22		28		34		
$\Delta^3 y$				6		6		6		6			

Ta thấy sai phân cấp 3 không đổi nên dãy số là dãy các giá trị của đa thức bậc ba $y = an^3 + bn^2 + cn + d$ $(a \neq 0)$, trong đó n là số thứ tự của các số trong dãy số. Cho $n = 0; 1; 2; 3$ (đánh số thứ tự của các số bắt đầu từ 0) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 3 \\ 8a + 4b + 2c + d = 15 \\ 27a + 9b + 3c + d = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy dãy số tuân theo quy luật $y_n = n^3 + 2n^2 - n + 1$.
Hai số hạng tiếp theo của dãy ứng với $n = 7; n = 8$ là $y_7 = 435; y_8 = 633$.

Chú ý

- Quy luật tìm được ở trên không là duy nhất, vì rõ ràng các số đã cho cũng thoả mãn, chẳng hạn quy luật $y_n = n^3 + 2n^2 - n + 1 + P(n)$, trong đó $P(n)$ là đa thức bất kỳ nhận $n \in \overline{0..6}$ làm nghiệm. Do vậy trên đây ta mới chỉ tìm được một quy luật mà dãy các số đã cho thoả mãn mà không tìm được tất cả các quy luật mà dãy các số đã cho thoả mãn.
- Ta có $\Delta^2(ax^2 + bx + c) = const$ nhưng $\Delta^2 y = const$ thì chưa thể suy ra $y = ax^2 + bx + c$.

1.2.2 Tính tổng hữu hạn.

Ví dụ 1.2. *Tính tổng*

$$S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right]\\ &= -\frac{1}{3(k+1)(k+2)(k+3)} + \frac{1}{3k(k+1)(k+2)}\\ &= \Delta y_k \quad \Big(y_k = -\frac{1}{3k(k+1)(k+2)}\Big).\end{aligned}$$

Vậy

$$S = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\Big].$$

Ví dụ 1.3. *Tính các tổng sau*

1) $A_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx.$

2) $B_n = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx.$

Bài giải.

1) Ta có

$$\begin{aligned}\Delta\cos(k-\frac{1}{2})x &= \cos(k+\frac{1}{2})x - \cos(k-\frac{1}{2})x\\ &= -2\sin kx.\sin\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Nếu $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ $(\sin\frac{x}{2} = 0)$ thì $A_n = 0$.

Nếu $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ $(\sin\frac{x}{2} \neq 0)$ thì $\sin kx = -\dfrac{\Delta\cos(k-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Do đó

$$\begin{aligned}A_n = \sum_{k=1}^{n}\sin kx = \sum_{k=1}^{n} -\frac{\Delta\cos(k-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} &= -\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\Delta\cos(k-\frac{1}{2})x\\ &= -\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\Big[\cos(n+\frac{1}{2})x - \cos\frac{x}{2}\Big] = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x.\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Vậy

$$A_n = \begin{cases} 0 & khi \quad x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin \dfrac{n+1}{2}x.\sin \dfrac{n}{2}x}{\sin \dfrac{x}{2}} & khi \quad x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2) Ta có

$$\begin{aligned} \Delta \sin(k - \frac{1}{2})x &= \sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x \\ &= 2\cos kx.\sin \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Nếu $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ $(\sin \dfrac{x}{2} = 0)$ thì $B_n = n$.

Nếu $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ $(\sin \dfrac{x}{2} \neq 0)$ thì $\cos kx = \dfrac{\Delta \sin(k - \frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}}$.

Do đó

$$\begin{aligned} B_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \Delta \sin(k - \frac{1}{2})x \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \Big[\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2} \Big] = \frac{\cos \dfrac{n+1}{2}x.\sin \dfrac{n}{2}x}{\sin \dfrac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Vậy

$$B_n = \begin{cases} n & khi \quad x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\cos \dfrac{n+1}{2}x.\sin \dfrac{n}{2}x}{\sin \dfrac{x}{2}} & khi \quad x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ví dụ 1.4. *Cho dãy số* (x_n) *thoả mãn điều kiện*

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = x_n + x_n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

Tính

$$S = \left[\sum_{n=1}^{2010} \frac{1}{x_n + 1}\right]$$

trong đó $[x]$ *là kí hiệu chỉ phần nguyên của* x.

Bài giải. Ta có $x_{n+1} = x_n + x_n^2$ suy ra $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geq 0$ nên (x_n) là dãy số tăng.

Từ giả thiết suy ra $x_2 = \frac{3}{4}; x_3 = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{21}{16} > 1 \Rightarrow x_n > 1, \forall n \geq 3$.

Mặt khác

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(1 + x_n)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n + 1}$$

Hay

$$\frac{1}{x_n + 1} = -\frac{1}{x_{n+1}} - \Big(-\frac{1}{x_n}\Big) = \Delta\Big(-\frac{1}{x_n}\Big)$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2010} \frac{1}{x_n + 1} &= \sum_{n=1}^{2010} \Delta\Big(-\frac{1}{x_n}\Big) = -\frac{1}{x_{2011}} - \Big(-\frac{1}{x_1}\Big)\\ &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2011}} = 2 - \frac{1}{x_{2011}}\end{aligned}$$

Do $x_n > 1, \forall n \geq 3$ nên $1 < \sum\limits_{n=1}^{2010} \frac{1}{x_n + 1} < 2$. Vậy

$$S = \left[\sum_{n=1}^{2010} \frac{1}{x_n + 1}\right] = \left[2 - \frac{1}{x_{2011}}\right] = 1.$$

Ví dụ 1.5. *Cho dãy số* (x_n) *xác định như sau*

$$x_n = \tan n. \tan(n-1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng tồn tại các hằng số $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *sao cho ta có*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \alpha \tan n + \beta n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải. Ta có $\tan 1 = \tan[n-(n-1)] = \dfrac{\tan n - \tan(n-1)}{1+\tan n.\tan(n-1)}$
$\Rightarrow \tan 1 + \tan 1.\tan n.\tan(n-1) = \tan n - \tan(n-1) = \Delta\tan(n-1)$
$\Rightarrow \tan n.\tan(n-1) = \dfrac{\Delta\tan(n-1)}{\tan 1} - 1$. Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\Delta\tan(k-1)}{\tan 1} - 1\right]\\ &= \frac{1}{\tan 1}\sum_{k=1}^{n}\Delta\tan(k-1) - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{\tan 1}\tan n - n.\end{aligned}$$

Vậy ta luôn tìm được $\alpha = \dfrac{1}{\tan 1}$, $\beta = -1$ để

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \alpha\tan n + \beta n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1.3 Phương trình sai phân tuyến tính

1.3.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Phương trình sai phân tuyến tính cấp (bậc) k của hàm số $y_n = f(n)$ là phương trình có dạng*

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = g(n) \qquad (1.1)$$

trong đó

- $y_n = f(n)$ *là hàm số cần tìm và được gọi là ẩn hàm;*
- $a_0; a_1; \cdots; a_k$ $(a_0 \neq 0; a_k \neq 0)$ *là các hằng số hoặc hàm số đối với n và được gọi là các hệ số của phương trình sai phân;*
- $g(n)$ *là một hàm số của đối số n và được gọi là vế phải.*

Để tìm được hàm số $y_n = f(n)$ cụ thể ta phải cho trước k giá trị ban đầu liên tiếp của hàm y_n (được gọi là các điều kiện ban đầu). Khi đó mọi giá trị của hàm y_n đều có thể được tính dựa vào công thức truy hồi (1.1) và các điều kiện ban đầu.

Định nghĩa 1.2. *Nếu $g(n) \neq 0$ thì (1.1) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất.*

Nếu $g(n) = 0$ thì phương trình (1.1) có dạng

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = 0 \tag{1.2}$$

và được gọi là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với phương trình (1.1).

Nếu $a_0; a_1; \cdots; a_k$ $(a_0 \neq 0; a_k \neq 0)$ là các hằng số thì (1.1) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng số.

1.3.2 Nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính

Định nghĩa 1.3. *Hàm số $y_n = f(n)$ thoả mãn phương trình sai phân tuyến tính (1.1) và tất cả các điều kiện ban đầu đã cho của nó được gọi là nghiệm của (1.1).*
Mỗi nghiệm của (1.1) còn được gọi là nghiệm riêng của (1.1) và thường được kí hiệu là y_n^*.

Định nghĩa 1.4. *Hàm số $\widetilde{y}_n$ phụ thuộc k tham số $C_1; C_2; \cdots; C_k$ thoả mãn phương trình (1.2) được gọi là nghiệm tổng quát của (1.2) nếu với mọi tập các giá trị ban đầu $y_1; y_2; \cdots; y_k$ ta đều xác định được duy nhất bộ các giá trị của tham số $C_1; C_2; \cdots; C_k$ sao cho nghiệm $\widetilde{y}_n$ ứng với bộ giá trị của tham số đó trở thành nghiệm của phương trình (1.2) với các điều kiện ban đầu đã cho. Tức là nghiệm $\widetilde{y}_n$ đó thoả mãn (1.2) và $\widetilde{y}_1 = y_1; \widetilde{y}_2 = y_2; \cdots; \widetilde{y}_k = y_k$.*

Định lí 1.1. *(Về nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính (1.1)) Nghiệm tổng quát y_n của phương trình (1.1) bằng tổng của nghiệm tổng quát $\widetilde{y}_n$ của phương trình (1.2) với một nghiệm riêng y_n^* của phương trình (1.1), tức là*

$$y_n = \widetilde{y}_n + y_n^*.$$

Chứng minh. Xem [5]

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1.2).

Định nghĩa 1.5. *$y_{n1}; y_{n2}; \cdots; y_{nk}$ được gọi là k nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2) nếu từ hệ thức*

$$C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \cdots + C_k y_{nk} = 0$$

suy ra $C_1 = C_2 = \cdots = C_k = 0$.

Định lí 1.2. *Nếu $y_{n1}; y_{n2}; \cdots; y_{nk}$ là k nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2) thì nghiệm tổng quát của (1.2) có dạng*

$$\widetilde{y}_n = C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \cdots + C_k y_{nk}$$

trong đó $C_1, C_2, \cdots, C_k$ là các hằng số tùy ý.

Chứng minh. Xem [5]

Định lí 1.3. *Nếu $\overline{y}_n$ và $\overline{\overline{y}}_n$ là hai nghiệm nào đó của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1.2) thì với $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \alpha\overline{y}_n + \beta\overline{\overline{y}}_n$ cũng là nghiệm của (1.2).*

Chứng minh. Do $\overline{y}_n, \overline{\overline{y}}_n$ là hai nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1.2) nên

$$a_0\overline{y}_{n+k} + a_1\overline{y}_{n+k-1} + \cdots + a_k\overline{y}_n = 0$$

và

$$a_0\overline{\overline{y}}_{n+k} + a_1\overline{\overline{y}}_{n+k-1} + \cdots + a_k\overline{\overline{y}}_n = 0$$

Khi đó

$$\alpha(a_0\overline{y}_{n+k} + a_1\overline{y}_{n+k-1} + \cdots + a_k\overline{y}_n) + \beta(a_0\overline{\overline{y}}_{n+k} + a_1\overline{\overline{y}}_{n+k-1} + \cdots + a_k\overline{\overline{y}}_n) = 0.$$

Hay

$$a_0(\alpha\overline{y}_{n+k} + \beta\overline{\overline{y}}_{n+k}) + a_1(\alpha\overline{y}_{n+k-1} + \beta\overline{\overline{y}}_{n+k-1}) + \cdots + a_k(\alpha\overline{y}_n + \beta\overline{\overline{y}}_n) = 0.$$

Vậy $\alpha\overline{y}_n + \beta\overline{\overline{y}}_n$ cũng là nghiệm của (1.2). □

Ta sẽ đi tìm nghiệm tổng quát của (1.2) dưới dạng $\widetilde{y}_n = C.\lambda^n$ $(C \neq 0, \lambda \neq 0)$. Thay $\widetilde{y}_n = C.\lambda^n$ vào phương trình (1.2) ta được

$$a_0.C.\lambda^{n+k} + a_1.C.\lambda^{n+k-1} + \cdots + a_k.C.\lambda^n = 0.$$

Rút gọn ta được phương trình tương đương

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0. \tag{1.3}$$

Phương trình (1.3) được gọi là phương trình đặc trưng của (1.2) (ta cũng xem đó là phương trình đặc trưng của (1.1)). Nghiệm $\widetilde{y}_n$ của phương trình (1.2) và y_n^* của phương trình (1.1) phụ thuộc cốt yếu vào cấu trúc nghiệm của phương trình (1.3).

Định nghĩa 1.6. *Số x_0 được gọi là nghiệm bội $k, (k \in \mathbb{N}^*)$ của đa thức $P(x)$(tức là của phương trình $P(x) = 0$) nếu $P(x) = (x - x_0)^k.T(x)$, trong đó $T(x)$ là đa thức có $T(x_0) \neq 0$.*

Định lí 1.4. *Nếu phương trình đặc trưng (1.3) có k nghiệm thực phân biệt $\lambda_1; \lambda_2; \cdots; \lambda_k$ thì nghiệm tổng quát của (1.2) có dạng*

$$\widetilde{y}_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_k\lambda_k^n, \tag{1.4}$$

trong đó $C_1; C_2; \cdots; C_k$ là các hằng số thực tuỳ ý.

Chứng minh. Xem [5]

Chú ý. Nếu phương trình đặc trưng (1.3) có đủ k nghiệm thực, trong đó có nghiệm λ_j là nghiệm bội bậc s thì công thức nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1.2) sẽ là

$$\widetilde{y}_n = \sum_{i=1}^{j-1} C_i\lambda_i^n + \Big(\sum_{i=0}^{s-1} C_{j+i}n^i\Big)\lambda_j^n + \sum_{i=j+s}^{k} C_i\lambda_i^n.$$

Tương tự ta có công thức nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1.2) trong trường hợp phương trình đặc trưng (1.3) có đủ k nghiệm thực, nhưng có nhiều nghiệm bội hơn.

Định lí 1.5. *Nếu phương trình đặc trưng* (1.3) *có nghiệm phức đơn* $\lambda_j = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *thì nghiệm tổng quát của* (1.2) *có dạng*

$$\widetilde{y}_n = \sum_{i'=1}^{j-1} C_{i'}\lambda_{i'}^n + C_j r^n \cos n\varphi + C_{j+1} r^n \sin n\varphi + \sum_{i'=j+2}^{k} C_{i'}\lambda_{i'}^n.$$

Định lí 1.6. *Nếu phương trình đặc trưng* (1.3) *có nghiệm phức* $\lambda_j = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *bội s thì nghiệm tổng quát của* (1.2) *có dạng*

$$\widetilde{y}_n = \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq j}}^{k} C_{i'}\lambda_{i'}^n + r^n[(A_1 + A_2 n + \cdots A_s n^{s-1})\cos n\varphi$$

$$+ (B_1 + B_2 n + \cdots B_s n^{s-1})\sin n\varphi].$$

Chú ý. Nếu phương trình đặc trưng (1.3) có nhiều nghiệm bội phức hơn thì ta cũng sẽ có công thức nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1.2).

Tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất (1.1) với hệ số hằng số.

Xét phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất (1.1) với hệ số hằng số

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = g(n),$$

trong đó $a_j \in \mathbb{R}; \forall j \in \overline{0..k}; a_0 \neq 0; a_k \neq 0$.
Trong phần này ta xét phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình (1.1) nêu trên.
Ta thường dùng phương pháp hệ số bất định để xác định nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất. Ở đây ta sẽ nêu lại dạng nghiệm riêng của (1.1) trong trường hợp vế phải $g(n)$ có dạng đơn giản. Kí hiệu $P_m(n); P_l(n); T_p(n); R_p(n); Q_m(n)$ là các đa thức với hệ số thực, biến số $n \in \mathbb{N}$, với bậc lần lượt là $m, l, p \in \mathbb{N}$.

Trường hợp 1. $g(n) = P_m(n)$.

- Nếu phương trình đặc trưng (1.3) có k nghiệm thực $\lambda_1; \lambda_2; \cdots; \lambda_k$ khác nhau và khác 1 thì nghiệm riêng của (1.1) là $y_n^* = Q_m(n)$, với $Q_m(n)$ là đa thức cùng bậc m với $g(n)$.

- Nếu phương trình đặc trưng (1.3) có nghiệm $\lambda = 1$ bội k thì ta có thể chọn nghiệm riêng của (1.1) là $y_n^* = n^k Q_m(n)$, với $Q_m(n)$ là đa thức cùng bậc m với $g(n)$.

Trường hợp 2. $g(n) = P_m(n).b^n$, trong đó b là hằng số thực cho trước.

- Nếu phương trình đặc trưng (1.3) có các nghiệm thực đều khác b, thì nghiệm riêng của (1.1) là $y_n^* = Q_m(n)b^n$,với $Q_m(n)$ là đa thức cùng bậc m với $g(n)$.

- Nếu phương trình đặc trưng (1.3) có b là nghiệm bội k thì ta có thể chọn nghiệm riêng của (1.1) là $y_n^* = n^k Q_m(n)b^n$, với $Q_m(n)$ là đa thức cùng bậc m với $g(n)$.

Trường hợp 3. $g(n) = a\cos n\beta + b\sin n\beta$, với $a, b \in \mathbb{R}$ cho trước.
Khi đó ta tìm nghiệm riêng của (1.1) dưới dạng $y_n^* = c\cos n\beta + d\sin n\beta$.
Mở rộng. $g(n) = P_m(n)\cos n\beta + P_l(n)\sin n\beta,\ (\beta \in \mathbb{R})$
Kí hiệu $p = \max\{m; l\}$.

- Nếu $\cos\beta \pm i\sin\beta$ $(i^2 = -1)$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (1.3) thì nghiệm riêng của (1.1) là $y_n^* = T_p(n)\cos n\beta + R_p(n)\sin n\beta$.

- Nếu $\cos\beta \pm i\sin\beta$ $(i^2 = -1)$ là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng (1.3) thì nghiệm riêng của (1.1) là

$$y_n^* = n^s[T_p(n)\cos n\beta + R_p(n)\sin n\beta].$$

Trường hợp 4. $g(n) = \sum\limits_{j=1}^{l} g_j(n)$.
Trong trường hợp này ta đi tìm nghiệm riêng y_{nj}^* ứng với từng hàm $g_j(n), j = 1, \cdots, l$. Khi đó nghiệm riêng của (1.1) là

$$y_n^* = \sum_{j=1}^{l} y_{nj}^*.$$

Một số ví dụ về tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất với hệ số hằng số

Ví dụ 1.6. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân*

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n = n\cos n\frac{\pi}{2} + 2\sin n\frac{\pi}{2}. \tag{1.5}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (1.5) có dạng

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Phương trình này có nghiệm $\lambda = 1$ (nghiệm bội 3) và $\lambda = 1 \neq \cos\frac{\pi}{2} \pm i\sin\frac{\pi}{2}$ nên nghiệm riêng của (1.5) có dạng

$$y_n^* = (an + b)\cos n\frac{\pi}{2} + (cn + d)\sin n\frac{\pi}{2}.$$

Thay y_n^* vào phương trình (1.5), rồi rút gọn và so sánh các hệ số ta được $a = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{2}; c = \frac{1}{4}; d = -\frac{1}{4}$.
Vậy $y_n^* = (\frac{1}{4}n - \frac{1}{2})\cos n\frac{\pi}{2} + (\frac{1}{4}n - \frac{1}{4})\sin n\frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 1.7. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân*

$$y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = -\frac{3}{2}\cos n\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin n\frac{\pi}{3}. \tag{1.6}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (1.6) có dạng $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Phương trình này có nghiệm $\lambda = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$. Khi đó nghiệm riêng của (1.6) có dạng

$$y_n^* = n(a\cos n\frac{\pi}{3} + b\sin n\frac{\pi}{3}).$$

Thay y_n^* vào phương trình (1.6), rồi rút gọn và so sánh các hệ số ta được $a = 1; b = 0$. Vậy $y_n^* = n\cos n\frac{\pi}{3}$.

Ví dụ 1.8. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân*

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 6n - 5 + 2^{n+1} + (11n - 2)\cos\frac{n\pi}{2} + 7(n+1)\sin\frac{n\pi}{2}. \tag{1.7}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (1.7) có dạng $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$. Phương trình này có nghiệm $\lambda = 3$ và $\lambda = 4$.
$g(n) = 6n - 5 + 2^{n+1} + (11n - 2)\cos\dfrac{n\pi}{2} + 7(n+1)\sin\dfrac{n\pi}{2}$
$g(n) = g_1(n) + g_2(n) + g_3(n)$,
với $g_1(n) = 6n - 5$; $g_2(n) = 2^{n+1}$; $g_3(n) = (11n - 2)\cos\dfrac{n\pi}{2} + 7(n+1)\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

- Với $g_1(n) = 6n - 5$, ta đi tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 6n - 5. \tag{1.7a}$$

Do phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt $\lambda = 3$ và $\lambda = 4$ nên nghiệm riêng của của phương trình (1.7a) có dạng $y^*_{n1} = an + b$. Thay $y^*_{n1} = an + b$ vào phương trình (1.7a) rồi so sánh các hệ số ta được $y^*_{n1} = n$.

- Với $g_2(n) = 2^{n+1}$, ta đi tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = 2^{n+1}, \tag{1.7b}$$

làm tương tự như trên ta thu được nghiệm riêng của phương trình (1.7b) là $y^*_{n2} = 2^n$.

- Với $g_3(n) = (11n-2)\cos\dfrac{n\pi}{2} + 7(n+1)\sin\dfrac{n\pi}{2}$, ta đi tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 12y_n = (11n - 2)\cos\frac{n\pi}{2} + 7(n+1)\sin\frac{n\pi}{2} \tag{1.7c}$$

Phương trình (1.7c) có nghiệm $y^*_{n3} = n\cos\dfrac{n\pi}{2}$. Vậy nghiệm riêng của phương trình (1.7) là

$$y^*_n = n + 2^n + n\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Chương 2

Phương trình sai phân tuyến tính cấp một và phương trình sai phân tuyến tính cấp hai

2.1 Phương trình sai phân tuyến tính cấp một với hệ số hằng số

2.1.1 Định nghĩa

Phương trình sai phân tuyến tính cấp một với hệ số hằng số là phương trình sai phân có dạng

$$au_{n+1} + bu_n = f(n) \quad \text{hoặc} \quad u_{n+1} = qu_n + f(n) \tag{2.1}$$

trong đó $a \neq 0, b \neq 0, q \neq 0$ là các hằng số và $f(n)$ là biểu thức của n cho trước, u_n là ẩn.

Nếu $f(n) = 0$ phương trình (2.1) có dạng

$$au_{n+1} + bu_n = 0 \text{ hoặc } u_{n+1} = qu_n \tag{2.2}$$

và được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp một thuần nhất tương ứng với phương trình (2.1).

Nếu $f(n) \neq 0$ thì phương trình (2.1) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp một không thuần nhất.

2.1.2 Nghiệm

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.1) có dạng:

$$u_n = \widetilde{u}_n + u_n^*$$

trong đó:

$\widetilde{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (2.2).

u_n^* là một nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất (2.1).
Sau đây ta sẽ nêu ra cách giải phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (2.2).

Giải phương trình đặc trưng: $a\lambda + b = 0$ để tìm nghiệm λ.

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (2.2) dưới dạng $\widetilde{u}_n = C.\lambda^n$ (C là hằng số).

2.1.3 Một số phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính cấp một không thuần nhất

Để giải trọn vẹn phương trình (2.1) ta đi tìm một nghiệm riêng của phương trình (2.1). Sau đây ta sẽ nêu ra một số phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình (2.1).

Phương pháp hệ số bất định

Trong nội dung này trình bày cách tìm nghiệm riêng của phương trình (2.1) khi vế phải $f(n)$ có dạng đặc biệt.

Trường hợp 1.

$$f(n) = P_m(n) \quad \text{là đa thức bậc } m \text{ đối với } n.$$

Khi đó:

- Nếu $\lambda \neq 1$ thì ta chọn $u_n^* = Q_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n.

- Nếu $\lambda = 1$ thì ta chọn $u_n^* = nQ_m(n)$, trong đó $Q_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n.

Chứng minh. Xét phương trình $au_{n+1} + bu_n = P_m(n)$

- Nếu $\lambda = -\dfrac{b}{a} \neq 1 \Rightarrow b \neq -a$. Với $u_n^* = Q_m(n) \Rightarrow u_{n+1}^* = Q_m(n+1)$. Suy ra $aQ_m(n+1) + bQ_m(n)$ là đa thức bậc m, tức là cùng bậc với $f(n)$.

- Nếu $\lambda = -\dfrac{b}{a} = 1 \Rightarrow b = -a$. Suy ra $au_{n+1} + bu_n = au_{n+1} - au_n = a(u_{n+1} - u_n) = a\Delta u_n = P_m(n)$. Nên u_n phải là đa thức bậc $m+1$, vì tìm nghiệm riêng nên ta tìm $u_n^* = nQ_m(n)$ là đủ. □

Trường hợp 2.

$$f(n) = p.\beta^n \qquad (p; \beta \neq 0).$$

Khi đó:

- Nếu $\lambda \neq \beta$ thì ta chọn $u_n^* = d.\beta^n \qquad (d \in \mathbb{R})$.

- Nếu $\lambda = \beta$ thì ta chọn $u_n^* = d.n.\beta^n \qquad (d \in \mathbb{R})$.

Chứng minh. Xét phương trình:

$au_{n+1} + bu_n = p.\beta^n \qquad (a \neq 0; b \neq 0; p \neq 0; \beta \neq 0)$

$\Leftrightarrow a\beta\dfrac{u_{n+1}}{\beta^{n+1}} + b\dfrac{u_n}{\beta^n} = p$

Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{\beta^n}$, khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$a\beta v_{n+1} + bv_n = p, \qquad p \text{ là đa thức bậc } 0. \tag{2.3}$$

Phương trình đặc trưng của (2.3) có dạng: $a\beta t + b = 0$.

Theo kết quả trường hợp 1:

- Nếu $t = -\dfrac{b}{a\beta} \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq \beta$ thì $v_n^* = d$ (d là đa thức bậc 0).Vậy $u_n^* = d\beta^n$.

- Nếu $t = -\dfrac{b}{a\beta} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \beta$ thì $v_n^* = nd$. Vậy $u_n^* = dn\beta^n$. $\square$

Mở rộng: $f(n) = P_m(n).\beta^n \qquad (\beta \neq 0)$.
Khi đó:

- Nếu $\lambda \neq \beta$ thì ta chọn $u_n^* = Q_m(n).\beta^n$, trong đó $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n.

- Nếu $\lambda = \beta$ thì ta chọn $u_n^* = n.Q_m(n).\beta^n$, trong đó $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n.

Trường hợp 3.

$$f(n) = \alpha \sin nx + \beta \cos nx \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0; x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}).$$

Khi đó, ta chọn $u_n^* = A \sin nx + B \cos nx$ với $A; B \in \mathbb{R}$ là các hằng số.

Chứng minh. Xét phương trình: $au_{n+1} + bu_n = \alpha \sin nx + \beta \cos nx$.
Thay $u_n^* = A \sin nx + B \cos nx$ vào phương trình trên ta có:

$$\begin{aligned} a[A\sin(n+1)x + B\cos(n+1)x] + b[A\sin nx + B\cos nx] &= \alpha \sin nx + \beta \cos nx \\ \Leftrightarrow [A(a\cos x + b) - Ba\sin x]\sin nx + [Aa\sin x + B(a\cos x + b)]\cos nx & \\ &= \alpha \sin nx + \beta \cos nx. \end{aligned}$$

So sánh hệ số của $\sin nx$ và $cosnx$ ở hai vế ta có:

$$\begin{cases} A(a\cos x + b) - Ba\sin x &= \alpha \\ Aa\sin x + B(a\cos x + b) &= \beta \end{cases}$$

Hệ này có định thức

$$D = \begin{vmatrix} a\cos x + b & -a\sin x \\ a\sin x & a\cos x + b \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + 2ab\cos x$$

Do $x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$ nên $\mid 2ab\cos x \mid < \mid 2ab \mid$ hay $-|2ab| < 2ab\cos x < |2ab|$
Mặt khác: $a^2 + b^2 \geq \mid 2ab \mid$ nên $D > 0$, vì vậy từ hệ phương trình trên ta xác định được A, B duy nhất. $\square$

Mở rộng.

1) $f(n) = P_m(n)\sin nx + Q_l(n)\cos nx$, trong đó $P_m(n), Q_l(n)$ lần lượt là các đa thức bậc $m; l$ của n.
Khi đó, ta chọn $u_n^* = T_p(n)\sin nx + R_p(n)\cos nx$, trong đó $T_p(n), R_p(n)$ là các đa thức bậc p của n, với $p = max\{m; l\}$.
2) $f(n) = \alpha^n[P_m(n)\sin nx + Q_l(n)\cos nx]$, trong đó $P_m(n), Q_l(n)$ lần lượt là các đa thức bậc $m; l$ của n.
Khi đó, ta chọn $u_n^* = \alpha^n[T_p(n)\sin nx + R_p(n)\cos nx]$, trong đó $T_p(n), R_p(n)$ là các đa thức bậc p của n, với $p = max\{m; l\}$.

Trường hợp 4.

$$f(n) = \sum_{k=1}^{m} f_k(n)$$

Khi đó ta chọn nghiệm riêng u_n^* dưới dạng: $u_n^* = \sum\limits_{k=1}^{m} u_{nk}^*$, trong đó u_{nk}^* tương ứng là nghiệm riêng của phương trình sai phân (2.1) với vế phải là $f_k(n)$.

Ví dụ 2.1. *Giải phương trình sai phân*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 6n + 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.4) có nghiệm $\lambda = 3$.
Ta có:

$*$ $\widetilde{u}_n = C.3^n$.

$*$ $f(n) = -6n + 1; \lambda = 3 \neq 1$ nên ta chọn $u_n^* = an + b$. Thay $u_n^* = an + b$ vào phương trình (2.4) ta tìm được: $a = 3; b = 1 \Rightarrow u_n^* = 3n + 1$.
Khi đó: $u_n = C.3^n + 3n + 1$, mà $u_1 = 1 \Rightarrow C = -1$. Vậy phương trình (2.4) có nghiệm là: $u_n = -3^n + 3n + 1$.

Ví dụ 2.2. *Giải phương trình sai phân*

$$\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6.2^n \end{cases} \tag{2.5}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.5) có nghiệm $\lambda = 2$.
Ta có:

$* \ \widetilde{u}_n = C.2^n$.

$* \ f(n) = 6.2^n; \lambda = 2 = \beta$ nên ta chọn $u_n^* = d.n.2^n$. Thay u_n^* vào phương trình (2.5) ta tìm được $d = 3 \Rightarrow u_n^* = 3.n.2^n$.
Khi đó: $u_n = C.2^n + 3.n.2^n$, mà $u_1 = 8 \Rightarrow C = 1$. Vậy phương trình (2.5) có nghiệm là: $u_n = 2^n(3n+1)$.

Ví dụ 2.3. *Giải phương trình sai phân*

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n + (\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2)\sin\dfrac{n\pi}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.6) có nghiệm $\lambda = 2$.
Ta có:

$* \ \widetilde{u}_n = C.2^n$.

$* \ f(n) = (\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2)\sin\dfrac{n\pi}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$ nên ta chọn $u_n^* = A.\sin\dfrac{n\pi}{4} + B.\cos\dfrac{n\pi}{4}$ .Thay u_n^* vào phương trình (2.6) ta tìm được $A = 1; B = 0 \Rightarrow u_n^* = \sin\dfrac{n\pi}{4}$.
Khi đó: $u_n = C.2^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$, mà $u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = 0$.
Vậy phương trình (2.6) có nghiệm là: $u_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

Ví dụ 2.4. *Giải phương trình sai phân*

$$\begin{cases} u_1 = 333 \\ u_{n+1} = 26.u_n - 494.7^n - 2475.n + 99 \end{cases} \tag{2.7}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.7) có nghiệm $\lambda = 26$.
Ta có:

$* \ \widetilde{u}_n = C.26^n$.

$* \ f(n) = -494.7^n - 2475n + 99 = f_1(n) + f_2(n)$
trong đó $f_1(n) = -494.7^n; f_2(n) = -2475.n + 99$.
Suy ra $u^*_{n1} = 26.7^n; u^*_{n2} = 99.n$. Khi đó: $u_n = C.26^n + 26.7^n + 99.n$, với điều kiện ban đầu $u_1 = 333 \Rightarrow C = 2$.
Vậy phương trình (2.7) có nghiệm $u_n = 2.26^n + 26.7^n + 99.n$.

Phương pháp biến thiên hằng số

Xét phương trình sai phân (2.1): $au_{n+1} + bu_n = f(n)$.
Phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (2.1) có nghiệm tổng quát $\widetilde{u}_n = C.\lambda^n$, với $\lambda = -\dfrac{b}{a}$. Để tìm nghiệm riêng của (2.1), ta coi C biến thiên theo n, có nghĩa C là một hàm số của n ($C = C(n) = C_n$) và tìm $u^*_n = C_n.\lambda^n$. Thay $u^*_n = C_n.\lambda^n$ vào phương trình (2.1) ta được:

$$\begin{aligned}
&a.C_{n+1}\lambda^{n+1} + b.C_n.\lambda^n = f(n)\\
\Leftrightarrow\ &a.C_{n+1}.\lambda^n.(-\frac{b}{a}) + b.C_n.\lambda^n = f(n)\\
\Leftrightarrow\ &-b.\lambda^n[C_{n+1} - C_n] = f(n)\\
\Leftrightarrow\ &-b.\lambda^n \Delta C_n = f(n)\\
\Leftrightarrow\ &\Delta C_n = -\frac{f(n)}{b.\lambda^n}.
\end{aligned}$$

Lấy tổng hai vế theo k từ 0 đến $n-1$, ta được:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta C_k = -\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(k)}{\lambda^k}$$

$$\Rightarrow C_n = C_0 - \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(k)}{\lambda^k}.$$

Vậy

$$u^*_n = \Big[C_0 - \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(k)}{\lambda^k}\Big]\lambda^n.$$

Ví dụ 2.5. *Dùng phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm của phương trình sai phân*

$$\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = 2u_n + 6.2^n \end{cases} \tag{2.8}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.8) có nghiệm $\lambda = 2$.
Ta có: $\widetilde{u}_n = C.2^n \Rightarrow u_n^* = C_n.2^n$. Thay $u_n^* = C_n.2^n$ vào phương trình (2.8) ta được:

$$\begin{aligned}
&C_{n+1}.2^{n+1} = 2.C_n.2^n + 6.2^n\\
&\Leftrightarrow C_{n+1} - C_n = 3\\
&\Leftrightarrow \Delta C_n = \Delta(3n)\\
&\Rightarrow C_n = 3n\\
&\Rightarrow u_n^* = 3n.2^n.
\end{aligned}$$

Do đó $u_n = C.2^n + 3.n.2^n$. Vì $u_1 = 8 \Rightarrow C = 1$.
Vậy nghiệm của phương trình (2.8) là: $u_n = 2^n(1+3n)$.

Ví dụ 2.6. *Dùng phương pháp biến thiên hằng số tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân*

$$u_{n+1} = 5u_n + \frac{1}{5}(n^2 - 3n + 1)n!. \tag{2.9}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.9) có nghiệm $\lambda = 5$.
Ta đi tìm một nghiệm riêng của phương trình (2.9) dưới dạng $u_n^* = C_n.5^n$. Thay $u_n^* = C_n.5^n$ vào phương trình (2.9) ta được:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow C_{n+1} - C_n = \frac{1}{5^{n+2}}(n^2 + 2n + 1 - 5n)n!\\
&\Leftrightarrow \Delta C_n = \frac{(n+1)(n+1)!}{5^{n+2}} - \frac{n.n!}{5^{n+1}}\\
&\Leftrightarrow \Delta C_n = \Delta\Big(\frac{n.n!}{5^{n+1}}\Big)\\
&\Rightarrow C_n = \frac{n.n!}{5^{n+1}}
\end{aligned}$$

Vậy một nghiệm riêng của phương trình (2.9) là: $u_n^* = \dfrac{n.n!}{5}$.

Ví dụ 2.7. *Dùng phương pháp biến thiên hằng số tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân*

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1-n}{2^{n+1}} \tag{2.10}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.10) có nghiệm $\lambda = 1$. Ta đi tìm một nghiệm riêng của phương trình (2.10) dưới dạng $u_n^* = C_n$. Thay $u_n^* = C_n$ vào phương trình (2.10) ta được:

$$\begin{aligned} \Delta C_n &= \frac{1-n}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow \Delta C_n &= \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} \\ \Leftrightarrow \Delta C_n &= \Delta \frac{n}{2^n} \\ \Rightarrow C_n &= \frac{n}{2^n}. \end{aligned}$$

Vậy một nghiệm riêng của phương trình (2.10) là: $u_n^* = \dfrac{n}{2^n}$.

Trong ví dụ $(2.6), (2.7)$ ta nhận thấy vế phải $f(n)$ không có các dạng đặc biệt như đã nêu trong phương pháp hệ số bất định vì vậy việc áp dụng phương pháp phương pháp hệ số bất định là không khả thi.Việc sử dụng phương pháp biến thiên hằng số cho ta lời giải ngắn gọn.

2.2 Phương trình sai phân tuyến tính cấp một với hệ số biến thiên

Định nghĩa 2.1. *Phương trình sai phân tuyến tính cấp một với hệ số biến thiên là phương trình sai phân có dạng*

$$a(n)u_{n+1} + b(n)u_n = f(n) \quad \textit{hoặc} \quad u_{n+1} = q(n)u_n + f(n)$$

trong đó $a(n) \neq 0, b(n) \neq 0, q(n) \neq 0$ *và* $a(n), b(n), q(n), f(n)$ *là các hàm số của* n.

Trong mục này ta xét phương trình sai phân tuyến tính cấp một với hệ số biến thiên dạng

$$u_{n+1} = q(n)u_n + f(n) \tag{2.11}$$

trong đó $q(n) \neq 0$ và $q(n); f(n)$ là các hàm số của n.

Định lí 2.1. *Nghiệm tổng quát u_n của phương trình* (2.11) *có dạng:*

$$u_n = \widetilde{u}_n + u_n^*$$

trong đó:

$\widetilde{u}_n$ *là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng:* $u_{n+1} = q(n)u_n$.

u_n^* *là một nghiệm riêng tuỳ ý của phương trình* (2.11).

Việc giải các phương trình sai phân tuyến tính với các hệ số biến thiên là rất phức tạp. Ở đây ta sẽ xét một số dạng đơn giản của các phương trình sai phân tuyến tính với các hệ số biến thiên được giải chủ yếu bằng phương pháp đặt dãy số phụ, dùng công thức truy hồi và phương pháp biến thiên hằng số.

Bài toán. *Tìm u_n biết*

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_{n+1} = \beta p(n)u_n + f(n), \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{2.12}$$

trong đó
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}; p(n); f(n)$ *là các hàm số của đối số* $n \in \mathbb{N}, p(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài giải. Đặt dãy số phụ

$$u_n = v_n.\prod_{k=0}^{n-1} p(k).$$

Khi đó $v_1 = \dfrac{\alpha}{p(0)}$ và (2.12) có dạng

$$v_{n+1}.\prod_{k=0}^{n} p(k) = \beta.v_n.\prod_{k=0}^{n} p(k) + f(n) \Leftrightarrow v_{n+1} - \beta v_n = \frac{f(n)}{\prod\limits_{k=0}^{n} p(k)}.$$

Đây là phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng số mà ta đã biết cách giải.

Ví dụ 2.8. *Tìm u_n biết rằng*

$$u_1 = 1; \quad u_{n+1} = \frac{3}{n+2}u_n + \frac{1-6n}{(n+2)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải. Ta có $p(n) = \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} p(k) = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Đặt $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \cdot v_n$, khi đó ta có

$$v_1 = 2; v_{n+1} - 3v_n = 1 - 6n.$$

Giải phương trình này ta được $v_n = -2.3^{n-1} + 3n + 1$.

Vậy $u_n = \dfrac{-2.3^{n-1} + 3n + 1}{(n+1)!}$.

Ví dụ 2.9. *Tìm u_n biết rằng*

$$u_1 = 1; \quad u_{n+1} = \sqrt{2}.3^n.u_n + n.2^n.3^{\frac{n^2+n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{n\pi}{4}), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài giải. Ta có $p(n) = 3^n \Rightarrow \prod_{k=0}^{n-1} p(k) = \prod_{k=0}^{n-1} 3^k = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Đặt $u_n = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}.v_n$, khi đó ta có

$$v_1 = 1; v_{n+1} = \sqrt{2}.v_n + 2^n.(n\cos\frac{n\pi}{4} + n\sin\frac{n\pi}{4}).$$

Giải phương trình này ta được

$$v_n = -(\sqrt{2})^{n-1} + 2^n\big[(-\frac{1}{\sqrt{2}}n + \frac{2}{\sqrt{2}})\cos\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}n\sin\frac{n\pi}{4}\big].$$

Vậy $u_n = 3^{\frac{n(n-1)}{2}}\left\{-(\sqrt{2})^{n-1} + 2^n\big[(-\frac{1}{\sqrt{2}}n + \frac{2}{\sqrt{2}})\cos\frac{n\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}n\sin\frac{n\pi}{4}\big]\right\}$.

Ví dụ 2.10. *Tìm u_n biết rằng*

$$u_1 = \frac{1}{2}; \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot u_n + \frac{n(n+1)}{n+2} \cdot n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.13}$$

Bài giải. Trước hết ta đi tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất

$$u_{n+1} - \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot u_n = 0.$$

Ta viết lại phương trình này dưới dạng

$$\frac{n+2}{n+1} \cdot u_{n+1} - \frac{n+1}{n} \cdot u_n = 0.$$

Đặt $v_n = \dfrac{n+1}{n} \cdot u_n$, khi đó phương trình trên có dạng $v_{n+1} - v_n = 0$, phương trình này có nghiệm $\widetilde{v}_n = C$ (với C là hằng số).
Suy ra $\widetilde{u}_n = C \cdot \dfrac{n}{n+1}$.
Ta đi tìm nghiệm riêng của (2.13) dưới dạng $u_n^* = C_n \cdot \dfrac{n}{n+1}$.
Dùng phương pháp biến thiên hằng số ta tìm được

$$u_n^* = (C_0 + n! - 1).\frac{n}{n+1}.$$

Suy ra $u_n = \dfrac{n}{n+1}(C + C_0) + \dfrac{n.n!}{n+1} - \dfrac{n}{n+1}$.
Với điều kiện ban đầu $u_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow C + C_0 = 1$. Vậy $u_n = \dfrac{n.n!}{n+1}$.

Ví dụ 2.11. *Tìm u_n biết rằng với $\forall n \geq 1$*

$$u_1 = a;\ \ u_{n+1} = g(n)u_n^k, \tag{2.14}$$

trong đó $g(n) > 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*; k \in \mathbb{R}^+$.

Bài giải. Từ giả thiết ta suy ra $u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Lấy logarit theo cơ số e hai vế của phương trình (2.14) ta được

$$\ln u_{n+1} = \ln g(n) + k.\ln u_n. \tag{2.15}$$

Đặt $v_n = \ln u_n$, khi đó (2.15) có dạng

$$v_{n+1} - kv_n = \ln g(n). \tag{2.16}$$

Ta lại đặt $v_n = k^{n-1}y_n$, khi đó (2.16) có dạng

$$y_{n+1} - y_n = \frac{\ln g(n)}{k^n} \Rightarrow y_n = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i}.$$

Từ giả thiết $u_1 = a > 0 \Rightarrow y_1 = \ln a$. Do vậy

$$y_n = \ln a + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i} \Rightarrow v_n = k^{n-1}\Big(\ln a + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i}\Big).$$

Khi đó ta có

$$u_n = e^{v_n} = e^{k^{n-1}\left(\ln a + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i}\right)}.$$

Ví dụ 2.12. *Tìm u_n biết rằng với $\forall n \geq 1$*

$$u_1 = a > 0;\ u_{n+1} = \frac{f(n+1)}{f^k(n)} \cdot u_n^k, \tag{2.17}$$

trong đó $f(n) > 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*; k \in \mathbb{N}^*$.

Bài giải. Từ (2.17) ta có

$$\frac{u_{n+1}}{f(n+1)} = \frac{u_n^k}{f^k(n)}. \tag{2.18}$$

Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{f(n)}$, khi đó (2.18) có dạng

$$v_{n+1} = v_n^k. \tag{2.19}$$

Ta lại đặt $y_n = \ln v_n$, khi đó (2.19) có dạng

$$y_{n+1} = ky_n \Rightarrow y_n = C.k^n, \quad (\text{với } C \text{ là hằng số}).$$

Do $u_1 = a \Rightarrow v_1 = \dfrac{a}{f(1)} \Rightarrow y_1 = \ln \dfrac{a}{f(1)} = C.k$. Từ đó ta có

$$y_n = k^{n-1} \ln \frac{a}{f(1)} \Rightarrow v_n = e^{k^{n-1} \ln \frac{a}{f(1)}} = \left(\frac{a}{f(1)}\right)^{k^{n-1}}.$$

Vậy cuối cùng ta có

$$u_n = \left(\frac{a}{f(1)}\right)^{k^{n-1}}.f(n).$$

2.3 Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng số

2.3.1 Định nghĩa

Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai với hệ số hằng số là phương trình sai phân có dạng

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = f(n) \quad \text{hoặc} \quad u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n + f(n) \tag{2.20}$$

trong đó a, b, c, p, q là các hằng số; $a \neq 0, c \neq 0, q \neq 0, f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

Nếu $f(n) = 0$ phương trình (2.20) có dạng

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad \text{hoặc} \quad u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n \tag{2.21}$$

được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất tương ứng với phương trình (2.20).

Nếu $f(n) \neq 0$ phương trình (2.20) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất.

2.3.2 Nghiệm

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.20) có dạng:

$$u_n = \widetilde{u}_n + u_n^*$$

trong đó:

$\widetilde{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (2.21).

u_n^* là một nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất (2.20).

Sau đây ta sẽ nêu ra cách giải phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (2.21).

Phương trình đặc trưng của (2.21) là:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{hay} \quad \lambda^2 = p\lambda + q. \tag{2.22}$$

Trường hợp 1. Nếu phương trình (2.22) có hai nghiệm thực phân biệt $\lambda_1; \lambda_2$ thì $\widetilde{u}_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$, trong đó $A; B$ là hai hằng số.

Trường hợp 2. Nếu phương trình (2.22) có nghiệm thực kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ thì $\widetilde{u}_n = (A + Bn)\lambda^n$, trong đó $A; B$ là hai hằng số.

Chứng minh. Do $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ là số thực nên $x_n = \lambda^n$ là một nghiệm của phương trình (2.21). Ta đi tìm nghiệm thứ hai dưới dạng $y_n = v_n\lambda^n$. Thay $y_n = v_n\lambda^n$ vào phương trình (2.21) ta được

$$av_{n+2}\lambda^{n+2} + bv_{n+1}\lambda^{n+1} + cv_n\lambda^n = 0.$$

Từ định nghĩa ta có $c \neq 0$ nên từ phương trình (2.22) suy ra $\lambda \neq 0$. Vì vậy ta viết lại phương trình trên dưới dạng:

$$v_{n+2}\lambda^2 + \frac{b}{a}v_{n+1}\lambda + \frac{c}{a}v_n = 0. \tag{2.23}$$

Theo định lý Viète, từ phương trình (2.22) ta có

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 2\lambda = -\dfrac{b}{a} \\ \lambda_1.\lambda_2 & = \lambda^2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Khi đó phương trình (2.23) có dạng $\lambda^2 v_{n+2} - 2\lambda^2 v_{n+1} + \lambda^2 v_n = 0$.
Hay

$$v_{n+2} + v_n = 2v_{n+1}.$$

Do đó (v_n) là cấp số cộng tuỳ ý, để đơn giản ta lấy $(v_n) = (n); n \in \mathbb{N}$.
Khi đó $y_n = n\lambda^n$, mặt khác $\dfrac{y_n}{x_n} = n$, suy ra $x_n; y_n$ độc lập tuyến tính.
Do vậy

$$\widetilde{u}_n = (A + Bn)\lambda^n.$$

$\square$

Trường hợp 3.
Nếu phương trình (2.22) có nghiệm phức $\lambda = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, với $i^2 = -1; r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}; \tan\varphi = \dfrac{y}{x}; \varphi \in (-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$ thì phương trình (2.22) còn có nghiệm phức liên hợp $\lambda = x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$. Khi đó $\widetilde{u}_n = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi)$, với $A; B$ là các hằng số.

Chứng minh. Nếu phương trình (2.22) có nghiệm phức $\lambda = x + iy$ thì λ^n sẽ là nghiệm của phương trình(2.21). Theo công thức Moivre ta có

$$\lambda^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = x_n,$$

$$\overline{\lambda^n} = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = y_n.$$

Suy ra $Ax_n + By_n$ cũng là nghiệm.
Lấy $A = B = \dfrac{1}{2}$ ta có $\dfrac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{2}y_n = r^n\cos n\varphi$.
Lấy $A = \dfrac{1}{2i}; B = -\dfrac{1}{2i}$ ta có $\dfrac{1}{2i}x_n - \dfrac{1}{2i}y_n = r^n\sin n\varphi$.
Mặt khác $\dfrac{r^n\cos n\varphi}{r^n\sin n\varphi} = \cot n\varphi \neq const(\varphi \neq k\pi)$, nên $r^n\cos n\varphi; r^n\sin n\varphi$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính. Do vậy nghiệm tổng quát của phương trình (2.21) là

$$\widetilde{u}_n = r^n(A\cos n\varphi + B\sin n\varphi), \text{với } A; B \text{ là các hằng số.}$$

□

2.3.3 Một số phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

Phương pháp hệ số bất định

Nội dung sau đây trình bày cách tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất (2.20) khi vế phải $f(n)$ có dạng đặc biệt.

Trường hợp 1.

$$f(n) = P_m(n) \quad \text{là đa thức bậc } m \text{ đối với } n.$$

Khi đó:

- Nếu phương trình đặc trưng (2.22) không có nghiệm $\lambda = 1$ thì ta chọn $u_n^* = Q_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n.

- Nếu phương trình đặc trưng (2.22) có nghiệm đơn $\lambda = 1$ thì ta chọn $u_n^* = nQ_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n.

- Nếu phương trình đặc trưng (2.22) có nghiệm kép $\lambda = 1$ thì ta chọn $u_n^* = n^2Q_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n.

Chứng minh. Ta đi tìm nghiệm riêng $u_n^* = Q(n)$. Khi đó $Q(n+2); Q(n+1)$; $Q(n)$ là các đa thức có hệ số của hạng tử bậc cao nhất bằng nhau.

- Do phương trình đặc trưng (2.22) không có nghiệm $\lambda = 1$ tức là $\lambda_1 \neq 1; \lambda_2 \neq 1$ nên $1 - p - q \neq 0$. Suy ra

$$\deg(Q(n+2) - pQ(n+1) - qQ(n)) = \deg Q(n).$$

Mặt khác $Q(n+2) - pQ(n+1) - qQ(n) = f(n)$, nên $\deg Q(n) = \deg f(n) = m$. Do vậy $u_n^* = Q_m(n)$.

- Do phương trình đặc trưng (2.22) có nghiệm đơn $\lambda = 1$ nên $1 - p - q = 0$. Ta đi tìm nghiệm riêng $u_n^* = R(n)$, trong đó $R(n)$ là đa thức mà bậc sẽ được xác định ở phần sau. Ta có $R(n+2); R(n+1); R(n)$ là các đa thức có hệ số của hạng tử bậc cao nhất bằng nhau mà $1 - p - q = 0$ suy ra

$$\deg(R(n+2) - pR(n+1) - qR(n)) = \deg R(n) - 1 = \deg f(n).$$

Suy ra $R(n)$ là đa thức bậc $m + 1$, do đó ta chọn $u_n^* = R(n) = nQ_m(n)$, trong đó $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n.

- Do phương trình đặc trưng (2.22) có nghiệm kép $\lambda = 1$ nên ta có

$$\begin{cases} 1 - p - q & = 0 \\ q & = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p & = 2 \\ q & = -1 \end{cases}$$

Ta đi tìm $u_n^* = R(n)$ là nghiệm riêng của phương trình (2.21) nên khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(n) &= R(n+2) - pR(n+1) - qR(n) = R(n+2) - 2R(n+1) + R(n) \\ &= R(n+2) - R(n+1) - [R(n+1) - R(n)] = \Delta R(n+1) - \Delta R(n) \\ &= \Delta^2 R(n). \end{aligned}$$

Suy ra $\deg R(n) = \deg f(n) + 2$.
Vậy nên $u_n^* = R(n) = n^2 Q_m(n)$, trong đó $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n. □

Trường hợp 2.

$$f(n) = P_m(n).\beta^n \quad (\beta \neq 0),$$

trong đó $P_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n. Khi đó:

- Nếu β không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta chọn $u_n^* = Q_m(n).\beta^n$.

- Nếu β là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta chọn $u_n^* = n.Q_m(n).\beta^n$.

- Nếu β là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta chọn $u_n^* = n^2.Q_m(n).\beta^n$.

Chứng minh. Xét phương trình sai phân

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n + P_m(n).\beta^n \quad (\beta \neq 0). \tag{2.24}$$

Chia cả hai vế của phương trình (2.24) cho β^n ta được

$$\beta^2 \frac{u_{n+2}}{\beta^{n+2}} - p\beta \frac{u_{n+1}}{\beta^{n+1}} - q\frac{u_n}{\beta^n} = P_m(n).$$

Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{\beta^n}$, khi đó phương trình trên được viết dưới dạng

$$\beta^2 v_{n+2} - p\beta v_{n+1} - qv_n = P_m(n). \tag{2.25}$$

Phương trình đặc trưng của (2.25) là

$$\beta^2 t^2 - p\beta t - q = 0 \tag{2.26}$$

với $\Delta_1 = \beta^2(p^2 + 4q) = \beta^2.\Delta$ trong đó $\Delta = p^2 + 4q$ là biệt thức của phương trình (2.22).

- Nếu β không là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.22) tức là $\beta^2 - p\beta - q \neq 0$ thì phương trình (2.26) không có nghiệm $t = 1$. Khi đó ta chọn một nghiệm riêng của phương trình (2.25) là: $v_n^* = Q_m(n)$, trong đó $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n. Vậy $u_n^* = Q_m(n).\beta^n$.

- Nếu β là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta có

$$\begin{cases} \Delta & > 0 \\ \beta^2 - p\beta - q & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 & > 0 \\ \beta^2 - p\beta - q & = 0 \end{cases}$$

Hay $t = 1$ là một nghiệm đơn của phương trình (2.26), khi đó ta chọn một nghiệm riêng của phương trình (2.25) là $v_n^* = nQ_m(n)$.
Vậy $u_n^* = n.Q_m(n).\beta^n$, trong đó $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n.

- Nếu β là một nghiệm kép của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta có

$$\begin{cases} \Delta & = 0 \\ \beta^2 - p\beta - q & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 & = 0 \\ \beta^2 - p\beta - q & = 0 \end{cases}$$

Hay $t = 1$ là nghiệm kép của phương trình (2.26), khi đó ta chọn một nghiệm riêng của phương trình (2.25) là $v_n^* = n^2 Q_m(n)$.
Vậy $u_n^* = n^2.Q_m(n).\beta^n$, trong đó $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n. □

Trường hợp 3.

$$f(n) = P_m(n)\cos n\beta + Q_l(n)\sin n\beta.$$

trong đó $P_m(n); Q_l(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, l đối với n. Kí hiệu $k = \max\{m; l\}$. Khi đó

- Nếu $\cos\beta \pm i\sin\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta chọn

$$u_n^* = T_k(n)\cos n\beta + R_k(n)\sin n\beta,$$

trong đó $T_k(n); R_k(n)$ là các đa thức bậc k đối với n.

- Nếu $\cos\beta \pm i\sin\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta chọn

$$u_n^* = n[T_k(n)\cos n\beta + R_k(n)\sin n\beta],$$

trong đó $T_k(n); R_k(n)$ là các đa thức bậc k đối với n.

Chứng minh. Xem [4].

Mở rộng.

$$f(n) = \alpha^n[P_m(n)\cos n\beta + Q_l(n)\sin n\beta] \qquad (\alpha \neq 0).$$

Khi đó

- Nếu $\alpha.e^{\pm i\beta} = \alpha(\cos\beta \pm i\sin\beta)$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta chọn

$$u_n^* = \alpha^n[T_k(n)\cos n\beta + R_k(n)\sin n\beta],$$

trong đó $T_k(n); R_k(n)$ là các đa thức bậc k đối với n.

- Nếu $\alpha.e^{\pm i\beta} = \alpha(\cos\beta \pm i\sin\beta)$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (2.22) thì ta chọn

$$u_n^* = n.\alpha^n[T_k(n)\cos n\beta + R_k(n)\sin n\beta],$$

trong đó $T_k(n); R_k(n)$ là các đa thức bậc k đối với n, $k = \max\{m; l\}$.

Chứng minh. Xét phương trình

$$u_{n+2} - pu_{n+1} - qu_n = \alpha^n[P_m(n)\cos n\beta + Q_l(n)\sin n\beta].$$

Do $\alpha \neq 0$, ta chia cả hai vế của phương trình trên cho α^n ta có

$$\alpha^2\frac{u_{n+2}}{\alpha^{n+2}} - p\alpha\frac{u_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - q\frac{u_n}{\alpha^n} = P_m(n)\cos n\beta + Q_l(n)\sin n\beta.$$

Đặt $v_n = \dfrac{u_n}{\alpha^n}$, khi đó ta viết lại phương trình như sau

$$\alpha^2 v_{n+2} - p\alpha v_n - qv_n = P_m(n)\cos n\beta + Q_l(n)\sin n\beta. \tag{2.27}$$

Phương trình đặc trưng của (2.27) có dạng

$$\alpha^2t^2 - p\alpha t - q = 0. \tag{2.28}$$

- Nếu $e^{\pm i\beta} = \cos\beta \pm i\sin\beta$ không là nghiệm của phương trình (2.28) thì $\alpha.e^{\pm i\beta} = \alpha(\cos\beta \pm i\sin\beta)$ không là nghiệm của (2.22). Theo kết quả trên ta có $v_n^* = T_k(n)\cos n\beta + R_k(n)\sin n\beta$.
Vậy $u_n^* = \alpha^n[T_k(n)\cos n\beta + R_k(n)\sin n\beta]$.

- Nếu $e^{\pm i\beta} = \cos\beta \pm i\sin\beta$ là nghiệm của phương trình (2.28) thì $\alpha.e^{\pm i\beta} = \alpha(\cos\beta \pm i\sin\beta)$ là nghiệm của (2.22). Theo kết quả trên ta có $v_n^* = n[T_k(n)\cos n\beta + R_k(n)\sin n\beta]$.
Vậy $u_n^* = n\alpha^n[T_k(n)\cos n\beta + R_k(n)\sin n\beta]$. □

Trường hợp 4.

$$f(n) = \sum_{k=1}^{m} f_k(n)$$

Khi đó ta chọn nghiệm riêng u_n^* dưới dạng: $u_n^* = \sum\limits_{k=1}^{m} u_{nk}^*$, trong đó u_{nk}^* tương ứng là nghiệm riêng của phương trình sai phân (2.21) với vế phải là $f_k(n)$ và được tìm theo một trong các trường hợp trên.

Ví dụ 2.13. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân*

$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 2^{n+3}. \tag{2.29}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.29) là: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$. Phương trình này có nghiệm kép $\lambda = 2$.
Ta chọn một nghiệm riêng của phương trình (2.29) là $u_n^* = n^2.a.2^n$. Thay $u_n^* = n^2.a.2^n$ vào phương trình (2.29) ta được

$$4a(n+2)^2 - 8a(n+1)^2 + 4n^2a = 8.$$

Cho $n = 1$ ta được $a = 1$. Vậy $u_n^* = n^2.2^n$.

Ví dụ 2.14. *Giải phương trình sai phân sau đây*

$$\begin{cases} u_0 = 2; u_1 = 1 \\ u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = -(3n+2)\cos\dfrac{n\pi}{2} + (n+1)\sin\dfrac{n\pi}{2}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Bài giải. Ta có $P_m(n) = -(3n+2); Q_l(n) = n+1; \beta = \dfrac{\pi}{2}$.
Phương trình đặc trưng của (2.30) có dạng $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Phương trình này có nghiệm $\lambda = 2; \lambda = -1$.
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là: $\widetilde{u}_n = A.(-1)^n + B.2^n$.
Ta thấy $\cos\dfrac{\pi}{2} \pm i\sin\dfrac{\pi}{2} = \pm i$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng của (2.30) nên

$$u_n^* = (an+b)\cos\frac{n\pi}{2} + (cn+d)\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Thay u_n^* vào phương trình (2.30), rút gọn và so sánh các hệ số ta được

$$a = 1; b = c = d = 0 \Rightarrow u_n^* = n\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Phương trình (2.30) có nghiệm tổng quát là:

$$u_n = A.(-1)^n + B.2^n + n\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Do giả thiết

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B & = 2 \\ -A + 2B & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

$$u_n = (-1)^n + 2^n + n.\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Phương pháp biến thiên hằng số

Xét phương trình sai phân (2.20):

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n + f(n),$$

và phương trình thuần nhất tương ứng (2.21)

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n.$$

Giả sử u_n, v_n là hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2.21), khi đó phương trình (2.21) có nghiệm tổng quát là $\widetilde{u}_n = Au_n + Bv_n$, trong đó A, B là hai hằng số. Để tìm nghiệm riêng của phương trình (2.20) ta coi A, B biến thiên theo n và đi tìm u_n^* dưới dạng

$$u_n^* = A_n u_n + B_n v_n.$$

- Nếu $\lambda_1; \lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình đặc trưng (2.22) thì hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình (2.21) là $u_n = \lambda_1^n, v_n = \lambda_2^n$. Ta đi tìm nghiệm riêng u_n^* dưới dạng

  $$u_n^* = A_n\lambda_1^n + B_n\lambda_2^n.$$

  Từ phương trình đặc trưng $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$ ta có

  $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = p \\ \lambda_1.\lambda_2 & = -q. \end{cases}$$

  Thay $u_n^* = A_n\lambda_1^n + B_n\lambda_2^n$ vào phương trình (2.20) ta được

  $$A_{n+2}\lambda_1^{n+2} + B_{n+2}\lambda_2^{n+2} - p[A_{n+1}\lambda_1^{n+1} + B_{n+1}\lambda_2^{n+1}] - q[A_n\lambda_1^n + B_n\lambda_2^n] = f(n)$$

  $$\Leftrightarrow A_{n+2}\lambda_1^{n+2} + B_{n+2}\lambda_2^{n+2} - (\lambda_1 + \lambda_2)[A_{n+1}\lambda_1^{n+1} + B_{n+1}\lambda_2^{n+1}] + \lambda_1.\lambda_2[A_n\lambda_1^n + B_n\lambda_2^n] = f(n)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^{n+2}(A_{n+2} - A_{n+1}) + \lambda_2^{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) \\ - \lambda_1^{n+1}\lambda_2(A_{n+1} - A_n) - \lambda_1\lambda_2^{n+1}(B_{n+1} - B_n) = f(n)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^{n+2}\Delta A_{n+1} + \lambda_2^{n+2}\Delta B_{n+1} - \lambda_1^{n+1}\lambda_2\Delta A_n - \lambda_1\lambda_2^{n+1}\Delta B_n = f(n)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^{n+2}\Delta A_{n+1} - \lambda_1^{n+2}\Delta A_n + \lambda_1^{n+2}\Delta A_n - \lambda_1^{n+1}\lambda_2\Delta A_n \\ + \lambda_2^{n+2}\Delta B_{n+1} - \lambda_2^{n+2}\Delta B_n + \lambda_2^{n+2}\Delta B_n - \lambda_1\lambda_2^{n+1}\Delta B_n = f(n)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1^{n+2}\Delta^2 A_n + \lambda_1^{n+1}\Delta A_n(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2^{n+2}\Delta^2 B_n + \lambda_2^{n+1}\Delta B_n(\lambda_2 - \lambda_1) = f(n)$$

Theo công thức sai phân từng phần thì phương trình trên có thể viết lại như sau:

$$\Delta(\Delta A_n\lambda_1^{n+1}) - \Delta(\lambda_1^{n+1})\Delta(A_n) + \lambda_1^{n+1}\Delta A_n(\lambda_1 - \lambda_2) \\ + \Delta(\Delta B_n\lambda_2^{n+1}) - \Delta(\lambda_2^{n+1})\Delta(B_n) + \lambda_2^{n+1}\Delta B_n(\lambda_2 - \lambda_1) = f(n)$$

$$Hay \quad \Delta(\Delta A_n\lambda_1^{n+1} + \Delta B_n\lambda_2^{n+1}) + (\lambda_1^{n+1}\Delta A_n + \lambda_2^{n+1}\Delta B_n) \\ - \lambda_1^{n+1}\lambda_2\Delta A_n - \lambda_2^{n+1}\lambda_1\Delta B_n = f(n).$$

Để phương trình trên được thoả mãn ta phải có

$$\begin{cases} \lambda_1^{n+1}\Delta A_n + \lambda_2^{n+1}\Delta B_n & = 0 \\ -\lambda_1^{n+1}\lambda_2\Delta A_n - \lambda_2^{n+1}\lambda_1\Delta B_n & = f(n). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} \Delta A_n = \dfrac{-f(n)}{\lambda_1^{n+1}(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ \Delta B_n = \dfrac{f(n)}{\lambda_2^{n+1}(\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được A_n, B_n và $u_n^* = A_n.\lambda_1^n + B_n.\lambda_2^n$.

- Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (2.22) thì hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (2.21) là $u_n = \lambda^n, v_n = n\lambda^n$. Khi đó
$$\begin{cases} \Delta A_n = \dfrac{-(n+1)f(n)}{\lambda^{n+2}} \\ \Delta B_n = \dfrac{f(n)}{\lambda^{n+2}}. \end{cases}$$

- Nếu $\lambda = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ là nghiệm phức của phương trình đặc trưng (2.22) thì hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (2.21) là $u_n = r^n\cos n\varphi, v_n = r^n\sin n\varphi$. Khi đó
$$\begin{cases} \Delta A_n = \dfrac{-f(n)\sin(n+1)\varphi}{r^{n+2}\sin\varphi} \\ \Delta B_n = \dfrac{f(n)\cos(n+1)\varphi}{r^{n+2}\sin\varphi}. \end{cases}$$

Ví dụ 2.15. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sau bằng phương pháp biến thiên hằng số*
$$u_{n+2} - 2u_{n+1} - 3u_n = 3^{n+1}. \tag{2.31}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.31) là $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Phương trình này có các nghiệm là $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$. Theo kết quả nêu trên ta có
$$\Delta A_n = \frac{-f(n)}{\lambda_1^{n+1}(\lambda_2 - \lambda_1)} = -\frac{1}{4}(-3)^{n+1} = \Delta\frac{1}{16}(-3)^{n+1} \Rightarrow A_n = \frac{1}{16}(-3)^{n+1}$$
$$\Delta B_n = \frac{f(n)}{\lambda_2^{n+1}(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{1}{4} = \Delta\frac{1}{4}n \Rightarrow B_n = \frac{1}{4}n.$$
Vậy $u_n^* = \dfrac{3^n}{4}(n - \dfrac{3}{4})$.

Ví dụ 2.16. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sau bằng phương pháp biến thiên hằng số*
$$u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 3.2^n. \tag{2.32}$$

Bài giải. Phương trình đặc trưng của (2.32) là $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Phương trình này có các nghiệm là $\lambda = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \pm i\sin\dfrac{\pi}{3}$. Theo kết quả nêu trên ta có

$$\Delta A_n = -\sqrt{3}.2^{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{3} = \Delta\big[2^n(\cos\frac{n\pi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3})\big]$$
$$= \Delta\big(2^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{3}\big)$$
$$\Rightarrow A_n = 2^{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{3}.$$

$$\Delta B_n = \sqrt{3}.2^{n+1}\cos(n+1)\frac{\pi}{3} = \Delta\big[2^n(\sqrt{3}\cos\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3})\big]$$
$$= \Delta\big(2^{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}\big)$$
$$\Rightarrow B_n = 2^{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}.$$

Vậy $u_n^* = 2^{n+1}\big[\cos\frac{(n+1)\pi}{3}\cdot\cos\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{(n+1)\pi}{3}\cdot\sin\frac{n\pi}{3}\big] = 2^n.$

2.4 Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai với hệ số biến thiên

Định nghĩa 2.2. *Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai với hệ số biến thiên là phương trình sai phân có dạng*

$a(n)u_{n+2} + b(n)u_{n+1} + c(n)u_n = f(n)$ *hoặc* $u_{n+2} = p(n)u_{n+1} + q(n)u_n + f(n)$

trong đó $a(n) \neq 0, c(n) \neq 0, q(n) \neq 0$ *và* $a(n), b(n), c(n), p(n), q(n), f(n)$ *là các hàm số của* n.

Trong mục này ta xét phương trình sai phân tuyến tính cấp hai với hệ số biến thiên dạng

$$u_{n+2} = p(n)u_{n+1} + q(n)u_n + f(n) \tag{2.33}$$

trong đó $q(n) \neq 0$ và $p(n), q(n), f(n)$ là các hàm số của n.

Định lí 2.2. *Nghiệm tổng quát* u_n *của phương trình* (2.33) *có dạng:*

$$u_n = \widetilde{u}_n + u_n^*$$

trong đó:

$\widetilde{u}_n$ *là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng:* $u_{n+2} = p(n)u_{n+1} + q(n)u_n$.

u_n^* *là một nghiệm riêng tuỳ ý của phương trình* (2.33).

Ví dụ 2.17. *Giải phương trình sai phân sau*

$$(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2})u_{n+1} - 2u_n + (1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2})u_{n-1} = \frac{4n^2 - 1}{2n^2} \cdot 3^n \qquad (2.34)$$

Bài giải. Phương trình thuần nhất tương ứng với phương trình (2.34) có hai nghiệm độc lập tuyến tính là $u_n = n; v_n = -\frac{1}{2n}$, nên $\widetilde{u}_n = An - B\frac{1}{2n}\cdot$ Để tìm nghiệm riêng u_n^*, ta tìm $u_n^* = A_n \cdot n - B_n \cdot \frac{1}{2n}$. Theo kết quả của phương pháp biến thiên hằng số ta có:

$$\Delta A_{n-1} = \frac{2n^2}{4n^2 - 1} \cdot \frac{4n^2 - 1}{2n^2} \cdot 3^n = 3^n = \Delta\frac{3^n}{2} \Rightarrow A_n = \frac{3}{2} \cdot 3^n$$

.

$$\Delta B_{n-1} = \frac{4n^4}{4n^2 - 1} \cdot \frac{4n^2 - 1}{2n^2} \cdot 3^n = 2n^2 \cdot 3^n \Rightarrow B_n = (n^2 - n + 1)3^{n+1}.$$

Vậy $u_n^* = \frac{3}{2}n \cdot 3^n - (n^2 - n + 1)\frac{3^{n+1}}{2n} = \frac{3^{n+1}}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$.
Thử lại: Ta có

$$\begin{aligned}&(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2})u_{n+1} - 2u_n + (1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2})u_{n-1}\\ &= \frac{(n+1)(2n-1)}{2n^2} \cdot \frac{3^{n+2}}{2} \cdot \frac{n}{n+1} - 2\frac{3^{n+1}}{2} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)(2n+1)}{2n^2} \cdot \frac{3^n}{2} \cdot \frac{n-2}{n-1}\\ &= \frac{4n^2-1}{2n^2} \cdot 3^n.\end{aligned}$$

Do đó nghiệm của phương trình (2.34) là:

$$u_n = An - B\frac{1}{2n} + \frac{3^{n+1}}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$$

trong đó A, B là các hằng số tuỳ ý.

Trong nhiều trường hợp ta có thể biến đổi để đưa phương trình sai phân với hệ số biến thiên về phương trình sai phân với hệ số hằng số.

Ví dụ 2.18. *Giải phương trình sai phân sau*

$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = -3; n = 1, 2, \cdots \\ u_{n+2} - 3\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}u_{n+1} + 2\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}u_n = \dfrac{n(n+2)}{n+3} \end{cases} \tag{2.35}$$

Bài giải. Chia cả hai vế của phương trình (2.35) cho $\dfrac{n+2}{n+3}$ ta được

$$\frac{n+3}{n+2}u_{n+2} - 3\frac{n+2}{n+1}u_{n+1} + 2\frac{n+1}{n}u_n = n.$$

Đặt $v_n = \dfrac{n+1}{n}u_n$, ta được

$$\begin{cases} v_1 = 0; v_2 = -\dfrac{9}{2}; n = 1, 2, \cdots \\ v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = n \end{cases} \tag{2.36}$$

Phương trình (2.36) là phương trình sai phân với hệ số hằng số, giải phương trình này ta được

$$v_n = \frac{7}{2} - \frac{5}{4} \cdot 2^n - \frac{1}{2}n(n+1).$$

Vậy

$$u_n = \frac{n}{n+1}\Big[\frac{7}{2} - \frac{5}{4} \cdot 2^n - \frac{1}{2}n(n+1)\Big].$$

Chương 3

Một vài ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính trong giải toán phổ thông

3.1 Bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số

Bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi là một bài toán thường gặp ở chương trình phổ thông. Bài toán tổng quát được phát biểu như sau: Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) (theo quy luật đa thức) được cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1; u_2 = \alpha_2 \ ; \cdots ; u_k = \alpha_k \\ f(x_{n+k}; x_{n+k-1}; \cdots ; x_{n+1}; x_n; n) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $\alpha_1; \alpha_2; \cdots ; \alpha_k$ là các hằng số thuộc $\mathbb{R}$ cho trước, còn f là một biểu thức chứa $k+2$ biến cho trước.
Thực chất của bài toán nêu trên là ta đang xét bài toán xác định hàm số $u_n = u(n)$ thoả mãn phương trình (3.1) với các điều kiện ban đầu cho trước. Vì lý do đó, đôi khi ta cũng gọi bài toán xác định dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi (3.1) là bài toán giải phương trình (3.1).

Trong các ví dụ ở chương 2 ta đã dùng lý thuyết của phương trình sai phân tuyến tính để giải bài toán nêu trên khi công thức truy hồi là một biểu thức tuyến tính với hệ số hằng số hoặc hệ số biến thiên. Trong mục này ta tiếp tục đề cập đến dạng toán nêu trên và khi công thức truy hồi là một hệ biểu thức tuyến tính, công thức truy hồi có dạng phân tuyến tính với hệ số hằng.

3.1.1 Xác định số hạng tổng quát của dãy số khi công thức truy hồi là biểu thức tuyến tính

Ví dụ 3.1. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *thoả mãn*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = qu_n + p \quad (p, q \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{3.2}$$

Bài giải

- Nếu $q = 1$ thì (u_n) là cấp số cộng với công sai p nên $u_n = \alpha + np$.
- Nếu $p = 0$ thì (u_n) là cấp số nhân với công bội q nên $u_n = \alpha q^n$.
- Ta xét $q \neq 1; p \neq 0$, đặt $u_n = v_n + b$ (với b được xác định sau), khi đó phương trình (3.2) được viết như sau:

$$v_{n+1} + b = q(v_n + b) + p.$$

Chọn $b = \dfrac{p}{1-q}$ ta được $v_{n+1} = qv_n \Leftrightarrow v_n = v_0 q^n$

Vậy $u_n = \Big(\alpha - \dfrac{p}{1-q}\Big)q^n + \dfrac{p}{1-q}$.

Dãy số xác định trong ví dụ (3.2) được gọi là "dãy số nhân - cộng". Cấp số cộng là trường hợp riêng của "dãy số nhân - cộng" khi $q = 1$, còn cấp số nhân là trường hợp riêng của "dãy số nhân - cộng" khi $p = 0$.

Ví dụ 3.2. *Tìm tất cả các dãy số* (u_n) *thoả mãn* $u_{n+1} = 7^n - 11u_n$ *và* (u_n) *là một dãy số tăng.*

Bài giải. Xét phương trình sai phân

$$u_{n+1} = 7^n - 11u_n. \tag{3.3}$$

Giải phương trình (3.3) ta được nghiệm tổng quát của phương trình này là

$$u_n = C(-11)^n + \frac{1}{18} \cdot 7^n.$$

Vì (u_n) là dãy số tăng nên $u_{n+1} > u_n$. Do đó

$$C(-11)^{n+1} + \frac{1}{18} \cdot 7^{n+1} > C(-11)^n + \frac{1}{18} \cdot 7^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$12C(-11)^n < \frac{1}{3} \cdot 7^n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

- Với $C > 0$ thì (3.4) tương đương $\left(-\frac{11}{7}\right)^n < \frac{1}{36C}$ với $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta không tìm được C thoả mãn điều này vì khi n chẵn thì $\left(-\frac{11}{7}\right)^n \to +\infty$.

- Với $C < 0$ thì (3.4) tương đương $\left(-\frac{11}{7}\right)^n > \frac{1}{36C}$ với $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta không tìm được C thoả mãn điều này vì khi n lẻ thì $\left(-\frac{11}{7}\right)^n \to -\infty$.

- Với $C = 0$ thì $u_n = \frac{1}{18} \cdot 7^n$ là dãy số tăng.

Vậy dãy số cần tìm có u_n được xác định là $u_n = \frac{1}{18} \cdot 7^n$.

Ví dụ 3.3. *(Mathematical Olympyad in China, 2004)*
Cho dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (3 - u_n)(6 + u_{n-1}) = 18 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{3.5}$$

Hãy tính $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{u_i}$.

Bài giải. Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, khi đó phương trình (3.5) có dạng

$$(3 - \frac{1}{v_n})(6 + \frac{1}{v_{n-1}}) = 18 \Leftrightarrow 3v_n - 6v_{n-1} - 1 = 0.$$

Giải phương trình này (với điều kiện ban đầu $v_0 = \frac{1}{3}$) ta tìm được $v_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)$. Khi đó ta có

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{u_i} = \sum_{i=0}^{n} v_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3}(2^{i+1} - 1) = \frac{1}{3}(2^{n+2} - n - 3).$$

3.1.2 Xác định số hạng tổng quát của dãy số khi công thức truy hồi là hệ biểu thức tuyến tính

Bài toán 3.1. *Xác định số hạng tổng quát của các dãy số* $(u_n); (v_n)$ *thoả mãn*

$$\begin{cases} u_1 = a; v_1 = b \\ u_{n+1} = pu_n + qv_n \quad (3.6a) \\ v_{n+1} = ru_n + sv_n \quad (3.6b) \end{cases} \tag{3.6}$$

trong đó a, b, p, q, r, s *là các hằng số thuộc* $\mathbb{R}$.

Bài giải. Từ phương trình $(3.6a)$ trong (3.6) thay n bởi $n+1$ và biến đổi ta có

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= pu_{n+1} + qv_{n+1} \\ &= pu_{n+1} + q(ru_n + sv_n) \\ &= pu_{n+1} + qru_n + s(u_{n+1} - pu_n). \end{aligned}$$

Suy ra $u_{n+2} - (p+s)u_{n+1} + (ps - qr)u_n = 0$.
Từ (3.6) ta cũng có $u_2 = pa + qb$. Khi đó ta thu được phương trình

$$\begin{cases} u_1 = a; u_2 = pa + qb \\ u_{n+2} - (p+s)u_{n+1} + (ps - qr)u_n = 0. \end{cases}$$

Giải phương trình này ta tìm được u_n, thay u_n vừa tìm được vào phương trình $(3.6a)$ của (3.6) ta tìm được v_n.

Ví dụ 3.4. *Tìm u_n, v_n thỏa mãn*

$$\begin{cases} u_1 = -1; v_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 8v_n \quad (3.7a) \\ v_{n+1} = 2u_n - 6v_n \quad (3.7b) \end{cases} \tag{3.7}$$

Bài giải. Trong phương trình $(3.7a)$ thay n bởi $n+1$ ta được phương trình $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$, và ta cũng có $u_1 = -1, u_2 = -18$.
Giải phương trình này ta được $u_n = \big(-5n + \frac{11}{2}\big)(-2)^n$. Thay u_n vừa tìm được vào phương trình $(3.7a)$ ta được $v_n = \big(-\frac{5}{2}n + \frac{3}{2}\big)(-2)^n$. Vậy ta tìm được u_n, v_n thỏa mãn hệ đã cho là

$$\begin{cases} u_n = \big(-5n + \frac{11}{2}\big)(-2)^n \\ v_n = \big(-\frac{5}{2}n + \frac{3}{2}\big)(-2)^n. \end{cases}$$

Ta có thể tổng quát bài toán 3.1 như sau

Bài toán 3.2. *Tìm u_n, v_n thỏa mãn*

$$\begin{cases} u_1 = a; v_1 = b \\ u_{n+1} = pu_n + qv_n + \varphi(n) \\ v_{n+1} = ru_n + sv_n + \psi(n). \end{cases} \tag{3.8}$$

trong đó a, b, p, q, r, s là các hằng số thuộc $\mathbb{R}, \varphi(n), \psi(n)$ là các hàm số sơ cấp cho trước.

Ví dụ 3.5. *Tìm u_n, v_n thoả mãn*

$$\begin{cases} u_1 = 1; v_1 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 2v_n + 9n - 3 \\ v_{n+1} = u_n + v_n + 3n \end{cases} \tag{3.9}$$

Bài giải. Áp dụng cách làm như trong các bài toán nêu trên ta tìm được $u_n; v_n$ thoả mãn (3.9) là

$$\begin{cases} u_n = -2^n + 2.3^n - 3n \\ v_n = -2^n + 3^n. \end{cases}$$

3.1.3 Xác định số hạng tổng quát của dãy số khi công thức truy hồi có dạng phân tuyến tính với hệ số hằng

Bài toán 3.3. *Tìm dãy số (x_n) thoả mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{px_n + q}{rx_n + s} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.10}$$

trong đó a, p, q, r, s là các hằng số thuộc $\mathbb{R}$.

Bài giải. Giả sử u_n, v_n là một nghiệm của hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases} u_0 = a; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = pu_n + qv_n \\ v_{n+1} = ru_n + sv_n, \end{cases} \tag{3.11}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ thoả mãn (3.10). Thật vậy ta chứng minh bằng quy nạp như sau:

$$x_0 = \frac{u_0}{v_0} = a, \quad \text{(đúng)}.$$

Giả sử $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của (3.10). Khi đó

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{pu_n + qv_n}{ru_n + sv_n} = \frac{p\dfrac{u_n}{v_n} + q}{r\dfrac{u_n}{v_n} + s} = \frac{px_n + q}{rx_n + s}$$

cũng là nghiệm của (3.10). Vậy khẳng định trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.
Như vậy phương trình sai phân dạng phân tuyến tính (3.10) sẽ được giải bằng cách lập và giải hệ phương trình (3.11).

Ví dụ 3.6. *Tìm dãy số (x_n) thoả mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n - 3}{3x_n - 4}, \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Bài giải. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} u_0 = -1; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 4v_n. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$u_n = (-1)^n(6n - 1); v_n = (-1)^n(6n + 1).$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$x_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{6n - 1}{6n + 1}.$$

Ví dụ 3.7. *Cho dãy số (x_n) thoả mãn các điều kiện sau*

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{x_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Tìm phần nguyên của $A_{2010} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{2010}$.

Bài giải. Trước hết ta đi tìm x_n thoả mãn (3.13). Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} u_0 = 2; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$u_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1); v_n = -\frac{1}{2}(1 - 3^{n+1}).$$

Vậy nghiệm của phương trình (3.13) là

$$x_n = \frac{u_n}{v_n} = \frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1} = 1 + \frac{2}{3^{n+1}-1}.$$

Ta có

$$A_{2010} = \sum_{i=1}^{2010}\left(1 + \frac{2}{3^{i+1}-1}\right) = 2010 + 2\sum_{i=1}^{2010}\frac{1}{3^{i+1}-1}.$$

Suy ra

$$2010 < A_{2010} < 2010 + 2\sum_{i=1}^{2010}\frac{1}{3^i} < 2011.$$

Vậy $[A] = 2010$.

Trên đây ta vừa xét bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số khi công thức truy hồi là biểu thức có dạng phân tuyến tính, tuy nhiên trên thực tế nhiều bài tập dành cho học sinh giỏi trong chương trình toán bậc phổ thông ta còn gặp các bài toán mà trong đó công thức truy hồi ở dạng phi tuyến. Sau đây là một số bài toán ở dạng đó và cách giải.

Bài toán 3.4. *Tìm x_n thoả mãn*

$$x_1 = a; \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + d}{2x_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.14}$$

Bài giải

Khi $d = 0$ ta có $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$ và $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a$.

Ta xét trường hợp $d > 0$. Giả sử u_n, v_n là một nghiệm của hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases} u_1 = a; v_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n \end{cases} \tag{3.15}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình (3.14). Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp như sau:

$$x_1 = \frac{u_1}{v_1} = a \quad \text{(đúng)}.$$

Giả sử $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của (3.14). Khi đó

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 + dv_n^2}{2u_nv_n} = \frac{\dfrac{u_n^2}{v_n^2} + d}{2\dfrac{u_n}{v_n}} = \frac{x_n^2 + d}{2x_n}$$

cũng là nghiệm của (3.14).

Vậy để giải phương trình (3.14) ta cần giải hệ (3.15). Ta có

$$\begin{cases} u_1 = a, v_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \qquad (3.16a) \\ \sqrt{d}v_{n+1} = 2\sqrt{d}u_nv_n \quad (3.16b). \end{cases} \tag{3.16}$$

Cộng vế với vế của phương trình (3.16a) và phương trình (3.16b) trong hệ (3.16), ta thu được

$$u_{n+1} + \sqrt{d}v_{n+1} = (u_n + \sqrt{d}v_n)^2.$$

Do đó

$$u_{n+1} + \sqrt{d}v_{n+1} = (u_1 + \sqrt{d}v_1)^{2^n} = (a + \sqrt{d})^{2^n}.$$

Tương tự trừ vế với vế của phương trình (3.16a) và phương trình (3.16b) trong hệ (3.16), ta cũng thu được

$$u_{n+1} - \sqrt{d}v_{n+1} = (u_1 - \sqrt{d}v_1)^{2^n} = (a - \sqrt{d})^{2^n}.$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[(a+\sqrt{d})^{2^n} + (a-\sqrt{d})^{2^n}\right] \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left[(a+\sqrt{d})^{2^n} - (a-\sqrt{d})^{2^n}\right]. \end{cases} \tag{3.17}$$

Do $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, nên từ (3.17) ta có

$$x_n = \frac{\sqrt{d}\left[(a+\sqrt{d})^{2^{n-1}} + (a-\sqrt{d})^{2^{n-1}}\right]}{(a+\sqrt{d})^{2^{n-1}} - (a-\sqrt{d})^{2^{n-1}}}.$$

Thử lại bằng quy nạp ta thấy kết quả tìm được thoả mãn (3.14).

Xét trường hợp $d < 0$. Đặt $d = -q, (q > 0)$. Giả sử u_n, v_n là một nghiệm của hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases} u_1 = a; v_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - qv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n \end{cases} \tag{3.18}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình (3.14). Tương tự như trên ta có thể chứng minh điều này bằng phương pháp quy nạp toán học.

Vậy để giải phương trình (3.14) ta đi giải hệ (3.18). Ta có

$$\begin{cases} u_1 = a, v_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - qv_n^2 \\ i\sqrt{q}v_{n+1} = 2i\sqrt{q}u_nv_n. \end{cases} \tag{3.19}$$

Đối với hệ (3.19) áp dụng cách làm tương tự như với hệ (3.16) ta thu được

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[(a + i\sqrt{q})^{2^n} + (a - i\sqrt{q})^{2^n}\right] \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2i\sqrt{q}}\left[(a + i\sqrt{q})^{2^n} - (a - i\sqrt{q})^{2^n}\right]. \end{cases}$$

Do $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, nên từ hệ trên ta có

$$x_n = \frac{i\sqrt{q}\left[(a + i\sqrt{q})^{2^{n-1}} + (a - i\sqrt{q})^{2^{n-1}}\right]}{(a + i\sqrt{q})^{2^{n-1}} - (a - i\sqrt{q})^{2^{n-1}}}.$$

Thử lại bằng quy nạp ta thấy kết quả tìm được thoả mãn (3.14).

Bài toán 3.5. *Tìm x_n thoả mãn*

$$x_1 = a; \quad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + dx_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.20}$$

Bài giải.

Khi $d = 0$ ta có $x_{n+1} = 2x_n$ và $x_n = 2^{n-1}a$.

Ta xét trường hợp $d > 0$. Giả sử u_n, v_n là một nghiệm của hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases} u_1 = 1; v_1 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n \end{cases} \tag{3.21}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình (3.20) (tương tự bài toán (3.4) ta có thể chứng minh điều này bằng phương pháp quy nạp). Vậy để giải phương trình (3.20) ta cần giải hệ (3.21). Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 1, v_1 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \\ \sqrt{d}v_{n+1} = 2\sqrt{d}u_nv_n. \end{cases} \tag{3.22}$$

Đối với hệ (3.22) áp dụng cách làm tương tự như hệ (3.16) ta thu được

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 + a\sqrt{d})^{2^n} + (1 - a\sqrt{d})^{2^n} \\ v_{n+1} = \sqrt{d}\big[(1 + a\sqrt{d})^{2^n} - (1 - a\sqrt{d})^{2^n}\big]. \end{cases}$$

Do $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$, nên từ trên ta có

$$x_n = \frac{(1 + a\sqrt{d})^{2^{n-1}} + (1 - a\sqrt{d})^{2^{n-1}}}{\sqrt{d}\big[(1 + a\sqrt{d})^{2^{n-1}} - (1 - a\sqrt{d})^{2^{n-1}}\big]}.$$

Thử lại bằng quy nạp ta thấy kết quả nhận được thoả mãn (3.20).

Xét trường hợp $d < 0$. Đặt $d = -q, (q > 0)$. Giả sử u_n, v_n là nghiệm của hệ phương trình sai phân

$$\begin{cases} u_1 = 1; v_1 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - qv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n \end{cases}$$

thì $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình (3.20). Áp dụng cách làm tương tự như bài toán (3.4) (với trường hợp d<0) ta thu được

$$x_n = \frac{\left[(1+ai\sqrt{q})^{2^{n-1}} + (1-ai\sqrt{q})^{2^{n-1}}\right]}{i\sqrt{q}\left[(1+ai\sqrt{q})^{2^{n-1}} - (1-ai\sqrt{q})^{2^{n-1}}\right]}.$$

Thử lại bằng quy nạp kết quả này thỏa mãn (3.20).

3.2 Tuyến tính hoá phương trình sai phân

Một số bài toán sai phân không tuyến tính ta biến đổi để đưa về phương trình sai phân tuyến tính gọi là tuyến tính hoá. Điều này làm tăng hiệu quả ứng dụng của phương trình sai phân.
Giả sử dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 \,; u_2 = \alpha_2 \,; \cdots ; u_k = \alpha_k \\ u_n = \varphi(u_{n-1}, u_{n-2}, \cdots, u_{n-k}) \text{ với } n; k \in \mathbb{N}^*; n > k, \end{cases}$$

trong đó φ là một đa thức đại số bậc m, là phân thức, hoặc là biểu thức siêu việt hoặc φ có dạng không tuyến tính đối với các biến $u_{n-1}, u_{n-2}, \cdots, u_{n-k}$.
Ở đây chúng ta đề cập tới hai vấn đề như sau:

- Những lớp hàm số nào có thể tự tuyến tính hoá được? Nghĩa là tồn tại các giá trị $x_1, x_2, \cdots, x_k$ để

$$u_n = x_1 u_{n-1} + x_2 u_{n-2} + \cdots + x_k u_{n-k}. \tag{3.23}$$

- Nếu hàm φ tự tuyến tính hoá được thì cách tìm biểu thức tuyến tính nó được mô tả như thế nào?
Trước tiên ta khảo sát vấn đề thứ hai
Để tìm $x_1, x_2, \cdots, x_k$, ta xác định $u_{k+1}, u_{k+2}, \cdots, u_{2k}$, từ công thức lặp đã cho ta có

$$\begin{cases} u_{k+1} = \varphi(\alpha_k; \alpha_{k-1}; \cdots; \alpha_2; \alpha_1) = \alpha_{k+1} \\ u_{k+2} = \varphi(\alpha_{k+1}; \alpha_k; \cdots; \alpha_3; \alpha_2) = \alpha_{k+2} \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ u_{2k} = \varphi(\alpha_{2k-1}; \alpha_{2k-2}; \cdots; \alpha_{k+1}; \alpha_k) = \alpha_{2k}. \end{cases}$$

Thay các giá trị $u_1, u_2, \cdots, u_k$ và các giá trị $u_{k+1}, u_{k+2}, \cdots, u_{2k}$ vừa tìm được vào (3.23), ta được hệ phương trình tuyến tính gồm k phương trình với k ẩn $x_1, x_2, \cdots, x_k$

$$\begin{cases} u_{k+1} = x_1\alpha_k + x_2\alpha_{k-1} + \cdots + x_k\alpha_1 \\ u_{k+2} = x_1\alpha_{k+1} + x_2\alpha_k + \cdots + x_k\alpha_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ u_{2k} = x_1\alpha_{2k-1} + x_2\alpha_{2k-2} + \cdots + x_k\alpha_k. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta thu được $x_1, x_2, \cdots, x_k$, sau đó thay vào (3.23) ta được biểu diễn tuyến tính cần tìm.

$$u_n = \varphi(u_{n-1}, u_{n-2}, \cdots, u_{n-k}) = x_1u_{n-1} + x_2u_{n-2} + \cdots + x_ku_{n-k}.$$

Cuối cùng kiểm nghiệm công thức vừa tìm được bằng phương pháp quy nạp toán học. Chú ý rằng, nếu hệ phương trình tuyến tính trên vô nghiệm thì hàm φ không thể tuyến tính hoá được.

Bài toán 3.6. *Cho dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện*

$$u_1 = u_2 = 1; u_n = \frac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-2}}, \forall n \geq 3. \tag{3.24}$$

Hãy nêu cách tuyến tính hoá. Chứng minh rằng $u_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài giải. Giả sử u_n có biểu diễn tuyến tính là

$$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + b.$$

Ta có $u_3 = 3; u_4 = 11; u_5 = 41$. Thay $u_3 = 3; u_4 = 11; u_5 = 41$ vào biểu diễn tuyến tính trên, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1u_2 + a_2u_1 + b = u_3 \\ a_1u_3 + a_2u_2 + b = u_4 \\ a_1u_4 + a_2u_3 + b = u_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + b = 3 \\ 3a_1 + a_2 + b = 11 \\ 11a_1 + 3a_2 + b = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có $\quad u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng dãy số (u_n) thoả mãn (3.24) có biểu diễn tuyến tính là

$$u_1 = u_2 = 1; u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}, \forall n \geq 3. \tag{3.25}$$

Thật vậy, ta có $u_3 = 3 = 4.1 - 1 = 4.u_2 - u_1$, suy ra (3.25) đúng với $n = 3$. Giả sử (3.25) đúng với $n = k$ tức là ta có $u_k = 4u_{k-1} - u_{k-2}$ $(k \geq 3)$. Ta phải chứng minh (3.25) đúng với $n = k + 1$. Ta có

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{u_k^2 + 2}{u_{k-1}} = \frac{(4u_{k-1} - u_{k-2})^2 + 2}{u_{k-1}} \\ &= \frac{16u_{k-1}^2 - 8u_{k-1}u_{k-2} + u_{k-2}^2 + 2}{u_{k-1}} \\ &= \frac{15u_{k-1}^2 - 4u_{k-1}u_{k-2} + u_{k-1}^2 - 4u_{k-1}u_{k-2} + u_{k-1}u_{k-3}}{u_{k-1}} \\ &= \frac{15u_{k-1}^2 - 4u_{k-1}u_{k-2} + u_{k-1}(u_{k-1} - 4u_{k-2} + u_{k-3})}{u_{k-1}} \\ &= \frac{15u_{k-1}^2 - 4u_{k-1}u_{k-2}}{u_{k-1}} \\ &= 15u_{k-1} - 4u_{k-2} = 4(4u_{k-1} - u_{k-2}) - u_{k-1} \\ &= 4u_k - u_{k-1} \end{aligned}$$

Vậy (3.25) đúng tới $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có điều phải chứng minh.

Rõ ràng từ (3.25) ta có ngay $u_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài toán 3.7. *Tuyến tính hoá dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện*

$$u_1 = \alpha; u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c} \quad \text{với} \quad a^2 - b = 1; \alpha > 0; a > 1.$$

Bài giải.

$$u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c} \Leftrightarrow u_{n+1} - au_n = \sqrt{bu_n^2 + c}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (u_{n+1} - au_n)^2 = bu_n^2 + c\\
&\Rightarrow u_{n+1}^2 + (a^2 - b)u_n^2 = 2au_nu_{n+1} + c\\
&\Rightarrow u_{n+1}^2 + u_n^2 = 2au_{n+1}u_n + c\\
&\Rightarrow u_n^2 + u_{n-1}^2 = 2au_nu_{n-1} + c.
\end{aligned}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức cuối ta có

$$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = 2au_n(u_{n+1} - u_{n-1}).$$

Mặt khác do $u_{n+1} - u_{n-1} > 0$ nên ta có $u_{n+1} - 2au_n + u_{n-1} = 0$. Khi đó bài toán đã được tuyến tính hoá.

Trở lại vấn đề thứ nhất, sau đây ta sẽ nêu lên một vài lớp hàm có thể tự tuyến tính hoá được.

Bài toán 3.8. *Tuyến tính hoá dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện*

$$u_1 = \alpha; u_{n+1} = \frac{u_n}{a + \sqrt{u_n^2 + b}} \quad \text{với} \quad a^2 - b = 1; \alpha > 0; a > 1.$$

Bài giải. Ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{a + \sqrt{u_n^2 + b}} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{a}{u_n} + \sqrt{1 + \frac{b}{u_n^2}}.$$

Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Khi đó ta viết phương trình trên dưới dạng

$$v_1 = \frac{1}{\alpha}; v_{n+1} = av_n + \sqrt{bv_n^2 + 1} \quad \text{với} \quad a^2 - b = 1; \alpha > 0; a > 1.$$

Đây chính là phương trình sai phân mà ta đã tuyến tính hoá trong bài toán (3.7).

Bài toán 3.9. *Tuyến tính hoá dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện*

$$u_1 = \alpha; u_2 = \beta; u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a}{u_{n-1}} \quad \text{với } \alpha, \beta, a \in \mathbb{R}.$$

Bài giải. Ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a}{u_{n-1}} \Leftrightarrow u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 + a$$
$$\Rightarrow u_n u_{n-2} = u_{n-1}^2 + a.$$

Trừ vế với vế của hai đẳng thức trên ta được

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n u_{n-2} = u_n^2 - u_{n-1}^2$$

hay

$$u_{n+1}u_{n-1} + u_{n-1}^2 = u_n^2 + u_n u_{n-2} \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} + u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n + u_{n-2}}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{u_n}{u_{n+1} + u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n + u_{n-2}} = \cdots = \frac{u_2}{u_3 + u_1} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + a} = k.$$

Do đó ta có $u_n = k(u_{n+1} + u_{n-1})$, hay là

$$\begin{cases} u_1 = \alpha; u_2 = \beta \\ ku_{n+1} - u_n + ku_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Vậy bài toán đã được tuyến tính hoá xong.

Bài toán 3.10. *Tìm u_n, khi biết $u_1 = \alpha; u_2 = \beta(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ và*

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2bu_n - bu_{n-1} + c}{b + u_{n-1}}, n \geq 2.$$

Bài giải. Ta thấy

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2bu_n - bu_{n-1} + c}{b + u_{n-1}} \Leftrightarrow u_{n+1} + b = \frac{(u_n + b)^2 + c}{u_{n-1} + b}.$$

Đặt $u_n + b = v_n$, khi đó có thể viết lại phương trình trên dưới dạng

$$v_{n+1} = \frac{v_n^2 + c}{v_{n-1}}.$$

Đây chính là phương trình sai phân mà ta đã tuyến tính hoá trong bài toán (3.9).

3.3 Ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính vào một số bài toán mang tính chất số học

Từ việc tìm được số hạng tổng quát của một dãy số ta có thể giải quyết được các bài toán liên quan giữa dãy số và số học như: Dãy số và tính chia hết, dãy số và tính chính phương ....Các dạng bài tập trên rất phong phú và đa dạng, trong khuôn khổ nội dung của luận văn chỉ nêu ra một số ví dụ để thấy được ứng dụng rộng rãi của phương trình sai phân trong lĩnh vực toán phổ thông.

Ví dụ 3.8. *(Bài 7/385 Tạp chí Toán học và tuổi trẻ tháng 7, 2009).*
Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 9; u_1 = 161 \\ u_n = 18u_{n-1} - u_{n-2} \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.26}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{u_n^2 - 1}{5}$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

Bài giải. Ta đi tìm u_n thỏa mãn phương trình (3.26). Phương trình (3.26) là phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất. Giải phương trình này ta tìm được

$$u_n = \frac{1}{2}[(9+\sqrt{80})^{n+1} + (9-\sqrt{80})^{n+1}].$$

Do $[(9+\sqrt{80})^{n+1} + (9-\sqrt{80})^{n+1}]^2 = [(9+\sqrt{80})^{n+1} - (9-\sqrt{80})^{n+1}]^2 + 4$
nên $\dfrac{u_n^2 - 1}{5} = \dfrac{1}{5}\Big[\dfrac{(9+\sqrt{80})^{n+1} - (9-\sqrt{80})^{n+1}}{2}\Big]^2$.
Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có: $(9 \pm \sqrt{80})^{n+1} = M \pm N\sqrt{5}$, với M, N là các số nguyên dương. Từ đó suy ra $\dfrac{u_n^2 - 1}{5} = N^2$.

Ví dụ 3.9. *Cho dãy số (u_n) được xác định như sau*

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1 \quad \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{3.27}$$

Chứng minh rằng $M = 4u_nu_{n+2} + 1$ là số chính phương.

Bài giải. Trong phương trình (3.27) thay n bởi $n-1$ ta được

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 1.$$

Trừ các vế tương ứng của hai phương trình trên ta có

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 3u_{n-1} + u_{n-2},$$

hay

$$u_{n+1} - 3u_n + 3u_{n-1} - u_{n-2} = 0.$$

Đây là phương trình sai phân tuyến tính cấp ba thuần nhất, giải phương trình này ta tìm được nghiệm $u_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Do đó $M = 4u_nu_{n+2} + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

Ví dụ 3.10. *(Bài 3, đề thi đề nghị của trường THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên - Tuyển tập đề thi Olympic* $30-4$ *năm* 2001*).*
Cho dãy số (u_n) *được xác định như sau*

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + \sqrt{3 + u_n^2}} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.28}$$

Chứng minh rằng $\dfrac{u_n^2}{u_{2n}^2} - 2$ *có thể biểu diễn thành tổng bình phương của ba số nguyên liên tiếp.*

Bài giải. Trước hết ta đi tìm công thức tổng quát của u_n. Ta nhận thấy dãy số đã cho là một trường hợp cụ thể của bài toán (3.8). Áp dụng cách làm tổng quát ta có thể viết lại (3.28) thành dạng

$$v_{n+1} = 2v_n + \sqrt{3v_n^2 + 1}, \text{với } v_n = \frac{1}{u_n}.$$

Áp dụng kết quả của bài toán (3.8) suy ra $v_{n+1} - 4v_n + v_{n-1} = 0$. Giải phương trình này ta thu được $v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]$.

Suy ra $u_n = \dfrac{2\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}, \forall n \geq 1.$

Ta thấy luôn tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n = \sqrt{3}k$.
Do vậy

$$\begin{aligned}\frac{u_n^2}{u_{2n}^2} - 2 &= [2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]^2 - 2\\ &= [2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n]^2 + 2\\ &= 3k^2 + 2 = (k+1)^2 + k^2 + (k-1)^2.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.11. *(Bài 1, đề thi đề nghị của trường THPT Hoàng Lệ Kha, Tây Ninh - Tuyển tập đề thi Olympic* $30-4$ *năm* 2001*).*
Cho dãy số (u_n) *được xác định như sau*

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1\\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Chứng minh rằng $u_n \vdots 2^k \Leftrightarrow n \vdots 2^k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài giải. Ta thấy phương trình (3.29) là phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất, giải phương trình này ta được

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\big], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dùng khai triển nhị thức Newton ta có

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\sum_{i=0}^{n} C_n^i(\sqrt{2})^i - \sum_{i=0}^{n} C_n^i(-1)^i(\sqrt{2})^i\Big]\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot 2\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2i+1}(\sqrt{2})^{2i+1} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2i+1}2^i.\end{aligned}$$

Gọi m là số mũ cao nhất của 2 trong phân tich n thành tích các lũy thừa nguyên tố. Ta có $n = 2^m p$ với p lẻ.
Vì $(2i+1)C_n^{2i+1} = nC_{n-1}^{2i} \vdots 2^m$ nên $C_n^{2i+1} \vdots 2^m, \forall i$.
Đặt $v_0 = \dfrac{C_n^{2i+1}}{2^m}$ thì $v_0 = p$. Vậy

$$u_n = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 2^m v_i 2^i = 2^m v_0 + 2^m \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} v_i 2^i = 2^m\big[p + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} v_i 2^i\big] = 2^m s, \text{ với } s \text{ lẻ.}$$

Do vậy $u_n \vdots 2^k \Leftrightarrow 2^m s \vdots 2^k \Leftrightarrow 2^m \vdots 2^k \Leftrightarrow n \vdots 2^k$.

Ví dụ 3.12. *Cho dãy số (u_n) được xác định như sau*

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3 \quad \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p, thì $2010\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p.

Bài giải. Ta thấy (3.30) là phương trình sai phân tuyến tính cấp một với hệ số hằng số, giải phương trình này ta tìm được

$$u_n = 3^n - n^3 \quad \forall n = 1, 2, \cdots.$$

- Với $p = 2$ thì $2010\sum_{i=1}^{p-1} u_i = 2010.2 \,\vdots\, 2$.

- Với p là số nguyên tố lẻ thì ta có

$$\sum_{i=1}^{p-1} u_i = \sum_{i=1}^{p-1}(3^i - i^3) = (3 + 3^2 + \cdots + 3^{p-1}) - [1^3 + 2^3 + \cdots + (p-1)^3].$$

Ta có $1^3 + 2^3 + \cdots + (p-1)^3 = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}[i^3 + (p-i)^3]$

Mặt khác $i^3 + (p-i)^3 = p^3 - 3p^2 i + 3pi^2 \,\vdots\, p$

Ta cũng có $3 + 3^2 + \cdots + 3^{p-1} = \dfrac{1}{2}(3^p - 3)$, vì p là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ ta có $3^p - 3 \,\vdots\, p$.

Suy ra $\left\{(3^p - 3) + \sum_{i=1}^{p-1}[i^3 + (p-i)^3]\right\} \,\vdots\, p$,

hay $2\left\{\dfrac{1}{2}(3^p - 3) + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}[i^3 + (p-i)^3]\right\} \,\vdots\, p$. Vậy $2\sum_{i=1}^{p-1} u_i \,\vdots\, p$.

Suy ra $2010\sum_{i=1}^{p-1} u_i \,\vdots\, p$.

Vậy với mọi số nguyên tố p thì $2010\sum_{i=1}^{p-1} u_i \,\vdots\, p$.

3.4 Ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính vào giải các phương trình hàm

Ta đã biết mỗi hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ được tương ứng với một dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = f(n)$, vì vậy nhiều bài toán xác định hàm số trên tập $\mathbb{N}$ được đưa về bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số. Trong nội dung này ta sẽ nêu ra một số ví dụ giải phương trình hàm bằng cách đưa phương trình hàm về phương trình sai phân.

Ví dụ 3.13. *Xác định hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(0) = 1; f(1) = 2; f(n+1)f^2(n-1) = f^3(n), \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.31}$$

Bài giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $f(n) > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Logarit hóa hai vế của (3.31) theo cơ số e ta được $\ln f(0) = 0, \ln f(1) = \ln 2$ và

$$\ln f(n+1) + 2\ln f(n-1) = 3\ln f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $u_n = \ln f(n), (\forall n \in \mathbb{N})$ ta được phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$u_0 = 0; u_1 = \ln 2; u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0, (n \in \mathbb{N}).$$

Giải phương trình này ta tìm được $u_n = (2^n - 1)\ln 2 = \ln 2^{2^n-1}$. Từ đó ta tìm được $f(n) = 2^{2^n-1}$.
Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy hàm số cần tìm là $f(n) = 2^{2^n-1}, (n \in \mathbb{N})$.

Ví dụ 3.14. *Xác định hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ được cho bởi phương trình*

$$f(1) = \frac{9}{8}; f(n+1) = nf(n) + n.n!, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.32}$$

Bài giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta có nghiệm tổng quát của phương trình $f(n+1) - nf(n) = 0$ là:

$$\widetilde{f}(n) = C \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1) = C(n-1)!.$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $f^*(n) = C_n(n-1)!$. Thay vào phương trình (3.32) ta được

$$C_{n+1}n! = C_n n! + n.n! \Leftrightarrow C_{n+1} - C_n = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ đây ta tìm được $C_n = \dfrac{n(n-1)}{2} \Rightarrow f^*(n) = \dfrac{1}{2}n(n-1)((n-1)!)$.
Vạy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$f(n) = C(n-1)! + \frac{1}{2}n(n-1)((n-1)!).$$

Với $f(1) = \dfrac{9}{8}$ ta được $C = \dfrac{9}{8}$.Vậy $f(n) = \dfrac{9}{8}(n-1)! + \dfrac{1}{2}n(n-1)((n-1)!)$. Thử lại ta thấy hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài nên đó là hàm số cần tìm.

Ví dụ 3.15. *Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện*

$$f(1) = 1; f(2) = 0; f(n+1) - 2f(n) + f(n-1) = n+1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng $(6f(n) - 24)$ là bội của n.

Bài giải. Đặt $f(n) = u_n$ ta được bài toán giá trị ban đầu

$$u_1 = 1; u_2 = 0; u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = n+1.$$

Đây là phương trình sai phân tuyến tính cấp 2 không thuần nhất . Giải phương trình này ta thu được $\widetilde{u}_n = A + Bn; u_n^* = n^2(\dfrac{1}{6}n + \dfrac{1}{2})$. Do đó

$$u_n = A + Bn + n^2(\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}),$$

và với các điều kiện ban đầu $u_1 = 1; u_2 = 0$ ta được nghiệm của bài toán giá trị ban đầu là

$$u_n = f(n) = 4 - \frac{11}{3}n + \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2}.$$

Suy ra $6f(n) - 24 = n^3 + 3n^2 - 22n$ là bội của n.

Ví dụ 3.16. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(1) = 1;\ 2f(n)f(k+n) - 2f(k-n) = 3f(n)f(k), k \geq n; k, n \in \mathbb{N}.$$

Bài giải. Cho $k = n = 0$ ta được $f^2(0) = -2f(0)$. Suy ra $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = -2$.

- Nếu $f(0) = 0$, chọn $n = 0$ thay vào phương trình hàm trên ta được$f(k) = 0$ với $\forall k \in \mathbb{N}$. Điều này là vô lý vì theo giả thiết $f(1) = 1$. Vậy $f(0) = -2$.

- Với $f(0) = -2$ chọn $n = 1$ ta được phương trình

$$2f(k+1) - 3f(k) - 2f(k-1) = 0, k \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $u_k = f(k)$, ta được phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất

$$u_0 = -2; u_1 = 1; 2u_{k+1} - 3u_k - 2u_{k-1} = 0, k \in \mathbb{N}^*.$$

Giải phương trình này ta được $u_k = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k$.
Vậy $f(n) = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Ví dụ 3.17. *Xác định hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm*

$$f(0) = 2; f(n+1) = 3f(n) + \sqrt{8f^2(n) + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.33}$$

Bài giải. Giả sử tồn tại hàm số $f(n)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Từ giả thiết ta có $f(n+1) - 3f(n) = \sqrt{8f^2(n) + 1}$ $(\geq 1, \forall n \in \mathbb{N})$ nên (3.33) tương đương với

$$(f(n+1) - 3f(n))^2 = 8f^2(n) + 1 \Rightarrow f^2(n+1) + f^2(n) = 6f(n)f(n+1) + 1. \tag{3.34}$$

Trong (3.34) thay n bởi $n - 1$ ta được

$$f^2(n) + f^2(n-1) = 6f(n-1)f(n) + 1. \tag{3.35}$$

Trừ từng vế của (3.34) và (3.35) ta được

$$f^2(n+1) - f^2(n-1) = 6f(n)(f(n+1) - f(n-1)). \tag{3.36}$$

Từ giả thiết dùng quy nạp ta còn chứng minh được $f(n) > 0$ với mọi n. Hơn nữa ta còn có

$$f(n+1) > 3f(n) = 9f(n-1) + 3\sqrt{8f^2(n-1) + 1} > f(n-1)$$

$\Rightarrow f(n+1) - f(n-1) > 0$. Khi đó (3.36) có dạng

$$f(n+1) + f(n-1) = 6f(n).$$

Vậy ta được phương trình sai phân tuyến tính

$$f(0) = 2; f(1) = 6 + \sqrt{33}; f(n+2) - 6f(n+1) + f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Giải phương trình này ta được

$$f(n) = \frac{(8+\sqrt{66})(3+\sqrt{8})^n}{8} + \frac{(8-\sqrt{66})(3-\sqrt{8})^n}{8}.$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn đề bài nên đó là hàm số cần tìm.

Kết luận

Trong luận văn *Phép tính sai phân và ứng dụng* tác giả đã tìm hiểu, nghiên cứu, hệ thống một số vấn đề như sau:

1. Các vấn đề cơ bản về sai phân và phương trình sai phân tuyến tính.

2. Trình bày một cách có hệ thống về phương trình sai phân tuyến tính cấp một và cấp hai, đề cập đến một vài phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính cấp một và cấp hai có thể áp dụng để giảng dạy cho học sinh bậc phổ thông.

3. Mở rộng phương pháp hệ số bất định để tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính cấp một và cấp hai khi vế phải có dạng $f(n) = \alpha^n[P_m(n)\cos n\beta + Q_l(m)\sin n\beta]$.

4. Mở rộng bài toán xác định số hạng tổng quát của dãy số$(u_n);(v_n)$ thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = a; v_1 = b \\ u_{n+1} = pu_n + qv_n + \varphi(n) \\ v_{n+1} = ru_n + sv_n + \psi(n). \end{cases}$$
trong đó a, b, p, q, r, s là các hằng số thuộc $\mathbb{R}, \varphi(n), \psi(n)$ là các hàm số sơ cấp cho trước.

5. Xét một số ứng dụng của phương trình sai phân tuyến tính trong việc giải toán chương trình THPT.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên) (2008),*Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Tiến (2009), *Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề: Các phép tính trên dãy số (Tài liệu bồi dưỡng trường hè 2003).*

[4] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên) (2009), *Biến phức định lý và áp dụng*, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà nội.

[5] Lê Đình Thịnh (Chủ biên) (2001), *Phương trình sai phân và một số ứng dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[6] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, Số 389 (tháng 11, 2009, tr. 21)

[7] Sở giáo dục và đào tạo TP. Hồ Chí Minh (1999) , *Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4 - lần thứ V*, Nhà xuất bản Giáo dục, tr 238 - 240.

[8] Sở giáo dục và đào tạo TP. Hồ Chí Minh (2001), *Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4 - lần thứ VII*, Nhà xuất bản Giáo dục, tr. 211 - 212, 222.