

Ứng dụng của một bất đẳng thức đạo hàm

Ngày 10 tháng 6 năm 2013

Tóm tắt nội dung

Một số kiến thức cơ sở

Bài toán mở đầu

Một số ví dụ điển hình

Một số bài tập áp dụng

Các tài liệu tham khảo

1 Nhắc lại về định lý Lagrange

Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi (có đạo hàm) trên (a, b) khi đó tồn tại một điểm c thuộc (a, b) sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Chứng minh định lý này có thể tìm trong [1] hoặc một số tài liệu khác trên mạng. Định lý Lagrange là một định lý có nhiều ứng dụng trong giải tích, có thể nói đây là định lý đẹp nhất trong các định lý về giá trị trung bình của giải tích.

1.1 Bài toán mở đầu

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ hơn nữa $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (nghiệm của đạo hàm cấp hai $f(x) = 0$ là hữu hạn đếm được). Chứng minh rằng:

$$f(n) - f(0) < \sum_{i=1}^n f'(i) < f(n+1) - f(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (*)$$

Đây là một bất đẳng thức rất đẹp mắt và "mạnh". Chứng minh bất đẳng thức này bằng cách sử dụng định lý giá trị trung bình (định lý Lagrange).

Chứng Minh

Vì $f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (nghiệm của đạo hàm cấp hai $f''(x) = 0$ là hữu hạn đếm được) nên $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Theo định lý Lagrange tồn tại một số thực $x_i \in (i; i+1)$ sao cho :

$$f'(x_i) = f(i+1) - f(i), \quad \forall i \in \mathbb{R}$$

Vì $f'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$f'(i) < f'(x) < f'(i+1)$$

$$\implies f'(i) < f(i+1) - f(i) < f'(i+1), \quad \forall i \in \mathbb{R}$$

$$\implies \sum_{i=1}^n f'(i) < \sum_{i=1}^n [f(i+1) - f(i)] = f(n+1) - f(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{và} \quad \sum_{i=1}^n f'(i) < \sum_{i=1}^n [f(i) - f(i-1)] = f(n) - f(0)$$

Nhận xét: Nếu $f''(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}$ thì bất đẳng thức trên đổi chiều tức là

$$f(n+1) - f(1) < \sum_{i=1}^n f'(i) < f(n) - f(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Toàn bộ chủ đề này chúng ta sẽ nói về ứng dụng của bất đẳng thức trên. Trước hết ta sẽ tìm hiểu qua các ví dụ sau

Ví dụ 1 Chứng minh rằng

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

Lời Giải

Ta xét hàm $f(x) = 2\sqrt{x}$ thì rõ ràng $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ và $f''(x) < 0$ nên theo bất đẳng thức (*) ta có

$$f(n+1) - f(1) < \sum_{i=1}^n < f(n) - f(0)$$

$$\iff 2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

Bài toán trên cũng có thể giải bằng bất đẳng thức AM-GM. Tổng quát bài toán này

ta có được ví dụ sau:

Ví dụ 2 Chứng minh rằng

$$p(\sqrt[p]{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt[p]{1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2^{p-1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} < p\sqrt[p]{n} \quad p \in \mathbb{N}, p \geq 2$$

Lời Giải

Ta chứng minh về trái của bất đẳng thức

Từ bất đẳng thức AM-GM ta có

$$n + 1 + (p-1)n > p\sqrt[p]{n^{p-1}(n+1)}$$

$$\iff pn + 1 > p\sqrt[p]{n^{p-1}(n+1)}$$

$$\iff 1 > p\sqrt[p]{n^{p-1}(\sqrt[p]{n+1} - \sqrt[p]{n})}$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} > p(\sqrt[p]{n+1} - \sqrt[p]{n})$$

$$\implies p(\sqrt[p]{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt[p]{1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2^{p-1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}}$$

Tương tự ta chứng minh cho về phải của bất đẳng thức

$$n - 1 + (p-1)n > p\sqrt[p]{(n-1)n^{p-1}}$$

$$\iff pn - 1 > p\sqrt[p]{(n-1)n^{p-1}}$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} < p(\sqrt[p]{n} - \sqrt[p]{n-1})$$

$$\implies \frac{1}{\sqrt[p]{1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2^{p-1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} < p\sqrt[p]{n}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức (*)

Ta xét $f(x) = p\sqrt[p]{x}$, ta có $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[p]{x^{p-1}}}$ và $f''(x) < 0$. Vậy từ đó ta có

$$p(\sqrt[p]{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt[p]{1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2^{p-1}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} < p\sqrt[p]{n}, p \in \mathbb{N}, p \geq 2$$

Bài toán được giải một cách nhanh chóng và đẹp mắt

Ví dụ 3 Chứng minh bất đẳng thức

$$1 + \ln n > \sum_1^n \frac{1}{n} > \ln(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Giải

Ta tìm hàm nguyên hàm của $f'(x) = \frac{1}{n}$, một nguyên hàm của hàm này là $\int \frac{1}{n} = \ln n$ (lấy hằng số $C = 0$)

Rõ ràng hàm số $f(x) = \ln n$ là hàm đồng biến vì $f'(x) = \frac{1}{n} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} f(n) - f(1) + f'(1) &> \sum_{i=1}^n f'(i) > f(n+1) - f(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \implies 1 + \ln n &> \sum_1^n \frac{1}{n} > \ln(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên ta áp dụng vào bài toán ban đầu:

Chú ý: Mấu chốt của việc áp dụng bất đẳng thức dạng (*) vào chứng minh các bất đẳng thức khác là tìm được hàm $f(x)$

Ví dụ 4 Tìm giới hạn của

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos \frac{i\pi}{2n}$$

Giải

Áp dụng nguyên lý “kẹp”

Xét hàm số $f(x) = \frac{2n}{\pi} \sin \frac{x\pi}{2n} \implies f'(x) = \cos \frac{x\pi}{2n}$. Vậy suy ra $f'(x) \geq 0, \quad x \in [-n, n]$ hay nghĩa là hàm $f'(x)$ đồng biến trên $[-n, n]$.

Áp dụng bất đẳng thức (*) suy ra $f(n) - f(0) < \sum_{i=1}^n f'(i) < f(n+1) - f(1)$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} \frac{2n}{\pi} \cos \frac{x\pi}{2n} &< \sum_{i=1}^n \cos \frac{x\pi}{2n} < \frac{2\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{2n} \\ \implies \frac{2}{\pi} \cos \frac{x\pi}{2n} &< \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \frac{x\pi}{2n} < \frac{2}{\pi} - \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2n}. \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \cos \frac{x\pi}{2n} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

Theo nguyên lý “kẹp” suy ra giới hạn cần tìm là $\frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Áp dụng định nghĩa về tích phân xác định (tổng tích phân Riemann)

Ta chia đoạn $[0; 1]$ thành n đoạn con bằng nhau bởi $n + 1$ điểm chia $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$. Mỗi đoạn con có độ dài là $\Delta x_i = \frac{1}{n}$.

Trên mỗi đoạn con $[x_i; x_{i+1}]$ ta lấy điểm $\xi_i = \frac{1}{n}$. Lập tổng tích phân

$$\sigma_f(T, \xi) = \frac{1}{n} \left[\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{2n} \right]$$

Cho $n \rightarrow \infty$ thì giá trị giới hạn bằng giá trị của tích phân $\int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx$

Tích phân trên dễ dàng tích được và ta tìm được kết quả là $\int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{2}{\pi}$.

2 Một số bài tập áp dụng

2.1 Tính giới hạn của các biểu thức sau

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left[1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right] \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \left(\frac{1}{\sqrt[4]{1^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \right)}{\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2} + \dots + \sqrt[4]{n}} \end{aligned}$$

2.2 Chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \\ & \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - 1 \right) \\ & 4498 < \frac{1}{\sqrt[4]{1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{15^4}} < 4500 \end{aligned}$$

2.3 Tìm phần nguyên của biểu thức sau

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{216}}$$

2.4 Chứng minh rằng

$$n!e^n < (n+1)^{n+1} \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{sáng tác})$$

$$\frac{n^3}{4} + \frac{4n^2}{3} + 3n - \frac{23}{12n} + 3 > \sqrt[n]{n!} + \sqrt[n]{(n!)^2} + \sqrt[n]{(n!)^3} \quad (\text{sáng tác})$$

Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}$$

Tài liệu tham khảo chính

- [1] Kỉ yếu toán học 2010 hội các trường chuyên phía Bắc.
- [2] Diễn đàn <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1>
- [3] Diễn đàn <http://diendantoanhoc.net/forum/>
- [4] Diễn đàn <http://forum.mathscope.org/index.php>

Bài viết được viết với một tinh thần và trách nhiệm cao tuy nhiên khó có thể tránh khỏi những thiếu sót do trình độ còn nhiều hạn chế, tác giả mong nhận được sự nhận xét của mọi người về bài viết để bài viết được hoàn thiện thêm.

Cuối cùng xin cảm ơn thầy giáo **Hoàng Minh Quân** (THPT Ngọc Tảo-Hà Nội) đã đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến xác đáng.

Người thực hiện
Trần Văn Lâm