

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Bùi Đức Dương

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành: Phương Pháp Toán Sơ Cấp
Mã số: 60 46 0113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH. Hà Huy Khoái

Thái Nguyên - 2012

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của GS. TSKH. Hà Huy Khoái. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, GS.TSKH. Hà Huy Khoái, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán - Tin học trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình, BGH trường THPT Yên Thủy B-Yên Thủy-Hòa Bình và các bạn trong lớp Cao học K4, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Mục lục

Mở đầu	3
1 Định nghĩa và tính chất của số phức	5
1.1 Định nghĩa	5
1.2 Tính chất số phức	6
1.2.1 Các tính chất liên quan đến phép cộng	6
1.2.2 Các tính chất liên quan đến phép nhân	6
1.3 Dạng đại số của số phức	7
1.3.1 Định nghĩa và tính chất	7
1.3.2 Giải phương trình bậc hai	10
1.3.3 Ý nghĩa hình học của các số phức và modun	12
1.3.4 Ý nghĩa hình học của các phép toán đại số	13
1.4 Dạng lượng giác của số phức	15
1.4.1 Tọa độ cực trong mặt phẳng	15
1.4.2 Tọa độ cực của số phức	16
1.4.3 Các phép toán số phức trong tọa độ cực	16
1.4.4 Ý nghĩa hình học của phép nhân	17
1.4.5 Căn bậc n của đơn vị	17
1.5 Bài tập	21
2 Sử dụng số phức trong giải toán sơ cấp	25
2.1 Số phức và các bài toán hình học	25
2.1.1 Một vài khái niệm và tính chất	25
2.1.2 Điều kiện thẳng hàng , vuông góc và cùng thuộc một đường tròn	30
2.1.3 Tam giác đồng dạng	31
2.1.4 Tam giác đều	33

2.1.5	Hình học giải tích với số phức	35
2.1.6	Tích thực của hai số phức	39
2.1.7	Bài tập	43
2.2	Số phức và các bài toán đại số , lượng giác	45
2.2.1	Các bài toán lượng giác	45
2.2.2	Các bài toán đại số	52
2.2.3	Bài tập	54
2.3	Số phức và các bài toán tổ hợp	55
Kết luận		62
Tài liệu tham khảo		63

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Trong chương trình toán học cấp THPT số phức được đưa vào giảng dạy ở phần giải tích toán lớp 12. Toàn bộ phần số phức mới chỉ đưa ra định nghĩa số phức và một vài tính chất đơn giản của nó. Ứng dụng số phức trong giải toán mới chỉ dừng lại ở một vài bài tập hình học đơn giản. Nhằm giúp các em học sinh khá giỏi có cái nhìn toàn diện hơn về số phức, đặc biệt sử dụng số phức để giải một số bài toán sơ cấp: hình học, đại số, tổ hợp, lượng giác nên tôi đã chọn đề tài luận văn: **Về một phương pháp giải toán sơ cấp.**

2. Mục đích nghiên cứu

Hệ thống hóa các dạng bài tập hình học, đại số, tổ hợp, lượng giác được giải bằng phương pháp số phức đồng thời nắm được một số kĩ thuật tính toán liên quan.

3. Nhiệm vụ đề tài

Đưa ra định nghĩa và tính chất của số phức. Đặc biệt sử dụng số phức để giải một số dạng toán: hình học, đại số, tổ hợp, lượng giác.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu các bài toán hình học, đại số, tổ hợp, lượng giác trên tập hợp số phức và các ứng dụng liên quan.

Nghiên cứu các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, kỉ yếu hội thảo chuyên toán, tủ sách chuyên toán...

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông. Đề tài đóng góp thiết thực cho việc học và dạy các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo trong việc dạy và học toán.

6. Cấu trúc luận văn

Luận văn gồm 3 chương

Chương 1: Định nghĩa và tính chất của số phức

Chương 2: Các dạng biểu diễn số phức

Chương 3: Sử dụng số phức trong giải toán sơ cấp

Do thời gian và khối lượng kiến thức lớn, chắc chắn bản luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo tận tình của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp, tác giả xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, năm 2012

Tác giả

Chương 1

Định nghĩa và tính chất của số phức

1.1 Định nghĩa

Giả thiết ta đã biết định nghĩa và các tính chất cơ bản của tập số thực $\mathbb{R}$. Ta xét tập hợp

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Hai phần tử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Các phép toán cộng và nhân được định nghĩa trên $\mathbb{R}^2$ như sau :

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

và

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \in \mathbb{R}^2.$$

với mọi $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Phần tử $z_1 + z_2$ gọi là tổng của z_1, z_2 , phần tử $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}^2$ gọi là tích của z_1, z_2 .

Nhận xét

- 1) Nếu $z_1 = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (x_2, 0) \in \mathbb{R}^2$ thì $z_1 z_2 = (x_1 x_2, 0)$.
- 2) Nếu $z_1 = (0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (0, y_2) \in \mathbb{R}^2$ thì $z_1 z_2 = (-y_1 y_2, 0)$.

Định nghĩa 1.1.1. Tập hợp $\mathbb{R}^2$ cùng với phép cộng và nhân gọi là tập số phức, kí hiệu $\mathbb{C}$. Mỗi phần tử $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ được gọi là một số phức.

Kí hiệu $\mathbb{C}^*$ để chỉ tập hợp $\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$.

1.2 Tính chất số phức

1.2.1 Các tính chất liên quan đến phép cộng

Phép cộng các số phức thỏa mãn các điều kiện sau đây

Tính giao hoán : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Tính kết hợp : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Phần tử đơn vị: Có duy nhất một số phức $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$ để $z + 0 = 0 + z$ với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Phần tử đối : Mỗi số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ có duy nhất số phức $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ sao cho $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

1.2.2 Các tính chất liên quan đến phép nhân

Phép nhân các số phức thỏa mãn các điều kiện sau đây

Tính giao hoán: $z_1 z_2 = z_2 z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Tính kết hợp: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Phần tử đơn vị: Có duy nhất số phức $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $z.1 = 1.z = z$. Số phức $1 = (1, 0)$ gọi là phần tử đơn vị với mọi $z \in \mathbb{C}$.

Phần tử nghịch đảo: Mỗi số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}, z \neq 0$ có duy nhất số phức $z^{-1} = (x', y') \in \mathbb{C}$ sao cho $z.z^{-1} = z^{-1}z = 1$ số phức $z^{-1} = (x', y')$ gọi là phần tử nghịch đảo của số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Lũy thừa với số mũ nguyên của số phức $z \in \mathbb{C}^*$ được định nghĩa như sau $z^0 = 1$; $z^1 = z$; $z^2 = z.z$, và $z^n = \underbrace{z.z \dots z}_{n \text{ lần } z}$ với mọi số nguyên $n > 0$

và $z^n = (z^{-1})^{-n}$ với mọi số nguyên $n < 0$.

Mọi số phức $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ và mọi số nguyên m, n ta có các tính chất sau

$$1) z^m . z^n = z^{m+n};$$

$$2) \frac{z^m}{z^n} = z^{m-n};$$

$$3) (z^m)^n = z^{mn};$$

$$4) (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n;$$

$$5) \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n};$$

Khi $z = 0$ ta định nghĩa $0^n = 0$ với mọi số nguyên $n > 0$.

Tính phân phối : $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$.

Trên đây là những tính chất của phép cộng và phép nhân, thấy rằng tập hợp $\mathbb{C}$ các số phức cùng với các phép toán trên lập thành một trường.

1.3 Dạng đại số của số phức

1.3.1 Định nghĩa và tính chất

Mỗi số phức được biểu diễn như một cặp số sắp thứ tự, nên khi thực hiện các biến đổi đại số thường không được thuận lợi. Đó là lí do để tìm dạng khác khi viết

Ta sẽ đưa vào dạng biểu diễn đại số mới. Xét tập hợp $\mathbb{R} \times \{0\}$ cùng với phép toán cộng và nhân được định nghĩa trên $\mathbb{R}^2$.

Hàm số

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}, \quad f(x) = (x, 0)$$

là một song ánh và ngoài ra $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ và $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Người đọc sẽ không sai lầm nếu chú ý rằng các phép toán đại số trên $\mathbb{R} \times \{0\}$ đồng nhất với các phép toán trên $\mathbb{R}$; vì thế chúng ta có thể đồng nhất cặp số $(x, 0)$ với số x , với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta sử dụng song ánh trên và kí hiệu $(x, 0) = x$.

Xét $i = (0, 1)$ ta có

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \\ &= x + yi = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \end{aligned}$$

Từ trên ta có mệnh đề

Mệnh đề 1.3.1. *Mỗi số phức $z = (x, y)$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$z = x + yi$$

Với $x, y \in \mathbb{R}$.

Hệ thức $i^2 = -1$ được suy ra từ định nghĩa phép nhân $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Biểu thức $x + yi$ được gọi là biểu diễn đại số (dạng) của số phức $z = (x, y)$. Vì thế ta có thể viết $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Từ giờ ta kí hiệu $z = (x, y)$ bởi $z = x + yi$. Số thực $x = \operatorname{Re}(z)$ được gọi là phần thực của số phức z , $y = \operatorname{Im}(z)$ được gọi là phần ảo của z . Số phức có dạng yi , $y \in \mathbb{R}^*$ gọi là số **thuần ảo**, số phức i gọi là số **đơn vị ảo**.

Từ các hệ thức trên ta dễ dàng có các kết quả sau:

- a) $z_1 = z_2$ khi và chỉ khi $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ và $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$.
- b) $z \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\operatorname{Im}(z) = 0$.
- c) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\operatorname{Im}(z) \neq 0$.

Sử dụng dạng đại số, các phép toán về số phức được thực hiện như sau:

Phép cộng

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \in \mathbb{C}.$$

Dễ thấy tổng hai số phức là một số phức có phần thực là tổng các phần thực, có phần ảo là tổng các phần ảo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2); \\ \operatorname{Im}(z_1 + z_2) &= \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2).\end{aligned}$$

Phép trừ

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \in \mathbb{C}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_1 - z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Re}(z_2); \\ \operatorname{Im}(z_1 - z_2) &= \operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2).\end{aligned}$$

Phép nhân

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \in \mathbb{C}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_1 z_2) &= \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2); \\ \operatorname{Im}(z_1 z_2) &= \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_2) \operatorname{Re}(z_1).\end{aligned}$$

Mỗi số thực λ , số phức $z = x + yi$, $\lambda z = \lambda(x + yi) = \lambda x + \lambda yi \in \mathbb{C}$ là tích của một số thực với một số phức. Ta có các tính chất sau

- 1) $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$;
- 2) $\lambda_1(\lambda_2 z) = (\lambda_1 \lambda_2)z$;
- 3) $(\lambda_1 + \lambda_2)z = \lambda_1 z + \lambda_2 z$.

Lũy thừa của số i

Các công thức cho số phức với lũy thừa là số nguyên được bảo toàn đối với dạng đại số $z = x + yi$. Xét $z = i$, ta thu được

$$i^0 = 1; \quad i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = 1; \quad i^5 = i^4 \cdot i = i; \quad i^6 = i^5 \cdot i = -1; \quad i^7 = i^6 \cdot i = -i$$

Ta có thể tổng quát các công thức trên đối với số mũ nguyên dương n

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i$$

Vì thế $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Nếu n là số nguyên âm ta có:

$$i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}.$$

Số phức liên hợp

Mỗi số phức $z = x + yi$ đều có số phức $\bar{z} = x - yi$, số phức đó được gọi là số phức liên hợp hoặc số phức liên hợp của số phức z .

Mệnh đề 1.3.2. 1) Hệ thức $z = \bar{\bar{z}}$ đúng khi và chỉ khi $z \in \mathbb{R}$;

2) Mỗi số phức z ta luôn có đẳng thức $z = \bar{\bar{z}}$;

3) Mỗi số phức z ta luôn có $z \cdot \bar{z}$ là một số thực không âm ;

4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (số phức liên hợp của một tổng bằng tổng các số phức liên hợp);

5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (số phức liên hợp của một tích bằng tích các số phức liên hợp);

6) Mỗi số phức z khác 0 đẳng thức sau luôn đúng $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$;

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$ (liên hợp của một thương bằng thương các liên hợp);

8) Công thức $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ và $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, đúng với mọi số phức $z \in \mathbb{C}$.

Ghi chú

a) phần tử nghịch đảo của số phức $z \in \mathbb{C}^*$ có thể được tính như sau

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

b) Số phức liên hợp được sử dụng trong việc tìm thương của hai số phức như sau:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Modun của số phức

Số $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ được gọi là *modun* của số phức $z = x + yi$.

Mệnh đề 1.3.3. 1) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ và $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$;

2) $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, ngoài ra $|z| = 0$ khi và chỉ khi $z = 0$;

3) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$;

4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

5) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (mô đun của một tích bằng tích các mô đun);

6) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

7) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $z \neq 0$;

8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$ (mô đun của một tích bằng tích các mô đun);

9) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

1.3.2 Giải phương trình bậc hai

Bây giờ chúng ta có thể giải phương trình bậc hai với hệ số thực:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

trong trường hợp biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ nhận giá trị âm.

Bằng cách biến đổi, dễ dàng đưa phương trình về dạng tương đương sau

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] = 0.$$

Do đó

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - i^2 \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 = 0.$$

Vì thế

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Các nghiệm trên là các số phức liên hợp của nhau và ta có thể phân tích thành thừa số như sau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Bây giờ chúng ta xét phương trình bậc hai tổng quát với hệ số phức

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

Sử dụng các biến đổi đại số như trường hợp phương trình bậc hai với hệ số thực ta được:

$$a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] = 0.$$

Đẳng thức trên tương đương với

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

hoặc $(2az + b)^2 = \Delta$.

Với $\Delta = b^2 - 4ac$ cũng được gọi là biệt thức của phương trình bậc hai. Đặt $y = 2az + b$ phương trình trên được rút gọn về dạng

$$y^2 = \Delta = u + vi$$

với u, v là các số thực

Phương trình trên có lời giải

$$y_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{r+u}{2}} + (\operatorname{sgn} v) \sqrt{\frac{r-u}{2}} i \right),$$

Với $r = |\Delta|$, và $\operatorname{sgn} v$ là dấu của số thực v

Nghiệm ban đầu của phương trình là:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2a} (-b + y_{1,2}).$$

Ta có mối liên hệ giữa các nghiệm và hệ số:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}.$$

Khi phân tích ra thừa số

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Như vậy các tính chất trên được bảo toàn khi các hệ số của phương trình thuộc trường số phức $\mathbb{C}$.

1.3.3 Ý nghĩa hình học của các số phức và modun

Ý nghĩa hình học của số phức

Chúng ta định nghĩa số phức $z = (x, y) = x + yi$ là một cặp số thực sắp thứ tự $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vì thế hoàn toàn tự nhiên khi xem mỗi số phức $z = x + yi$ là một điểm $M(x, y)$ trong không gian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Xét P là tập hợp các điểm của không gian $\mathbb{R}^2$ với hệ trục tọa độ xOy và song ánh $\phi: \mathbb{C} \rightarrow P$, $\phi(z) = M(x, y)$.

Điểm $M(x, y)$ được gọi là dạng hình học của số phức $z = x + yi$. Số phức $z = x + yi$ được gọi là *tọa độ phức* của điểm $M(x, y)$. Chúng ta kí hiệu $M(z)$ để chỉ tọa độ phức của điểm M là số phức z .

Dạng hình học của số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức $z = x + yi$ là điểm $M'(x, -y)$ đối xứng với $M(x, y)$ qua trục tọa độ Ox .

Dạng hình học của số đối $-z$ của số phức $z = x + yi$ là điểm $M_J(-x, -y)$ đối xứng với $M(x, y)$ qua gốc tọa độ.

Song ánh ϕ từ tập $\mathbb{R}$ lên trục Ox ta gọi là *trục thực*, lên trục Oy ta gọi là *trục ảo*.

Không gian $\mathbb{C}$ cùng với các điểm được đồng nhất với số phức gọi là *không gian phức*.

Ta cũng có thể đồng nhất các số phức $z = x + yi$ với véc tơ $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$, với $M(x, y)$ là dạng hình học của số phức z .

Gọi V_0 là tập hợp các véc tơ có điểm gốc là gốc tọa độ O . Ta có thể định nghĩa song ánh $\phi' : \mathbb{C} \rightarrow V_0$, $\phi'(z) = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, với $\vec{i}$, $\vec{j}$ là các véc tơ đơn vị trên trục tọa độ Ox, Oy .

Ý nghĩa hình học của modun

Xét số phức $z = x + yi$ biểu diễn hình học trong mặt phẳng là $M(x, y)$. Khoảng cách Ôclit OM cho bởi công thức

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}.$$

Vì thế $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{v}|$ mô đun $|z|$ của số phức $z = x + yi$ là độ dài của đoạn thẳng OM hoặc là độ lớn của véc tơ $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Chú ý

a) Mỗi số thực dương r , tập hợp các số phức có mô đun r tương đương với đường tròn $C(O; r)$ tâm O bán kính r trong mặt phẳng.

b) Các số phức z với $|z| < r$ là các điểm nằm bên trong đường tròn $C(O; r)$. Các số phức z với $|z| > r$ là các điểm nằm bên ngoài đường tròn $C(O; r)$.

1.3.4 Ý nghĩa hình học của các phép toán đại số

a) Phép cộng và phép trừ

Xét hai số phức $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$ tương đương với hai véc tơ $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ và $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$.

Tổng của hai số phức là

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Tổng hai véc tơ

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j}.$$

Vì thế $z_1 + z_2$ tương đương với $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Hoàn toàn tương tự đối với phép trừ

Hiệu của hai số phức là

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Hiệu hai véc tơ

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j}.$$

Vì thế $z_1 - z_2$ tương đương với $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Chú ý

Khoảng cách giữa $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ bằng mô đun của số phức $z_1 - z_2$ hoặc độ dài của véc tơ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Vậy :

$$M_1 M_2 = |z_1 - z_2| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

b) Tích của số thực và số phức

Xét số phức $z = x + yi$ tương đương với véc tơ $\vec{v} = x \vec{i} + y \vec{j}$. Nếu λ là số thực, thì tích số thực $\lambda z = \lambda x + \lambda yi$ tương đương với véc tơ $\lambda \vec{v} = \lambda x \vec{i} + \lambda y \vec{j}$.

Chú ý: Nếu $\lambda > 0$ thì véc tơ $\lambda \vec{v}$ và $\vec{v}$ cùng hướng và $|\lambda \vec{v}| = \lambda |\vec{v}|$, nếu $\lambda < 0$ thì véc tơ $\lambda \vec{v}$ và $\vec{v}$ ngược hướng và $|\lambda \vec{v}| = -\lambda |\vec{v}|$. Tất nhiên $\lambda = 0$ thì $\lambda \vec{v} = \vec{0}$.

1.4 Dạng lượng giác của số phức

1.4.1 Tọa độ cực trong mặt phẳng

Xét mặt phẳng tọa độ với $M(x, y)$ không trùng gốc tọa độ. Số thực $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là *bán kính cực* của điểm M . Góc định hướng $t^* \in [0, 2\pi)$ giữa véc tơ $\overrightarrow{OM}$ với chiều dương của trục tọa độ Ox gọi là *argumen cực* của điểm M . Cặp số (r, t^*) gọi là tọa độ cực của điểm M . Ta sẽ viết $M(r, t^*)$. Chú ý hàm số

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi) \quad , \quad h((x, y)) = (r, t^*)$$

là song ánh.

Gốc tọa độ O là điểm duy nhất sao cho $r = 0$, argumen t^* của gốc không được định nghĩa.

Mỗi điểm M trong mặt phẳng, có duy nhất giao điểm P của tia với đường tròn đơn vị gốc O . Điểm P giống như argument cực t^* . Sử dụng định nghĩa hàm sin và cos ta có

$$x = r \cos t^* \quad , \quad y = r \sin t^* .$$

Vì thế ta dễ dàng có tọa độ Đề Các của một điểm từ tọa độ cực

Ngược lại, xét điểm $M(x, y)$. Bán kính cực là $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta xác định argument cực trong các trường hợp sau

a) Nếu $x \neq 0$, từ $\tan t^* = \frac{y}{x}$ ta suy ra

$$t^* = \arctan \frac{y}{x} + k\pi$$

Với

$$k = \begin{cases} 0 & \text{ khi } x > 0, y \geq 0 \\ 1 & \text{ khi } x < 0, y \in \mathbb{R} \\ 2 & \text{ khi } x > 0, y < 0 \end{cases}$$

b) Nếu $x = 0$ và $y \neq 0$ thì

$$t^* = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{ khi } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{ khi } y < 0 \end{cases}$$

1.4.2 Tọa độ cực của số phức

Mỗi số phức $z = x + yi$ ta có thể viết dưới dạng cực

$$z = r (\cos t^* + i \sin t^*),$$

với $r \in [0, \infty)$ và $t^* \in [0, 2\pi)$ đó là tọa độ cực dạng hình học của số phức z .

Argument cực của dạng hình học của số phức z được gọi là argument của z , kí hiệu là $\arg z$. Bán kính cực của dạng hình học của số phức z bằng mô đun của z . Khi $z \neq 0$ mô đun và argument của z được xác định một cách duy nhất.

Xét $z = r (\cos t^* + i \sin t^*)$ và $t = t^* + 2k\pi$ với k là số nguyên thì

$$z = r (\cos (t - 2k\pi) + i \sin (t - 2k\pi)) = r (\cos t + i \sin t).$$

Mỗi số phức z có thể biểu diễn như $z = r (\cos t + i \sin t)$ với $r \geq 0$ và $t \in \mathbb{R}$. Tập hợp $\text{Arg } z = \{t = t^* + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ được gọi là *arguent mở rộng* của số phức z .

Vì thế, hai số phức $z_1, z_2 \neq 0$ có dạng

$$z_1 = r_1 (\cos t_1 + i \sin t_1) \quad \text{và} \quad z_2 = r_2 (\cos t_2 + i \sin t_2)$$

bằng nhau khi và chỉ khi $r_1 = r_2$ và $t_1 - t_2 = 2k\pi$, với k là số nguyên.

Chú ý Các dạng sau nên nhớ

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 + i \sin 0, & i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ -1 &= \cos \pi + i \sin \pi, & -i &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

1.4.3 Các phép toán số phức trong tọa độ cực

Phép nhân *Giả sử rằng*

$$z_1 = r_1 (\cos t_1 + i \sin t_1) \quad \text{và} \quad z_2 = r_2 (\cos t_2 + i \sin t_2)$$

thì

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (t_1 + t_2) + i \sin (t_1 + t_2)).$$

Lũy thừa của một số phức (De Moivre) Cho $z = r(\cos t + i \sin t)$, $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$z^n = r^n (\cos nt + i \sin nt) .$$

Phép chia Giả sử rằng

$$z_1 = r_1 (\cos t_1 + i \sin t_1) \quad \text{và} \quad z_2 = r_2 (\cos t_2 + i \sin t_2)$$

thì

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (t_1 - t_2) + i \sin (t_1 - t_2)) .$$

1.4.4 Ý nghĩa hình học của phép nhân

Xét

$$z_1 = r_1 (\cos t_1^* + i \sin t_1^*)$$

và

$$z_2 = r_2 (\cos t_2^* + i \sin t_2^*) .$$

Biểu diễn hình học của chúng là $M_1(r_1, t_1^*)$, $M_2(r_2, t_2^*)$. Gọi P_1, P_2 lần lượt là giao điểm của $C(O, 1)$ với các tia (OM_1) và (OM_2) . Lấy $P_3 \in C(O, 1)$ với argument cực là $t_1^* + t_2^*$ và chọn $M_3 \in (OP_3)$ sao cho $OM_3 = OM_1 \cdot OM_2$. Lấy z_3 có tọa độ M_3 . Điểm $M_3(r_1 r_2, t_1^* + t_2^*)$ là dạng hình học $z_1 \cdot z_2$.

Lấy A là dạng hình học của số phức 1. Vì

$$\frac{OM_3}{OM_1} = \frac{OM_2}{1} \Leftrightarrow \frac{OM_3}{OM_2} = \frac{OM_1}{OA}$$

và $\widehat{M_2OM_3} = \widehat{AOM_1}$ nên hai tam giác M_2OM_3 và AOM_1 đồng dạng.

Khi biểu diễn dạng hình học của một thương chú ý rằng dạng hình học của $\frac{z_3}{z_2}$ là điểm M_1 .

1.4.5 Căn bậc n của đơn vị

Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và số phức $z_0 \neq 0$, giống như trên trường số thực, phương trình

$$Z^n - z_0 = 0$$

được sử dụng định nghĩa căn bậc n của số z_0 . Vì vậy mỗi một giá trị Z thỏa mãn phương trình trên là một căn bậc n của z_0 .

Định lý 1.4.1. Cho $z_0 = r(\cos t^* + i \sin t^*)$ là số phức với $r > 0$ và $t^* \in [0, 2\pi)$ Số phức z_0 có n căn bậc n phân biệt cho bởi công thức

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t^* + 2k\pi}{n} \right)$$

với $k = \overline{0, n-1}$.

Chứng minh: Sử dụng dạng cực của số phức với argument xác định

$Z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$. Theo định nghĩa $Z^n = z_0$ hay

$$\rho^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) = r (\cos t^* + i \sin t^*).$$

Ta có $\rho^n = r$ và $n\phi = t^* + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Vì thế $\rho = \sqrt[n]{r}$ và $\phi_k = \frac{t^*}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$ với $k \in \mathbb{Z}$. Do đó nghiệm của (1) là

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t^* + 2k\pi}{n} \right)$$

với $k \in \mathbb{Z}$.

Nhận thấy rằng $0 \leq \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_{n-1}$, vì thế các số ϕ_k , $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ chính là các argument và $\phi_k^* = \phi_k$. Ta có n giá trị căn phân biệt của z_0 : $Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$. Cho k là số nguyên và $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, thì r đồng dư với k theo $\text{mod } n$. Khi đó $k = nq + r \in \mathbb{Z}$ và

$$\phi_k = \frac{t^*}{n} + (nq + r) \frac{2\pi}{n} = \frac{t^*}{n} + r \frac{2\pi}{n} + 2q\pi = \phi_r + 2q\pi.$$

Nhận thấy $Z_k = Z_r$ do đó

$$\{Z_k : k \in \mathbb{Z}\} = \{Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}\}.$$

Vậy có chính xác n giá trị phân biệt của căn bậc n .

Biểu diễn hình học các giá trị của căn bậc n là các đỉnh của một n giác đều nội tiếp trong đường tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính là $\sqrt[n]{r}$.

Ta chứng minh điều trên như sau, kí hiệu $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ là các điểm có tọa độ phức $Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$. Vì $OM_k = |Z_k| = \sqrt[n]{r}$ với $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ nên các điểm M_k nằm trên đường tròn $C(O, \sqrt[n]{r})$. Bên cạnh đó, số đo của cung $M_k M_{k+1}$ bằng

$$\arg Z_{k+1} - \arg Z_k = \frac{t^* + 2(k+1)\pi - (t^* + 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n},$$

với $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ và số đo cung $M_{n-1} M_0$ là $\frac{2\pi}{n} = 2\pi - (n-1) \frac{2\pi}{n}$.

Vì tất cả các cung $M_1 M_2, \dots, M_{n-1} M_0$ đều bằng nhau nên đa giác $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ là đa giác đều.

Căn bậc n của đơn vị

Các nghiệm phương trình $Z^n - 1 = 0$ được gọi là các căn bậc n của đơn vị. Vì $1 = \cos 0 + i \sin 0$ nên từ công thức căn bậc n của số phức ta có căn bậc n của đơn vị

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Cụ thể ta có

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1;$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = \varepsilon;$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} = \varepsilon^2;$$

...

$$\varepsilon_{n-1} = \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = \varepsilon^{n-1}.$$

Tập hợp $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$ kí hiệu U_n . Ta có tập hợp U_n được sinh bởi ε , mỗi phần tử của U_n là một lũy thừa của ε .

Giống như trước, biểu diễn hình học các căn bậc n của một số phức là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh, nội tiếp trong đường tròn đơn vị mà có một đỉnh là 1. Ta xét một vài giá trị của n

i) với $n = 2$, phương trình $Z^2 - 1 = 0$ có các nghiệm 1 và -1 đây là các căn bậc hai của đơn vị

ii) với $n = 3$, phương trình $Z^3 - 1 = 0$ có các nghiệm cho bởi công thức

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$$

với $k \in \{0, 1, 2\}$.

Vì thế

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

và

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Đây là các đỉnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $C(O, 1)$.

iii) với $n = 4$, các căn bậc 4 là

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}$$

với $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Cụ thể như sau

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\varepsilon_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad \varepsilon_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

Ta có

$$U_4 = \{1, i, i^2, i^3\} = \{1, i, -1, -i\}.$$

Biểu diễn hình học của các căn bậc bốn là các đỉnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $C(O, 1)$ có một đỉnh là 1.

Căn $\varepsilon_k \in U_n$ được gọi là *căn nguyên thủy* nếu mọi số nguyên dương $m < n$ ta có $\varepsilon_k^m \neq 1$.

Mệnh đề 1.4.2. 1) Nếu $n|q$, mọi nghiệm của phương trình $Z^n - 1 = 0$ là nghiệm của phương trình $Z^q - 1 = 0$;

2) Nghiệm chung của phương trình $Z^m - 1 = 0$ và $Z^n - 1 = 0$ là các nghiệm của phương trình $Z^d - 1 = 0$; với $d = \gcd(m, n)$ (d : ước chung lớn nhất), $U_m \cap U_n = U_d$;

3) Các nghiệm nguyên thủy của phương trình $Z^m - 1 = 0$ là

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m};$$

với $0 \leq k \leq m$ và $\gcd(k, m) = 1$.

Mệnh đề 1.4.3. Nếu $\varepsilon \in U_n$ là một căn nguyên thủy của đơn vị thì tất cả các nghiệm của phương trình $Z^n - 1 = 0$ là $\varepsilon^r, \varepsilon^{r+1}, \dots, \varepsilon^{r+n-1}$ với r là số nguyên dương tùy ý.

Mệnh đề 1.4.4. Cho $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ là các căn bậc n của đơn vị. Với mỗi số nguyên dương n ta luôn có hệ thức

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^k = \begin{cases} n, & n|k; \\ 0, & n \nmid k. \end{cases}$$

Mệnh đề 1.4.5. Cho p là số nguyên tố và $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$. Nếu $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ là các số nguyên khác không, hệ thức

$$a_0 + a_1\varepsilon + \dots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$$

đúng khi và chỉ khi $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1}$.

1.5 Bài tập

Bài 1 Cho các số phức $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (-2, 3)$, $z_3 = (1, -1)$ hãy tính các tổng sau:

$$\begin{array}{lll} a) z_1 + z_2 + z_3; & b) z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1; & c) z_1z_2z_3; \\ d) z_1^2 + z_2^2 + z_3^2; & e) \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}; & f) \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}. \end{array}$$

Bài 2 Giải các phương trình sau :

$$\begin{array}{ll} a) z + (-5, 7) = (2, 1); & b) (2, 3) + z = (-5, -1); \\ c) z \cdot (2, 3) = (4, 5); & d) \frac{z}{(-1, 3)} = (3, 2) \end{array}$$

Bài 3 Giải các phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$

a) $z^2 + z + 1 = 0$; b) $z^3 + 1 = 0$.

Bài 4 Cho $z_0 = (a, b) \in \mathbb{C}$. Tìm số phức z thỏa mãn $z^2 = z_0$.

Bài 5 Tìm các số thực x, y trong các trường hợp sau:

a) $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$; b) $\frac{x-3}{3+i} + \frac{y-3}{3-i} = i$;

c) $(4 - 3i)x^2 + (1 + 2i)xy = 4y^2 - \frac{1}{2}x^2 + (3xy - 2y^2)i$.

Bài 7 Tính :

a) $(2 - i)(-3 + 2i)(5 - 4i)$; b) $(2 - 4i)(5 + 2i) + (3 + 4i)(-6 - i)$;

c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{16}$; d) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^6$;

e) $\frac{3+7i}{2+3i} + \frac{5-8i}{2-3i}$.

Bài 8 Tính:

a) $i^{2000} + i^{1999} + i^{201} + i^{82} + i^{47}$; b) $E_n = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$;

c) $i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \dots i^{2000}$; d) $i^{-5} + (-i)^{-7} + (-i)^{13} + i^{-100} + (-i)^{94}$.

Bài 9 Tìm tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Bài 10 Chứng minh rằng:

a) $E_1 = \left(2 + i\sqrt{5}\right)^7 + \left(2 - i\sqrt{5}\right)^7 \in \mathbb{R}$;

b) $E_2 = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n \in \mathbb{R}$.

Bài 11 Cho $z \in \mathbb{C}^*$ thỏa mãn $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$. Chứng minh rằng $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$.

Bài 12 Tìm các số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $|z^2 + \bar{z}^2| = 1$.

Bài 13 Tìm các số phức z thỏa mãn $4z^2 + 8|z|^2 = 8$.

Bài 14 Tìm các số phức z thỏa mãn $z^3 = \bar{z}$.

Bài 15 Cho $z \in \mathbb{C}$ với $\operatorname{Re}(z) > 1$. Chứng minh rằng $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Bài 16 Cho a, b, c là các số thực và $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính tổng $(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$.

Bài 17 Chứng minh các đẳng thức sau :

- a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$;
 b) $|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$;
 c) $|z_1 + z_2 + z_3| + |-z_1 + z_2 + z_3| + |z_1 - z_2 + z_3| + |z_1 + z_2 - z_3| = 4(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$.

Bài 18 Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho :

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

Bài 19 Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R > 0$. Chứng minh rằng :

$$|z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| \cdot |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1| \leq 9R^2.$$

Bài 20 Cho $z_1, z_2, \dots, z_n$ là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = r > 0$. chứng minh rằng :

$$E = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \dots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \dots z_n}.$$

Bài 21 (Bất đẳng thức Hlawka's) Cho z_1, z_2, z_3 là các số phức. Chứng minh rằng :

$$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|.$$

Bài 22 Cho x_1, x_2 là nghiệm phương trình $x^2 - x + 1 = 0$. Hãy tính :
 a) $x_1^{2000} + x_2^{2000}$; b) $x_1^{1999} + x_2^{1999}$; c) $x_1^n + x_2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Bài 23 Tìm dạng tọa độ cực của các số phức sau:

- a) $z_1 = 6 + 6i\sqrt{3}$; b) $z_2 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$; c) $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 d) $z_4 = 9 - 9i\sqrt{3}$; e) $z_5 = 3 - 2i$; f) $z_6 = -4i$.

Bài 24 Tìm dạng tọa độ cực của các số phức sau:

- a) $z_1 = \cos a - i \sin a$, $a \in [0, 2\pi)$;
 b) $z_2 = \sin a + i(1 + \cos a)$, $a \in [0, 2\pi)$;
 c) $z_3 = \cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a)$, $a \in [0, 2\pi)$;
 d) $z_4 = 1 - \cos a + i \sin a$, $a \in [0, 2\pi)$.

Bài 25 Sử dụng dạng cực của số phức, hãy tính các tổng sau:

- a) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-3 + 3i)(2\sqrt{3} + 2i)$; b) $(1 + i)(-2 - 2i)$;
 c) $-2i(-4 + 4\sqrt{3}i)(3 + 3i)$; d) $3(1 - i)(-5 + 5i)$.

Bài 26 Hãy tìm modun và argument của các số phức z :

a) $z = \frac{(2\sqrt{3} + 2i)^8}{(1 - i)^6} + \frac{(1 + i)^6}{(2\sqrt{3} - 2i)^8}$;

b) $z = \frac{(-1 + i)^4}{(\sqrt{3} - i)^{10}} + \frac{1}{(2\sqrt{3} + 2i)^4}$;

c) $z = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$.

Bài 27 Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

a) $z = 1 + i$; b) $z = i$; c) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$;

d) $z = -2(1 + i\sqrt{3})$; e) $z = -7 + 24i$;

Bài 28 Tìm căn bậc ba của các số phức sau:

a) $z = -i$; b) $z = -27$; c) $z = 2 + 2i$;

d) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $z = 18 + 26i$.

Bài 29 Tìm căn bậc bốn của các số phức sau:

a) $z = 2 - i\sqrt{12}$; b) $z = \sqrt{3} + i$; c) $z = i$;

d) $z = -2i$; e) $z = -7 + 24i$.

Bài 30 Giải các phương trình sau:

a) $z^3 - 125 = 0$; b) $z^4 + 16 = 0$;

c) $z^3 + 64i = 0$; d) $z^3 - 27i = 0$;

Bài 31 Giải các phương trình sau:

a) $z^7 - 2iz^4 - iz^3 - 2 = 0$; b) $z^6 + iz^3 + i - 1 = 0$;

c) $(2 - 3i)z^6 + 1 + 5i = 0$; d) $z^{10} + (-2 + i)z^5 - 2i = 0$.

Chương 2

Sử dụng số phức trong giải toán sơ cấp

2.1 Số phức và các bài toán hình học

2.1.1 Một vài khái niệm và tính chất

Khoảng cách giữa hai điểm

Giả sử các số phức z_1 và z_2 có biểu diễn hình học là các điểm M_1 và M_2 khi đó khoảng cách giữa hai điểm M_1 và M_2 được cho bởi công thức $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$

Đoạn thẳng, tia, đường thẳng

Cho A và B là hai điểm phân biệt, trong mặt phẳng phức có tọa độ là a và b . Ta nói điểm M có tọa độ z nằm giữa A và B nếu $z \neq a$, $z \neq b$ và hệ thức sau thỏa mãn

$$|a - z| + |z - b| = |a - b|.$$

Ta sử dụng kí hiệu $A - M - B$.

Tập hợp $(AB) = \{M : A - M - B\}$ được gọi là *đoạn thẳng mở* xác định bởi điểm A và B .

Tập hợp $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$ được gọi là *đoạn thẳng đóng* xác định bởi điểm A và B .

Định lý 2.1.1. *Giả sử $A(a), B(b)$ là hai điểm phân biệt. Khi đó các trình bày dưới đây là tương đương*

- 1) $M \in (AB)$;
- 2) Có số thực dương k sao cho $z - a = b(k - z)$;

3) Có số thực $t \in (0, 1)$ sao cho $z = (1 - t)a + tb$; với z là tọa độ phức của M .

Định lý 2.1.2. Giả sử $A(a), B(b)$ là hai điểm phân biệt. Khi đó các trình bày dưới đây là tương đương

- 1) $M \in (AB)$;
- 2) Có số thực dương t sao cho $z = (1 - t)a + tb$, với z là tọa độ phức của M ;
- 3) $\arg(z - a) = \arg(z - b)$;
- 4) $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}^+$.

Định lý 2.1.3. Giả sử $A(a), B(b)$ là hai điểm phân biệt. Khi đó các trình bày dưới đây là tương đương

- 1) M nằm trên đường thẳng AB ;
- 2) $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$;
- 3) Có số thực t sao cho $z = (1 - t)a + tb$;
- 4) $\left| \frac{z - a}{b - a} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} \right| = 0$;
- 5) $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Chia đoạn thẳng theo một tỉ số

Cho hai điểm $A(a), B(b)$ phân biệt. Một điểm $M(z)$ nằm trên đường thẳng AB chia đoạn AB theo tỉ số $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ khi hệ thức véc tơ sau thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Sử dụng tọa độ hệ thức trên có thể viết $a - z = k(b - z)$ hoặc $(1 - k) \cdot z = a - k \cdot b$. Vì thế ta có

$$z = \frac{a - kb}{1 - k}.$$

Khi $k < 0$ điểm M nằm trên đoạn thẳng nối A và B . Nếu $k \in (0, 1)$, thì $M \in (BA \setminus [AB])$.

Trường hợp còn lại $k > 1$ thì $M \in (AB \setminus [AB])$

Góc định hướng

Nhớ lại rằng, một tam giác được định hướng nếu như các đỉnh của nó được chỉ rõ thứ tự. Tam giác có hướng dương nếu hướng các đỉnh ngược chiều kim đồng hồ, hướng ngược lại là hướng âm. Lấy $M_1(z_1)$ và $M_2(z_2)$ là hai điểm phân biệt khác gốc tọa độ trong mặt phẳng phức. Góc $\widehat{M_1OM_2}$ được gọi là định hướng nếu các điểm M_1 và M_2 có thứ tự thuận chiều kim đồng hồ.

Mệnh đề 2.1.4. Số đo góc định hướng $\widehat{M_1OM_2}$ bằng

$$\arg \frac{z_2}{z_1}.$$

Định lý 2.1.5. Cho ba điểm phân biệt $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$. Số đo góc định hướng $\widehat{M_2M_1M_3}$ là

$$\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Góc giữa hai đường thẳng

Cho bốn điểm $M_i(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Số đo góc xác định bởi đường thẳng M_1M_3 và M_2M_4 bằng

$$\arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}$$

hoặc

$$\arg \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Phép quay một điểm Xét góc α và số phức cho bởi $\varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Lấy $z = r(\cos t + i \sin t)$ là số phức và M là biểu diễn hình học.

Dạng tích $z\varepsilon = r(\cos(t + \alpha) + i \sin(t + \alpha))$, ta có $|r\varepsilon| = r$ và

$$\arg(z\varepsilon) = \arg z + \alpha.$$

Gọi M' là biểu diễn hình học của $z\varepsilon$, ta thấy rằng điểm M' là ảnh của M qua phép quay tâm O (gốc tọa độ) góc quay là α .

Mệnh đề 2.1.6. Giả sử điểm C là ảnh của B qua phép quay tâm A góc quay α . Nếu a, b, c là các tọa độ của A, B, C phân biệt thì:

$$c = a + (b - a)\varepsilon \text{ với } \varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Bài toán 1 Cho $ABCD$ và $BNMK$ là hai hình vuông không trùng nhau. E là trung điểm của AN , F là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng CK . Chứng minh rằng E, F, B thẳng hàng.

Giải

Xét không gian phức gốc F các trục tọa độ CK và FB với FB là trục ảo. Lấy c, k, bi là tọa độ các điểm C, B, K với $c, k, b \in \mathbb{R}$. Phép quay tâm B góc quay $\theta = \frac{\pi}{2}$ biến điểm C thành điểm A vì thế A có tọa độ là $a = b(1 - i) + ci$. Tương tự N là ảnh của điểm B góc quay $\theta = -\frac{\pi}{2}$ và có tọa độ phức là

$$n = b(1 + i) - ki.$$

Trung điểm E của đoạn thẳng AN có tọa độ phức là

$$e = \frac{a + n}{2} = b + \frac{c - k}{2}i.$$

Vậy E nằm trên đường thẳng FB , ta có đpcm.

Bài toán 2 Cho tứ giác $ABCD$, trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lần lượt dựng về phía ngoài của tứ giác các hình vuông có tâm O_1, O_2, O_3, O_4 phân biệt. Chứng minh rằng $O_1O_3 \perp O_2O_4$ và $O_1O_3 = O_2O_4$.

Giải Lấy $ABMM', BCNN', CDPP', DAQQ'$ lần lượt là các hình vuông có tâm O_1, O_2, O_3, O_4 .

Điểm M là ảnh của A qua phép quay tâm B góc quay $\theta = \frac{\pi}{2}$; vì thế $m = b + (a - b)i$.

Tương tự

$$n = c + (b - c)i, \quad p = (c - d)i, \quad q = a + (d - a)i.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} o_1 &= \frac{a + m}{2} = \frac{a + b + (a - b)i}{2}, & o_2 &= \frac{b + c + (b - c)i}{2} \\ o_3 &= \frac{c + d + (c - d)i}{2}, & o_4 &= \frac{d + a + (d - a)i}{2}. \end{aligned}$$

Vì

$$\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} = \frac{c + d - a - b + i(c - d - a + b)}{a + d - b - c + i(d - a - b + c)} = -i \in i\mathbb{R}^*$$

nên $O_1O_3 \perp O_2O_4$.

Ngoài ra

$$\left| \frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} \right| = |-i| = 1$$

nên $O_1O_3 = O_2O_4$.

Bài toán 3 Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng các tam giác ABR, BCP, CAQ sao cho

$$\begin{aligned}\widehat{PBC} &= \widehat{CAQ} = 45^\circ \\ \widehat{BCP} &= \widehat{QCA} = 30^\circ \\ \widehat{ABR} &= \widehat{RAB} = 15^\circ\end{aligned}$$

Chứng minh rằng $\widehat{QRP} = 90^\circ$ và $RQ = RP$.

Giải

Xét mặt phẳng phức với gốc tọa độ là R , gọi M là hình chiếu vuông góc của P lên BC .

Từ $MP = MB$ và $\frac{MC}{MP} = \sqrt{3}$ ta có

$$\frac{p - m}{b - m} = i \quad \text{và} \quad \frac{c - m}{p - m} = i\sqrt{3}$$

Vì thế

$$p = \frac{c + \sqrt{3}b}{1 + \sqrt{3}} + \frac{b - c}{1 + \sqrt{3}}i.$$

Tương tự

$$q = \frac{c + \sqrt{3}a}{1 + \sqrt{3}} + \frac{a - c}{1 + \sqrt{3}}i.$$

Điểm B có được từ điểm A bằng cách quay quanh R một góc $\theta = 150^\circ$ vì thế

$$b = a \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

Sử dụng biến đổi đại số ta có $\frac{p}{q} = i \in i\mathbb{R}^*$, vì thế $QR \perp PR$. Ngoài ra $|p| = |iq| = |q|$ nên $QR = PR$. Dpcm

2.1.2 Điều kiện thẳng hàng, vuông góc và cùng thuộc một đường tròn

Xét bốn điểm phân biệt $M_i(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Mệnh đề 2.1.7. Các điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*.$$

Mệnh đề 2.1.8. Đường thẳng M_1M_2 và M_3M_4 vuông góc khi và chỉ khi

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*.$$

Mệnh đề 2.1.9. Bốn điểm phân biệt $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ thẳng hàng hoặc cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$$

Số k được gọi là tỉ số kép của bốn điểm

$M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$.

Chú ý 1) các điểm $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^* \text{ và } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*.$$

2) Các điểm $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$$

với

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \notin \mathbb{R} \text{ và } \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}.$$

2.1.3 Tam giác đồng dạng

Xét sáu điểm $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$ trong mặt phẳng phức. Ta nói rằng tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$ đồng dạng với nhau nếu góc A_k bằng góc B_k , $k \in \{1, 2, 3\}$.

Mệnh đề 2.1.10. *Tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$ đồng dạng và có cùng hướng khi và chỉ khi:*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}.$$

Mệnh đề 2.1.11. *Tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$ đồng dạng và có ngược hướng khi và chỉ khi:*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\overline{b_2 - b_1}}{\overline{b_3 - b_1}}.$$

Bài toán 1 Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC ta dựng các tam giác đồng dạng và có cùng hướng ADB, BEC, CFA . Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác DEF có cùng trọng tâm.

Giải Vì các tam giác ADB, BEC, CFA đồng dạng và có cùng hướng nên

$$\frac{d - a}{b - a} = \frac{e - b}{c - b} = \frac{f - c}{a - c} = z$$

Từ đây ta có

$$d = a + (b - a)z, \quad e = b + (c - b)z, \quad f = c + (a - c)z.$$

Suy ra

$$\frac{d + e + f}{3} = \frac{a + b + c}{3}.$$

Vậy tam giác ABC và tam giác DEF có cùng trọng tâm.

Bài toán 2 Cho tam giác ABC trung điểm các cạnh AB, BC, CA lần lượt là M, N, P . Trên đường trung trực của các đoạn thẳng $[AB], [BC], [CA]$ các điểm A', B', C' được chọn phía trong tam giác sao cho

$$\frac{MC'}{AB} = \frac{NA'}{BC} = \frac{PB'}{CA}.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Giải Từ

$$\frac{MC'}{AB} = \frac{NA'}{BC} = \frac{PB'}{CA}.$$

Ta có $\tan(\widehat{C'AB}) = \tan(\widehat{A'BC}) = \tan(\widehat{CB'A})$. Vì thế tam giác $AC'B, BA'C, CB'A$ đồng dạng với nhau. Áp dụng kết quả bài trên ta có lời giải.

Bài toán 3 Cho tam giác ABO đều với tâm S , tam giác đều khác $A'B'O$ có cùng hướng với tam giác ABO và $S \neq A', S \neq B'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm $A'B$ và AB' . Chứng minh rằng tam giác $SB'M$ và $SA'N$ đồng dạng.

(30th IMO-Shortlist)

Giải

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABO và

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Xét mặt phẳng phức với gốc S sao cho O nằm trên chiều dương của trục thực. Tọa độ của các điểm O, A, B là $R, R\varepsilon, R\varepsilon^2$.

Xét $R + z$ là tọa độ của B' khi đó tọa độ A' là $R - z\varepsilon$. Tọa độ trung điểm M, N là

$$z_M = \frac{z_B + z_{A'}}{2} = \frac{R\varepsilon^2 + R - z\varepsilon}{2} = \frac{R(\varepsilon^2 + \varepsilon) - z\varepsilon}{2} = \frac{-R\varepsilon - z\varepsilon}{2} = \frac{-\varepsilon(R + z)}{2}.$$

và

$$z_N = \frac{z_A + z_{B'}}{2} = \frac{R\varepsilon + R + z}{2} = \frac{R(\varepsilon + 1) + z}{2} = \frac{-R\varepsilon^2 + z}{2} = \frac{z - \frac{R}{\varepsilon}}{2} = \frac{R - z\varepsilon}{-2\varepsilon}.$$

Khi đó ta có

$$\frac{z_{B'} - z_S}{z_M - z_S} = \frac{\overline{z_{A'}} - \overline{z_S}}{\overline{z_N} - \overline{z_S}} \Leftrightarrow \frac{R + z}{\frac{-\varepsilon(R+z)}{2}} = \frac{\overline{R - z\varepsilon}}{\frac{\overline{R - z\varepsilon}}{-2\bar{\varepsilon}}} \Leftrightarrow \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = 1 \Leftrightarrow |\varepsilon|^2 = 1.$$

Vậy tam giác $SB'M$ và $SA'N$ đồng dạng và ngược hướng.

2.1.4 Tam giác đều

Mệnh đề 2.1.12. Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác $A_1A_2A_3$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:

- 1) $A_1A_2A_3$ là tam giác đều;
- 2) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$;
- 3) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$;
- 4) $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_3}$;
- 5) $\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0$ với $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$;
- 6) $(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3) = 0$ với $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$;
- 7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0$.

Mệnh đề 2.1.13. Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác có hướng dương $A_1A_2A_3$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:

- 1) $A_1A_2A_3$ là tam giác đều;
- 2) $z_3 - z_1 = \varepsilon(z_2 - z_1)$ với $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$;
- 3) $z_2 - z_1 = \varepsilon(z_3 - z_1)$ với $\varepsilon = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$;
- 4) $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ với $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Mệnh đề 2.1.14. Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác có hướng âm $A_1A_2A_3$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:

- 1) $A_1A_2A_3$ là tam giác đều;
- 2) $z_3 - z_1 = \varepsilon(z_2 - z_1)$ với $\varepsilon = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$;
- 3) $z_2 - z_1 = \varepsilon(z_3 - z_1)$ với $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$;
- 4) $z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3 = 0$ với $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Mệnh đề 2.1.15. Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác đều $A_1A_2A_3$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:

- 1) $A_1A_2A_3$ là tam giác đều;
- 2) $z_1 \overline{z_2} = z_2 \overline{z_3} = z_3 \overline{z_1}$;

$$3) z_1^2 = z_2 z_3 \text{ và } z_2^2 = z_1 z_3.$$

Bài toán 1 Về phía ngoài tam giác ABC dựng ba tam giác đều có hướng dương $AC'B, BA'C, CB'A$. Chứng minh rằng các trọng tâm của ba tam giác là các đỉnh của một tam giác đều.

(*Napoleon's problem*)

Giải Gọi a, b, c là tọa độ ba đỉnh A, B, C . Sử dụng mệnh đề trên ta có

$$a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0, \quad b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, \quad c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0 \quad (1)$$

Với a', b', c' là tọa độ các điểm A', B', C' . Trọng tâm các tam giác $AC'B, BA'C, CB'A$ có tọa độ là

$$a'' = \frac{1}{3}(a' + b + c), \quad b'' = \frac{1}{3}(a + b' + c), \quad c'' = \frac{1}{3}(a + b + c').$$

Ta sẽ kiểm tra $c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2 = 0$. Thật vậy

$$\begin{aligned} (c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2) &= (a + b + c') + (a' + b + c)\varepsilon + (a + b' + c)\varepsilon^2 \\ &= (b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2) + (a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2) + (c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2) = 0. \end{aligned}$$

Bài toán 2 Trên các cạnh của tam giác, về phía ngoài ta dựng ba đa giác đều n cạnh. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho tâm của các hình n giác đó là các đỉnh của một tam giác đều.

(*Balkan Mathematical Olympiad-Shortlist*)

Giải Xét A_0, B_0, C_0 là trọng tâm của các n giác trên các cạnh BC, CA, AB . Số đo các góc $\widehat{AC_0B}, \widehat{BA_0C}, \widehat{AB_0C}$ là $\frac{2\pi}{n}$. Kí hiệu a, b, c, a_0, b_0, c_0 là tọa độ các điểm A, B, C, A_0, B_0, C_0 . Sử dụng các công thức phép quay ta có

$$a = c_0 + (b - c_0)\varepsilon;$$

$$b = a_0 + (c - a_0)\varepsilon;$$

$$c = b_0 + (a - b_0)\varepsilon;$$

Suy ra

$$a_0 = \frac{b - c\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad b_0 = \frac{c - a\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad c_0 = \frac{a - b\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Tam giác $A_0B_0C_0$ đều khi và chỉ khi

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0$$

Thay các giá trị a_0, b_0, c_0 ta có

$$(b - c\varepsilon)^2 + (c - a\varepsilon)^2 + (a - b\varepsilon)^2 = \\ (b - c\varepsilon)(c - a\varepsilon) + (c - a\varepsilon)(a - b\varepsilon) + (a - b\varepsilon)(b - c\varepsilon).$$

Đẳng thức trên tương đương với

$$(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] = 0.$$

Suy ra $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$ ta có $n = 3$. Vậy $n = 3$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2.1.5 Hình học giải tích với số phức

Phương trình đường thẳng *phương trình của đường thẳng trong mặt phẳng phức là*

$$\overline{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha z + \beta = 0$$

với $\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{R}$ và $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Mệnh đề 2.1.16. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình

$$\overline{\alpha_1} \cdot \bar{z} + \alpha_1 z + \beta_1 = 0 \text{ và } \overline{\alpha_2} \cdot \bar{z} + \alpha_2 z + \beta_2 = 0$$

Đường thẳng d_1 và d_2 là:

- 1) song song khi và chỉ khi $\frac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} = \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2}$;
- 2) vuông góc khi và chỉ khi $\frac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2} = 0$;
- 3) Cắt nhau khi và chỉ khi $\frac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} \neq \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2}$;

Phương trình đường thẳng xác định bởi hai điểm: *Phương trình một đường thẳng được xác định bởi hai điểm*

$P_1(z_1), P_2(z_2)$ là

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diện tích tam giác

Định lý 2.1.17. *Diện tích tam giác $A_1A_2A_3$ với tọa độ các đỉnh z_1, z_2, z_3 bằng modun của số*

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Hệ quả *Diện tích tam giác định hướng $A_1A_2A_3$ với tọa độ các đỉnh z_1, z_2, z_3 là*

$$\text{area}[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2} \text{Im}(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}).$$

Bài toán 1 Cho tam giác $A_1A_2A_3$ và các điểm M_1, M_2, M_3 nằm trên đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 . Giả sử rằng M_1, M_2, M_3 chia đoạn thẳng $[A_2A_3], [A_3A_1], [A_1A_2]$ theo tỉ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{\text{area}[M_1M_2M_3]}{\text{area}[A_1A_2A_3]} = \frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)}.$$

Giải Tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 là:

$$m_1 = \frac{a_2 - \lambda_1 a_1}{1 - \lambda_1}, m_2 = \frac{a_3 - \lambda_2 a_1}{1 - \lambda_2}, m_3 = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1 - \lambda_3}$$

Áp dụng công thức (2) ta có

$$\begin{aligned}
\text{area}[M_1M_2M_3] &= \frac{1}{2}(\overline{m_1}m_2 + \overline{m_2}m_3 + \overline{m_3}m_1) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{(\overline{a_2} - \lambda_1\overline{a_3})(a_3 - \lambda_2a_1)}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} + \frac{(\overline{a_3} - \lambda_2\overline{a_1})(a_1 - \lambda_3a_2)}{(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\overline{a_1} - \lambda_3\overline{a_2})(a_2 - \lambda_1a_3)}{(1 - \lambda_3)(1 - \lambda_1)} \right) \\
&= \frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} \text{area}[A_1A_2A_3]
\end{aligned}$$

Chú ý Công thức dạng (3) ta suy ra định lí Menelaus : *Các điểm*
 M_1, M_2, M_3 *thẳng hàng khi và chỉ khi* $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ *tương đương với:*

$$\frac{M_1A_2}{M_1A_3} \cdot \frac{M_2A_3}{M_2A_1} \cdot \frac{M_3A_1}{M_3A_2} = 1.$$

Bài toán 2 Cho a, b, c là tọa độ các đỉnh A, B, C của một tam giác. Biết rằng $|a| = |b| = |c| = 1$ và tồn tại góc $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho
 $a + b \cos \alpha + c \sin \alpha = 0$. Chứng minh rằng

$$1 < \text{area}[ABC] \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Giải Ta có

$$\begin{aligned}
1 &= |a|^2 = |b \cos \alpha + c \sin \alpha|^2 = (b \cos \alpha + c \sin \alpha)(\overline{b} \cos \alpha + \overline{c} \sin \alpha) \\
&= |b|^2 \cos^2 \alpha + |c|^2 \sin^2 \alpha + (b\overline{c} + \overline{b}c) \sin \alpha \cos \alpha \\
&= 1 + \frac{b^2 + c^2}{bc} \sin \alpha \cos \alpha.
\end{aligned}$$

Từ trên ta có $b^2 + c^2 = 0$ nên $b = \pm ic$. Áp dụng hệ thức (2) ta có

$$\begin{aligned}
\text{area}[ABC] &= \frac{1}{2} |\text{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)| \\
&= \frac{1}{2} |\text{Im}[(-\bar{b}\cos\alpha - \bar{c}\sin\alpha)b + \bar{b}c - \bar{c}(b\cos\alpha + c\sin\alpha)]| \\
&= \frac{1}{2} |\text{Im}(-\cos\alpha - \sin\alpha - b\bar{c}\sin\alpha - b\bar{c}\cos\alpha + \bar{b}c)| \\
&= \frac{1}{2} |\text{Im}[\bar{b}c - (\sin\alpha + \cos\alpha)b\bar{c}]| = \frac{1}{2} |\text{Im}[(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)\bar{b}c]| \\
&= \frac{1}{2} (1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \text{Im}(\bar{b}c) = \frac{1}{2} (1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \text{Im}(\pm i\bar{c}c) \\
&= \frac{1}{2} (1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \text{Im}(\pm i) = \frac{1}{2} (1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \\
&= \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right)
\end{aligned}$$

Ta thấy rằng $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$. Vì thế $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$. Như vậy $1 < \text{area}[ABC] \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Phương trình đường thẳng được xác định bởi điểm đi qua và phương

Mệnh đề 2.1.18. Cho đường thẳng $d : \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$ và điểm $P_0(z_0)$. Phương trình đường thẳng đi qua $P_0(z_0)$ và song song với d là :

$$z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} (\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Mệnh đề 2.1.19. Cho đường thẳng $d : \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$ và điểm $P_0(z_0)$. Phương trình đường thẳng đi qua $P_0(z_0)$ và vuông góc với d là :

$$z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} (\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Hình chiếu vuông góc của một điểm lên một đường thẳng

Mệnh đề 2.1.20. Cho điểm $P_0(z_0)$ đường thẳng $d: \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$. Tọa độ hình chiếu của điểm $P_0(z_0)$ lên đường thẳng d là:

$$z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}.$$

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Mệnh đề 2.1.21. Khoảng cách từ điểm $P_0(z_0)$ tới đường thẳng $d: \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0, \alpha \in \mathbb{C}^*$ bằng

$$D = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha \bar{\alpha}}}.$$

Đường tròn

Mệnh đề 2.1.22. Phương trình của một đường tròn trong mặt phẳng là

$$z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0,$$

với $\alpha \in \mathbb{C}$ và $\beta \in \mathbb{R}$.

Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Mệnh đề 2.1.23. Cho một điểm $P_0(z_0)$ và một đường tròn có phương trình z .

$$\bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0$$

Với $\alpha \in \mathbb{C}$ và $\beta \in \mathbb{R}$

Phương tích của điểm P_0 với đường tròn trên là

$$\rho(z_0) = z_0 \cdot \bar{z}_0 + \alpha \cdot z_0 + \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \beta.$$

2.1.6 Tích thực của hai số phức

Khái niệm tích vô hướng của hai véc tơ đã trở thành kinh điển. Ta sẽ giới thiệu khái niệm đó đối với các số phức. Trong nhiều trường hợp sử dụng tích này làm cho lời giải bài toán đơn giản đi đáng kể. Xét a và b là các số phức

Định nghĩa 2.1.24. Ta gọi tích thực của hai số phức là số cho bởi công thức

$$a \cdot b = \frac{1}{2} (\bar{a}b + a\bar{b}).$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\overline{a.b} = \frac{1}{2} (a\bar{b} + \bar{a}b) = a.b;$$

Vì thế $a.b$ là số thực, nó thể đã được thể hiện trong tên gọi.

Những tính chất dưới đây ta dễ dàng kiểm tra.

Mệnh đề 2.1.25. Mọi số phức a, b, c, z ta có các hệ thức sau

- 1) $a.a = |a|^2$;
- 2) $a.b = b.a$ (tích thực có tính chất giao hoán);
- 3) $a.(b+c) = a.b + a.c$ (tích thực phân phối đối với phép cộng);
- 4) $(\alpha a).b = \alpha(a.b) = a.(\alpha b)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- 5) $a.b = 0$ khi và chỉ khi $OA \perp OB$, với A có tọa độ a , B có tọa độ b .
- 6) $(az).(bz) = |z|^2(a.b)$.

Mệnh đề 2.1.26. Giả sử $A(a), B(b), C(c), D(d)$ là bốn điểm phân biệt.

Khi đó các khẳng định dưới đây là tương đương:

- 1) $AB \perp CD$;
- 2) $(b-a)(c-d) = 0$;
- 3) $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}^*$ (hoặc là $\operatorname{Re} \left(\frac{b-a}{d-c} \right) = 0$).

Mệnh đề Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là gốc tọa độ trong mặt phẳng phức. Nếu a, b, c là tọa độ của A, B, C thì trục tâm H có tọa độ là $h = a + b + c$.

Bài toán 1 Cho $ABCD$ là các đỉnh của một tứ giác. Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Khi và chỉ khi $AC \perp BD$.

Giải Sử dụng tính chất tích thực của số phức ta có

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

khi và chỉ khi

$$(b-a).(b-a) + (d-c).(d-c) = (c-b).(c-b) + (a-d).(a-d)$$

$$\Leftrightarrow a.b + c.d = b.c + d.a$$

$$\Leftrightarrow (c-a).(d-b) = 0.$$

Tương đương với $AC \perp BD$. Điều phải chứng minh.

Bài toán 2 Cho M, N, P, Q, R, S là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA của một lục giác. Chứng minh rằng

$$RN^2 = MQ^2 + PS^2$$

khi và chỉ khi $MQ \perp PS$.

Giải Gọi a, b, c, d, e, f là tọa độ các đỉnh của lục giác. Các điểm M, N, P, Q, R, S có tọa độ là

$$\begin{aligned} m &= \frac{a+b}{2}, & n &= \frac{b+c}{2}, & p &= \frac{c+d}{2}, \\ q &= \frac{d+e}{2}, & r &= \frac{e+f}{2}, & s &= \frac{f+a}{2} \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất tích thực của số phức ta có

$$\begin{aligned} & (e+f-b-c) \cdot (+f-b-c) \\ &= (d+e-a-b) \cdot (d+e-a-b) + (f+a-c-d) \cdot (f+a-c-d) \end{aligned}$$

hay

$$(d+e-a-b) \cdot (f+a-c-d) = 0$$

Vì thế $MQ \perp PS$, đpcm.

Bài toán 3 Cho $A_1A_2...A_n$ là một đa giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Chứng minh rằng mọi điểm M trong mặt phẳng ta đều có hệ thức

$$\sum_{k=1}^n MA_k^2 = n(OM^2 + R^2).$$

Giải Xét mặt phẳng phức với O là gốc và $R\varepsilon_k$ là tọa độ đỉnh A_k , với ε_k là các căn bậc n của đơn vị. Lấy m là tọa độ điểm M
Sử dụng các tính chất tích thực của các số phức ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n MA_k^2 &= \sum_{k=1}^n (m - R\varepsilon_k) \cdot (m - R\varepsilon_k) \\
&= \sum_{k=1}^n (m \cdot m - 2R\varepsilon_k \cdot m + R^2\varepsilon_k \cdot \varepsilon_k) \\
&= n|m|^2 - 2R \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right) \cdot m + R^2 \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k|^2 \\
&= n \cdot OM^2 + nR^2 = n(OM^2 + R^2), \text{ vì } \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = 0.
\end{aligned}$$

Chú ý Nếu M nằm trên đường tròn ngoại tiếp đa giác thì

$$\sum_{k=1}^n MA_k^2 = 2nR^2$$

Bài toán 4 Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , gọi D là trung điểm của đoạn thẳng AB , và E là trọng tâm tam giác ACD .

Chứng minh rằng CD và OE vuông góc khi và chỉ khi $AB = AC$.

Giải Lấy O là gốc tọa độ của mặt phẳng phức và a, b, c, d, e là tọa độ các điểm A, B, C, D, E . Khi đó

$$d = \frac{a+b}{2}, \quad e = \frac{a+c+d}{3} = \frac{3a+b+2c}{3}.$$

Sử dụng tích thực của các số phức, nếu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b} = c \cdot \bar{c} = R^2$

Đường thẳng CD và OE vuông góc khi và chỉ khi $(d - c) \cdot \bar{e} = 0$ vì thế

$$\begin{aligned}
&(a + b - 2c) \cdot (3a + b + 2c) = 0. \\
\Leftrightarrow &3a \cdot a + a \cdot b + 2a \cdot c + 3a \cdot b + b \cdot b + 2b \cdot c - 6a \cdot c - 2b \cdot c - 4c \cdot c = 0 \\
\Leftrightarrow &a \cdot b = a \cdot c \quad (1)
\end{aligned}$$

Mặt khác, $AB = AC$ tương đương với

$$\begin{aligned}
&|b - a|^2 = |c - a|^2 \\
\Leftrightarrow &(b - a) \cdot (b - a) = (c - a) \cdot (c - a) \\
\Leftrightarrow &b \cdot b - a \cdot b - a \cdot b + a \cdot a = c \cdot c - a \cdot c - a \cdot c + a \cdot a \\
\Leftrightarrow &a \cdot b = a \cdot c \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) thấy rằng CD vuông góc với OE khi và chỉ khi $AB = AC$.

Bài 5 Cho E, F, G, H là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng đường thẳng AB và CD vuông góc khi và chỉ khi

$$BC^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2).$$

Giải Kí hiệu chữ thương là tọa độ của các điểm chữ hoa tương ứng. Ta có

$$e = \frac{a+b}{2}, \quad f = \frac{b+c}{2}, \quad g = \frac{c+d}{2}, \quad h = \frac{d+a}{2}.$$

Sử dụng tích thực của số phức, hệ thức

$$BC^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2).$$

trở thành

$$\begin{aligned} & (c-b) \cdot (c-b) + (d-a) \cdot (d-a) = \\ &= \frac{1}{2}(c+d-a-b) \cdot (c+d-a-b) + \frac{1}{2}(a+d-b-c) \cdot (a+d-b-c) \\ &\Leftrightarrow c.c + b.b + d.d + a.a - 2b.c - 2a.d = a.a + b.b + c.c + d.d - 2a.c - 2b.d \\ &\Leftrightarrow a.d + b.c = a.c + b.d \end{aligned}$$

Hệ thức trên trở thành $(a-b) \cdot (d-c) = 0$ khi và chỉ khi đường thẳng AB và CD vuông góc.

2.1.7 Bài tập

Bài 1 Cho $ABCD$ là một hình vuông cố định. Xét tất cả các hình vuông $PQRS$ sao cho P, Q nằm trên hai cạnh khác nhau và Q nằm trên một đường chéo của hình vuông $ABCD$. Tìm tất cả các vị trí có thể được của S .

Bài 2 Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là tâm các hình vuông với các cạnh AB, BC, CD, DA dựng ra phía ngoài tứ giác. Chứng minh rằng:

- Trung điểm các đường chéo của hai tứ giác $ABCD, EFGH$ là đỉnh của một hình vuông.
- EF và GH vuông góc và bằng nhau.

Bài 3 Trên đường tròn ω cho trước hai điểm A, B cố định và một điểm M di động trên ω . Trên tia MA lấy điểm P sao cho $MP = MB$. Tìm quỹ tích điểm P .

Bài 4 Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC , dựng ra phía ngoài ba tam giác đồng dạng ABC_1, A_1BC, AB_1C . Chứng minh rằng trọng tâm hai tam giác $ABC, A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm. Hỏi kết luận bài toán còn đúng không nếu các tam giác ABC_1, A_1BC, AB_1C dựng vào phía trong tam giác ABC ?

Bài 5 Xét điểm M trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , không trùng với các đỉnh của tam giác. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của các tam giác MBC, MCA, MAB là đỉnh của một tam giác đồng dạng với tam giác ABC .

Bài 6 Các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC được chia thành ba đoạn bằng nhau bởi các điểm $M, N; P, Q$ và R, S . Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác đều MND, PQE, RSF . Chứng minh rằng DEF là tam giác đều.

Bài 7 Về phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABEF$ và $ADGH$ lần lượt có tâm là O và Q, M là trung điểm của đoạn BD . Chứng minh rằng OMQ là tam giác vuông cân tại M .

Bài 8 Về phía ngoài tứ giác lồi $ABCD$, ta dựng các tam giác đều ABM, CDP ; về phía trong tam giác, ta dựng các tam giác đều BCN, ADQ . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài 9 Cho ABC là ba đỉnh liên tiếp của một n giác đều, M là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp n -giác đều sao cho B và M nằm khác phía đối với AC . Chứng minh rằng: $MB + MC = 2MB \cos \frac{\pi}{n}$.

Bài 10 Cho P là một điểm bất kì nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho đại lượng $:PA^n + PB^n + PC^n + PD^n$ không phụ thuộc vào vị trí của P .

Bài 11 Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng:

a) $a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 \geq abc$;

b) $a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB \geq abc$.

Bài 12 Cho tam giác nhọn ABC có cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. P là

một điểm bất kì trong mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng:

$$a.PB.PC + b.PC.PA + c.PA.PB = abc$$

khi và chỉ khi P trùng với trực tâm của tam giác ABC .

Bài 13 Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi R, R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, GBC, GCA, GAB .

Chứng minh rằng $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$.

2.2 Số phức và các bài toán đại số, lượng giác

2.2.1 Các bài toán lượng giác

Bài toán 1 Chứng minh rằng

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Giải: Đặt $z = \cos \frac{\pi}{11} + i \sin \frac{\pi}{11}$ ta có

$$z + z^3 + z^5 + z^7 + z^9 = \frac{z^{11} - z}{z^2 - 1} = \frac{-1 - z}{z^2 - 1} = \frac{1}{1 - z}.$$

Ta chứng minh kết quả sau.

Nếu $z = \cos t + i \sin t$ và $z \neq 1$ thì $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - z} \right) = \frac{1}{2}$

Thật vậy

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - z} &= \frac{1}{1 - (\cos t + i \sin t)} = \frac{1}{(1 - \cos t) - i \sin t} \\ &= \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2} - 2i \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2} (\sin \frac{t}{2} - i \cos \frac{t}{2})} \\ &= \frac{\sin \frac{t}{2} + i \cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + i \frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Suy ra $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - z} \right) = \frac{1}{2}$.

Bài toán 2 Tính tích

$$P = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$$

Giải: Đặt $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ ta có $z^9 = -1$ và $\bar{z} = \cos 20^\circ - i \sin 20^\circ$
vì

$$\cos 20^\circ = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \cos 40^\circ = \frac{z^4 + 1}{2z^2}, \quad \cos 80^\circ = \frac{z^8 + 1}{2z^4}.$$

nên

$$\begin{aligned} P &= \frac{(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{8z^7} = \frac{(z^2 - 1)(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{8z^7(z^2 - 1)} \\ &= \frac{z^{16} - 1}{8(z^9 - z^7)} = \frac{-z^7 - 1}{8(-1 - z^7)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Cách giải 2

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \cdot P &= \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \\ &= \frac{1}{4} \sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \sin 160^\circ = \frac{1}{8} \sin 20^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{1}{8}.$$

Bài toán 3 Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\sin x + \sin y + \sin z = 0$
và $\cos x + \cos y + \cos z = 0$.

Chứng minh rằng : $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ và $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$

Giải: Đặt $z_1 = \cos x + i \sin x$, $z_2 = \cos y + i \sin y$, $z_3 = \cos z + i \sin z$, ta
có $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Từ đây

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) \\ &= -2z_1z_2z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) = -2z_1z_2z_3 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= -2z_1z_2z_3 (\overline{z_1 + z_2 + z_3}) = 0 \end{aligned}$$

Suy ra $(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) + i(\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z) = 0$.

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 4 Chứng minh rằng

$$\cos^2 10^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 70^\circ = \frac{3}{2}.$$

Giải Đặt $z = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$ ta có $z^9 = i$

$$\cos 10^\circ = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \cos 50^\circ = \frac{z^{10} + 1}{2z^5}, \quad \cos 70^\circ = \frac{z^{14} + 1}{2z^7}.$$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{z^2 + 1}{2z}\right)^2 + \left(\frac{z^{10} + 1}{2z^5}\right)^2 + \left(\frac{z^{14} + 1}{2z^7}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

hay

$$\begin{aligned} z^{16} + 2z^{14} + z^{12} + z^{24} + 2z^{14} + z^4 + z^{28} + 2z^{14} + 1 &= 6z^{14} \\ \Leftrightarrow z^{28} + z^{24} + z^{16} + z^{12} + z^4 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Sử dụng $z^8 = -1$ ta thu được

$$\begin{aligned} z^{16} + z^{12} - z^{10} - z^6 + z^4 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z^4 + 1)(z^{12} - z^6 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(z^4 + 1)(z^{18} + 1)}{z^6 + 1} &= 0. \end{aligned}$$

Khẳng định được chứng minh.

Bài toán 5 Giải phương trình

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1.$$

Giải Đặt $z = \cos x + i \sin x$ ta có

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \cos 2x = \frac{z^4 + 1}{2z^2}, \quad \cos 3x = \frac{z^6 + 1}{2z^3}.$$

phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
& \frac{z^2+1}{2z} + \frac{z^4+1}{2z^2} - \frac{z^6+1}{2z^3} = 1 \\
& \Leftrightarrow z^4 + z^2 + z^5 + z - z^6 - 1 - 2z^3 = 0 \\
& \Leftrightarrow (z^6 - z^5 - z^4 + z^3) + (z^3 - z^2 - z + 1) = 0 \\
& \Leftrightarrow (z^3 + 1)(z^3 - z^2 - z + 1) = 0 \\
& \Leftrightarrow (z^3 + 1)(z - 1)^2(z + 1) = 0
\end{aligned}$$

vì $z = 1$, $z = -1$, $z^3 = -1$ nên

$$x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad x \in \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad x \in \left\{ \frac{\pi + 2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

hợp các nghiệm ta có

$$x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad x \in \left\{ \frac{2k+1}{3}\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Bài toán 6 Tính tổng $S = \sum_{k=1}^n q^k \cdot \cos kx$ và $T = \sum_{k=1}^n q^k \cdot \sin kx$.

Giải Ta có

$$\begin{aligned}
1 + S + iT &= \sum_{k=1}^n q^k (\cos kx + i \sin kx) = \sum_{k=1}^n q^k (\cos x + i \sin x)^k \\
&= \frac{1 - q^{n+1} (\cos x + i \sin x)^{n+1}}{1 - q \cos x - iq \sin x} \\
&= \frac{1 - q^{n+1} [\cos (n+1)x + i \sin (n+1)x]}{1 - q \cos x - iq \sin x} \\
&= \frac{[1 - q^{n+1} \cos (n+1)x - iq^{n+1} \sin (n+1)x] [1 - q \cos x + iq \sin x]}{q^2 - 2q \cos x + 1} .
\end{aligned}$$

vì thế

$$\begin{aligned}
1 + S &= \frac{q^{n+2} \cos nx - q^{n+1} \cos (n+1)x - q \cos x + 1}{q^2 - 2q \cos x + 1} \\
T &= \frac{q^{n+2} \sin nx - q^{n+1} \sin (n+1)x + q \sin x}{q^2 - 2q \cos x + 1} .
\end{aligned}$$

Chú ý Khi $q = 1$ ta có hệ thức quen thuộc

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{và} \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos kx &= \frac{\cos nx - \cos (n+1)x - (1 - \cos x)}{2(1 - \cos x)} \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{(2n+1)x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin kx &= \frac{\sin nx - \sin (n+1)x + \sin x}{2(1 - \cos x)} \\ &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Bài toán 7 Cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{10}$, được xếp theo thứ tự và cách đều nhau trên đường tròn bán kính R . Chứng minh rằng $A_1 A_4 - A_1 A_2 = R$.

Giải Đặt $z = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$ không mất tính tổng quát ta cho $R = 1$.
Ta cần chỉ ra $2 \sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = 1$.

Trong trường hợp tổng quát $z = \cos a + i \sin a$ thì $\sin a = \frac{z^2 - 1}{2iz}$. Đẳng thức cần chứng minh trên trở thành

$$2 \frac{z^6 - 1}{2iz^3} - \frac{z^2 - 1}{2iz} = 1 \Leftrightarrow z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 2iz^3$$

. Vì $z^5 = i$ nên $z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1 = 0$. Đẳng thức này đúng vì $(z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1)(z^2 + 1) = z^{10} + 1 = 0$ và $z^2 + 1 \neq 0$

Bài toán 8 Chứng minh rằng

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

(5th IMO)

Giải Đặt $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ ta có $z^7 + 1 = 0$ Do $z \neq 1$ và $z^7 + 1 = (z + 1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$ nên $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - z + 1) = \frac{1}{1 - z^3}$.

Ta có $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \operatorname{Re}(z^3 - z^2 + z)$.

Ta chứng minh kết quả sau.

Nếu $z = \cos t + i \sin t$ và $z \neq 1$ thì $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - z}\right) = \frac{1}{2}$

Thật vậy

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - z} &= \frac{1}{1 - (\cos t + i \sin t)} = \frac{1}{(1 - \cos t) - i \sin t} \\ &= \frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2} - 2i \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2} (\sin \frac{t}{2} - i \cos \frac{t}{2})} \\ &= \frac{\sin \frac{t}{2} + i \cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + i \frac{\cos \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Suy ra $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - z}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài toán 9 Chứng minh rằng: trung bình cộng của các số $k \sin k^\circ$ ($k = 2, 4, \dots, 180$) là $\cot 1^\circ$.

(1996 USA Mathematical Olympiad)

Giải: Đặt $z = \cos t + i \sin t$ ta có đẳng thức

$$\begin{aligned} z + 2z^2 + \dots + nz^n &= (z + \dots + z^n) + (z^2 + \dots + z^n) + \dots + z^n \\ &= \frac{1}{z - 1} [(z^{n+1} - z) + (z^{n+1} - z^2) + \dots + (z^{n+1} - z^n)] \\ &= \frac{nz^{n+1}}{z - 1} - \frac{z^{n+1} - z}{(z - 1)^2}, \end{aligned}$$

từ đây ta thu đc hai đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n k \cos kt = \frac{(n+1) \sin \frac{(2n+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1 - \cos(n+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}}. \quad (1)$$

và

$$\sum_{k=1}^n k \sin kt = \frac{\sin(n+1)t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{n \cos \frac{(2n+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}}. \quad (2)$$

Sử dụng hệ thức (2) ta thu đc

$$\begin{aligned} 2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ &= 2 (\sin 2^\circ + 2 \sin 2.2^\circ + \dots + 89 \sin 89.2^\circ) \\ &= 2 \left(\frac{\sin 90.2^\circ}{4 \sin^2 1^\circ} - \frac{90 \cos 179^\circ}{2 \sin 1^\circ} \right) = -\frac{90 \cos 179^\circ}{\sin 1^\circ} = 90 \cot 1^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{90} (2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 178 \sin 178^\circ + 180 \sin 180^\circ) = \cot 1^\circ.$$

Khẳng định được chứng minh.

Bài toán 10 Cho n là số nguyên dương. Tìm số thực a_o và a_{kl} , $k, l = \overline{1, n}$, $k > l$ thỏa mãn

$$\frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} = a_0 + \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} a_{kl} \cos 2(k-l)x;$$

với mọi số thực $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Giải: Sử dụng đồng nhất thức

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{j=1}^n \cos 2jx = \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{\sin x} \\ S_2 &= \sum_{j=1}^n \sin 2jx = \frac{\sin nx \sin(n+1)x}{\sin x} \end{aligned}$$

Ta thu được

$$S_1^2 + S_2^2 = \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2.$$

mặt khác

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 &= (\cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2nx)^2 + \\ &\quad (\sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx)^2 \\ &= n + \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} (\cos 2kx \cos 2lx + \sin 2kx \sin 2lx) . \\ &= n + \sum_{1 \leq l \leq k \leq n} \cos 2(k-l)x; \end{aligned}$$

như vậy $a_0 = n$, $a_{kl} = 2$, $1 \leq l < k \leq n$.

Bài toán 11 Tính các tổng sau với $\theta = 30^\circ$

$$\begin{aligned} i) & 1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos(2\theta)}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos(3\theta)}{\cos^3 \theta} + \dots + \frac{\cos((n-1)\theta)}{\cos^{n-1} \theta}; \\ ii) & \cos \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \cos(2\theta) + \cos^3 \theta \cos(3\theta) + \dots + \cos^n \theta \cos(n\theta). \end{aligned}$$

Bài toán 12 Chứng minh rằng

$$1 + \cos^{2n} \left(\frac{\pi}{n} \right) + \cos^{2n} \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \cos^{2n} \left(\frac{(n-1)\pi}{n} \right) = n \cdot 4^{-n} (2 + C_{2n}^n)$$

với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

Bài toán 13 Cho số nguyên $p \geq 0$. Tìm các số thực $a_0, a_1, \dots, a_p$ với $a_p \neq 0$ sao cho

$$\cos 2p\alpha = a_0 + a_1 \sin^2 \alpha + \dots + a_p (\sin^2 \alpha)^p$$

với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Các bài toán đại số

Bài toán 1 (Việt Nam 1996) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Giải Nhận thấy $x > 0, y > 0$. Đặt $\sqrt{x} = u, \sqrt{y} = v$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ v \left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \frac{1}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} & (1) \\ v - \frac{1}{u^2 + v^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & (2) \end{cases}$$

lấy phương trình thứ (2) nhân với i sau đó cộng với phương trình (1) ta

$$\text{có } u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + i \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \quad (*)$$

Đặt $z = u + iv$ thì $u^2 + v^2 = |z|^2$. Khi đó phương trình (*) trở thành

$$\begin{aligned} z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} + i \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} &= \frac{2}{\sqrt{3}} + i \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ \Leftrightarrow z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + i \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \right) z + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}} + i \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2} \right).$$

Hệ đã cho có hai nghiệm

$$(x, y) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}} \right)^2, \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2} \right)^2 \right) = \left(\frac{11}{21} \pm \frac{4}{3\sqrt{7}}, \frac{22}{7} \pm \frac{8}{\sqrt{7}} \right).$$

Bài toán 2 Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Giải

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = -\sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2(iy) + i^3y^3 = -i\sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x^3 + 3x(iy)^2 = 1 \\ 3x^2(iy) + (iy)^3 = -i\sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (x + iy)^3 = 1 - i\sqrt{3} & (1) \\ 3x^2(iy) + (iy)^3 = -i\sqrt{3} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $z = x + iy$ từ (1) ta có $z^3 = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$

Suy ra

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{-\pi + 6k\pi}{9} + i \sin \frac{-\pi + 6k\pi}{9} \right) \text{ với } k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Từ đây ta có các nghiệm của hệ phương trình đã cho là

$$(x, y) = \left(\sqrt[3]{2} \cos \frac{-\pi + 6k\pi}{9}, \sqrt[3]{2} \sin \frac{-\pi + 6k\pi}{9} \right)$$

với $k = 0, 1, 2$.

2.2.3 Bài tập

Bài 1 Chứng minh rằng :

$$\begin{aligned} a) \quad & \cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \dots + \cos^2 n\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha \cos n\alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{n-1}{2} ; \\ b) \quad & \sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \dots + \sin^2 n\alpha = \frac{n+1}{2} - \frac{\sin(n+1)\alpha \cos n\alpha}{2 \sin \alpha} ; \end{aligned}$$

Bài 2 Chứng minh rằng :

$$\begin{aligned} a) \quad & \cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \cos \frac{6\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2} ; \\ b) \quad & \cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + 2}{2} ; \\ c) \quad & \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2}. \end{aligned}$$

Bài 3 Chứng minh rằng với mọi n chẵn ($n = 2m$), ta đều có:

$$\begin{aligned} \cos n\phi &= \\ \cos^n \phi - C_n^2 \cos^{n-2} \phi \sin^2 \phi + C_n^4 \cos^{n-4} \phi \sin^4 \phi - \dots + (-1)^m C_n^n \sin^n \phi. \end{aligned}$$

Bài 4 Chứng minh rằng :

$$a) \sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \dots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n};$$

$$b) \cos \frac{\pi}{2n+1} \cos \frac{2\pi}{2n+1} \dots \cos \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n};$$

$$c) \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}};$$

$$d) \cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{2\pi}{2n} \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Bài 5 Giải phương trình

$$a) x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0;$$

$$b) x^5 + \alpha x^4 + \alpha^2 x^3 + \alpha^3 x^2 + \alpha^4 x + \alpha^5 = 0, 0 \neq \alpha \in \mathbb{C}.$$

Bài 6 Chứng minh rằng với mọi n lẻ ($n = 2m + 1$), ta đều có:

$$\sin n\phi =$$

$$C_n^1 \cos^{n-1} \phi \sin \phi - C_n^3 \cos^{n-3} \phi \sin^3 \phi + \dots + (-1)^{m-1} C_n^{n-1} \sin^{n-3} \phi \cos^3 \phi.$$

Bài 7 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

Bài 8 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x} \left(1 - \frac{12}{3x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{y} \left(1 + \frac{12}{3x+y} \right) = 6. \end{cases}$$

2.3 Số phức và các bài toán tổ hợp

Bài toán 1 Tính tổng

$$\sum_{k=0}^{3n-1} (-1)^k C_{6n}^{2k+1} 3^k.$$

Giải Ta có

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{3n-1} (-1)^k C_{6n}^{2k+1} 3^k &= \sum_{k=0}^{3n-1} C_{6n}^{2k+1} (-3)^k = \sum_{k=0}^{3n-1} C_{6n}^{2k+1} (i\sqrt{3})^{2k} \\
 &= \frac{1}{i\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{3n-1} C_{6n}^{2k+1} (i\sqrt{3})^{2k+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \operatorname{Im} (1 + i\sqrt{3})^{6n} \\
 &= \frac{1}{i\sqrt{3}} \operatorname{Im} \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^{6n} \\
 &= \frac{1}{i\sqrt{3}} [2^{6n} (\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n)] = 0.
 \end{aligned}$$

Bài toán 2 Tính tổng

$$S_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos k\alpha$$

với $\alpha \in [0, \pi]$.

Giải Ta có Đặt $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ và $T_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin k\alpha$. Ta có

$$\begin{aligned}
 S_n + iT_n &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos k\alpha + i \sin k\alpha) = \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \alpha + i \sin \alpha)^k \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k z^k = (1+z)^n. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Dạng tọa độ cực của số phức $1+z$ là

$$\begin{aligned}
 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\
 &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Vì $\alpha \in [0, \pi]$ đẳng thức (1) trở thành

$$S_n + iT_n = \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right).$$

Từ đây ta thu được

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n \cos \frac{n\alpha}{2} \\
 T_n &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n \sin \frac{n\alpha}{2}.
 \end{aligned}$$

Bàitoán 3 Chứng minh đẳng thức

$$(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n.$$

Giải Đặt $x_n = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$ và $y_n = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots$ ta có $(1+i)^n = x_n + iy_n$

Lấy modun hai vế ta thu được $|x_n + iy_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = 2^n$

Điều này tương đương với $x_n^2 + y_n^2 = 2^n$. Khẳng định được chứng minh.

Chú ý Ta có thể xây dựng công thức tính x_n, y_n như sau

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

Suy ra $x_n = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$ và $y_n = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$.

Bàitoán 4 Chứng minh đẳng thức

$$C_n^m + C_n^{m+p} + C_n^{m+2p} + \dots = \frac{2^n}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\cos \frac{k\pi}{p} \right)^n \cos \frac{(n-2m)k\pi}{p}.$$

Giải Gọi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$ là các căn bậc p của đơn vị. Khi đó

$$\sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon_k^{-m} (1 + \varepsilon_k)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (\varepsilon_0^{k-m} + \dots + \varepsilon_{p-1}^{k-m}). \quad (1)$$

Ta có kết quả quen thuộc sau:

$$\varepsilon_0^{k-m} + \dots + \varepsilon_{p-1}^{k-m} = \begin{cases} p, & p \mid (k-m) \\ 0, & p \nmid (k-m) \end{cases} \quad (2)$$

Xét

$$\begin{aligned} & \varepsilon_k^{-m} (1 + \varepsilon_k)^n \\ &= \left(\cos \frac{2mk\pi}{p} - i \sin \frac{2mk\pi}{p} \right) \left(2 \cos \frac{k\pi}{p} \right)^n \left(\cos \frac{2nk\pi}{p} + i \sin \frac{2nk\pi}{p} \right) \\ &= 2^n \left(\cos \frac{k\pi}{p} \right)^n \left(\cos \frac{(n-2m)k\pi}{p} + i \sin \frac{(n-2m)k\pi}{p} \right) \end{aligned}$$

Sử dụng (1) và (2) dễ dàng suy ra hệ thức cần chứng minh.

Chú ý: Từ trên ta có hệ thức lượng giác thú vị sau :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left(\cos \frac{k\pi}{p} \right)^n \sin \frac{(n-2m)k\pi}{p} = 0$$

Bài toán 5 Cho a_n, b_n, c_n là các số nguyên với

$$a_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots ;$$

$$b_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots ;$$

$$c_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots ;$$

Chứng minh rằng

$$1) a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n = 2^n;$$

$$2) a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - c_na_n = 1.$$

3) Hai trong ba số nguyên a_n, b_n, c_n bằng nhau còn số thứ ba bằng 1

Giải 1) Gọi ε là căn bậc ba của đơn vị và khác 1. Ta có

$$(1+1)^n = a_n + b_n + c_n, \quad (1+\varepsilon)^n = a_n + b_n\varepsilon + c_n\varepsilon^2, \quad (1+\varepsilon^2)^n = a_n + b_n\varepsilon^2 + c_n\varepsilon$$

vì thế

$$\begin{aligned} a_n^3 + b_n^3 + c_n^3 - 3a_nb_nc_n &= (a_n + b_n + c_n) (a_n + b_n\varepsilon + c_n\varepsilon^2) (a_n + b_n\varepsilon^2 + c_n\varepsilon) \\ &= 2^n (1+\varepsilon)^n (1+\varepsilon^2)^n = 2^n (-\varepsilon^2)^n (\varepsilon)^n = 2^n \end{aligned}$$

2) Sử dụng đẳng thức quen thuộc

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

từ hệ thức trên ta có

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - c_na_n = 1$$

$$3) a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_nb_n - b_nc_n - c_na_n = 1$$

$$\Leftrightarrow (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - a_n)^2 = 2$$

từ đẳng thức này suy ra: hai trong ba số a_n, b_n, c_n bằng nhau và số thứ ba bằng 1.

Chú ý Từ bài toán 5 ta thu được

$$a_n = \frac{1}{3} \left[2^n + \cos \frac{n\pi}{3} + (-1)^n \cos \frac{2n\pi}{3} \right] = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$b_n = \frac{1}{3} \left[2^n + \cos \frac{(n-2)\pi}{3} + (-1)^n \cos \frac{(2n-4)\pi}{3} \right] = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-2)\pi}{3} \right)$$

$$c_n = \frac{1}{3} \left[2^n + \cos \frac{(n-4)\pi}{3} + (-1)^n \cos \frac{(2n-8)\pi}{3} \right] = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{(n-4)\pi}{3} \right).$$

Dễ thấy rằng

$a_n = b_n$ khi và chỉ khi $n \equiv 1 \pmod{3}$;

$b_n = c_n$ khi và chỉ khi $n \equiv 2 \pmod{3}$;

$c_n = a_n$ khi và chỉ khi $n \equiv 3 \pmod{3}$.

Bài toán 6 Có bao nhiêu số có n chữ số chọn từ tập hợp $\{2, 3, 7, 9\}$ và chia hết cho 3?

(Romanian Mathematical Regional Contest “Trian Lalescu”)

Giải: Gọi x_n, y_n, z_n lần lượt là số các số nguyên có n chữ số chọn từ tập hợp $\{2, 3, 7, 9\}$ và lần lượt đồng dư với 0, 1, 2 theo modun 3. Ta cần tìm các giá trị x_n .

Đặt $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, ta thấy rằng $x_n + y_n + z_n = 4^n$ và

$$\begin{aligned} x_n + \varepsilon y_n + \varepsilon^2 z_n &= \sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=n} \varepsilon^{2j_1+3j_2+7j_3+9j_4} \\ &= (\varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9)^n = 1. \end{aligned}$$

hay $x_n - 1 + \varepsilon y_n + \varepsilon^2 z_n = 0$. Ta thu đc $x_n - 1 = y_n = z_n = k$. Khi đó $3k = x_n + y_n + z_n - 1 = 4^n - 1$ dẫn đến $k = \frac{1}{3}(4^n - 1)$. Suy ra $x_n = k + 1 = \frac{1}{3}(4^n + 2)$.

Bài toán 7 Cho số nguyên tố n và các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Gọi $f(k)$ là số các bộ m số $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq c_i \leq a_i$ và $c_1 + c_2 + \dots + c_m \equiv k \pmod{m}$. Chứng minh rằng $f(0) = f(1) = \dots = f(n-1)$ khi và chỉ khi $n \nmid a_j$ với j nào đó thuộc tập $\{1, 2, \dots, m\}$.

Giải Xét $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Để ý rằng đẳng thức sau luôn đúng

$$\prod_{k=1}^n (X + X^2 + \dots + X^{a_k}) = \prod_{1 \leq c_k \leq a_k} X^{c_1 + \dots + c_n}$$

và

$$f(0) + f(1)\alpha + \dots + f(n-1)\alpha^{n-1} = \prod_{1 \leq c_k \leq a_k} X^{c_1 + \dots + c_n} = \prod_{k=1}^m (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{a_k})$$

suy ra $f(0) = f(1) = \dots = f(n-1)$ khi và chỉ khi $f(0) + f(1)\alpha + \dots + f(n-1)\alpha^{n-1} = 0$. Điều này tương đương với $\prod_{k=1}^m (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{a_k}) = 0$ tức là $\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{a_k} = 0$ với j nào đó thuộc tập $\{1, 2, \dots, m\}$

Bài toán 8 Cho số nguyên tố n và các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_m$. Gọi $f(k)$ là số các bộ m số $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ thỏa mãn điều kiện $0 \leq c_i \leq a_i$ và $c_1 + c_2 + \dots + c_m \equiv k \pmod{m}$. Chứng minh rằng $f(0) = f(1) = \dots = f(n-1)$ khi và chỉ khi $n | a_j$ với j nào đó thuộc tập $\{1, 2, \dots, m\}$.

(36th IMO)

Giải Trường hợp $p = 2$ là tầm thường. Xét $p \geq 3$ và $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Kí hiệu x_j là số các tập con với tính chất $|B| = p$ và $m(B) \equiv j \pmod{p}$. Khi đó

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_j \varepsilon^j = \sum_{B \subset A, |B|=p} \varepsilon^{m(B)} = \sum_{1 \leq c_1 < \dots < c_p \leq 2p} \varepsilon^{c_1 + c_2 + \dots + c_p}$$

tổng trên chính là hệ số của X^p trong đa thức $(X + \varepsilon)(X + \varepsilon^2) \dots (X + \varepsilon^{2p})$

Từ hệ thức quen thuộc $X^p - 1 = (X - 1)(X - \varepsilon) \dots (X - \varepsilon^{p-1})$ ta thu được $(X + \varepsilon)(X + \varepsilon^2) \dots (X + \varepsilon^{2p}) = (X^p + 1)^2$, vì thế hệ số của X^p là 2. Suy ra $\sum_{j=0}^{p-1} x_j \varepsilon^j = 2 \Leftrightarrow x_0 - 2 + x_1 \varepsilon + \dots + x_{p-1} \varepsilon^{p-1} = 0$ ta có $x_0 - 2 = x_1 = \dots = x_{p-1} = k$. Dẫn đến $pk = x_0 + x_1 + \dots + x_{p-1} - 2 = C_{2p}^p - 2$ hay $k = \frac{1}{p} (C_{2p}^p - 2)$

Kết quả bài toán đã cho là $x_0 = 2 + k = 2 + \frac{1}{p} (C_{2p}^p - 2)$

Bài toán 9 Chứng minh rằng số $\sum_{k=0}^n (C_{2n+1}^{2k+1}) 2^{3k}$ không chia hết cho 5 với mọi số nguyên $n \geq 0$.

Bài toán 10 Tính tổng

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 \cos kt$$

với $t \in [0, \pi]$

Bài toán 11 Chứng minh đẳng thức sau

$$1) C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{4} \left(2^n + 2^{\frac{n}{2}+1} + \cos \frac{n\pi}{4} \right).$$

(Romanian Mathematicanl Olympiad –Second Round 1981)

$$2) C_n^0 + C_n^5 + C_n^{10} + \dots = \frac{1}{5} \left[2^n + \frac{(\sqrt{5} + 1)^n}{2^{n-1}} \cos \frac{n\pi}{5} + \frac{(\sqrt{5} - 1)^n}{2^{n-1}} \cos \frac{2n\pi}{5} \right]$$

Bài 12 Cho các số nguyên A_n, B_n, C_n xác định như sau

$$A_n = C_n^0 - C_n^3 + C_n^6 - \dots,$$

$$B_n = -C_n^1 + C_n^4 - C_n^7 + \dots,$$

$$C_n = C_n^2 - C_n^5 + C_n^8 - \dots.$$

Chứng minh các đẳng thức sau

$$1) A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 - A_n B_n - B_n C_n - C_n A_n = 3^n;$$

$$2) A_n^2 + A_n B_n + B_n^2 = 3^{n-1}.$$

Kết luận

Luận văn đã trình bày hướng tiếp cận mới một số dạng toán sơ cấp bằng công cụ số phức. Các kết quả chính của luận văn:

- Sử dụng số phức để giải toán hình học phẳng.
- Sử dụng số phức để giải một số lớp toán đại số, lượng giác.
- Sử dụng số phức để giải một số bài toán tổ hợp.

Hướng nghiên cứu tiếp theo của luận văn là tiếp tục áp dụng số phức để giải các bài toán: tô màu, số học, đa thức, phương trình hàm.

Tài liệu tham khảo

- [1] Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Complex numbers from A to...Z*, Birkhauser, 2006.
- [2] Bêchanu, *Internatoonal Mathematical Olympiads 1959 2000. Proplem. Solution. Results*, Academic Distri Center, Free, USA, 2001
- [3] Đoàn Quỳnh, *Số phức với Hình học phẳng*, Nhà xuất bản giáo dục, 1998.
- [4] Nguyễn Huy Doan (Chủ Biên), *Giải tích 12*, Nhà xuất bản giáo dục, 2008.
- [5] Nguyễn Thủy Thanh, *Cơ sở lí thuyết hàm biến phức*, Nhà xuất bản đại học quốc gia Hà nội, 2007