

Undefined Coefficient Technique

Kỹ thuật h_u s_o không xác định
(U.C.T)

- Nguyễn Thúc Vũ Hoàng
Học sinh chuyên Toán-Tin-THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Niên khóa 2006-2008
Thị xã Đông Hà-Tỉnh Quảng Trị
- Võ Quốc Bá Cẩn
Sinh viên K32 Khoa Đại học Đ_h c-Đ_h i h_u c Y D_h c C_h n Th_u -Niên Khóa 2006-2011
Thành Phố C_h n Th_u

Có bao nhiêu điều bí ẩn mà bạn chưa biết đến?! Câu trả lời là rất rất nhiều và đôi khi bạn cảm thấy bối rối, khó chịu khi không thể tìm ra một lời giải thích thỏa đáng cho bí ẩn nào đó. Nhưng bạn hãy quan niệm rằng đằng sau bất kỳ một điều gì luôn hàm chứa một ý nghĩa nhất định. Và cũng không phải ngẫu nhiên mà số lý giải lại được hình thành. Trong thế giới bất định thế này. Đôi khi bạn không thể hiểu được tại sao người ta lại có thể tìm ra một lời giải trông có vẻ “kì cục” như thế !!! Phải chăng là vận may và may mắn tìm ra được?

Câu trả lời lại một lần nữa được nhắc lại: mọi lời giải đều có số giải thích của riêng bạn thân nó. Việc tìm ra lời giải đó phải đi qua một quá trình lập luận, thử, sai và đúng. Trong chuyên đề nhỏ này chúng tôi muốn giải thích về các bài toán kỹ thuật của bạn như không kém phần hữu ích trong việc chứng minh một số đẳng thức. Nó không giúp ta giải quyết tất cả các bài toán mà chỉ giúp ta tìm ra những lời giải ngắn gọn và ấn tượng trong một lập luận nào đó. Một số bài toán tuy dễ dàng với những phương pháp nhưng lại là khó đối với kỹ thuật kia. Đây cũng là điều hiển nhiên và dễ hiểu.

Mục lục

- Phần 1. Bài toán mở đầu.
- Phần 2. Khái niệm cùng một số bài toán cơ bản.
- Phần 3. Kỹ thuật chuẩn hóa và U.C.T
- Phần 4. U.C.T và kỹ thuật phân tích các trường hợp
- Phần 5. Kỹ thuật bất đẳng thức Vornicu Schur với U.C.T
- Phần 6. Một đẳng thức đẹp thú vị
- Phần 7. Giải quyết một số bài toán mà điều kiện liên quan một thiết diện nhau
- Phần 8. U.C.T mở rộng
- Phần 9. Lời kết
- Phần 10. Bài tập áp dụng

Phần 1. Bài toán mẫu đầu

Bài toán. [Nguyễn Thúc Vũ Hoàng]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 5$$

Chứng minh. Ta sẽ dùng bất đẳng thức sau đây

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{(a-1)^2(2a^2 + 6a + 3)}{3a^2} \geq 0$$

Hiến nhiên đúng với a là số thực dương.

Sử dụng các bất đẳng thức tương tự với b và c . Ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Chúc chún ngay khi đọc lời giải cho bài toán “đón giỡn” này bạn có phần lúng túng và không hiểu tại sao lại có thể tìm ra bất đẳng thức phức tạp cách “khó hiểu” như vậy. Phải chăng là để đoán một cách “vô hướng”. Họ cũng cố gắng để nghĩ bài toán trên để có thể ra từ chính bất đẳng thức phức đó. Câu trả lời là hoàn toàn không phải. Tất cả đều đi theo 1 qui luật của nó. Các phần tiếp theo chúng tôi sẽ phân tích và một kỹ thuật phân tích giúp tìm ra các bất đẳng thức phức và mở rộng vấn đề này theo chiều hướng khá mới mẻ. Kỹ thuật này có tên là **U.C.T.**, là viết tắt của 3 chữ cái đầu của cụm từ tiếng Anh **Undefined Coefficient Technique**. Hay còn gọi là **Kỹ Thuật Hệ Số Bất Định**. Đây là một kỹ thuật cơ bản và là nền tảng quan trọng trên con đường tìm kiếm lời giải cho những bất đẳng thức khó.

Phần 2. Khái đầu cùng một số bài toán cơ bản

Chúng ta sẽ khái đầu kỹ thuật này bằng việc đưa ra cách giải thích cho việc tìm ra bất đẳng thức phức trên và nó cũng chính là cách giải thích cho các bài toán sau này của chúng ta.

Bài toán trên các biến trong câu 2 và điều kiện đầu không ràng buộc nhau điều này khiến ta nghĩ ngay sẽ tách theo từng biến để chứng minh để có được điều gì đó hợp lý hơn nếu có thể. Nhưng rõ ràng ta chỉ cần đó thôi là không đủ. Nếu ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{(a-1)(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} \geq 0$$

Rõ ràng không hoàn toàn đúng với a thực dương.

Đúng bởi vì đây bởi vì cách trên ta chỉ có sử dụng điều kiện $a + b + c = 3$.

Như vậy ta sẽ không đi theo đường lối suy nghĩ đón giỡn ban đầu nữa mà sẽ đi tìm hướng để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + ma + n \quad (1)$$

Trong đó m và n là các hằng số cần xác định.

Tương tự với biến b và c . Cộng vế theo vế ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a+b+c) + 3n = \frac{5}{3} + 3(m+n)$$

Như vậy ở đây 2 h.s. m và n phải thỏa mãn điều kiện $m+n=0 \Leftrightarrow n=-m$. Thế vào (1) được

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a-1) \quad (2)$$

Ở đây ta chỉ cần xác định h.s. duy nhất là m để bất đẳng thức (2) là đúng.

Chú ý ở bài toán này điểm cực trị đạt được tại $a=b=c=1$ nên ta cần xác định m sao cho

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left(\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} - m \right) \geq 0$$

Khi cho $a=1$ thì ta có $\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} = -\frac{2}{3}$ thì đó ta dự đoán rằng $m = -\frac{2}{3}$ để tạo

thành đ.ị. 1.000 bình phương $(a-1)^2$ trong biểu thức. Thế đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$$

Quá trình đi tìm bất đẳng thức phải đã được phân tích kĩ thuật trên. Tuy nhiên đó không phải là cách duy nhất để ta tìm ra h.s. Ta cũng có thể sử dụng tính chất của đẳng thức tuy nhiên thì mất điểm của đề thi hay sử dụng đạo hàm. Nhưng có 1 cách dự đoán trên là h.s. hữu hạn và đơn giản với một trục quan cũng như thế hiển. Tuy nhiên tất cả cũng chỉ là dự đoán. Nó không đảm bảo rằng sau khi tìm ra bất đẳng thức phải rồi thì bài toán sẽ được giải quyết. Một số dòng toán như vậy sẽ được đề cập trong các phần tiếp theo của chuyên đề này. Ở phần 1 này chúng ta sẽ chứng minh một số bất đẳng thức cơ bản để hình thành trong đầu kết thuật qua đó thành thức trong việc phân tích. Ta tiếp tục đến với bài toán sau

Bài toán 1. [Vasile Cirtoaje]

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

Chứng minh. Ta sẽ xác định h.s. để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{2}{a^2+1} \geq 1 + m(a-1) \Leftrightarrow -\frac{(a-1)(a+1)}{a^2+1} \geq m(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left(-\frac{a+1}{a^2+1} - m \right) \geq 0$$

Khi $a=1$ ta sẽ có $-\frac{a+1}{a^2+1} = -1 \Rightarrow m = -1$. Ta dự đoán bất đẳng thức sau đúng và thiết

thực

$$\frac{2}{a^2+1} \geq 2-a \Leftrightarrow \frac{a(a-1)^2}{a^2+1} \geq 0$$

Tất nhiên với các biến còn lại. Công việc theo vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Nhận xét.

Ta có thể sử dụng kết thuật “Côsi ngược chiều” để tìm ra bất đẳng thức phải trên

$$\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$$

Bài toán 2. [Algebraic Inequalities Old and New Method]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b+c} + \frac{1}{b^2+c+a} + \frac{1}{c^2+a+b} \leq 1$$

Chứng minh. Ở đây ta cần tìm m để bất đẳng thức dưới là đúng

$$\frac{1}{a^2+b+c} = \frac{1}{a^2-a+3} \leq \frac{1}{3} + m(a-1) \Leftrightarrow -\frac{a(a-1)}{3(a^2-a+3)} \leq m(a-1)$$

Tương tự như trên ta tìm để đoán rằng với $m = -\frac{1}{9}$ thì bất đẳng thức phải đúng. Thử với

$$\frac{1}{a^2-a+3} \leq \frac{4}{9} - \frac{a}{9} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(3-a)}{3(a^2-a+3)} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(b+c)}{3(a^2-a+3)}$$

Nhận xét. Bài toán trên có thể giải bằng kỹ thuật “Phân tích Chebyshev” như xem ra cách giải bằng **U.C.T** lại đơn giản hơn và mất ít thời gian.

Bài toán tổng quát đã được giải quy về bài định lý LCF trong “Algebraic Inequalities - Old and New method” của tác giả Vasile Cîrtoaje

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1^2 - a_1 + n} + \frac{1}{a_2^2 - a_2 + n} + \dots + \frac{1}{a_n^2 - a_n + n} \leq 1$$

Bài toán 3. [Nguyễn Thúc Vũ Hoàng]

Cho a, b, c, d là các số thực không âm thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Chứng minh rằng

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + ab + ac + ad + bc + bd + dc}$$

Chứng minh. Theo bài ra a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)^2 = 2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d) = \sqrt{2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{2}(a+b+c+d)$$

Ta cần xác định hàm số m để bất đẳng thức sau đúng

$$2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + m(a-1) \Leftrightarrow \frac{(2a+1)^2(a-1)}{2} \geq m(a-1)$$

Dễ dàng để đoán $m = \frac{9}{2}$. Ta sẽ chứng minh điều đó, thử với

$$2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + \frac{9(a-1)}{2} \Leftrightarrow 2(a-1)^2(a+2) \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Nhận xét. Bài toán này với hình thức khá “cứng nhắc” vì chỉ cần chứng minh. Tuy nhiên nếu nhìn ra điểm mấu chốt của bài toán ta dễ dàng đưa về đúng theo bình đẳng Giơngiuyt. Bài toán trên còn có thể giải quyết theo cách khác bằng cách chứng minh trực tiếp với 4 biến. Nhưng dù sao việc giải quyết theo từng biến riêng biệt vẫn dễ dàng hơn rất nhiều.

Bài toán 4.

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 27$$

Chứng minh.

Ta cần tìm hằng số m sao cho

$$\frac{4}{a} + 5a^2 \geq 9 + m(a^3 - 1) \Leftrightarrow \frac{(a-1)(5a^2 + 5a - 4)}{a} \geq m(a-1)(a^2 + a + 1)$$

Ta dễ dàng nhận ra đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Khi cho $a = 1$ thì ta có thể đoán rằng $m = 2$. Ta sẽ chứng minh rằng với $m = 2$ thì bất đẳng thức phải trên là đúng. Thật vậy

$$\frac{4}{a} + 5a^2 \geq 7 + 2a^3 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(-2a^2 + a + 4)}{a} \geq 0$$

Do $a \leq \sqrt[3]{3} \Rightarrow -2a^2 + a + 4 \geq 0$. Vậy bất đẳng thức phải trên là đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 5.

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $\sum_{i=1}^n a_i = n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \leq \frac{n}{8}$$

Chứng minh. Ta sẽ tìm hằng số m sao cho

$$\frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \leq \frac{1}{8} + m(a_i - 1) \Leftrightarrow \frac{(5 - 3a_i)(a_i - 1)}{8(3a_i^2 + 5)} \leq m(a_i - 1)$$

Ta dễ đoán rằng với $m = \frac{1}{32}$ thì bất đẳng thức phải trên là đúng. Thật vậy:

$$\frac{a_i}{3a_i^2 + 5} \leq \frac{1}{8} + \frac{(a_i - 1)}{32} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(5 + a_i)(a_i - 1)^2}{32(3a_i^2 + 5)}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các biến bằng nhau và bằng 1.

Nhận xét. Qua các bài toán trên ta có thể thấy rằng bất đẳng thức không hề quan tâm đến số biến. Ta hoàn toàn có thể tổng quát với n biến mà không làm ảnh hưởng đến cách giải.

Đây là một điểm thú vị của **U.C.T**.

Một cách tổng quát ta đưa ra cách giải quyết cho lớp bài toán có dạng sau

Bài toán tổng quát

Cho các số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$h(a_1) + h(a_2) + \dots + h(a_n) = 0$$

Chứng minh rằng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq 0$$

Lớp bài toán này có thể được giải quyết bằng cách phân tách để chứng minh theo từng biến. Vì các biến thức mang tính đối xứng với nhau nên thông thì đi tìm các trường hợp đối xứng của các biến bằng nhau. Ta sẽ phải xác định hàm số m sao cho

$$f(a_i) \geq m \times h(a_i)$$

Đúng với mọi biến thức mà vẫn đúng khiến được ra. Với cách giải này ta sẽ giải quyết được một thông lớn các bất đẳng thức mà các biến không ràng buộc lẫn nhau một cách “mượt mà”.

Thông là một số đúng đều khiến như $\sum_{i=1}^n a_i^k = n$. Có thể khái quát thông của kỹ thuật

này trong lớp bài toán trên như sau: Để chứng minh bài toán ta sẽ xác định hàm số trong các bất đẳng thức phải theo từng biến riêng biệt sao cho

$$f(a_i) \geq m \times h(a_i) \Leftrightarrow g(a_i)^{2k} p(a_i) \geq 0$$

Trong đó $g(a_i) = (a_i - x_k)$ với x_k là đi tìm các trường hợp bất đẳng thức.

Bài toán sẽ được giải quyết như $p(a_i) \geq 0$. Trong trường hợp $p(a_i) \geq 0$ chỉ đúng trong một miền nghiệm nào đó thì ta sẽ tiến hành chia trường hợp để giải quyết bài toán. Tuy nhiên trong phần 1 này ta sẽ không đề cập đến những bài toán như vậy mà sẽ đề cập ở phần sau.

Sau khi đã tìm ra bất đẳng thức phải. Với nhiều công cụ như đạo hàm, khảo sát hàm số hay định lý nhân tử phân tích nhân tử ta đều có thể giải quyết không quá khó khăn.

Trong phép chứng minh cho các bất đẳng thức phải trên ta biến đổi và qui về việc phân tích nhân tử của đa thức $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Mà mục đích chủ đạo là qui về đúng từng các bình phương. Việc nhân tích đa thức thành nhân tử là một vấn đề đối với số phức nên xin không nêu ra đây.

Qua một vài ví dụ nhỏ như trên phần nào các bạn đã hiểu được **U.C.T.** các phần tiếp theo việc xác định hàm số sẽ được trình bày một cách sơ lược bởi vì những bài toán đó mang tính phức tạp nhiều hơn mà **U.C.T** chủ yếu thu được là bước đi để tìm lại giải pháp không thể đưa ra cách chứng minh trực tiếp.

Phần 3. Kỹ thuật chuẩn hóa và U.C.T

Bây giờ chúng ta sẽ bước sang một kho tàng không gian mới với lớp bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến và kỹ thuật chuẩn hóa kết hợp với **U.C.T.**

Đa thức $f(a, b, c)$ đối xứng đồng nghĩa đồng nghĩa: $f(a, b, c) = f'(a', b', c')$ trong đó (a', b', c') là một hoán vị tùy ý của (a, b, c) . Hay nói cách khác là

$$f(a, b, c) = f(b, c, a) = f(c, a, b)$$

Tính thuần nhất của một đa thức đối xứng ba biến trên miền D có nghĩa là

$f(ka, kb, kc) = k^n f(a, b, c)$ với mọi $k, a, b, c \in D, n = \text{const}$ chỉ phải thay vào hàm $f(a, b, c)$. Hiểu một cách đơn giản đa thức thuần nhất nếu nó là tổng của các đơn thức đồng bậc. Do một số tính chất của hàm thuần nhất ta có thể chuẩn hóa điều kiện của biến để đơn giản hóa việc chứng minh. Ta có thể chuẩn hóa một đa thức thuần nhất đối xứng ba biến bằng cách đặt $a^n + b^n + c^n = k, abc = p, ab + bc + ca = r, \dots$ Đây là kỹ thuật rất

quan trọng giúp ta đơn giản hóa và qui bất đẳng thức về chứng minh theo từng biến. Hãy cùng đến với một số bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến để thấy công dụng của **U.C.T**

Bài toán 6. [Bất đẳng thức Nesbit]

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$.

Bài toán quy về việc chứng minh

$$\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{1}{2} + m(a-1) \Leftrightarrow \frac{3(a-1)}{2(3-a)} \geq m(a-1)$$

Dễ dàng dự đoán $m = \frac{3}{4}$. Ta chứng minh bất đẳng thức với m như vậy thì luôn đúng

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3(a-1)^2}{4(3-a)} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng.

Số đẳng thức xảy ra tại các biên còn lại. Cũng vậy theo vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét. Bất đẳng thức Nesbit là một bất đẳng thức đẹp vì số các biến và có nhiều phép chứng minh. Lợi ích của nó là một lợi ích để dạy và nâng cao cho bất đẳng thức này.

Bài toán 7. [Vô Quên Bá Cường]

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh. Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} + \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} + \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq a^2+b^2+c^2$$

Ta cần xác định hàm số m để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2 + m(a-1)$$

Ta lại có

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} - a^2 = -\frac{(a-1)(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3}$$

Từ đây dễ dàng dự đoán với $m = -6$ thì bất đẳng thức phải trên là đúng. Thử với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2 - 6(a-1) \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(6-a)a}{a^2-2a+3} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a \in (0, 3)$.

Tương tự với các biên còn lại. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 8. [Đề thi Olympic 30-4, khối 11, năm XII – 2006]

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} + \frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2} + \frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Tổng cộng lại trên ta dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phải sau:

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} \leq \frac{21+9a}{25} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(18a+9)}{25(9-6a+2a^2)}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét. Có thể thấy rằng hai bài giải cho các bài toán mà đưa phần 2 rất dễ nhìn và ngắn gọn. Đây cũng có thể xem là một kỹ thuật chính thức. Giúp ta giải quyết một số bài toán “cùng loại” và đã rất quen thuộc sau

Bài toán 9. [Darij Grinberg, Old and New Inequalities]

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$. Bài toán cần chứng minh qui về dạng sau

$$\frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Dễ dàng dự đoán bất đẳng thức phải sau

$$\frac{a}{(3-a)^2} \geq \frac{2a-1}{4} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(9-2a)}{4(3-a)^2} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a \in [0, 3]$.

Sử dụng bất đẳng thức này cho b, c rồi cộng lại, ta có đpcm.

Bài toán 10. [Phạm Văn Tuấn, Mathlinks forum]

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức phải sau

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} \geq \frac{8a-7}{6} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(39-8a)}{6(a^2-2a+3)} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $0 \leq a \leq 3 \Rightarrow 39-8a \geq 39-24=15 > 0$.

Tổng cộng lại với các bài còn lại ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài toán 11: [USAMO 2003]

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c+2b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \leq 8$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} + \frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2} + \frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2} \leq 8$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} \leq \frac{12a+4}{3} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(3a-1)^2(4a+1)}{2a^2+(1-a)^2}$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Phần 4. U.C.T và kỹ thuật phân tích các trường hợp

Các phần trên ta đã làm quen với một số bài toán khi đưa về dạng

$$f(a_i) \geq m \times h(a_i) \Leftrightarrow g(a_i)^{2k} p(a_i) \geq 0$$

Thì có ngay điều phụ thuộc chứng minh. Tuy nhiên không phải bao giờ nó cũng xuất hiện $p(a_i) \geq 0$. Trong trường hợp $p(a_i) \geq 0$ chỉ đúng với một miền nghiệm nào đó thì việc chứng minh sẽ phải đi qua một chiều hướng khác, đó là xét thêm trường hợp biến a_i ngoài miền xác định để $p(a_i) \geq 0$. Thông thường thì bước này phức tạp và đòi hỏi người làm phải có năng lực đánh giá mang số tính từ nhiều hướng. Chúng ta sẽ đến với một số bài toán tiêu biểu cho kỹ thuật này.

Bài toán 12.

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2+(a+c)^2} + \frac{c^2}{c^2+(b+a)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$. Qui bất đẳng thức về dạng

$$\frac{a^2}{a^2+(3-a)^2} + \frac{b^2}{b^2+(3-b)^2} + \frac{c^2}{c^2+(3-c)^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a^2-6a+9} \geq \frac{3}{5}$$

Ta sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{a^2}{2a^2-6a+9} \geq \frac{12a-7}{25} \Leftrightarrow (8a-21)(a-1)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq 1 \geq c$.

Xét hai trường hợp sau

$$+ \text{Trường hợp 1. } c \geq \frac{21}{8} \Rightarrow 8a-21 \geq 8b-21 \geq 8c-21 \geq 0.$$

$$+ \text{Trường hợp 2. } \max\{a, b, c\} \leq \frac{21}{8}$$

Khi đó ta có:

$$f(a) = \frac{a^2}{2a^2-6a+9} = \frac{1}{1+\left(\frac{3}{a}-1\right)^2} \geq \frac{49}{50} > \frac{1}{5}$$

Do $f(a)$ đồng biến trên $(0, 3]$ nên điều này hiển nhiên đúng.

Vậy bài toán đã chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba biến bằng nhau.

Bài toán 13. [Vasile Cirtoaje - Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 2$, Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a^2+1} + \frac{1}{3b^2+1} + \frac{1}{3c^2+1} + \frac{1}{3d^2+1} \geq \frac{16}{7}$$

Chứng minh. Ta cần xác định hệ số bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{1}{3a^2+1} \geq \frac{4}{7} + m(2a-1)$$

Dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phải sau

$$\frac{1}{3a^2+1} \geq \frac{52-48a}{49} \Leftrightarrow \frac{3(2a-1)^2(12a-1)}{49(3a^2+1)} \geq 0$$

Tổng cộng với các bất đẳng thức còn lại.

Xét hai trường hợp sau đây

+ Trường hợp 1.

$$\min\{a, b, c, d\} \geq \frac{1}{12} \Rightarrow 12a-1 \geq 12b-1 \geq 12c-1 \geq 12d-1 \geq 0$$

+ Trường hợp 2.

$$d < \frac{1}{12} \Rightarrow 1+3d^2 < \frac{49}{48} \Rightarrow \frac{1}{1+3d^2} > \frac{48}{49}$$

Xét tổng cộng với các bất đẳng thức còn lại ta tìm ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.

Bài toán 14. [Vasile Cirtoaje, Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + b^2 + a^2} \geq 0$$

Chứng minh. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{1}{b^5 + a^2 + c^2} + \frac{1}{c^5 + b^2 + a^2} \leq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh trường hợp $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ là đủ.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{2a^6}{a^2+1} \leq \frac{2a^6}{2\sqrt{a^2}} = a^5$$

Đặt $a^2 = x, b^2 = y, c^2 = z$ lúc đó ta có $x + y + z = 3$ và do đó ta phải chứng minh

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{\frac{2x^3}{x+1} - x + 3} + \frac{1}{\frac{2y^3}{y+1} - y + 3} + \frac{1}{\frac{2z^3}{z+1} - z + 3} \\ &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{x+1}{2x^3 - x^2 + 2x + 3} + \frac{y+1}{2y^3 - y^2 + 2y + 3} + \frac{z+1}{2z^3 - z^2 + 2z + 3} \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{3-x}{6} - \frac{x+1}{2x^3 - x^2 + 2x + 3} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{(x-1)^2(-2x^2 + 3x + 3)}{6(2x^3 - x^2 + 2x + 3)} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq 1 \geq z$. Xét hai trường hợp

+ Trường hợp 1. $y + z \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$ khi đó ta có

$$-2x^2 + 3x + 3 > 0, -2y^2 + 3y + 3 > 0, -2z^2 + 3z + 3 > 0$$

Đến đây bài toán hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp 2. $y + z \leq 1 \Rightarrow x \geq 2$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} (2x^3 - x^2 + 2x + 3) - 5(x + 1) &= 2x^3 - x^2 - 3x - 2 = x^3 \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) \\ &\geq x^3 \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} - \frac{2}{2^3} \right) = \frac{x^3}{2} > 0 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\frac{x+1}{2x^3 - x^2 + 2x + 3} \leq \frac{1}{5}$ như vậy ta cần chứng minh

$$\frac{z+1}{2z^3 - z^2 + 2z + 3} + \frac{y+1}{2y^3 - y^2 + 2y + 3} \leq \frac{4}{5}$$

Điều này luôn luôn đúng vì với $k \in [0, 1]$ ta có

$$\frac{k+1}{2k^3 - k^2 + 2k + 3} \leq \frac{2}{5} \Leftrightarrow 4k^3 \geq (k+1)(2k-1)$$

Nếu $k \leq \frac{1}{2}$ thì bài toán dễ dàng giải quyết.

Nếu $k \geq \frac{1}{2}$ thì ta có

$$\begin{aligned} 4k^3 - (k+1)(2k-1) &\geq 4k^3 - 2(2k-1) = 2(2k^3 - 2k + 1) \\ &\geq 2(k^2 - 2k + 1) = 2(k-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Từ $y + z \leq 1 \Rightarrow y, z \in [0, 1]$.

Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Đây là một kết quả “mạnh mẽ” cho bài toán 3 trong kì thi IMO 2005 của tác giả Vasile Cirtoaje. Bài toán gốc ban đầu là với điều kiện $abc \geq 1$. Điều kiện của bài toán trên chặt hơn vì theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \Rightarrow 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Rightarrow abc \geq 1$$

Chúng ta hãy đến với giải pháp chính thức của bài toán trên, được trích từ quyển “Algebraic Inequalities, Old and New Method”

Ta qui về việc chứng minh bài toán sau:

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} + \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} \leq 1$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. $a \leq \sqrt{2} \Rightarrow a, b \leq \sqrt{2}$. Ta sắp xếp các bất đẳng thức phải sau

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} \leq \frac{3 - a^2}{6}, \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} \leq \frac{3 - b^2}{6}, \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} \leq \frac{3 - c^2}{6}$$

Là có

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} - \frac{3 - a^2}{6} = \frac{(a-1)^2(a^5 + 2a^4 - 3a^2 - 6a - 3)}{6(a^5 + 3 - a^2)}$$

Một khác

$$a^5 + 2a^4 - 3a^2 - 6a - 3 = a^2 \left(a^3 + 2a^2 - 3 - \frac{6}{a} - \frac{3}{a^2} \right) \\ \leq a^2 \left(2\sqrt{2} + 4 - 3 - 3\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right) = -a^2 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} \right) < 0$$

+ Trùng hợp 2. $a > \sqrt{2}, a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow b^2 + c^2 < 1$ khi đó ta có

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{b^5 + 3 - b^2} + \frac{1}{c^5 + 3 - c^2} < \frac{1}{a^5 + 3 - a^2} + \frac{1}{3 - b^2} + \frac{1}{3 - c^2}$$

Lại có

$$\frac{1}{a^5 + 3 - a^2} < \frac{1}{2\sqrt{2}a^2 + 3 - a^2} = \frac{1}{(2\sqrt{2} - 1)a^2 + 3} < \frac{1}{(2\sqrt{2} - 1)2 + 3} < \frac{1}{6}$$

Như vậy bài toán sẽ được quy về

$$\frac{1}{3 - b^2} + \frac{1}{3 - c^2} \leq \frac{5}{6}$$

Thật vậy

$$\frac{1}{3 - b^2} + \frac{1}{3 - c^2} - \frac{5}{6} = \frac{9(b^2 + c^2 - 1) - 5b^2c^2}{6(3 - b^2)(3 - c^2)} \leq 0$$

Như vậy bài toán được quy về. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a + b + c = 1$.

Lời giải của tác giả Vasile Cirtoaje ngày trước cũng đã sử dụng **U.C.T** nhưng nó lại đưa ta đến cách xét trùng hợp khá lằng nhằng vì phải so sánh bình với $\sqrt{2}$. Đây là một bài toán đẹp với nhiều mặt đáng thú vị.

Bài toán 15. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c \geq 0$

$$\sqrt{\frac{a^3}{ka^2 + (b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{kb^2 + (c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{kc^2 + (a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{k+4}}$$

Chứng minh. Cho $a = b = 1, c = 0$ ta được $k \geq 5$. Ta sẽ chứng minh rằng 5 chính là giá trị cần tìm, tức là qui về chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2 + (b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{5b^2 + (c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{5c^2 + (a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{(a+b+c)}{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{5a^2 + (b+c)^2}} \right)^2 \leq (a+b+c) \left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} \right)$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{1}{3}$$

Không mất tính tổng quát ta chuẩn hóa $a + b + c = 1$ và $a \geq b \geq c \geq 0$ suy ra $a \geq \frac{1}{3} \geq c \geq 0$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{b^2}{6b^2 - 2b + 1} + \frac{c^2}{6c^2 - 2c + 1} \leq \frac{1}{3}$$

Ta phải xét hai trường hợp

+ Trường hợp 1. $c \geq \frac{1}{8}$ ta có

$$9 - \sum_{cyc} \frac{27a^2}{6a^2 - 2a + 1} = \sum_{cyc} \left(12a - 1 - \frac{27a^2}{6a^2 - 2a + 1} \right) = \sum_{cyc} \frac{(3a-1)^2(8a-1)}{6a^2 - 2a + 1} \geq 0$$

+ Trùng hợp 2. $c \leq \frac{1}{8}$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{6a^2}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{6b^2}{6b^2 - 2b + 1} + \frac{6c^2}{6c^2 - 2c + 1} - 2 &= \frac{2a-1}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{2b-1}{6b^2 - 2b + 1} + \frac{6c^2}{6c^2 - 2c + 1} \\ &= \frac{a-b-c}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{b-c-a}{6b^2 - 2b + 1} + \frac{6c^2}{6c^2 - 2c + 1} \\ &= \frac{2(a-b)^2(3c-2)}{(6a^2 - 2a + 1)(6b^2 - 2b + 1)} + c \left(\frac{6c}{6c^2 - 2c + 1} - \frac{1}{6a^2 - 2a + 1} - \frac{1}{6b^2 - 2b + 1} \right) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{6c}{6c^2 - 2c + 1} \leq \frac{1}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$$

Vì $c \leq \frac{1}{8}$ nên $\frac{6c}{6c^2 - 2c + 1} \leq 1$ vậy nên ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$1 \leq \frac{1}{6a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$$

Nếu $b \leq \frac{1}{3}$ khi đó

$$1 \leq \frac{1}{6b^2 - 2b + 1}$$

Nếu $b \geq \frac{1}{3}$, áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, ta cần chứng minh

$$4 \geq 6(a^2 + b^2) - 2(a + b) + 2$$

Điều này tương đương với

$$[2(a+b)+c](a+b+c) \geq 3(a^2 + b^2)$$

Tỉ lệ thì $b \geq \frac{1}{3} \Rightarrow 3b \geq a$ do đó

$$\begin{aligned} [2(a+b)+c](a+b+c) &\geq 2(a+b)^2 = 3(a^2 + b^2) + 4ab - a^2 + b^2 \\ &\geq 3(a^2 + b^2) + a(3b - a) \geq 3(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Như vậy bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị. Hằng số tối thiểu cần tìm là 5.

Bài toán 16. [Nguyễn Văn Thành]

Cho các số dương a, b, c thì $a + b + c = 3$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 3b + 3}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - 3c + 3}} \leq 3$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

Với mọi $x \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ta có

$$\frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} \leq x + 1$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương

$$(x-1)^2(x^2+x-1) \geq 0 \text{ (nếu)} (x-1)^2(x^2+x-1) \geq 0 \text{ (nếu)}$$

Từ đây, suy ra

+, Nếu $c \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, sử dụng bất đẳng thức trên, ta có đpcm.

+, Nếu $c \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, có 2 khả năng xảy ra

++, Nếu $b \leq 1$, ta có

$$a^2 - 3a + 3 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$b^2 - 3b + 3 = (b-1)^2 - b + 2 \geq 1$$

$$c^2 - 3c + 3 = (1-c)^2 - c + 2 \geq \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2 = \frac{16}{(\sqrt{5}+1)^2}$$

Do đó

$$VT \leq \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 < 3$$

++, Nếu $b \geq 1$, suy ra $2 \geq a \geq b \geq 1$, xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}}$ với $1 \leq x \leq 2$, ta có

$$f''(x) = \frac{8x^2 - 24x + 15}{4(x^2 - 3x + 3)^{5/2}} < 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lõm, do đó theo bất đẳng thức Jensen,

$$f(a) + f(b) \leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}}$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}} + \frac{1}{\sqrt{(3-2t)^2-3(3-2t)+3}} \leq 3$$

Hay

$$\frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}} + \frac{1}{\sqrt{4t^2-6t+3}} \leq 3$$

Hay

$$\frac{36(t-1)^2(36t^6 - 252t^5 + 749t^4 - 1202t^3 + 1099t^2 - 546t + 117)}{(t^2 - 3t + 3)^2(4t^2 - 6t + 3)^2} \geq 0$$

Dễ dàng kiểm tra đúng các bất đẳng thức này đúng, vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 17. [Mở rộng từ Poland 1996]

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq \frac{1}{3} \geq c$. Xét hai trường hợp sau:

+ Trùng hợp 1. $c \geq -\frac{3}{4}$ ta có

$$\frac{9}{10} - \left(\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \right) = \sum_{cyc} \left(\frac{18a}{25} + \frac{5}{30} - \frac{a}{a^2+1} \right) = \sum_{cyc} \frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)} \geq 0$$

+ Trùng hợp 2. $c \leq -\frac{3}{4}$ áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \leq 1$$

Khi đó nếu $\frac{c}{c^2+1} \leq -\frac{9}{10} \Leftrightarrow -5-2\sqrt{6} \leq c \leq -\frac{3}{4}$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét trùng hợp 3: $-5-2\sqrt{6} \geq c$ khi đó ta có $3+\sqrt{6} \leq a \Rightarrow \frac{a}{a^2+1} \leq \frac{1}{5}$. Từ đây suy ra:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Bài toán gốc của đề toán này là với điều kiện của trùng hợp 1. Tuy nhiên bài toán vẫn đúng với mọi số thực, đây là một điều rất thú vị. Có thể chứng minh bài toán trên với kỹ thuật dồn biến bằng hàm lồi.

Phần 5. Kết hợp bất đẳng thức Vornicu Schur với U.C.T

Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu đến các bạn với kết hợp U.C.T với bất đẳng thức Vornicu Schur. Có thể nói rằng khi ta kết hợp nhuần nhuyễn hai kỹ thuật trên thì sẽ nhận được những lợi ích khá lớn trong việc giải toán. Trước hết hãy cùng đến với định phát biểu, các định lý cũng như kỹ thuật phân tích và chính tắc của bất đẳng thức Vornicu Schur.

Bất đẳng thức Vornicu Schur:

Cho $a \geq b \geq c$ và $A, B, C \geq 0$ khi đó bất đẳng thức

$$A(a-b)(a-c) + B(b-c)(b-a) + C(c-a)(c-b) \geq 0$$

Là đúng khi và chỉ khi

Định lý 1. $A \geq B$ hoặc $C \geq B$

Định lý 2. $A \times a \geq B \times b$

Định lý 3. $B \times c \geq C \times b$ (Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác)

Định lý 4. $\sqrt{A} + \sqrt{C} \geq \sqrt{B}$

Khi đã nắm trong tay các định lý về bất đẳng thức Vornicu Schur thì chắc hẳn bạn sẽ phải chú ý đến cách biến đổi sao cho qui về dạng chính tắc của nó. Ở đây xin nêu ra 2 phép biến đổi cơ bản khi hiểu quí và có công dụng lớn trong nhiều bài toán, giúp bạn có thể đưa bài toán về dạng tổng các bình phương về dạng trên.

Trước hết hãy biến đổi đưa bài toán về hai dạng quen thuộc sau

Dạng 1.

$$A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \geq 0$$

Dạng 2.

$$A(2a-b-c)^2 + B(2b-c-a)^2 + C(2c-a-b)^2 \geq 0$$

Tiếp tục theo hình thức phép biến đổi sau

$$\begin{aligned} & A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \\ &= A(a-b)(a-c+c-b) + B(b-c)(b-a+a-c) + C(c-a)(c-b+b-a) \\ &= \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} A(b-c)(c-a) = \sum_{cyc} (A+B)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

Đẳng 1 là đẳng phân tích chính thức của phép biến đổi pháp S.O.S mà phép biến đổi pháp đã lấy làm quen thuộc với người nghiên cứu. Từ phép phân tích trên ta có thể thấy rằng mối liên hệ giữa phép biến đổi pháp S.O.S và bất đẳng thức *Vornicu Schur* là rất mật thiết. Tuy nhiên trong bài viết này không đề cập đến vấn đề này mà chúng ta sẽ xem xét đẳng 2 ở trên. Vì tính đúng đắn của nó trong *U.C.T* là hiển nhiên và nó cũng là một sự kết hợp mang nhiều ý nghĩa.

$$\begin{aligned} & A(2a-b-c)^2 + B(2b-c-a)^2 + C(2c-a-b)^2 \\ &= 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} A(a-b)^2 + \sum_{cyc} A(c-a)^2 \\ &= 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} (A+B)(a-b)^2 \\ &= 2 \sum_{cyc} A(a-b)(a-c) + \sum_{cyc} (2A+B+C)(a-b)(a-c) \\ &= 2 \sum_{cyc} (4A+B+C)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

Hãy mở đầu bằng một bài toán trông có vẻ đơn giản nhưng cũng không quá dễ để tìm ra lời giải nếu không chắc chắn đúng đắn đẳng.

Bài toán 18. [Vasile Cirtoaje]

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq 6(a^3 + b^3 + c^3)$$

Chứng minh. Theo *U.C.T* để dàng tìm ra bất đẳng thức phải sau

$$3a^4 + a^2 + 2 \geq 3a^3 - 4a + 4 \Leftrightarrow (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

Ta qui bài toán về chứng minh

$$\sum_{cyc} (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{cyc} (3a-3)^2(3a^2 - 2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{cyc} (3a-a-b-c)^2(3a^2 - 2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{cyc} (2a-b-c)^2(3a^2 - 2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{cyc} (4a^2 + b^2 + c^2 - 4)(a-b)(a-c) \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ khi đó ta có

$$4a^2 + b^2 + c^2 - 4 \geq 4b^2 + a^2 + c^2 - 4 \geq 4c^2 + b^2 + a^2 - 4$$

Lại có

$$4c^2 + a^2 + b^2 - 4 \geq 4c^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - 4 = 4c^2 + \frac{(3-c)^2}{2} - 4 = \frac{(3c-1)^2}{2} \geq 0$$

Theo **định lí 1** ta có điều phải chứng minh. Đồng thời xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $(a, b, c) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Nhận xét. Bài toán sẽ dễ dàng giải quyết trong trường hợp $3a^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$. Trường hợp

hợp còn lại $a \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ rõ ràng sẽ khó giải quyết vì với phải có điều kiện trong trường hợp 2

khác là, nhiều khả năng sẽ dẫn đến những tính toán nặng nề không cần thiết. Tuy nhiên cần chú ý một điều là đồng thời của bài toán này xảy ra tại hai điểm cực trị vì vậy không thể áp dụng mệnh đề **U.C.T** vì đồng phát biểu của kết luận này sẽ cho ta duy nhất một điểm cực trị cần tìm. Nhờ vậy việc kết hợp giữa **U.C.T** và bất đẳng thức **Vornicu Schur** không dẫn đến thu được là giải quyết bài toán một cách đẹp mắt mà còn giúp ta nhìn việc giải quyết trường hợp đồng thời xảy ra khi có hai biến bằng nhau và khác biến còn lại.

Bài toán 19. [Nguyễn Thúc Vũ Hoàng]

Cho a, b, c là các số thực đồng thời thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

Chứng minh. Ta cần xác định hệ số cho bất đẳng thức phải sau:

$$2a^3 + 3 \geq 5a^2 + m(a - 1) \Leftrightarrow (a - 1)(2a^2 - 3a - 3) \geq m(a - 1)$$

Từ đây ta sẽ dự đoán $m = -4$ ta có

$$2a^3 + 3 \geq 5a^2 - 4a + 4 \Leftrightarrow (a - 1)^2(2a - 1) \geq 0$$

Tương tự với các biến còn lại ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2(2a - 1) + (b - 1)^2(2b - 1) + (c - 1)^2(2c - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a - b - c)^2(2a - 1) + (2b - c - a)^2(2b - 1) + (2c - a - b)^2(2c - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 6a(a - b)(a - c) + 6b(b - c)(b - a) + 6c(c - a)(c - b) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó theo bất đẳng thức **Vornicu Schur** ta có điều phải chứng minh.

Đồng thời xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Lưu ý một bài toán dẫn đến giải những điều thú vị của bài toán này là đồng thời đạt được tại 2 điểm. Nếu như giải một cách thông thường bằng **U.C.T** thì không thể giải quyết bài toán một cách triệt để và một lần nữa bất đẳng thức **Vornicu Schur** lại phát huy tác dụng của nó.

Bài toán 20. [Vasile Cirtoaje, Romania TST 2006]

Cho a, b, c là các số thực đồng thời thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Chứng minh.

Theo **U.C.T** dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phải sau

$$\frac{1}{a^2} + 4a \geq a^2 + 4$$

Bài toán cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{(a-1)^2(1+2a-a^2)}{a^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(2a-b-c)^2(1+2a-a^2)}{a^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} (4A+B+C)(a-b)(a-c) &\geq 0 \end{aligned}$$

Trong đó

$$A = \frac{1+2a-a^2}{a^2}, B = \frac{1+2b-b^2}{b^2}, C = \frac{1+2c-c^2}{c^2}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ khi đó ta có

$$A - B = \frac{1+2b-b^2}{b^2} - \frac{1+2a-a^2}{a^2} = \frac{(a-b)(2ab+a+b)}{a^2b^2} \geq 0$$

Từ đó suy ra

$$4C + A + B \geq 4B + A + C \geq 4A + B + C$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a + b + c = 3 \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3$$

Do đó

$$\begin{aligned} 4A + B + C &= \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{8}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 6 \\ &= \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{6}{a} \right) + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \right) \\ &\geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \right) \geq 2 \left(\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} - 3 \right) \geq 2(3-3) = 0 \end{aligned}$$

Theo định lý 1 ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Bài toán này chúng ta vẫn có thể chia thành hai trường hợp để giải quyết. Dưới đây là lời giải của tác giả bài toán Vasile Cirtoaje

Sau khi đã đọc bài toán và dùng

$$\sum_{cyc} \frac{(a-1)^2(1+2a-a^2)}{a^2} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử rằng $a \geq b \geq c$ khi đó áp dụng định lý và điều của tam thức bậc 2 ta chia nh bài toán thành hai trường hợp

+ Trường hợp 1. $a \leq 1 + \sqrt{2} \Rightarrow c \leq b \leq a \leq 1 + \sqrt{2}$ thì đó đơn điệu

$$1+2a-a^2 \geq 0, 1+2b-b^2 \geq 0, 1+2c-c^2 \geq 0$$

+ Trường hợp 2. $a < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b + c = 3 - a < 2 - \sqrt{2} < \frac{2}{3}$ suy ra

$$bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} < \frac{1}{9}$$

Khi đó

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{bc} > 18 > (a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Còn nhiều lời giải bằng các kỹ thuật khác cho bất đẳng thức trên. Tuy nhiên khuôn khổ chuyên đề có hạn nên xin không nêu ra đây.

Phần 6. Một dòng biểu diễn thú vị

Ở đây chúng tôi muốn nói đến dòng biểu diễn theo công thức 1. Đây là một tập hợp tùy chọn gần như ngẫu nhiên giúp ta tìm ra nhiều lợi ích thú vị. Bây giờ ta hãy chú ý đến dòng thức sau đây

$$1 = \frac{a^k + b^k + c^k}{a^k + b^k + c^k} = \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{b^k}{a^k + b^k + c^k} + \frac{c^k}{a^k + b^k + c^k}$$

Dòng thức tập hợp chúng ta là một điều hiển nhiên, không mang nhiều ý nghĩa nhưng lại có vai trò khá quan trọng trong việc chứng minh một bất đẳng thức mà chúng tôi sẽ nêu ra dưới đây. Ở phần này kỹ thuật xác định hàm số không còn có thể thức hiển nhiên trước bởi vì đây xuất hiện lũy thừa p. Nếu chúng ta dùng những biểu thức thông thường thì sẽ phức tạp. Vì vậy công cụ mà chúng ta chọn ở đây sẽ là đạo hàm. Trước hết xin nhắc lại 2 định lý cơ bản sau đây

Định lý Fermat. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và có các trục địa phương tại $x_0 \in [a, b]$. Khi đó nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$

Định lý Roll. Giả sử $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và khả vi trong (a, b) . Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f'(x_0) = 0$

Bài toán 21. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Tìm hằng số $k > 0$ tốt nhất để bất đẳng thức sau là đúng với mọi số a, b, c là các số thực dương

$$\frac{a}{\sqrt{ka^2 + (b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{kb^2 + (c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{kc^2 + (a+b)^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+4}}$$

Chứng minh. Cho $a=1, b=c=0$ ta có $k \leq \frac{1}{2}$. Ta sẽ chứng minh đó là giá trị tốt nhất để bất đẳng thức là đúng. Bất đẳng thức cần chứng minh.

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}} \geq 1$$

Ta sẽ phải xác định hàm số k sao cho bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{a^k}{a^k + b^k + c^k}$$

Ở đây ta chuẩn hóa $b=c=1$ để việc xác định hàm số được đơn giản hơn. Khi đó ta cần xác định hàm số k sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8}} \geq \frac{a^k}{a^k + 2} \Leftrightarrow a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2 \geq 0$$

Đặt $f(a) = a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2$. Lại có $f(a) \geq 0, f(1) = 0$ nên theo định lý Fermat ta có

$f'(1) = 0$. Tìm hành đạo hàm $f(a)$ suy ra

$$f'(a) = (k+2)a^{k+1} - 4ka^{2k-1} + 2a$$

Theo trên thì ta có

$$f'(1) = (k+2) - 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}.$$

Như vậy ta sẽ đoán bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} \geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4}}$$

Sau khi đã hoàn thành xong bước cần đoán chúng ta có nhiều con đường để làm a chẵn. Thông thường thì phép biến đổi thông thường luôn mang lại hiệu quả nếu bất đẳng thức phải là đúng. Nên nhớ rằng bất đẳng thức phải trên chỉ là để đoán mà thôi, có thể nó sẽ không đúng hoặc ngược lại. Trong bài toán ta sẽ “tùy cơ ứng biến”. Tất nhiên nhiều bài toán không thể áp dụng theo cách này. Chúng ta tiếp tục quay lại bài toán trên với phép chứng minh cho bất đẳng thức phải.

Theo bất đẳng thức Holder ta có $\sqrt[3]{b^4} + \sqrt[3]{c^4} \geq 2\sqrt[3]{\left(\frac{b+c}{2}\right)^4}$ thì đây ta sẽ phải chứng minh bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8t^2}} &\geq \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4} + 2\sqrt[3]{t^4}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^4} + 2\sqrt[3]{t^4} &\geq \sqrt[3]{a} \sqrt{a^2 + 8t^2} \\ \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{t^4} (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{t^2})^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ở đây $t = \frac{b+c}{2}$. Với bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = t > 0, b = c = 0$ và các hoán vị.

Nhận xét. Quá trình tìm kiếm hàm số k có thể thông qua việc đánh giá theo bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8}} \geq \frac{a^k}{a^{k+2}} \Leftrightarrow a^{k+2} - 2a^{2k} + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^{k+2} + a^2 \geq 2a^{2k}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM thì $a^{k+2} + a^2 \geq 2\sqrt{a^{k+4}}$. Như vậy ta có cần xác định k sao cho

$$2\sqrt{a^{k+4}} = 2a^{2k} \Leftrightarrow a^{k+4} = a^{4k} \Leftrightarrow k+4 = 4k \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$$

Bài toán 22. [IMO 2001]

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

Chứng minh. Bằng cách làm tương tự, ta thiết lập được bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3} + b^{4/3} + c^{4/3}}$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $b^{4/3} + c^{4/3} \geq 2b^{2/3}c^{2/3} = 2t^{4/3}$, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} a^{4/3} + 2t^{4/3} &\geq a^{1/3} \sqrt{a^2 + 8t^2} \\ \Leftrightarrow 4t^{4/3} (a^{2/3} - t^{2/3})^2 &\geq 0 \text{ (rõ ràng)} \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức trên đúng. Sử dụng tương tự cho b, c rồi cộng lại, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $b \rightarrow 0, c \rightarrow 0$.

Bài toán 23.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$$

Chứng minh. Trước tiên trên ta có xác định bất đẳng thức phụ sau:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (*)$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức phụ trên theo nhiều cách:

Cách 1.

$$(*) \Leftrightarrow 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2 \geq a(b+c)^3$$

Điều này hiển nhiên đúng, thật vậy

$$2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2 \geq a^2(b+c)^2 + \frac{(b+c)^4}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2(b+c)^6}{4}} = a(b+c)^3$$

Cách 2.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{1+k^3} = \sqrt{(1+k)(1-k+k^2)} \leq \frac{(1+k) + (1-k+k^2)}{2} = 1 + \frac{k^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức phụ trên ta có

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \geq \frac{1}{1 + \frac{b^2 + c^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Áp dụng tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 3 biến bằng nhau hoặc có 2 biến bằng 0.

Bài toán 24. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3} + \frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3} + \frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3} \geq \frac{1}{3}$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$VT \geq \frac{1}{3} \left(\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \right)^2 \geq \frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức đã chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Phần 7. Giải quyết một số bài toán mà điều kiện liên quan một thiết diện nhau

Đa phần các bài toán xét trên đều có điều kiện mà các biến liên hệ với nhau ko quá chặt. Thông thường là điều kiện dạng $a_1^k + a_2^k + \dots + a_{n-1}^k + a_n^k = n$. Tức là ta có thể tách ra theo từng biến để tìm bất đẳng thức phụ. Tuy nhiên với một số bài toán mà điều kiện thiết diện

mối quan hệ “bình chặt” đối với nhau như $\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^k$ thì việc tìm ra bất đẳng thức phụ tương ứng đối

khó khăn vì ta không thể đánh giá theo từng biến nào a. Và để áp dụng U.C.T trong những bài toán như vậy chúng ta phải dùng đến một số tính chất của hàm số.

Bài toán 25.

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \geq \sqrt{2}$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \right)^2 \left(\sum_{cyc} \frac{a(b+c+1)^2}{b+c} \right) \geq (a+b+c)^3$$

Do đó ta cần phải chứng minh

$$(a+b+c)^3 \geq 2 \sum_{cyc} \frac{a(b+c+1)^2}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3 \sum_{cyc} \frac{a}{b} + 3 \sum_{cyc} \frac{b}{a} + 6 \geq 4 \sum_{cyc} ab + 4 \sum_{cyc} a + 2 \sum_{cyc} \frac{a}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b} \geq \sum_{cyc} ab, \sum_{cyc} \frac{b}{a} \geq \sum_{cyc} ab, 2 \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \leq \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{a}{b} + \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{b}{a}$$

Tức là ta có

$$\begin{aligned} VT - VP &\geq \sum_{cyc} a^3 + \frac{5}{2} \sum_{cyc} \frac{a}{b} + \frac{5}{2} \sum_{cyc} \frac{b}{a} - 4 \sum_{cyc} ab - 4 \sum_{cyc} a + 6 \\ &\geq \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} ab - 4 \sum_{cyc} a + 6 = \sum_{cyc} \left(a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2 \right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 + 2 \ln x$ với $x > 0$ ta có

$$f'(x) = (x-1) \left(3x + 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

Nếu $x < 1$ thì $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$, nếu $x \geq 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{x}$ do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Tức là dùng kiểm tra rằng $f(x) \geq f(1) = 0, \forall x > 0$

Hay

$$x^3 - 4x + \frac{1}{x} + 2 \geq -2 \ln x, \forall x > 0$$

Như vậy ta có

$$\sum_{cyc} \left(a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2 \right) \geq -2 \sum_{cyc} \ln a = 0$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 26. [Lê Hữu Đình Khuê, THPT Quốc Học, Thành phố Huế]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \geq 1$$

Chứng minh. Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu trong ba số a, b, c thì ít nhất một số không lớn hơn $\frac{1}{2}$. Giả sử số đó là a . Ta có $a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 3a^2 + (a-1)^2 \leq 1$. Khi đó bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Trường hợp 2. Cả ba số a, b, c đều không nhỏ hơn $\frac{1}{2}$ khi đó ta xét hàm số sau

Giả sử các phân tử của ta có cùng số thì tập hợp một bất đẳng thức phải đúng

$$\frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} \geq \frac{1}{3} + k \ln x$$

ở đây ta có qui về hàm số mũ và chú ý $\ln x + \ln y + \ln z = 0$.

Tiếp tục quan sát thấy bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Từ đó ta có phải xác định sao cho $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} + \frac{2}{3} \ln x - \frac{1}{3}$$

Với $x > \frac{1}{2}$. Khi đó ta có

$$f'(x) = \frac{2(16x^4 - 16x^3 - x + 1)}{3x(4x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{2(x-1)(16x^3 - 1)}{3x(4x^2 - 2x + 1)^2}$$

Từ đây suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, do $x > \frac{1}{2}$

Dễ dàng kiểm tra được $f(x) \geq f(1) = 0, \forall x > \frac{1}{2}$. Điều này cũng đúng với

$$\frac{1}{3x^2 + (x-1)^2} \geq \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \ln x, \forall x > \frac{1}{2}$$

Số bất đẳng thức phải trên theo từng biến a, b, c rồi cộng vế theo vế ta có

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \frac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \frac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \geq 1 - \frac{2}{3} \sum_{cyc} \ln a = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$, hoặc $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty, c \rightarrow 0^+$ và các hoán vị.

Nhận xét. Bài toán trên còn một lời giải rất đơn giản của Vasile Cirtoaje. Xin trình bày lời giải đó. Số bất đẳng thức phải sau đây

$$\frac{1}{3a^2 + (a-1)^2} \geq \frac{1}{2a^3 + 1} \Leftrightarrow \frac{2a(a-1)^2}{(4a^2 - 2a + 1)(2a^3 + 1)} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng với mọi số thực không âm. Từ đây dễ dàng với các biến còn lại suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 27. [Gabriel Dospinescu]

Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương mà $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1^2 + 1} + \sqrt{a_2^2 + 1} + \dots + \sqrt{a_n^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Chứng minh. Xét hàm số sau với $x > 0$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2\sqrt{x} + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln x$$

Khi đó ta có

$$f'(x) = \frac{(x-1) \left[-2x^2 + x - 1 - 2x^2 \sqrt{2(x^2+1)} \right]}{x\sqrt{2(x^2+1)}(\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x^2+1})} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Qua 1 thì $f'(x)$ đi từ dương sang âm nên

$$f'(x) \leq f(1) = 0, \forall x > 0$$

Điều đó có nghĩa là

$$\sqrt{x^2+1} \leq x\sqrt{2} - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln x, \forall x > 0$$

Sử dụng bất đẳng thức này cho n biến và cộng vế theo vế ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \dots + \sqrt{a_n^2+1} &\leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n) \\ &= \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \ln \prod_{i=1}^n a_i \\ &= \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = \dots = a_n = 1$.

Nhận xét. Bài toán trên còn có thể giải quy về bất đẳng thức quen thuộc

$$\sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}(x - \sqrt{x} + 1) \Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x} - 1)^4, \forall x > 0$$

Sử dụng bất đẳng thức trên liên tiếp cho n biến liên tiếp ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \dots + \sqrt{a_n^2+1} &\leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \sqrt{2} \left(n - \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \right) \\ &\leq \sqrt{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được giải quy về hoàn toàn.

Bài toán 28. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c)$$

Chứng minh. Ta có cần xác định hằng số k sao cho bất đẳng thức sau là đúng

$$a^2 + 9bc = a^2 + \frac{9}{a} \geq 10a + k \ln a$$

Tìm giá trị các phần tử của ta có tìm ra $k = -17$. Ta có số chứng minh

$$f(a) = a^2 + \frac{9}{a} - 10a + 17 \ln a \geq 0$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2a - \frac{9}{a^2} - 10 + \frac{17}{a} = \frac{2a^3 - 10a^2 + 17a - 9}{a^2} = \frac{(a-1)(2a^2 - 8a + 9)}{a^2} \\ f'(a) &= 0 \Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Từ đây, ta có thể dùng phương pháp $f(a) \geq f(1) = 0, \forall a > 0$ hay

$$a^2 + \frac{9}{a} - 10a \geq -17 \ln a$$

Sử dụng tính đồng biến của b, c với cùng giá trị theo vế, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Phần 8. U.C.T mới rùng

Ngày từ đầu bài viết ta đã xét đến việc xác định hàm số m theo cách

$$h(a_i) \geq f(a_i) + ma^k + n$$

Với điều kiện xác định của bài toán là $a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = n$

Tuy nhiên với cách xác định đó thì với một số bài toán lại không mang lại hiệu quả. Điều đó cũng không phải hoàn toàn là không tốt. Vì nó sẽ thôi thúc chúng ta tìm ra các dạng xác định hàm số khác. Một cách trực quan chúng ta sẽ phân tích một bài toán cụ thể để thấy được những gì đã được nêu ra ở trên

Bài toán 29. [Tạp chí Crux, Canada]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ac} \leq \frac{3}{8}$$

Chúng ta ngay từ đầu khi đi vào chứng minh bài toán này nên sẽ nghĩ ngay đến việc thiết lập một bất đẳng thức phụ để

$$\frac{8}{9-x} \leq 1 + mx + n \Rightarrow \frac{8}{9-x} \leq 1 + m(x-1)$$

Để dàng để đoán $m = \frac{1}{8}$. Những bất đẳng thức với m như vậy thì bất đẳng thức trên hoàn

toàn không đúng kể cả trường hợp chia trường hợp như ở phần 3 cũng không thể áp dụng được. Thật vậy

$$\frac{8}{9-x} \leq \frac{7+x}{8} \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{(x-1)^2}{8(9-x)}$$

Tuy nhiên U.C.T vẫn có tác dụng trong trường hợp này những bằng chứng ý tưởng mới mẻ hơn. Hãy chú ý đến cách thiết lập bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{8}{9-x} \leq 1 + m(x^2 - 1) + n(x-1) \quad (*)$$

Việc xác định hàm số trong bất đẳng thức trên đòi hỏi sự chặt chẽ trong lập luận vì đôi khi nếu lờ mờ miên nghiễm của biến số khiến cho bài toán không đúng. Có nhiều hàm số thỏa mãn điều kiện thành đối tượng bình phương $(x-1)^2$ nhưng ta phải xác định sao cho điều kiện bất đẳng thức là đúng. Ta có

$$(*) \Leftrightarrow 0 \leq (x-1) \left(m(x+1) + n - \frac{1}{9-x} \right) \quad (**)$$

Từ phân tích trên rõ ràng ta phải xác định n theo m sao cho xuất hiện nghiệm $x=1$ để hình thành đối tượng $(x-1)^2$, tức là

$$m(x+1) + n - \frac{1}{9-x} = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1}{9-x} - m(x+1) \Rightarrow n = \frac{1}{8} - 2m$$

Từ đây thay vào (**) ta có

$$(**) \Leftrightarrow 0 \leq (x-1) \left(m(x+1) - 2m + \frac{1}{8} - \frac{1}{9-x} \right) \\ \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 (72m - 8mx - 1)$$

Để thấy rằng việc xác định hàm số ở đây không còn đơn giản như trước. Nó đòi hỏi ta phải tìm ra những trường hợp chặt chẽ để bất đẳng thức không đổi chiều. Ta hãy chú ý đến điều kiện của bài toán để tìm ra trường hợp “tốt nhất”. Chú ý rằng $3 > \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$

tuy nhiên đó chỉ là phỏng đoán là đánh giá “thấp nhất” vì ta còn có thể làm chặt hơn nữa là $\frac{9}{4} \geq \max\{ab, bc, ca\} \geq 0$. Tuy nhiên để giải bài toán này thì chỉ cần sử dụng điều kiện yếu hơn mà thôi.

Đầu tiên ta đưa ra một số nhận xét sau: Đầu tiên ta cần xác định hàm số mà bất đẳng thức trên đúng với $\forall x \in [0, 3]$. Ta thấy rằng hàm $m < 0$ sẽ nhận được một bất đẳng thức ngược chiều chỉ đúng cho $x = 0$, tất nhiên đây là điều ta mà không mong muốn. Vậy có thể đoán $m \geq 0$, do đó

$$72m - 1 - 8mx \geq 72m - 1 - 24 = 48m - 1$$

Ta cần có $48m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{48}$. Vậy nên ta sẽ đoán $m = \frac{1}{48} \Rightarrow n = \frac{1}{12}$.

Công việc để đoán đã hoàn tất. Bây giờ ta sẽ thử chứng minh xem nó có đúng thật không. Và thật vậy ta có bất đẳng thức phải sau

$$\frac{8}{9-x} \leq \frac{x^2 + 4x + 43}{48} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(3-x)}{48(9-x)}$$

Điều này hiển nhiên đúng

Áp dụng bất đẳng thức phải trên với các biến ab, bc, ca ta có

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{1}{48}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca) + \frac{43}{16}$$

Ta cần phải chứng minh bất đẳng thức sau

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca \leq 15$$

Đặt $k = ab + bc + ca$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Schur ta có

$$k \leq 3, abc \geq \max\left\{0, \frac{4x-9}{3}\right\}. \text{ Ta xét hai trường hợp sau}$$

+ Trường hợp 1. Nếu $4x \leq 9$ thì

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca &= (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc \\ &= k^2 + 4k - 6abc \leq \frac{81}{16} + 9 = \frac{225}{16} < 15 \end{aligned}$$

+ Trường hợp 2. Nếu $4x \geq 9$ thì

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca &= (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc \\ &= k^2 + 4k - 6abc \leq k^2 + 4k - 2(4k - 9) \\ &= (k-1)(k-3) + 15 \leq 15 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Qua quá trình nhận xét và phân tích ở trên hi vọng rằng các bạn đã hiểu được cách tìm ra hàm số. Các bài toán sau này không thể thiếu công thức, vì công thức giúp bất đẳng thức phải đưa ra một cách khái quát hơn. Chúng ta hãy đến với bài toán sau

Bài toán 30. [Moldova TST 2005]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$$

Chứng minh. Với $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$, ta luôn có

$$\frac{3}{4-x} \leq \frac{2x^2+x+12}{15} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(3-2x)}{15(4-x)}$$

Lại có $\max\{ab, bc, ca\} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$ nên ta có

$$\frac{3}{4-ab} + \frac{3}{4-bc} + \frac{3}{4-ca} \leq \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+ab+bc+ca+36}{15}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz ta có

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \leq a^4+b^4+c^4=3$$

$$ab+bc+ca \leq \sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \leq 3$$

Cộng các bất đẳng thức trên và theo vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. Đây là một bài toán không khó và có nhiều cách tiếp cận khác nhau.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc sau $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ và bất đẳng thức AM-GM.

Ta có

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{8-a^2-b^2} \right) \geq \frac{2}{8-2ab} = \frac{1}{4-ab}, \forall a, b \in [0, 2]$$

Quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{4-a^2} + \frac{1}{4-b^2} + \frac{1}{4-c^2} \leq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{1}{4-a^2} \leq \frac{a^4+15}{18}$$

Ngoài ra ta còn có một cách khác trực quan và dễ hiểu hơn đó là quy đồng và sử dụng bất đẳng thức Schur.

Bài toán 31. [Phạm Kim Hùng]

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \leq 2$$

Chứng minh. Đây là một bài toán khó vì vậy vì các thí sinh tiếp cận phải cẩn thận đánh giá chặt chẽ và suy luận hợp lý. Chúng ta hãy cùng phân tích con đường đi đến lời giải của bài toán này

Ta sẽ xác định hai số m, n sao cho

$$\frac{2}{3-x} \leq 1+m(x^2-1)+n(x-1), \forall \frac{8}{3\sqrt{3}} \geq x \geq 0$$

Như đã phân tích ở trên ta tìm ra $n = \frac{1}{2} - 2m$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh

trở về dạng

$$(x-1)^2(6m-1-2mx) \geq 0$$

Dễ dàng kết luận $m \geq 0$ do đó

$$6m-1-2mx \geq 6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m$$

Ta còn có

$$6m - 1 - \frac{16}{3\sqrt{3}}m \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{1}{6 - \frac{16}{3\sqrt{3}}}$$

Do $\sqrt{3} > \frac{5}{3}$ nên ta chắc chắn có $m \geq \frac{1}{6 - \frac{16}{3\sqrt{3}}} = \frac{5}{14}$

Từ đây ta sẽ chọn $m = \frac{5}{14} \Rightarrow n = -\frac{3}{14}$ thì đó ta có bất đẳng thức phải sau

$$\frac{2}{3-x} \leq \frac{5x^2 - 3x + 12}{14} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(8-5x)}{14(3-x)}$$

Điều này hiển nhiên đúng với $\frac{8}{3\sqrt{3}} > \frac{8}{5} \geq x \geq 0$.

Sẽ dùng bất đẳng thức phải trên và chú ý là $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}$ suy ra ta cần chứng minh.

$$5(a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2) - 3(abc + bcd + cda + dab) \leq 8$$

Có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng nhiều cách. Sau đây xin trình bày một cách đưa vào kỹ thuật hàm lồi.

Đặt $t^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, k^2 = \frac{c^2 + d^2}{2}, x = ab, y = cd$ khi đó, ta có $t^2 \geq x, k^2 \geq y$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$f(x) = 10x^2k^2 + 10y^2t^2 - 3x\sqrt{2y+2k^2} - 3y\sqrt{2x+2t^2} - 8$$

Ta có

$$f''(x) = 20k^2 + \frac{3y}{\sqrt{(2x+2t^2)^3}} \geq 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi, do đó

$$f(x) \leq \max\{f(t^2), f(0)\}$$

Ta có

$$f(0) = (yt\sqrt{2} + 1)(5yt\sqrt{2} - 8) \leq 0 \text{ do } yt\sqrt{2} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5}$$

$$f(t^2) = 10y^2t^2 - 6yt + 10k^2t^2 - 3t\sqrt{2y+2k^2} - 8 = g(y)$$

Tương tự như trên ta cũng có $g(y)$ là hàm lồi nên

$$g(y) \leq \max\{g(k^2), g(0)\}$$

Ta cũng có

$$g(0) = (kt\sqrt{2} + 1)(5kt\sqrt{2} - 8) \leq 0 \text{ do } kt\sqrt{2} \leq \frac{8}{3\sqrt{3}} < \frac{8}{5}$$

$$g(t^2) = 4(kt - 1)(5kt + 1) \leq 0 \text{ do } kt\sqrt{2} \leq \frac{k^2 + t^2}{2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức đã chứng minh xong.

Ngày nay bạn đều chúng tôi đã nói đây là một bất đẳng thức không đẹp và đòi hỏi nhiều đánh giá chặt chẽ. **U.C.T** đây đóng vai trò là một bàn đạp quan trọng để đi đến lời giải.

Bài toán 32. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Cho các số thực a, b, c, d thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3}$$

Chứng minh. Thông thường các bài toán trắc nghiệm, ta thiết lập để chứng minh bất đẳng thức sau với mọi

$$x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{1-x} \leq 32x^2 + 10$$

Thì đây, ta suy ra được

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} &\leq \frac{32}{9}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2) + \frac{40}{9} \\ &= \frac{32}{9}(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) + \frac{40}{9} \\ &\leq \frac{8}{9}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + \frac{40}{9} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Thì đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \pm \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Bài toán này được đưa ra để “làm mới” bài toán sau của Phạm Văn Tuấn

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} + \frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-bd} \leq 8$$

với cùng giả thiết như trên.

Lưu ý giả thiết của tác giả cho bài toán này rất dài và phức tạp, trong khi dùng **U.C.T** mà rất ngắn gọn ta lại có được kết quả như ý muốn!

Ngoài ra, chúng ta còn có một cách “làm mới” khác cho bài toán của Phạm Văn Tuấn, ta có

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{d+a}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2} \leq 8$$

Bài toán này đã được bạn ZhaoBin, một sinh viên người Trung Quốc đưa ra một lời giải rất đẹp bằng cách sử dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu một lời giải khác theo hướng **U.C.T**. Sử dụng bất đẳng thức trong bài, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4 \leq 6$$

Thật vậy, ta có

$$(a+b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2) - (a-b)^4 \leq 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2)$$

Thông thường với các số hạng còn lại, ta suy ra được

$$VT \leq 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 6$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Thật tự nhiên, câu hỏi sau được đưa ra, liệu bất đẳng thức sau có đúng?

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2} + \frac{1}{1-\left(\frac{d+a}{2}\right)^2} \leq \frac{16}{3}$$

Thật đáng tiếc là bất đẳng thức trên lại không đúng! Các bạn chỉ cần cho $a = b = 0.4$, và $c = d = \sqrt{0.84}$.

Bài toán 33. [Vasile Cirtoaje]

Cho các số không âm a, b, c, d có tổng bằng 4, chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq 1$$

Chứng minh. Ta có thể thiết lập bất đẳng thức sau với mọi $2 \geq x > 0$

$$\frac{48}{5-x} \leq x^2 + x + 10$$

Do đó

+, Nếu $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \leq 2$ thì sẽ dùng bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh

$$a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 + abc + bcd + cda + dab \leq 8$$

Bất đẳng thức này có thể dùng chứng minh bằng định lý bất đẳng thức hàm.

+, Nếu $\max\{abc, bcd, cda, dab\} \geq 2$, không mất tính tổng quát, giả sử $abc \geq 2$, khi đó, chú ý rằng với mọi $x, y \geq 0, x+y \leq 5$, ta có

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5-x-y} - \frac{1}{5-x} - \frac{1}{5-y} = \frac{xy(10-x-y)}{5(5-x)(5-y)(5-x-y)} \geq 0$$

Suy ra

$$\frac{1}{5-x} + \frac{1}{5-y} \leq \frac{1}{5-x-y} + \frac{1}{5}$$

Và do đó, với mọi $x, y, z \geq 0, x+y+z \leq 5$ ta có

$$\frac{1}{5-x} + \frac{1}{5-y} + \frac{1}{5-z} \leq \frac{1}{5-x-y-z} + \frac{2}{5}$$

Chú ý rằng $\sum_{cyc} (a^2b^2c^2 + abc) \leq 8$ và $abc \geq 2$ nên $bcd + cda + dab < 5$, do đó

$$\frac{1}{5-bcd} + \frac{1}{5-cda} + \frac{1}{5-dab} \leq \frac{1}{5-d(ab+bc+ca)} + \frac{2}{5}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{5-abc} + \frac{1}{5-d(ab+bc+ca)} \leq \frac{3}{5}$$

Đặt $x = 4-d$, do $abc \geq 2$ nên $4 \geq x = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3\sqrt[3]{2}$, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$abc \leq \frac{1}{27}x^3, ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}x^2$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\frac{1}{5-\frac{1}{27}x^3} + \frac{1}{5-\frac{1}{3}x^2(4-x)} \leq \frac{3}{5}$$

Hay

$$f(x) = x^6 - 4x^5 - 80x^3 + 360x^2 - 675 \leq 0$$

Ta có

$$f'(x) = 6x^4(x-4) + 4x^3(x-12) + 48x(15-4x) < 0$$

Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến, do đó

$$f(x) \leq f(3\sqrt[3]{2}) = 27(48\sqrt[3]{4} - 77) < 0$$

Tóm lại, ta có đpcm. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Phần 9. Lời kết

Sau một quá trình tìm hiểu và phân tích cẩn thận các bài toán, chắc hẳn rằng các bạn cũng đã phần nào cảm nhận được nét đẹp của $U.C.T$ dù rằng thực ra đây là một kỹ thuật của kì đến gần và dễ hiểu. Chúng tôi không xem $U.C.T$ là một phương pháp chính thống mà đến gần nó là một kỹ thuật cần biết và cần nắm vững khi bạn học bất đẳng thức. Nhiều người quan niệm rằng $U.C.T$ không có ý nghĩa gì nhưng theo bản thân chúng tôi nó nên được khái quát để sử dụng trong một số trường hợp. $U.C.T$ là một bước đệm quan trọng và đôi khi mang nhiều ý nghĩa trên con đường đi tìm lời giải cho bài toán. Một kỹ thuật hay không nhất thiết nó là nó giải được tất cả các dạng toán mà là nó phải đưa ta đến những ý tưởng, đường đi sáng sủa, dễ nghĩ, dễ nhận thấy bằng một trình quan.

Trong chuyên đề này nhiều bài toán hình thức cũng kinh như USAMO 2003, JMO 1997,... đều là những bài toán không hề khó, nhưng nếu không chọn đúng hướng làm thì sẽ dần dần những lời giải phức tạp hơn đúng với một toán học. Đó là những bài toán của bạn để dành cho $U.C.T$ kết hợp với kỹ thuật chuẩn hóa. Tuy nhiên đó chưa phải là điểm dừng.

Phần tiếp theo, xuất hiện nhiều bài toán mang đậm bản sắc hơn tức là nếu chỉ sử dụng mà $U.C.T$ thì sẽ không đi đích. Cách khác phức duy nhất là phân chia trường hợp để giải quyết. Đây cũng chính là cách để tìm ra các hướng nghiên cứu xét các biến. Việc đánh giá đây đòi hỏi người làm sẽ tinh tế và khéo léo hơn các phần trước. Tuy nhiên nếu bạn có niềm tin mà chuyển đều có thể giải quyết.

Sau khi đã nắm trong tay những kiến thức nhất định về kỹ thuật chúng ta bước qua một hướng không gian phức tạp hơn đó là dùng $U.C.T$ để giải quyết những bài toán mà điểm của trình độ được tăng 2 chỗ. Bao gồm 2 trường hợp đó là khi tất cả các biến bằng nhau và trường hợp có $(n-1)$ biến bằng nhau nhưng khác biến còn lại. Ở đây ta chú ý đến bất đẳng thức Vornicu Schur để học phức những điểm của $U.C.T$ của bạn.

Phần kỹ thuật phân tách theo từng cặp của 1 cũng là một dạng rất đẹp của kỹ thuật này, một số bài toán tiêu biểu cho dạng phân tách này là IMO 2001 và một số bài toán đã nêu ở trên. Dù $U.C.T$ đây dùng theo một tư tưởng khác với các phần trước.

Như các bạn đã biết $U.C.T$ thông thường được biết đến với các bài toán mà biến số độc lập không liên quan đến nhau. Tuy nhiên nếu xét với lập bài toán như vậy thì chưa hết hết nét đẹp của kỹ thuật đến gần này. Ta vẫn có thể sử dụng $U.C.T$ để tìm ra những bất đẳng thức phức với điều kiện liên quan một thiết với nhau. Tức là không tách theo đến lập từng biến để giải quyết. $U.C.T$ đây đòi hỏi bạn phải có những kiến thức của biến của hàm số để tìm ra các bước chính xác.

Cuối cùng chúng ta sẽ đã đi đến một số bài toán khó mà theo nhiều người quan niệm là không thể giải quyết bằng $U.C.T$, điều này là một điểm yếu của kỹ thuật này. Khi việc thiết lập sử dụng các thiết chất hơn thì mới chuyển số khác. Như các bạn đã thấy ở trên $U.C.T$ mà rằng mang những điểm điểm phức tạp hơn những hiểu quả mang lại thì quả là bất ngờ. Một số bài toán rất khó đã được đưa ra và dùng đến gần hơn để giải quyết theo một số phương pháp đã biết. Đó là một nét mới khá đẹp đẽ của kỹ thuật này. Tuy nhiên chắc hẳn đó vẫn chưa phải là $U.C.T$ “chết” nhất. Còn rất nhiều điều nữa về kỹ thuật này chờ các bạn khám phá. Chúng tôi xin kết thúc bài viết này tại đây. Hi vọng rằng với những dòng tâm sự cùng các bạn về bất đẳng thức đã phần nào gợi mở cho các bạn một cái gì đó giúp các bạn tìm thêm những ý tưởng sáng tạo mới, những hiểu biết mới. Và hãy luôn quan niệm rằng đứng sau lời giải cho một bài toán là cả một quá trình đắn đo, suy, sai và đúng. Hẹn gặp lại các bạn trong một ngày không xa.

Phần 10. Bài tập áp dụng

Bài toán 1. [Diễn đàn toán học]

Cho a, b, c, d, e là các số thực không âm thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a^2}{1-a^3} + \frac{b^2}{1-b^3} + \frac{c^2}{1-c^3} + \frac{d^2}{1-d^3} + \frac{e^2}{1-e^3}$$

Bài toán 2. [Vasile Cirtoaje, Crux Mathematicorum, Problem 3032]

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

Bài toán 3. [Mathematical Excalibur, Vol 9, Num 1, 8/2004]

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{8}$$

Bài toán 4. [Mihai Piticari, Dan Popescu, Old and New Inequalities]

Cho a, b, c là các số thực dương nhỏ hơn 1 thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$6(a^3 + b^3 + c^3) + 1 \geq 5(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài toán 5. [Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu, Old and New Inequalities]

Cho a, b, c là các số thực dương nhỏ hơn 1 thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \leq \frac{27}{10}$$

Bài toán 6. [Andrian Zahariuc, Old and New Inequalities]

Cho $a, b, c \in (1, 2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} \geq 1$$

Bài toán 7. [Vũ Đình Quý]

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$$

Bài toán 8. [Vasile Cirtoaje]

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a}{1+a^2} + \frac{1+b}{1+b^2} + \frac{1+c}{1+c^2} + \frac{1+d}{1+d^2} \leq 4$$

Bài toán 9. [Vasile Cirtoaje, GM-B, 11, 1999]

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3} + \frac{1}{1+b+b^2+b^3} + \frac{1}{1+c+c^2+c^3} + \frac{1}{1+d+d^2+d^3} \geq 1$$

Bài toán 10. [China TST 2004]

Cho a, b, c, d là các số thực dương sao cho $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

Bài toán 11. [Arkady Alt, Crux mathematicorum]

Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ ta có

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+a}} \geq \frac{a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3}}{\sqrt[3]{2}}$$

.....
Complete

- Võ Quốc Bá Cẩn
- Nguyễn Thúc Vũ Hoàng

Trong bài viết có số dòng như bài toán trích dẫn từ

- Algebraic Inequalities – Old and New Method của tác giả Vasile Cirtoaje .
- Sáng tạo Bất đẳng thức của tác giả Phạm Kim Hùng.
- Old and New Inequalities của các tác giả Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu.