

ỨNG DỤNG SỐ MŨ LỚN NHẤT CỦA THỪA SỐ NGUYÊN TỔ TRONG CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC

Ngày 17 tháng 2 năm 2013

Lê Trần Nhạc Long - THPT Chuyên Lê Quý Đôn- Đà Nẵng
Tặng diễn đàn VMF nhân dịp sinh nhật 8 năm của diễn đàn

Bài toán mở đầu : Cho p là một số nguyên tố lẻ ,số tự nhiên n và hai số nguyên dương phân biệt a và b . Gọi α và β lần lượt là số mũ lớn nhất của p trong $a - b$ và n . Thì số mũ lớn nhất của p trong $a^n - b^n$ là $p^{\alpha+\beta}$

Kí hiệu số mũ lớn nhất của p trong m là $v_p(m)$ hoặc $p^\alpha || m$, trong đó α là số mũ lớn nhất của p trong m

(Trong bài viết này ta sẽ sử dụng kí hiệu $p^\alpha || m$)

Chúng minh

Bài toán đưa về chứng minh rằng nếu $a \equiv b \pmod{p}$ và $p^\beta || n$ thì $p^\beta || \frac{a^n - b^n}{a - b}$. Giả sử $n = p^\beta k$. Ta sẽ chứng minh bài toán quy nạp theo β

Với trường hợp $\beta = 0$ tức là $n \not\equiv p$.

Khi đó ta có: $a^k \equiv b^k \pmod{p}$

$$a^k b^{n-k-1} \equiv b^{n-1} \pmod{p} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1} \pmod{p} \equiv n b^{n-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$$

$$\forall \frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k.$$

Do đó $\frac{a^n - b^n}{a - b} \not\equiv p$

Bây giờ giả sử bài toán đúng đến β ta sẽ chứng minh đúng đến $\beta + 1$ tức là ta chỉ cần chứng minh $p || \frac{a^{np} - b^{np}}{a^n - b^n}$. Thật vậy:

Vì $p | a - b$ nên $a = b + xp$ suy ra $a^k \equiv b^k + k b^{k-1} x p \pmod{p^2}$. Ta được

$$\frac{a^{np} - b^{np}}{a^n - b^n} = \sum_{k=0}^{p-1} a^{n(p-k-1)} b^{nk} \equiv \sum_{k=0}^{p-1} (b^{n(p-k-1)} + n(p-k-1) x p b^{n(p-k-1)-1}) b^{nk} \pmod{p^2}$$

$$\equiv p b^{n(p-1)} + \sum_{k=0}^{p-1} n(p-k-1) x p b^{n(p-1)-1} \equiv p b^{n(p-1)} \equiv p \pmod{p^2}$$

Vậy ta được $p \parallel \frac{a^{np} - b^{np}}{a^n - b^n}$. Do đó

$$p^{\beta+1} \parallel \frac{a^n - b^n}{a - b} \cdot \frac{a^{np} - b^{np}}{a^n - b^n} = \frac{a^{np} - b^{np}}{a - b}$$

Vậy bài toán được chứng minh

Chú ý: Ta có một trường hợp đặc biệt sau đây với $p = 2$

Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $2^\alpha \parallel \frac{a^2 - b^2}{2}$ và $2^\beta \parallel n$ thì $2^{\alpha+\beta} \parallel a^n - b^n$

Phần chứng minh kết quả này xin dành cho bạn đọc.

Với trường hợp $\beta = 0$ thì trường hợp đặc biệt này chỉ đúng khi $4 \mid a - b$

Và sau đây chúng ta sẽ đến với một số bài toán ứng dụng tính chất này

Bài toán 1 Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn $2^{2012} \mid 17^n - 1$
Lời giải

Ta có: $2^4 \parallel \frac{17^2 - 1}{2}$. Giả sử $2^\alpha \parallel n$.

Theo trường hợp đặc biệt của bài toán mở đầu ta được

$2^{4+\alpha} \parallel 17^n - 1$. Suy ra $\alpha + 4 \geq 2012 \Rightarrow \alpha \geq 2008$.

Điều đó có nghĩa là $2^{2008} \mid n \Rightarrow n \geq 2^{2008}$.

Theo bổ đề mở đầu ta được $2^{2012} \mid 17^{2^{2008}} - 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 2^{2008}

Bài toán 2 Giải phương trình nghiệm nguyên $2^{3x} + 1 = 19 \cdot 3^y$
Lời giải

Áp dụng bài toán mở đầu ta được $3^{n+1} \parallel 2^{3n} + 1$ vì 3^n là một số lẻ

Vì $19 \nmid 3$ nên do đó ta được $3^y \parallel 2^{3x} + 1$. Từ đó suy ra $y = x + 1$

Vậy phương trình trở thành: $2^{3x} + 1 = 57 \cdot 3^x$ (*)

Đặt $t = 3^x$. Ta chứng minh $2^t > 57t \forall t \geq 10$

Thật vậy ta có: $2^t = 2^6 \cdot 2^{t-6} = 64 \cdot 2^{t-6}$

Ta có $64 > 57$, ta có $2^4 > 10$ suy ra $2^{t-6} > t$ đúng với $t = 10$

Giả sử đúng đến t ta có $2^{t-5} = 2.2^{t-6} > 2t > t + 1$

Vậy bất trên đúng nên từ (*) suy ra $3^x < 10 \Rightarrow x \leq 2$

Thay $x = 0; 1; 2$ chỉ thấy $x = 2$ thỏa mãn (*).

Vậy $x = 2, y = 3$ là bộ nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài toán 3 (Đề chọn đội tuyển dự thi VMO 2012-KHTNHN vòng 2)
Cho dãy số được xác định như sau

$$a_1 = \frac{5}{2}, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 6a_n - 3 \quad \forall n \geq 1$$

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $\lfloor a_n \rfloor + 1$ chia hết cho 3^{2011}
Lời giải

Đặt $a_n = u_n + 1 \Rightarrow u_n = a_n - 1$

Đẳng thức đầu bài cho ta :

$$a_1 - 1 = \frac{3}{2}$$

$$a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3 + 3(a_n - 1)$$

Nên ta suy ra :

$$u_1 = \frac{3}{2}$$

$$u_{n+1} = u_n^3 + 3u_n$$

Ta chứng minh rằng : $u_1 = 2^{3^{n-1}} - \frac{1}{2^{k-1}} \forall n \geq 1$ (*)

Thật vậy , với $n = 1$ thì ta thấy thỏa

Nếu đẳng thức trên đúng với $n = k$ tức là : $u_k = 2^{3^{k-1}} - \frac{1}{2^{k-1}}$

Khi đó ta có : $u_{k+1} = u_k^3 + 3u_k = 2^{3^k} - \frac{1}{2^k}$

Do đó theo quy nạp toán học , ta có (*) .

Bởi thế nên :

$$3^{2011} \mid \lfloor a_n \rfloor + 1 = \lfloor u_n \rfloor + 2$$

$$\Leftrightarrow 3^{2011} \mid 2^{3^n} + 1, \quad (**)$$

Theo bài toán 1 ta có $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$

Nên suy ra $n \geq 2011 - 1 = 2010$

vậy giá trị n nhỏ nhất cần tìm là $n = 2010$

Bài toán 4 Cho $a^n + b^n = p^k$ với a, b và k là các số nguyên dương, p là một số nguyên tố lẻ và n là một số lẻ lớn hơn 1. Chứng minh rằng n phải là một lũy thừa của p
Lời giải

Vì n lẻ nên ta có

$$p^k = a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Vì vậy $a + b = p^r$ với $r \in \mathbb{N}^*, r \leq k$

Vì a và b là các số nguyên dương nên ta có $r \geq 1$

Giả sử $p^\beta \mid n$ sử dụng bài toán mở đầu ta được

$$p^{\beta+r} \mid a^n - (-b)^n = a^n + b^n = p^k$$

$$\text{Suy ra } p^{\beta+r} \mid p^k \Rightarrow \beta + r = k$$

Vì các số k và r là xác định nên phải có số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn $p^\beta \mid n$ để $a^n + b^n = p^k$, vì $a^m + b^m > a^n + b^n, \forall m > n$.

Nên n phải là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $p^\beta \mid n$ là p^β . Điều này suy ra n phải là một lũy thừa của p .

Bài toán được chứng minh

Bài toán 5 (IMO1990) Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn $n^2|2^n + 1$
Lời giải

Giả sử n là số nguyên dương sao cho $n^2|2^n + 1$ (1)

Suy ra n phải là một số lẻ, dễ thấy $n = 1$ thỏa mãn

Xét $n > 1$, gọi p_1 là ước nguyên tố nhỏ nhất của n .

Ta có : $2^{2^n} \equiv 1 \pmod{p_1}$

Gọi $d = \text{ord}_{p_1} 2$ thì $d < p_1, d|2n$, và $(n, d) = 1$. Suy ra $d|2$

Nếu $d = 1$ thì $p_1 = 1$ vô lí. Vậy $d = 2$ và $p_1|3$ suy ra $p_1 = 3$.

Giả sử $p^\beta || 3$ thì theo bài toán mở đầu ta được $3^{\beta+1} || 2^n + 1$

Kết hợp với (1) ta được

$$3^{2\beta} | 3^{\beta+1} || 2^n + 1 \Rightarrow 2\beta \leq \beta + 1 \Rightarrow \beta \leq 1$$

Từ đó suy ra $3 || n \Rightarrow n = 3k; (n, k) = 1$

Gọi p_2 là ước nguyên tố nhỏ nhất của k . Ta có $2^{6k} \equiv 1 \pmod{p_2}$

Gọi $d_2 = \text{ord}_{p_2} 2 \Rightarrow d_2 < p_2$ và $d_2|6k$

Mà $(d_2, k) = 1$ nên $d_2|6$.

Dễ thấy d_2 không thể bằng 1 hoặc 2

Nếu $d_2 = 3$, ta có $p_2|7 \Rightarrow p_2 = 7$

Nếu $d_2 = 6$, ta có $p_2|63 = 7.9 \Rightarrow p_2|7 \Rightarrow p_2 = 7$

Mà ta có: $2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{k+3} \equiv 2^k \pmod{7}$

và $2 \equiv 2 \pmod{7}$ và $2^2 \equiv 4 \pmod{7}$

Nên phương trình $2^k \equiv -1 \pmod{7}$ không có nghiệm nguyên

Suy ra $2^{7k} + 1$ không chia hết cho 7 với mọi k và p_2 không tồn tại. Vậy n chỉ có một ước nguyên tố duy nhất là 3, lại có $3 || n$ nên suy ra $n = 3$

Vậy các giá trị của n cần tìm là $n = 1$ và $n = 3$.

Kết thúc bài viết xin chúc diễn đàn ngày một phát triển, chúc các bạn và các thầy cô sức khỏe đón năm mới Nhâm Thìn vui vẻ!