Bổ đề 3.6 *Trong không gian véctơ V, giả sử hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\beta_1, ..., \beta_s)$. Khi đó $r \leq s$.*

Chứng minh: Theo giả thiết, có một biểu thị tuyến tính

$$\alpha_1 = a_1\beta_1 + \cdots + a_s\beta_s \qquad (a_i \in \mathbf{K}).$$

Vì hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ độc lập tuyến tính, nên $\alpha_1 \neq 0$. Do đó, có ít nhất một vô hướng $a_i \neq 0$. Không giảm tổng quát, ta giả sử $a_1 \neq 0$. Khi đó, β_1 biểu thị tuyến tính được qua hệ $(\alpha_1, \beta_2, ..., \beta_s)$:

$$\beta_1 = a_1^{-1}\alpha_1 - \sum_{i=2}^{n}(a_1^{-1}a_i)\beta_i.$$

Như vậy, hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua hệ $(\beta_1, ..., \beta_s)$; hệ thứ hai lại biểu thị tuyến tính qua hệ $(\alpha_1, \beta_2, ..., \beta_s)$. Hệ quả là $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, \beta_2, ..., \beta_s)$.

Ta sẽ chứng minh rằng $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_s)$ với mọi $i \leq \min\{r, s\}$ (sai khác một phép đánh số lại các véctơ $\beta_1, ..., \beta_s$). Thật vậy, ở trên ta đã chứng minh khẳng định này cho $i = 1$. Giả sử khẳng định đã được chứng minh cho i. Ta sẽ chứng minh nó còn đúng cho $i+1$, nếu số này $\leq \min\{r, s\}$. Theo giả thiết quy nạp, α_{i+1} biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_s)$:

$$\alpha_{i+1} = b_1\alpha_1 + \cdots + b_i\alpha_i + c_{i+1}\beta_{i+1} + \cdots + c_s\beta_s.$$

Có ít nhất một vô hướng $c_j \neq 0$, bởi vì nếu trái lại thì α_{i+1} biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_i)$, điều này trái với giả thiết hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ độc lập tuyến tính. Nếu cần thì đánh số lại các véctơ $\beta_{i+1}, ..., \beta_s$, ta có thể giả sử mà không giảm tổng quát $c_{i+1} \neq 0$. Kết hợp điều này với đẳng thức trên ta có một biểu thị tuyến tính của β_{i+1} qua $(\alpha_1, ..., \alpha_{i+1}, \beta_{i+2}, ..., \beta_s)$. Vì $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_i, \beta_{i+1}, ..., \beta_s)$, hệ này lại biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_{i+1}, \beta_{i+2}, ..., \beta_s)$, nên $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_{i+1}, \beta_{i+2}, ..., \beta_s)$.

Nếu $r > s$, áp dụng điều vừa được chứng minh với $i = s$, ta khẳng định $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ biểu thị tuyến tính qua $(\alpha_1, ..., \alpha_s)$. Điều này mâu thuẫn với tính độc lập tuyến tính của hệ $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$. Như vậy, ta có $r \leq s$. □

Chứng minh Định lý 2.5.

Giả sử $(\gamma_1, ..., \gamma_s)$ là một hệ sinh hữu hạn của V. Vì $V \neq \{0\}$, nên có véctơ $\alpha \neq 0$ trong V. Hệ gồm một véctơ khác không (α_1) độc lập tuyến tính. Nếu hệ này không độc lập tuyến tính cực đại, thì có hệ (α_1, α_2) độc lập tuyến tính.

Giả sử $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ là một hệ độc lập tuyến tính trong V. Hệ này biểu thị tuyến tính qua $(\gamma_1, ..., \gamma_s)$. Theo Bổ đề 3.6, ta có $r \leq s$. Như thế quá trình chọn các véctơ $\alpha_1, \alpha_2, ...$ để thu được một hệ độc lập tuyến tính phải dừng lại sau một số hữu hạn bước. Ta có một hệ véctơ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính cực đại trong V, với $n \leq s$. Theo Định lý 3.2, hệ này là một cơ sở của V.

Giả sử $(\beta_1, ..., \beta_m)$ cũng là một cơ sở của V. Vì $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ độc lập tuyến tính và biểu thị tuyến tính được qua $(\beta_1, ..., \beta_m)$, nên theo Bổ đề 3.6, ta có $n \leq m$. Tráo đổi vai trò của hai cơ sở nói trên, ta cũng có $m \leq n$. Như vậy, $m = n$. □

Ví dụ 3.7 (a) $\mathbf{K}^n$ là một $\mathbf{K}$-không gian véctơ n chiều. Các véctơ sau đây lập nên một cơ sở, được gọi là *cơ sở chính tắc* của không gian $\mathbf{K}^n$:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Thật vậy, véctơ $0 \in \mathbf{K}^n$ là véctơ có mọi thành phần bằng $0 \in \mathbf{K}$, vì thế hệ thức

$$a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$