

Chuyên đề 3

Phương Pháp Tọa Độ Trong Mặt Phẳng

§1. Tọa Độ Trong Mặt Phẳng

A. Kiến Thức Cần Nhớ

Cho hai vectơ $\vec{u}(x_1; y_1)$, $\vec{v}(x_2; y_2)$ và ba điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Ta có

- Hai vectơ bằng nhau: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.
- Các phép toán vectơ: $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$; $k\vec{u} = (kx_1; ky_1)$.
- Hai vectơ cùng phương: $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \neq 0 : \vec{u} = k\vec{v}$.
- Tích vô hướng của hai vectơ: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.
- Hai vectơ vuông góc: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Độ dài vectơ: $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.
- Góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.
- Tọa độ vectơ: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- Khoảng cách giữa hai điểm: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Tính chất trung điểm: I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Tính chất trọng tâm: G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

B. Bài Tập

3.1. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(2; 5)$, $C(4; 3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MC}$.

3.2. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(2; 5)$, $B(1; 1)$, $C(3; 3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tìm tọa độ tâm hình bình hành đó.

3.3. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-3; 2)$, $B(4; 3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M .

3.4. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(5; -3)$, đỉnh C thuộc trục Oy và trọng tâm G thuộc trục Ox . Tìm tọa độ đỉnh C và trọng tâm G .

3.5. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(-1; 3)$, $B(0; 4)$, $C(3; 5)$, $D(8; 0)$. Chứng minh $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

3.6. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(0; 6)$, $B(-2; 0)$, $C(2; 0)$. Gọi M là trung điểm AB , G là trọng tâm tam giác ACM và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh GI vuông góc với CM .

3.7. (A-04) Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(0; 2)$, $B(-\sqrt{3}; -1)$. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB .

3.8. (B-03) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A . Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G(\frac{2}{3}; 0)$ là trọng tâm tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

3.9. (D-04) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; m)$, $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G . Tìm m để tam giác GAB vuông tại G .

3.10. (D-2010) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; -7)$, trực tâm là $H(3; -1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2; 0)$. Xác định tọa độ đỉnh C , biết C có hoành độ dương.

§2. Phương Trình Đường Thẳng

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Vectơ chỉ phương và pháp tuyến.

- Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với Δ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .
- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc với Δ gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .

Lưu ý. $\vec{n}(a; b) \Rightarrow \vec{u}(b; -a)$ và ngược lại.

2. Phương trình tham số của đường thẳng.

- Đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b)$ có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}.$$

3. Phương trình tổng quát của đường thẳng.

- Dạng: $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).
- Nhận xét:
 - Đường thẳng $ax + by + c = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a; b)$.
 - Cho x_0 tùy ý $\Rightarrow y_0$ ta có điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng.
 - Đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ và có VTPT $\vec{n}(a; b)$ có PT: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.
 - Đường thẳng qua $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ gọi là PT đoạn chắn.
 - Trục Ox có phương trình $y = 0$ và trục Oy có phương trình $x = 0$.

4. Góc và khoảng cách.

- Góc giữa hai đường thẳng: $\cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.
- Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng: $d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song: $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \Delta_2)$, trong đó M là điểm bất kỳ trên Δ_1 .

B. Bài Tập

3.11. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-1; 2)$, $B(2; 3)$ và $C(6; 2)$. Viết phương trình đường thẳng qua A và song song với BC .

3.12. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(3; 5)$. Viết phương trình đường thẳng qua A cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại M, N sao cho diện tích tam giác OMN bằng 30.

3.13. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(8; 6)$. Lập phương trình đường thẳng qua A và tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 12.

3.14. (D-2010) Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(0; 2)$ và Δ là đường thẳng đi qua O . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ . Viết phương trình đường thẳng Δ , biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH .

3.15. (CD-2011) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(2; -4)$ và tạo với đường thẳng d một góc bằng 45° .

3.16. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: 2x - y - 1 = 0$; $d_2: x + 2y - 3 = 0$ và điểm $M(2; -1)$. Tìm giao điểm A của d_1, d_2 . Viết phương trình đường thẳng Δ qua M và cắt d_1, d_2 lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC cân tại A .

3.17. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4; -5)$ và hai đường cao lần lượt có phương trình là $d_1: 5x + 3y - 4 = 0$ và $d_2: 3x + 8y + 13 = 0$. Lập phương trình cạnh AC .

3.18. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có phương trình AB là $5x - 3y + 2 = 0$; các đường cao qua đỉnh A và B lần lượt là $d_1: 4x - 3y + 1 = 0$ và $d_2: 7x + 2y - 22 = 0$. Lập phương trình hai cạnh còn lại.

3.19. (CD-2012) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC . Các đường thẳng $BC, BB', B'C'$ lần lượt có phương trình là $y - 2 = 0, x - y + 2 = 0, x - 3y + 2 = 0$ với B', C' tương ứng là chân các đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC . Viết phương trình các đường thẳng AB, AC .

3.20. (D-09) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $M(2; 0)$ là trung điểm của cạnh AB . Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $d_1: 7x - 2y - 3 = 0$; $d_2: 6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC .

3.21. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 3)$ và hai trung tuyến kẻ từ B và C lần lượt có phương trình $d_1: x - 2y + 1 = 0$ và $d_2: y - 1 = 0$. Lập phương trình đường thẳng chứa cạnh BC .

- 3.22.** Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -1)$ và hai đường phân giác trong của góc B, C lần lượt có phương trình là $d_1 : x - 2y + 1 = 0$ và $d_2 : x + y + 3 = 0$. Lập phương trình cạnh BC .
- 3.23.** (B-2010) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , có đỉnh $C(-4; 1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC , biết diện tích tam giác bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.
- 3.24.** Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành có hai cạnh là $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$. Biết hình bình hành có tâm đối xứng $I(3; 5)$, hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành.
- 3.25.** (A-09) Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6; 2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Điểm $M(1; 5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta : x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB .
- 3.26.** Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ và điểm $M(3; 1)$. Tìm điểm $M(3; 1)$ sao cho đoạn MB là ngắn nhất.
- 3.27.** (B-07) Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(2; 2)$ và các đường thẳng $d_1 : x + y - 2 = 0, d_2 : x + y - 8 = 0$. Tìm điểm $B \in d_1$ và $C \in d_2$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .
- 3.28.** (B-04) Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(1; 1), B(4; -3)$. Tìm điểm C thuộc $d : x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.
- 3.29.** (B-2011) Trong mặt phẳng Oxy , cho các đường thẳng $\Delta : x - y - 4 = 0$ và $d : 2x - y - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm N thuộc d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn $OM.ON = 8$.
- 3.30.** (A-06) Trong mặt phẳng Oxy , cho ba đường thẳng $d_1 : x + y + 3 = 0, d_2 : x - y - 4 = 0, d_3 : x - 2y = 0$. Tìm M thuộc d_3 sao cho khoảng cách từ M đến d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến d_2 .
- 3.31.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $P(1; 6), Q(-3; -4)$ và đường thẳng $\Delta : 2x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ M trên Δ sao cho $MP + MQ$ là nhỏ nhất. Tìm tọa độ N trên Δ sao cho $|NP - NQ|$ là lớn nhất.
- 3.32.** (CĐ-09) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $C(-1; -2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x + y - 9 = 0; x + 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B .
- 3.33.** (A-02) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , đường thẳng chứa BC có phương trình $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, A và B thuộc Ox , bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm trọng tâm tam giác ABC .
- 3.34.** (B-2011) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B(\frac{1}{2}; 1)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm DEF . Cho $D(3; 1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A , biết A có tung độ dương.
- 3.35.** (B-08) Trong mặt phẳng Oxy , tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết hình chiếu C lên đường thẳng AB là $H(-1; -1)$, đường phân giác trong góc A là $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B là $4x + 3y - 1 = 0$.
- 3.36.** (D-2011) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B(-4; 1)$, trọng tâm $G(1; 1)$ và đường thẳng chứa phân giác trong của góc A có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và C .
- 3.37.** (A-2010) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6; 6)$; đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C , biết điểm $E(1; -3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.
- 3.38.** (B-09) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC cân tại đỉnh A có đỉnh $A(-1; 4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta : x - y - 4 = 0$. Xác định tọa độ các điểm B, C , biết diện tích tam giác ABC bằng 18.
- 3.39.** (B-02) Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(\frac{1}{2}; 0)$, $AB : x - 2y + 2 = 0$, cạnh $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh biết A có hoành độ âm.
- 3.40.** (A-05) Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường thẳng $d_1 : x - y = 0, d_2 : 2x + y - 1 = 0$. Tìm các đỉnh hình vuông $ABCD$ biết A thuộc d_1, B thuộc d_2 và B, D thuộc trục hoành.
- 3.41.** (D-2012) Trong mặt phẳng Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M(-\frac{1}{3}; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.
- 3.42.** (A-2012) Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M(\frac{11}{2}; \frac{1}{2})$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A .

§3. Phương Trình Đường Tròn

A. Kiến Thức Cần Nhớ

1. Phương trình đường tròn.

- Dạng 1: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ ($R > 0$) Có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{R^2}$.
- Dạng 2: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ($a^2 + b^2 > c$) Có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Tiếp tuyến với đường tròn.

- Tiếp tuyến tại M đi qua điểm M và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM}$.
- Phương trình tiếp tuyến tại M là: $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.

3. Bán kính đường tròn.

- Điểm M thuộc đường tròn khi và chỉ khi $R = IM$.
- Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi $R = d(I; \Delta)$.

B. Bài Tập

3.43. (B-06) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(-3; 1)$. Gọi T_1, T_2 là các tiếp điểm vẽ từ M đến (C) . Lập phương trình đường thẳng T_1T_2 .

3.44. (D-2011) Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(1; 0)$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A .

3.45. (CD-2012) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ và đường thẳng $d : 4x - 3y + m = 0$. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $\widehat{AIB} = 120^\circ$, với I là tâm của (C) .

3.46. (D-09) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C) . Xác định tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho $\widehat{IMO} = 30^\circ$.

3.47. (A-09) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta : x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C) . Tìm M để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

3.48. (A-2011) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C) , M là điểm thuộc Δ . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) , (A, B là tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M , biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

3.49. (B-09) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : (x - 2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y = 0$, $\Delta_2 : x - 7y = 0$. Xác định tọa độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1) , biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C) .

3.50. (A-07) Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(0; 2), B(-2; -2), C(4; -2)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ B và M, N là trung điểm AB, BC . Viết phương trình đường tròn qua H, M, N .

3.51. (D-2012) Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d : 2x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d , cắt trục Ox tại A và B , cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB = CD = 2$.

3.52. (B-2012) Trong mặt phẳng Oxy , cho các đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 = 4$, $(C_2) : x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d : x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2) tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d .

3.53. (A-2010) Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường thẳng $d_1 : \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2 : \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A , cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Viết phương trình của (T) , biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

§4. Phương Trình Elip

A. Kiến Thức Cần Nhớ



