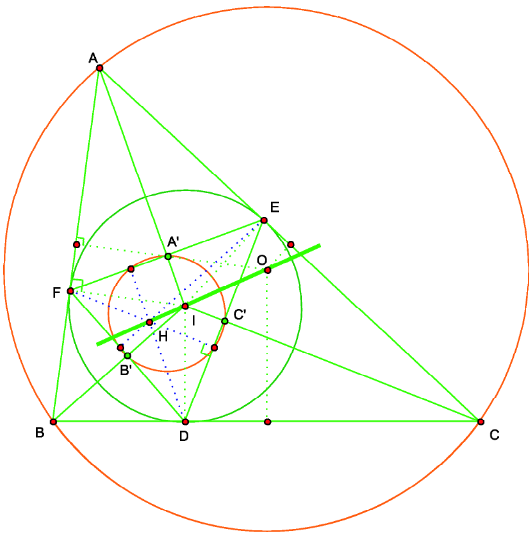
Hạ Vũ Anh

HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA
CHÙM ĐIỀU HÒA



Vĩnh Yên tháng 9 năm 2009

Kiến thức cơ bản

1.1 Tỷ số đơn, tỷ số kép của bộ các điểm thẳng hàng

Tỷ số đơn của bộ ba điểm A, B, C thẳng hàng, ký hiệu (AB, C), là tỷ số $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

Tỷ số kép của bộ bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D, ký hiệu $(ABCD)$, là tỷ số $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$

Nhận xét. Nếu $(ABCD) = \alpha$ thì

1. $(ABCD) = (BCDA) = (CDAB) = (DABC) = \alpha = (DCBA) = (CBAD) = (BADC) = (ADCB)$
2. $\frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\alpha} = (BACD) = (ABDC)$ nếu $\alpha \neq 0$
3. $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$

Định lý 1.1.1. *Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép của bộ bốn điểm thẳng hàng*

1.2 Hàng điểm điều hòa

Bộ bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D được gọi là lập thành một *hàng điểm điều hòa*, nếu $(ABCD) = -1$. Khi đó, cặp điểm A, B chia điều hòa cặp điểm C, D hay cặp điểm A, B liên hợp điều hòa đối với cặp điểm C, D.

Định lý 1.2.1. *Cho A, B, C, D thẳng hàng. Khi đó*

$$\begin{aligned}(ABCD) = -1 &\Longleftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \quad \textbf{(Hệ thức Descartes)}\\ &\Longleftrightarrow IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID} \quad \textbf{(Hệ thức Newton)}\\ &\Longleftrightarrow \overline{CI} \cdot \overline{CD} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} \quad \textbf{(Hệ thức Mc Laurint)}\end{aligned}$$

với I là trung điểm đoạn thẳng AB

1.3 Chùm điều hòa

Trong mặt phẳng, tập hợp các đường thẳng đồng quy tại một điểm S, được gọi là một chùm đường thẳng tâm S.

Mở rộng. Tập hợp các đường thẳng đôi một song song cũng được gọi là một chùm đường thẳng có tâm tại điểm xa vô tận.

Định lý 1.3.1. *Cho chùm bốn đường thẳng a, b, c, d. Một đường thẳng Δ bất kỳ cắt a, b, c, d tại A, B, C, D theo thứ tự đó. Khi đó $(ABCD)$ không phụ thuộc vào vị trí của Δ*

Giá trị không đổi của tỷ số kép $(ABCD)$ được gọi là tỷ số kép của chùm bốn đường thẳng, ký hiệu $(abcd)$ hay $S(abcd)$ khi cần quan tâm đến tâm của chùm.

Khi $(abcd) = -1$ ta nói rằng chùm bốn đường thẳng a, b, c, d lập thành một chùm điều hòa. Khi đó, cặp đường thẳng a, b liên hợp điều hòa đối với cặp c, d.

Định lý 1.3.2. *Chùm bốn đường thẳng a, b, c, d lập thành một chùm điều hòa khi và chỉ khi mọi đường thẳng song song với một trong bốn đường thẳng, bị ba đường còn lại chia thành hai đoạn bằng nhau.*

Định lý 1.3.3. *Trong một chùm điều hòa, cặp đường liên hợp vuông góc khi và chỉ khi chúng là phân giác của góc tạo bởi cặp còn lại.*

1.4 Tứ giác toàn phần

Hình hợp bởi bốn đường thẳng, đôi một cắt nhau, không có ba đường nào đồng quy, được gọi là *hình tứ cạnh toàn phần* hay *hình tứ giác toàn phần*. Mỗi một đường thẳng, được gọi là một cạnh, giao điểm của hai cạnh gọi là đỉnh, cặp đỉnh không chung cạnh gọi là cặp đỉnh đối diện, đoạn thẳng nối cặp đỉnh đối diện gọi là đường chéo.

Định lý 1.4.1 (Về đường thẳng Gauss)**.** *Trong một hình tứ cạnh toàn phần, trung điểm ba đường chéo cùng nằm trên một đường thẳng.*

Định lý 1.4.2. *Trong hình tứ cạnh toàn phần, mỗi đường chéo bị hai đường chéo kia chia điều hòa.*

1.5 Tứ giác điều hòa

Cho bốn điểm $A, B, C, D \in (O)$ và một điểm M thay đổi của (O). Khi đó tỷ số kép $M(ABCD)$ không phụ phuộc vào M. Giá trị của tỷ số kép đó được gọi là tỷ số kép của bộ bốn điểm đồng viên A, B, C, D, khi không sợ nhầm lẫn, chúng ta cũng ký hiệu $(ABCD)$.

Với tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O), nếu $(ABCD) = -1$ thì ta nói tứ giác nội tiếp $ABCD$ là một tứ giác điều hòa.

Với mỗi điểm $M \in (O)$, ký hiệu (MM) là để chỉ đường tiếp tuyến của (O) tại M.

Định lý 1.5.1. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó*

$$\begin{aligned}\text{Tứ giác } ABCD \text{ điều hòa} &\Longleftrightarrow (ABCD) = -1 \\ &\Longleftrightarrow (AA) \cap (CC) = P \in (BD) \\ &\Longleftrightarrow (BB) \cap (DD) = Q \in (AC) \\ &\Longleftrightarrow AB \cdot CD = BC \cdot DA\end{aligned}$$

Định lý 1.5.2. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) và $(AA) \cap (CC) = P \in (BD), (AC) \cap (BD) = Q$. Khi đó*

$$PQ = \frac{2}{\frac{1}{PB} + \frac{1}{PD}}$$

1.6 Cực và đối cực

1.6.1 Đường đối cực của một điểm đối với hai đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng $a \cap b = O$ và một điểm $M \notin a, b$. Khi đó điểm N được gọi là liên hợp với M đối với cặp đường thẳng a, b, nếu đường thẳng MN cắt a tại A, cắt b tại B sao cho $(MNAB) = -1$. Ngoài ra, quỹ tích tất cả những điểm N liên hợp với M đối với cặp đường thẳng cắt nhau a, b là một đường thẳng c đi qua $a \cap b$. Đường thẳng đó được gọi là đường đối cực của M đối với cặp đường thẳng cắt nhau a, b, và điểm M được gọi là cực của đường thẳng c đối với hai đường thẳng cắt nhau a, b.

1.6.2 Đường đối cực của một điểm đối với một đường tròn.

Cho trước một đường tròn (O). Hai điểm M và N được gọi là liên hợp đối với đường tròn (O) nếu đường tròn đường kính MN trực giao với (O). Từ đó, nếu (MN) cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, B, thì M, N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O) khi và chỉ khi $(MNAB) = -1$.

Cho trước đường tròn (O) và một điểm $M \neq O$. Đường thẳng MO cắt (O) tại A, B. Khi đó, quỹ tích tất cả những điểm N liên hợp với M đối với (O) là đường thẳng m vuông góc với MO tại H mà $(MHAB) = -1$. Đường thẳng m được gọi là đường đối cực của M đối với đường tròn (O), điểm M được gọi là cực của đường thẳng m đối với đường tròn (O). Ký hiệu x để chỉ đường đối cực của điểm X đối với đường tròn (O).

Định lý 1.6.1. *(Quan hệ liên thuộc)*

1. $M \in n \Longleftrightarrow N \in m$
2. *M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi m, n, p đồng quy*

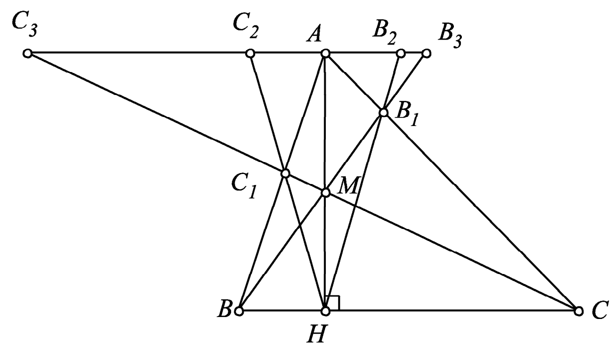
Định lý 1.6.2. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi P, Q, R là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và CD, BC và DA, AC và BD theo thứ tự đó. Khi đó O là trực tâm của tam giác PQR*

Ứng dụng giải toán

1. Cho tam giác ABC với đường cao AH. Xét $M \in AH, CM \cap AB = C_1, BM \cap AC = B_1$. Chứng minh rằng $\angle MHB_1 = \angle MHC_1$

   Lời giải.

   Đường thẳng qua A, song song với BC, cắt HB_1, HC_1 tại B_2, C_2. Theo tính chất của tứ giác toàn phần, có $H(BAC_1B_1) = -1$. Suy ra $AB_2 = AC_2$ và do đó $\angle B_1HC = \angle C_1HB$ suy ra đpcm

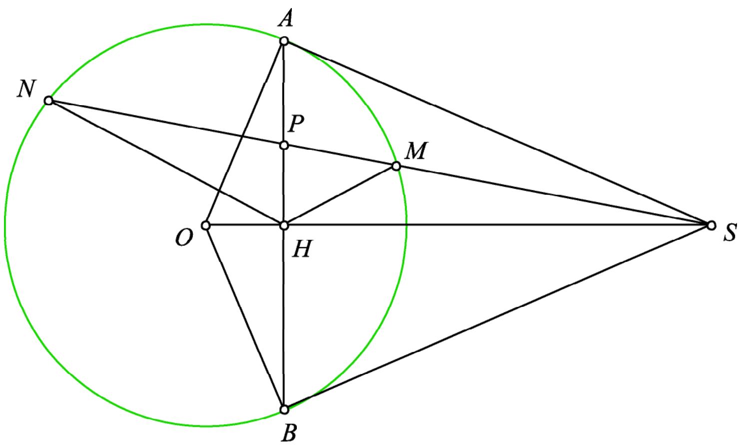
   

   Nhận xét rằng HB, HA là cặp tia liên hợp của chùm, nên $HA \perp HB \Leftrightarrow HA, HB$ là phân giác của các góc tạo bởi HB_1, HC_1. ĐPCM

   Chú ý. Bằng cách kẻ đường thẳng qua A, song song với BC (hình vẽ), áp dụng định lý Thalès, đạt được $AC_2 = AB_2$, rồi cũng suy ra đpcm.

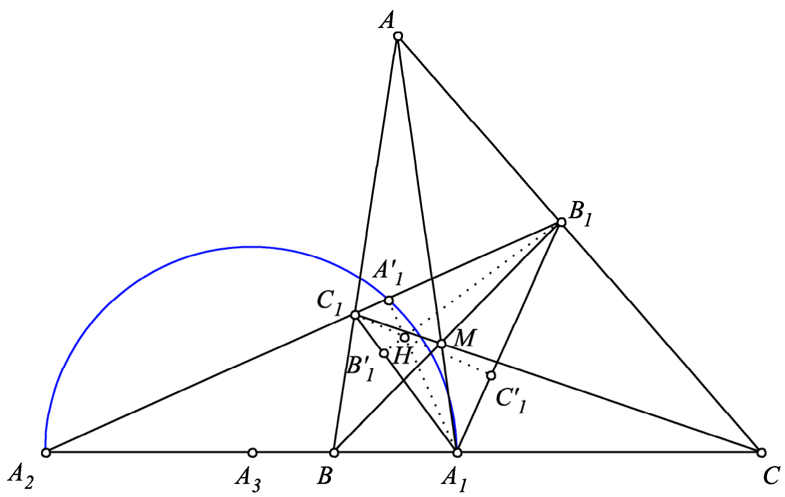
2. Cho đường tròn (O) và điểm S ở ngoài. Kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là tiếp điểm). Đường thẳng Δ qua S, cắt (O) tại $M, N, AB \cap SO = H$. Chứng minh rằng $\angle MHA = \angle NHA$

   Lời giải.



Do $(SPMN) = -1$ nên $H(SPMN) = -1$. Nhưng $HS \perp HP$, nên HS, HP là phân giác của các góc tạo bởi HM, HN (ĐPCM)

3. Cho điểm M ở bên trong tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(MA; BC), (MB; CA), (MC; AB)$. Các đường thẳng BC, B_1C_1 cắt nhau tại A_2, gọi A_3 là trung điểm A_1A_2. Các điểm B_2, C_2, B_3, C_3 được xác định tương tự. Gọi O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OH



Ký hiệu $\omega_a(A_3; R_a), \omega_b(B_3; R_b)$ và $\omega_c(C_3; R_c)$ theo thứ tự là đường tròn đường kính A_1A_2, B_1B_2 và C_1C_2. Gọi A'_1, B'_1, C'_1 là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 theo thứ tự đó.

Khi đó, do $\overline{HA_1} \cdot \overline{HA'_1} = \overline{HB_1} \cdot \overline{HB'_1} = \overline{HC_1} \cdot \overline{HC'_1}$, nên H nằm trên trục đẳng phương của ω_a và ω_b, của ω_b và ω_c, của ω_c và ω_a (1)

Mặt khác từ $(BCA_1A_2) = -1$ và A_3 là trung điểm A_1A_2, nên

$$R_a^2 = \overline{A_3A_1}^2 = \overline{A_3B} \cdot \overline{A_3C} = P_{A_3/(O)} = OA_3^2 - R^2 \Rightarrow P_{O/(\omega_a)} = OA_3^2 - R_a^2 = R^2$$

Hoàn toàn tương tự, cũng có $P_{O/(\omega_b)} = R^2 = P_{O/(\omega_c)}$ Suy ra O nằm trên trục đẳng phương của ω_a và ω_b, của ω_b và ω_c, của ω_c và ω_a (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

4. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, CD của tứ giác nội tiếp $ABCD$. Đường tròn (ABN) cắt lại (CD) tại P và đường tròn (CDM) cắt lại (AB) tại Q. Gọi $O = AC \cap BD$. Chứng minh rằng P, Q, O thẳng hàng.

Lời giải 1. Nếu $AB \parallel CD$ thì $P \equiv N, Q \equiv M$ và M, O, N thẳng hàng. ĐPCM
Nếu $AB \cap CD = F$, do các bộ bốn điểm $(A, B, N, P), (C, D, M, Q), (A, B, C, D)$ đồng viên, nên

$$\overline{FN} \cdot \overline{FP} = \overline{FA} \cdot \overline{FB} = \overline{FC} \cdot \overline{FD} \quad (1)$$

và

$$\overline{FM} \cdot \overline{FQ} = \overline{FC} \cdot \overline{FD} = \overline{FA} \cdot \overline{FB} \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $(FPCD) = -1$ và từ (2) suy ra $(FQAB) = -1$. Từ đó, do phép chiếu xuyên tâm (tâm O) bảo toàn tỷ số kép, nên P, O, Q thẳng hàng. ĐPCM.

Lời giải 2.Nếu $AB \parallel CD$ hoặc $AD \parallel BC$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.

Gọi E, F và P' theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AD; BC), (AB; CD)$ và $(EO; CD)$

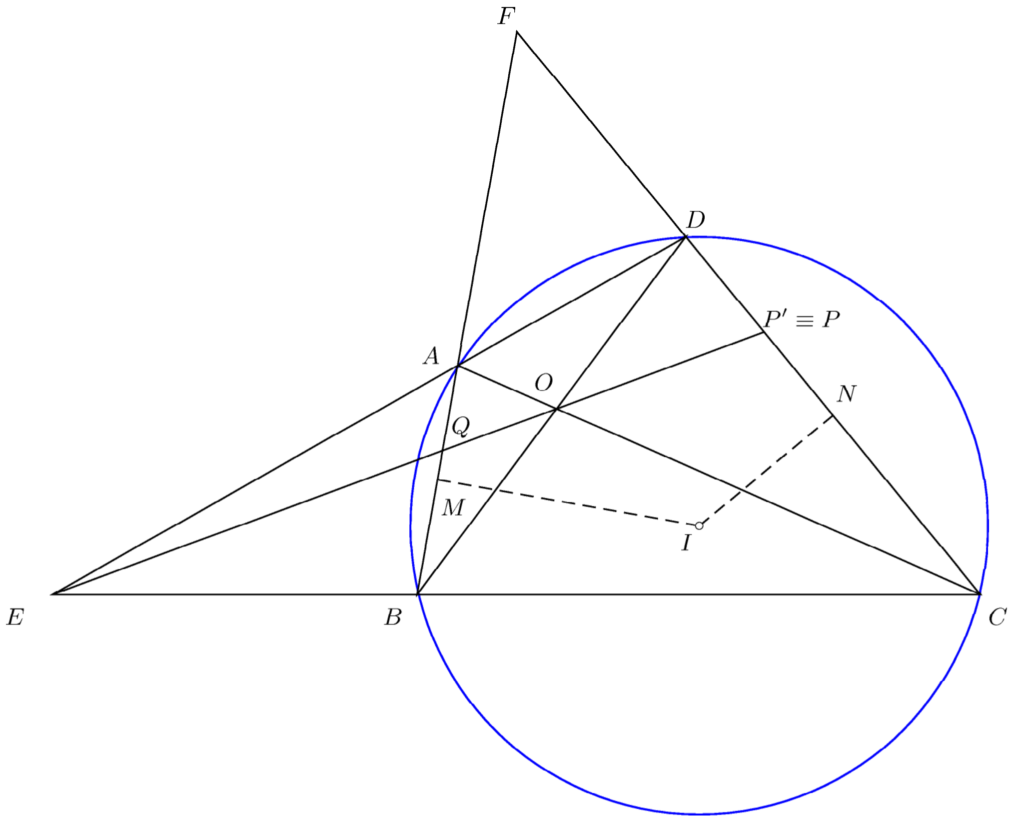
Trong hình tứ giác toàn phần $EBCODA$, đường chéo CD bị hai đường chéo EO, BA chia điều hòa, do đó $(CDP'F) = -1$

Theo hệ thức Mc Laurint, ta có $\overline{FP'} \cdot \overline{FN} = \overline{FD} \cdot \overline{FC}$ (1)

Mặt khác, do tứ giác $ABCD$ nội tiếp, nên $\overline{FD} \cdot \overline{FC} = \overline{FA} \cdot \overline{FB}$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $\overline{FP'} \cdot \overline{FN} = \overline{FA} \cdot \overline{FB}$ hay $P' \in (ABNP)$ tức là $P' \equiv P$. Vậy $P \in (EO)$.

Tương tự, cũng chứng minh được $Q \in (EO)$.



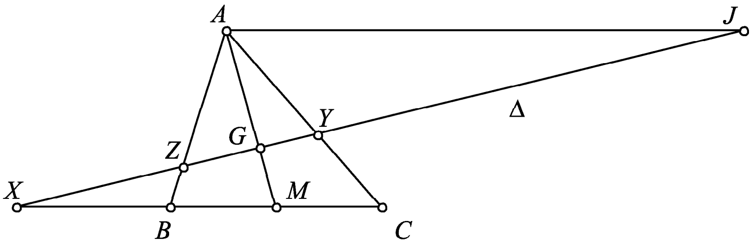
5. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Một đường thẳng Δ qua G, cắt các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự tại X, Y, Z.

   (a) Chứng minh rằng trong ba đại lượng $\frac{1}{GX}, \frac{1}{GY}, \frac{1}{GZ}$ có một đại lượng bằng tổng hai đại lượng còn lại.

   (b) Các đường thẳng qua A theo thứ tự song song với GB, GC cắt Δ tại N, P. Chứng minh rằng trong ba đại lượng $\frac{1}{GX}, \frac{1}{GN}, \frac{1}{GP}$ có một đại lượng bằng tổng hai đại lượng còn lại.

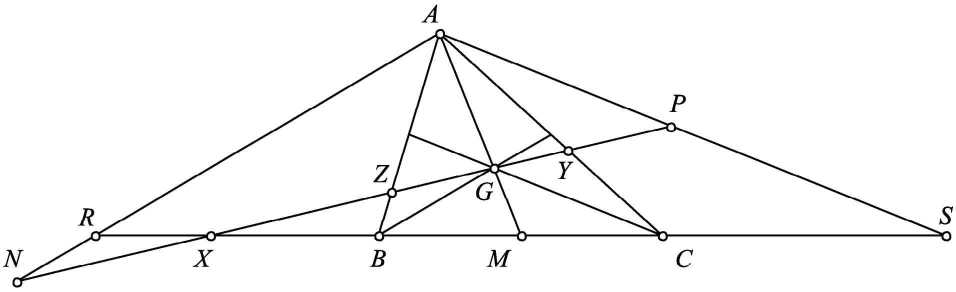
Lời giải. (a) Gọi M là trung điểm BC và J là gia điểm của đường thẳng qua A song song với BC với Δ. Do $(BCM\infty) = -1$ nên $(ZYGJ) = -1$. Từ đó, theo hệ thức Descartes ta có

$$\frac{2}{\overline{GJ}} = \frac{1}{\overline{GY}} + \frac{1}{\overline{GZ}}$$



Mặt khác, do G là trọng tâm tam giác, nên $\overline{GJ} = -2\overline{GX}$. Suy ra đpcm

(b) Các đường thẳng qua A, song song với GB, GC cắt BC tại R, S. Khi đó $V_M^3\ :\ \triangle ARS \to \triangle GBC$ suy ra $\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\ \ \forall O$



Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$. Do đó G là trọng tâm tam giác ARS. Áp dụng kết quả phần (a) có ngay đpcm.

6. Cho tam giác ABC không cân với ba đường cao AD, BE, CF. Đường thẳng (Δ) đi qua D, song song với EF, cắt các đường thẳng AB, AC tại M, N, các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP đi qua trung điểm BC

Lời giải. Theo tính chất của tứ giác toàn phần, ta có $(BCDP) = -1$. Khi đó, nếu gọi Q là trung điểm BC, theo hệ thức McLaurint ta có

$$\overline{DQ} \cdot \overline{DP} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} \tag{1}$$

Mặt khác, do tứ giác $BCEF$ nội tiếp (đường tròn đường kính BC) và $MN \parallel EF$ nên

$$\begin{aligned}(NC; NM) &\equiv (EC; EF) \pmod{\pi}\\ &\equiv (BC; BF) \pmod{\pi}\\ &\equiv (BC; BM) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

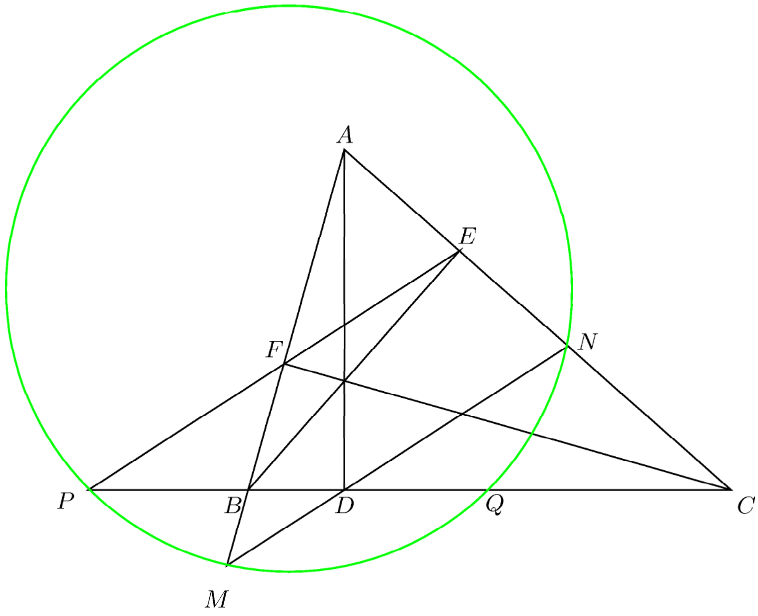
Suy ra bốn điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn. Do đó

$$\overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DM} \cdot \overline{DN} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

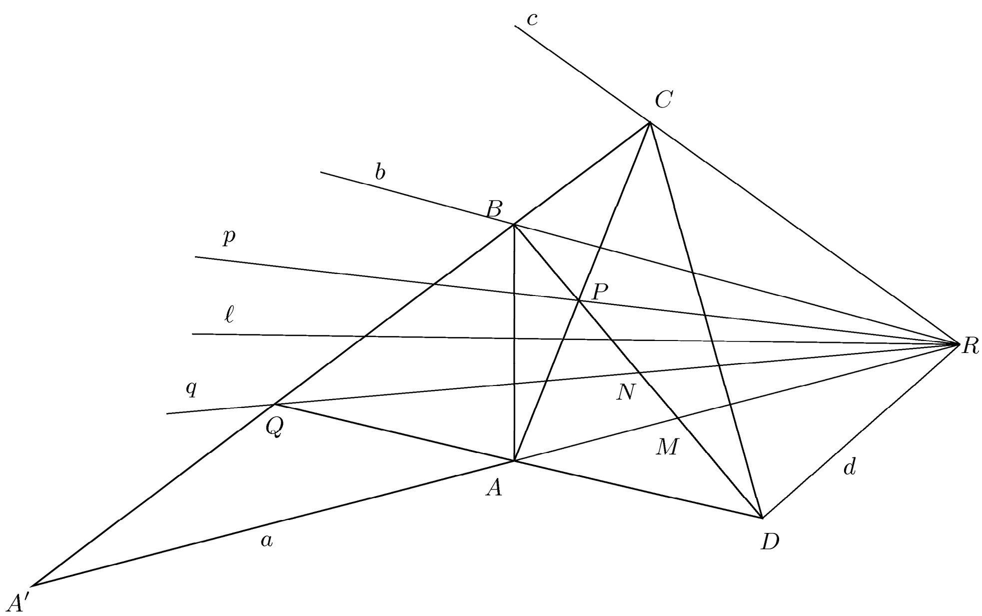
$$\overline{DQ} \cdot \overline{DP} = \overline{DM} \cdot \overline{DN}$$

tức là bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một đường tròn.



7. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $P = AC \cap BD, Q = AD \cap BC$, và R là một điểm tùy ý trong mặt phẳng, không nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD. Chứng minh rằng $(RA; RD) \equiv (RC; RB) \pmod{\pi} \Leftrightarrow (RB; RP) \equiv (RQ; RA) \pmod{\pi}$

   Lời giải.



Gọi ℓ là phân giác của $\angle ARB$. Ký hiệu $x := RX,\ \forall X$ và gọi $p' = Đ_\ell(q)$.

Ta có

$$\begin{aligned}(abcq) &= (A'BCQ)\\ &= (MBPD) \quad \text{(chiếu tâm xuyên tâm, tâm chiếu } A)\\ &= (abpd) = (badp)\end{aligned}$$

Nếu $(a; d) \equiv (c; b) \pmod{\pi}$, do tính đối xứng ta có

$$(badp') = (abcq) = (badp)$$

Suy ra $p' \equiv p$ hay $(RB; RP) \equiv (RQ; RA) \pmod{\pi}$

Chiều ngược lại chứng minh tương tự

Bài tập tự giải

1. Cho tam giác ABC có $\angle CAB < 90^\circ$ nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở P. Đoạn PO cắt (O) tại N và cắt BC tại M. Chứng minh rằng $\angle MAN = \angle PAN$

   (Đường thẳng AP là đường đối trung của tam giác ABC)

2. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AC, BD. Chứng minh rằng $\angle AMB = \angle AMD \Longleftrightarrow \angle BNA = \angle BNC$
   Hint. Cùng tương đương với tứ giác $ABCD$ điều hòa.

3. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). $AB \cap CD = S, AC \cap BD = I, AD \cap BC = J$. Qua S, kẻ hai tiếp tuyến SM, SN tới đường tròn (M, N là tiếp điểm). Chứng minh rằng M, N, I, J thẳng hàng.

4. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của O trên AC. Chứng minh rằng $\angle BHA = \angle DHA$

5. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Một đường thẳng Δ qua O, cắt các đường thẳng AB, BC, CD và DA tại M, Q, N và P theo thứ tự đó. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(CM; AN), (AQ; CP), (DN; BM), (DQ; BP)$ tương ứng. Chứng minh rằng X, Y, Z, T thẳng hàng.

6. Cho tam giác ABC nhọn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AA_1, AA_2 tới đường tròn đường kính BC (A_1, A_2 là tiếp điểm). Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2$ đồng viên.

7. Cho tam giác ABC. Lấy các cạnh BC, CA, AB làm đáy, dựng ra ngoài các hình vuông có tâm lần lượt là A', B', C'. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của tam giác $A'B'C'$ là tâm đẳng phương của đường tròn nội tiếp các hình vuông.

8. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Tiếp tuyến tại A, B của (O_1) cắt nhau ở Q. Xét điểm M trên đường tròn (O_1). Các đường thẳng AM, BM cắt lại (O_2) tại N, P theo thứ tự đó. Chứng minh rằng đường thẳng MQ luôn đi qua trung điểm NP

9. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M, N là tiếp điểm của (O) với AB, CD. Gọi A', B', M' là hình chiếu của A, B, M trên CD, và D', C', N' là hình chiếu của D, C, N trên AB theo thứ tự đó. Chứng minh rằng $B'D', A'C', M'N'$ đồng quy.

10. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, CD của tứ giác nội tiếp $ABCD$. Đường tròn (ABN) cắt lại (CD) tại P và đường tròn (CDM) cắt lại (AB) tại Q. Gọi $O = AC \cap BC$. Chứng minh rằng P, Q, O thẳng hàng.

11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ phân giác HB_1, HC_1 của các góc $\angle AHC, \angle AHB$ $(C_1 \in AB, B_1 \in AC)$. Gọi I, J là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác AHB, AHC và B_2, C_2 theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(BB_1; IJ), (CC_1; IJ)$. Tính góc $\angle B_2HC_2$

to be continued ...