

CÁC DẠNG TOÁN VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM CƠ BẢN

Trịnh Đào Chiến

Trường Cao đẳng Sư phạm Gia Lai

Các bài toán về giải bất phương trình hàm thường là những bài toán khó. Trong những năm gần đây, các dạng toán loại này đôi khi xuất hiện trong các đề thi chọn học sinh giỏi các cấp và Olympic Toán quốc tế. Chẳng hạn Bài toán 3, trong IMO 2011 mới đây:

“Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm giá trị thực xác định trên tập các số thực và thỏa mãn

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

với mọi số thực x và y . Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \leq 0$ ”

Bài viết này đề cập đến phương pháp giải một lớp các bất phương trình hàm dạng cơ bản. Đây là một trong những phương pháp có thể tham khảo để tìm tòi lời giải cho một bài toán về bất phương trình hàm.

1. Bất phương trình hàm với cặp biến tự do.

Xét hàm biến số thực f thỏa mãn các tính chất sau

$$f(x+y) \geq f(x)f(y).$$

Ta có thể tìm được hàm f thỏa mãn tính chất trên nếu f thỏa mãn thêm một số điều kiện ban đầu nào đó, chẳng hạn (xem [1])

$$f(x) \geq a^x, \quad a > 0.$$

Để giải bài toán trên, trước hết ta cần giải các bài toán sau

Bài toán 1. *Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

(i) $f(x+y) \geq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$

(ii) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Giải. Từ các điều kiện của bài toán, thay $x=0$ ta thu được $f(0) \geq 2f(0)$ và $f(0) \geq 0$. Do đó $f(0)=0$.

Vậy nên

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \geq f(x) + f(-x) \geq 0.$$

Suy ra $f(x) \equiv 0$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 2. Cho trước $a \in \mathbb{R}$. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) $f(x+y) \geq f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R};$
- (ii) $f(x) \geq ax, \forall x \in \mathbb{R}.$

Giải. Xét hàm số $g(x) = ax$. Đề ý rằng

$g(x+y) = g(x) + g(y)$. Đặt $f(x) = g(x) + h(x)$. Khi đó, ta thu được các điều kiện

- (i) $h(x+y) \geq h(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R};$
- (ii) $h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Theo Bài toán 1, ta có $h(x) \equiv 0$ hay $f(x) = ax$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = ax$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Bây giờ, ta trở lại bài toán đã nêu ban đầu.

Bài toán 3. Cho trước $a > 0$. Xác định các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) $f(x+y) \geq f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R};$
- (ii) $f(x) \geq a^x, \forall x \in \mathbb{R}.$

Giải. Nhận xét rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy ta có thể logarit hóa hai vế các bất đẳng thức của điều kiện đã cho

- (i) $\ln f(x+y) \geq \ln f(x) + \ln f(y), \forall x, y \in \mathbb{R};$
- (ii) $\ln f(x) \geq (\ln a)x, \forall x \in \mathbb{R}.$

Đặt $\ln f(x) = j(x)$, ta thu được

- (i) $j(x+y) \geq j(x) + j(y), \forall x, y \in \mathbb{R};$
- (ii) $j(x) \geq (\ln a)x, \forall x \in \mathbb{R}.$

Ta nhận được dạng của Bài toán 2. Vậy $j(x) = (\ln a)x$. Suy ra $f(x) = a^x$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = a^x$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

Nhận xét rằng, các bài toán trên vẫn giải được nếu tập xác định R của các hàm số trên được thay bởi một khoảng mở U chứa 0 sao cho với mọi $x, y \in U$ thì $x + y \in U$.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: Trong Bài toán 3, có thể thay hàm số $g(x) = a^x$ bởi hàm số nào để bài toán cũng có nghiệm không tầm thường?

Nhận xét rằng

- Với $0 < a < 1$ thì $a^x > 1 + x$, $\forall x < 0$ và $a^x \leq 1 + x$, $\forall x \geq 0$;
- Với $a \geq 1$ thì $a^x > 1 + x$, $\forall x < 0$; $a^x \leq 1 + x$, $\forall x \in [0; 1)$; $a^x \geq 1 + x$, $\forall x \geq 1$.

Từ đó, một cách tự nhiên, tiếp theo ta xét hàm số $g(x) = x + 1$.

Ta có bài toán sau

Bài toán 4. Giả sử U là khoảng mở chứa 0 sao cho với mọi $x, y \in U$ thì $x + y \in U$. Xác định các hàm số $f: U \rightarrow R$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (i) $f(x + y) \geq f(x)f(y)$, $\forall x, y \in U$;
- (ii) $f(x) \geq 1 + x$, $\forall x \in U$.

Giải. Bởi (i), ta có

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \geq f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0, \quad x \in U.$$

Nếu $f(x_0) = 0$, thì

$$0 = f(x_0) = f\left(\frac{x_0}{2} + \frac{x_0}{2}\right) \geq f^2\left(\frac{x_0}{2}\right).$$

Do đó $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = 0$. Quy nạp, ta có $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$ với mỗi số nguyên dương n .

Tuy nhiên, từ (ii) suy ra rằng rằng $f(x) > 0$ với mọi $x \in U$ và x gần 0. Do đó điều trên là mâu thuẫn. Vậy

$$f(x) > 0, \quad x \in U.$$

Tiếp theo, từ (i) và (ii), ta sẽ thấy rằng f khả vi tại mỗi điểm $x \in U$ và $f'(x) = f(x)$.

Thật vậy, từ (i) và (ii), với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x + h) - f(x) \geq f(x)f(h) - f(x) = (f(h) - 1)f(x) \geq hf(x).$$

Do đó

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq f(x).$$

Mặt khác, cũng từ (i) và (ii), với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x) = f(x+h-h) \geq f(x+h)f(-h) \geq (1-h)f(x+h).$$

Suy ra

$$(1-h)f(x) + hf(x) \geq (1-h)f(x+h).$$

Do đó

$$hf(x) \geq (1-h)(f(x+h) - f(x)),$$

hay

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}.$$

Vậy, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}.$$

Tương tự, bất đẳng thức trên cũng đúng đối với chiều ngược lại, với $h < 0$ đủ nhỏ.

Do đó, ta có

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tồn tại và bằng $f(x)$, với $x \in U$.

Từ đó, với $x \in U$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0.$$

Do đó

$$f(x) = C.e^x \quad (C \text{ là hằng số}).$$

Hơn nữa, từ (i) ta có $f(0) \geq f^2(0)$ hay $f(0) \leq 1$ và từ (ii) ta có $f(0) \geq 1$. Do đó $C = f(0) = 1$. Thử lại, hàm $f(x) = e^x$ thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii).

Như vậy, với $g(x) = a^x$ hoặc $g(x) = 1+x$, Bài toán 3 và Bài toán 4 đều giải được. Một câu hỏi tiếp theo được đặt ra: Với những lớp hàm $g(x)$ nào thì bài toán tổng quát là giải được?

Ta có kết quả sau

Định lý 1. Giả sử U là khoảng mở chứa 0 sao cho với mọi $x, y \in U$ thì $x+y \in U$. Nếu hàm số $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

(i) $f(x+y) \geq f(x)f(y), \quad \forall x, y \in U;$

(ii) $f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in U;$

trong đó $g(x)$ là hàm số cho trước khả vi tại 0, $g(0)=1$, $g'(0)=k$, thì $f(x)=e^{kx}$.

Chứng minh. Tương tự lời giải Bài toán 4, từ các điều kiện đã cho, ta suy ra $f(x)>0$ với mọi $x \in U$. Giả sử rằng $f(x)$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện của định lí.

Thế thì, với $h>0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x+h)-f(x) \geq f(x)f(h)-f(x)=(f(h)-1)f(x) \geq (g(h)-1)f(x).$$

Do đó

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq \frac{g(h)-g(0)}{h} f(x).$$

Mặt khác, cũng từ (i) và (ii), với $h>0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x)=f(x+h-h) \geq f(x+h)f(-h) \geq f(x+h)g(-h).$$

Vì hàm $g(x)$ khả vi tại 0 nên nó liên tục tại điểm đó. Do đó, với $h>0$ đủ nhỏ, ta có $g(-h)>0$.

Khi đó, với $h>0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x+h)-f(x) \leq -\frac{g(-h)-1}{g(-h)} f(x) = \frac{g(-h)-g(0)}{-h.g(-h)} f(x).$$

Vậy với $h>0$ đủ nhỏ, từ các kết quả trên, ta có

$$\frac{g(h)-g(0)}{h} f(x) \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{g(-h)-g(0)}{-g(-h)} f(x)$$

Tương tự, bất đẳng thức trên cũng đúng đối với chiều ngược lại, với $h<0$ đủ nhỏ.

Do đó, ta có

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tồn tại và bằng $g'(0)f(x)=kf(x)$, với $x \in U$.

Từ đó, với $x \in U$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{e^{kx}} \right)' = \frac{f'(x)-kf(x)}{e^{kx}} = \frac{kf(x)-kf(x)}{e^{kx}} = 0.$$

Do đó

$$f(x) = C.e^{kx} \quad (C \text{ là hằng số}).$$

Hơn nữa, từ (i) ta có $f(0) \geq f^2(0)$ hay $f(0) \leq 1$ và từ (ii) ta có $f(0) \geq 1$. Do đó $C = f(0) = 1$. Vậy $f(x) = e^{kx}$. Ta có điều phải chứng minh.

Rõ ràng $f(x) = e^{kx}$ thỏa mãn điều kiện (i). Nếu giả thiết bài toán có thêm điều kiện $g(x) \leq e^{kx}$, với $x \in U$, thì hàm số $f(x) = e^{kx}$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài toán.

Từ kết quả trên, ta có

Hệ quả 1. Giả sử U là khoảng mở chứa 0 và $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện (i) với mọi $x, y \in U$ sao cho $x+y \in U$. Nếu f khả vi tại 0, $f(0) = 1$ và $f'(0) = k$ thì $f(x) = e^{kx}$, $x \in U$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1, với $g(x) = f(x)$, $\forall x \in U$, ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 2. Giả sử F là hàm xác định trên khoảng mở U chứa 0 và thỏa mãn

$$F(x+y) \leq F(x) + F(y)$$

với mọi $x, y \in U$ sao cho $x+y \in U$. Nếu F bị chặn trên bởi một hàm G khả vi tại 0 và thỏa mãn $G(0) = 1$, thì $F(x) = kx$, $x \in U$, trong đó k là một hằng số.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1, với $f(x) = e^{-F(x)}$ và $g(x) = e^{-G(x)}$, ta có được điều phải chứng minh.

Tương tự phương pháp chứng minh Định lý 1, ta có kết quả sau đây

Định lý 2. Giả sử U là khoảng mở chứa 0 sao cho với mọi $x, y \in U$ thì $x+y \in U$. Nếu hàm số $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện sau

$$f(x+y) \geq f(x)g(y), \quad \forall x, y \in U,$$

trong đó $g(x)$ là hàm số cho trước khả vi tại 0, $g(0) = 1$, $g'(0) = k$, thì mọi nghiệm của bất phương trình hàm trên đều có dạng $f(x) = Ce^{kx}$, C là hằng số.

Hệ quả 3. Ta có $f(x) = e^{kx}$ và $g(x) = e^{kx}$ là nghiệm duy nhất của hệ bất phương trình hàm

$$\begin{cases} f(x+y) \geq f(x)g(y); \\ g(x+y) \geq g(x)f(y), \end{cases}$$

với điều kiện $f(0)=1$, $g(x)$ là khả vi tại 0, $g(0)=1$ và $g'(0)=k$.

Chứng minh. Từ bất phương trình hàm thứ nhất, áp dụng Định lí 2 ta được $f(x)=Ce^{kx}$ (C là hằng số). Vì $f(0)=1$, nên $C=1$. Do đó $f(x)=e^{kx}$.

Tương tự, từ bất phương trình hàm thứ hai, áp dụng Định lí 2 ta cũng có $g(x)=e^{kx}$.

Rõ ràng $f(x)=e^{kx}$ và $g(x)=e^{kx}$ thỏa mãn hệ bất phương trình hàm đã cho, với những điều kiện đã nêu. Hệ quả được chứng minh.

Định nghĩa 1. Hàm $g(x)$ xác định trên một khoảng mở U chứa 0 được gọi là hàm tựa bởi l tại 0 nếu tồn tại một hàm $k(x)$ xác định trên U sao cho $k(0)=g(0)$, $k'(0)=l$ tồn tại và $k(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in U$.

Hệ quả 4. Bất phương trình hàm

$$f(x+y) \geq f(x)g(y),$$

trong đó g là một hàm cho trước xác định trên I với $g(0)=1$ và là hàm tựa bởi l tại 0, có nghiệm không âm f khi và chỉ khi $e^{lx} \geq g(x)$ trên I và trong trường hợp này mọi nghiệm không âm đều có dạng $f(x)=Ce^{lx}$, trong đó $C \geq 0$ là hằng số.

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ là một nghiệm không âm của bất phương trình hàm đã cho. Vì $g(x) \geq k(x)$ trên U , nên ta có

$$f(x+y) \geq f(x)k(y),$$

trong đó $k(x)$ thỏa mãn $k'(0)=l$ và $k(0)=g(0)=1$. Áp dụng Định lí 2 vào bất phương trình hàm này, ta có $f(x)=Ce^{lx}$, trong đó $C \geq 0$ là hằng số. Rõ ràng, $f(x)=Ce^{lx}$ là một nghiệm không âm của bất phương trình hàm đã cho nếu $e^{lx} \geq g(x)$ trên U .

Từ Hệ quả 4, ta có thể sáng tác ra các bài toán, chẳng hạn sau đây

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$, xác định trên khoảng mở $(-e; \infty)$, thỏa mãn hệ bất phương trình hàm sau

$$\begin{cases} f(x+y) \geq f(x) \cdot \log f(y); \\ f(x) \geq x+e. \end{cases}$$

Giải. Trên khoảng mở $(-e; \infty)$, mỗi nghiệm dương f được suy ra bởi bất phương trình hàm thứ hai. Ngoài ra, từ hệ bất phương trình hàm đã cho, ta có $f(0)=e$. Áp dụng Hệ quả 4 đối với trường hợp $g(x)=\log f(x)$ là hàm tựa bởi $\frac{1}{e}$ tại 0, qua hàm $k(x)=\log(x+e)$. Do đó, theo chứng minh của Hệ quả 4

, ta có $f(x)=f(0) \cdot e^{\frac{x}{1+\frac{x}{e}}} = e^{1+\frac{x}{e}}$. Thử lại, ta thấy hàm số $f(x)=e^{1+\frac{x}{e}}$ thỏa mãn hệ bất phương trình hàm đã cho trên khoảng mở $(-e; \infty)$.

Bài toán 6. Trên khoảng mở chứa 0 có một nghiệm của hệ bất phương trình hàm

$$\begin{cases} f(x+y) \geq f(x) \cdot e^{f(y)}; \\ f(x) \geq x^2. \end{cases}$$

Giải. Giả sử $f(x)$ là một nghiệm xác định trên một khoảng mở chứa 0 nào đó. Thế thì, bởi bất phương trình hàm thứ hai, $f(x)$ là không âm. Từ hệ bất phương trình đã cho suy ra $f(0)=0$. Áp dụng Hệ quả 4 đối với trường hợp $g(x)=e^{f(x)}$ là hàm tựa bởi 0 tại 0, qua hàm $k(x)=e^{x^2}$. Hơn nữa, vì $f(0)=0$, nên ta có $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn bất phương trình hàm thứ hai trên khoảng không mở chứa 0.

Định lí sau đây cho ta kết quả về việc giải một dạng bất phương trình hàm cơ bản khác

Định lí 3. Giả sử U là khoảng mở chứa 0 sao cho với mọi $x, y \in U$ thì $x+y \in U$. Xét bất phương trình hàm

$$f(x+y) \geq f(x)g(y) + f(y)g(x), \quad \forall x, y \in U,$$

trong đó $g(x)$ là một hàm giới nội, khả vi tại 0, $g(0)=1$ và $g'(0)=k$. Thế thì $f(x) \equiv 0$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bất phương trình đã cho, với điều kiện

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Chứng minh. Giả sử rằng $f(x)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho, với điều kiện

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Thế thì, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$f(x+h) \geq f(x)g(h) + f(h)g(x)$$

hay

$$f(x+h) - f(x) \geq (g(h) - 1)f(x) + f(h)g(x).$$

Do đó

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{g(h) - g(0)}{h} f(x) + \frac{f(h)}{h} g(x).$$

Mặt khác, ta có

$$f(x) = f(x+h-h) \geq f(x+h)g(-h) + f(-h)g(x+h)$$

hay

$$g(-h)(f(x) - f(x+h)) \geq g(-h)f(x) - f(x) + f(-h)g(x+h)$$

Vì hàm $g(x)$ khả vi tại 0 nên nó liên tục tại điểm đó. Do đó, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có $g(-h) > 0$.

Vậy, với $h > 0$ đủ nhỏ, ta có

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\leq \frac{(g(-h) - 1)f(x) + f(-h)g(x+h)}{-g(-h)} \\ &= \frac{g(-h) - g(0)}{-h \cdot g(-h)} f(x) + \frac{f(-h)}{-h \cdot g(-h)} g(x+h). \end{aligned}$$

Vậy với $h > 0$ đủ nhỏ, từ các kết quả trên, ta có

$$\begin{aligned} \frac{g(h) - g(0)}{h} f(x) + \frac{f(h)}{h} g(x) &\leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\leq \frac{g(-h) - g(0)}{-h \cdot g(-h)} f(x) + \frac{f(-h)}{-h \cdot g(-h)} g(x+h). \end{aligned}$$

Tương tự, bất đẳng thức trên cũng đúng đối với chiều ngược lại, với $h < 0$ đủ nhỏ.

Do đó, ta có

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

tồn tại và bằng $g'(0)f(x) = kf(x)$, với $x \in U$, vì

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

và $g(x)$ là một hàm giới nội.

Từ đó, với $x \in U$, ta có

$$\left(\frac{f(x)}{e^{kx}} \right)' = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}} = \frac{kf(x) - kf(x)}{e^{kx}} = 0.$$

Do đó

$$f(x) = Ce^{kx} \quad (C \text{ là hằng số}).$$

Hơn nữa, từ điều kiện

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

suy ra rằng $C = 0$. Vậy $f(x) \equiv 0$ là hàm số duy nhất thỏa mãn bất phương trình đã cho, với điều kiện

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

2. Bất phương trình hàm dạng cộng - nhân tính.

Phần này đề cập đến việc giải các hệ bất phương trình hàm, với các dạng sau đây

- Dạng “cộng”:

$$f(a+x) \leq a + f(x), \quad f(b+x) \leq b + f(x), \quad x \in R;$$

- Dạng “cộng - nhân”:

$$f(a+x) \leq a f(x), \quad f(b+x) \leq b f(x), \quad x \in R;$$

- Dạng “nhân - cộng”:

$$f(ax) \leq a + f(x), \quad f(bx) \leq b + f(x), \quad x \in I, \quad I \subset R;$$

- Dạng “nhân”:

$$f(ax) \leq a f(x), \quad f(bx) \leq b f(x), \quad x \in I, \quad I \subset R;$$

trong đó a, b, a, b là các số thực cho trước.

Chú ý rằng, nếu $a = f(a)$, $b = f(b)$, thì hệ bất phương trình hàm dạng “cộng” trên là sự thu hẹp của bất phương trình hàm Cauchy cổ điển

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad x, y \in R.$$

Trước hết, ta nhắc lại rằng, một tập hợp M trù mật trong tập số thực R nếu như trong mọi lân cận của một điểm tùy ý của tập R đều có ít nhất một điểm của tập M . Chẳng hạn, tập Q các số hữu tỷ là tập trù mật trong tập R .

Tính chất sau đây là một kết quả quen thuộc (Định lý Kronecker), có thể tìm thấy chứng minh ở các tài liệu lý thuyết cơ bản

“Nếu a và b là các số thực không thông ước với nhau, thì tập $A = \{ma + nb ; m, n \in \mathbb{Z}\}$ trù mật trong $\mathbb{R}$ ”.

Hơn nữa, ta có thể chứng minh được các kết quả sau đây

Bổ đề 1. Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ và $a < 0 < b$ là các số cho trước. Ký hiệu

$$A = \{ma + nb ; m, n \in \mathbb{N}\}.$$

1) Nếu $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, thì tập A trù mật trong $\mathbb{R}$.

2) Nếu $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại $d > 0$ sao cho

$$A = \{kd ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dạng “nhân” của bổ đề này như sau

Bổ đề 2. Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ và $0 < a < 1 < b$ là các số cho trước. Ký hiệu

$$M = \{a^m b^n ; m, n \in \mathbb{N}\}.$$

1) Nếu $\frac{\log b}{\log a} \notin \mathbb{Q}$, thì tập M trù mật trong $(0, \infty)$.

2) Nếu $\frac{\log b}{\log a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại $d > 0$ sao cho

$$M = \{d^k ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Bây giờ, ta chứng minh các định lý sau đây

Định lý 4. (Dạng “cộng”)

Giả sử a, b, a, b là các số thực cho trước thỏa mãn

$$a < 0 < b, \quad \frac{a}{a} = \frac{b}{b},$$

và giả sử rằng hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm.

1) Nếu $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, thì f thỏa mãn hệ bất đẳng thức hàm

$$f(a+x) \leq a + f(x), \quad f(b+x) \leq b + f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

khi và chỉ khi $f(x) = px + f(0)$, $x \in \mathbb{R}$, trong đó $p := \frac{a}{a}$.

2) Nếu $\frac{b}{a} \in Q$, thì tồn tại duy nhất một nghiệm hàm liên tục $f: R \rightarrow R$ của hệ phương trình hàm tương ứng

$$f(a+x) = a + f(x), \quad f(b+x) = b + f(x), \quad x \in R \quad (2)$$

sao cho $f|_{[0,d]} = f_0$, trong đó

$$d := \min\{ma + nb > 0; m, n \in N\}$$

tồn tại, là số dương và $f_0: [0, d] \rightarrow R$ là hàm liên tục cho trước thỏa mãn điều kiện

$$f_0(d) = \frac{a}{a}d + f_0(0).$$

Hơn nữa, nếu f_0 là đơn điệu nghiêm ngặt, thì nó trùng với hàm f trên đoạn $[0, d]$.

Chứng minh.

1) Từ (1), dễ dàng suy ra

$$f(ma+x) \leq ma + f(x), \quad f(nb+x) \leq nb + f(x), \quad m, n \in N, x \in R.$$

Trong bất đẳng thức đầu tiên ở trên, thay x bởi $nb+x$, ta có

$$f(ma+nb+x) \leq ma + f(nb+x) \leq ma + nb + f(x).$$

Do đó

$$f(ma+nb+x) \leq ma + nb + f(x), \quad m, n \in N, x \in R.$$

Đặt

$$p := \frac{a}{a} = \frac{b}{b},$$

ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(t+x) \leq pt + f(x), \quad t \in A, x \in R, \quad (3)$$

trong đó, theo Bổ đề 1, tập

$$A = \{ma + nb; m, n \in N\}$$

trù mật trong R .

Giả sử rằng x_0 là điểm mà tại đó hàm f liên tục và x là một giá trị thực tùy ý. Bởi tính chất trù mật của A trong tập R , tồn tại một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in A \quad (n \in N), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = x_0 - x.$$

Từ bất đẳng thức (3), ta có

$$f(t_n + x) \leq pt_n + f(x), \quad n \in N.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0 , ta thu được

$$f(x_0) \leq p(x_0 - x) + f(x), \quad x \in R.$$

Bây giờ, để chứng minh phần đảo, thay x bởi $x-t$ trong (3), ta được

$$f(x) \leq pt + f(x-t), \quad t \in A, \quad x \in R.$$

Chọn một điểm $x \in R$ cố định tùy ý và, bởi tính trù mật của A trong R , một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in A \quad (n \in N), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = x - x_0.$$

Thế thì, ta có

$$f(x) \leq pt_n + f(x-t_n), \quad n \in N.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0 , ta thu được bất đẳng thức

$$f(x) \leq p(x-x_0) + f(x_0), \quad x \in R.$$

Do đó, ta có

$$f(x) = p(x) + (f(x_0) - px_0), \quad x \in R.$$

Ta có điều phải chứng minh.

2) Từ (2), dễ dàng suy ra

$$f(ma + nb + x) = \frac{a}{a}(ma + nb) + f(x), \quad m, n \in N, \quad x \in R. \quad (4)$$

Theo Bổ đề 1, phần 2, số

$$d := \min\{ma + nb > 0; m, n \in N\}$$

là xác định và là số dương. Hơn nữa

$$\{ma + nb > 0; m, n \in N\} = \{kd; k \in Z\}.$$

Dó đó, (4) có dạng

$$f(kd + x) = \frac{a}{a}kd + f(x), \quad k \in Z, \quad x \in R.$$

Dễ dàng thấy rằng hệ phương trình hàm này tương đương với phương trình

$$f(d + x) = \frac{a}{a}d + f(x), \quad x \in R.$$

Bây giờ, ta xác định $f_1: (d, 2d] \rightarrow R$ bởi công thức

$$f_1(x) := \frac{a}{a}d + f_0(x-d), \quad x \in (d, 2d].$$

Giả sử rằng

$$f_n: (nd, (n+1)d] \rightarrow R \quad (n \in N)$$

đã được xác định. Thế thì, ta xác định

$$f_{n+1}: ((n+1)d, (n+2)d] \rightarrow R$$

bởi hệ thức truy hồi

$$f_{n+1}(x) := \frac{a}{d} + f_n(x-d), \\ x \in ((n+1)d, (n+2)d], n \in \mathbb{N}.$$

Tương tự, giả sử

$$f_{-1}(x) := -\frac{a}{d} + f_0(x+d), x \in [-d, 0).$$

Giả sử rằng ta có định nghĩa

$$f_{-n}(x) := [-nd, (-n+1)d] \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Thế thì, ta định nghĩa

$$f_{-(n+1)}(x) := -\frac{a}{d} + f_{-n}(x+d), \\ x \in [-(n+1)d, -nd], n \in \mathbb{N}.$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} f_{-n}(x), & \text{khi } x \in [-nd, (-n+1)d], \\ f_0(x), & \text{khi } x \in [0, d], \\ f_n(x), & \text{khi } x \in (nd, (n+1)d], \end{cases}, n \in \mathbb{N},$$

thỏa mãn hệ (2), là hàm liên tục và $f|_{[0,d]} = f_0$.

Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Định lý 5. (Dạng “cộng-nhân”)

Giả sử $a, b \in \mathbb{R}$ và $a, b > 0$ là các số cho trước thỏa mãn

$$a < 0 < b, \quad \frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b}$$

và giả sử rằng hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm.

1) Nếu $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, thì f thỏa mãn hệ bất đẳng thức hàm

$$f(a+x) \leq a f(x), \quad f(b+x) \leq b f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

khi và chỉ khi $f(x) = f(0)e^{px}$, $x \in \mathbb{R}$, trong đó $p := \frac{\log a}{a}$.

2) Nếu $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại duy nhất một nghiệm hàm liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ của hệ phương trình hàm tương ứng

$$f(a+x) = a f(x), \quad f(b+x) = b f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (6)$$

sao cho $f|_{[0,d]} = f_0$, trong đó

$$d := \min\{ma + nb > 0; m, n \in \mathbb{N}\}$$

tồn tại, là số dương và $f_0 : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục cho trước thỏa mãn điều kiện

$$f_0(d) = f_0(0)e^{\frac{\log a}{a}d}.$$

Hơn nữa, nếu f_0 là đơn điệu nghiêm ngặt, thì nó trùng với hàm f trên đoạn $[0, d]$.

Chứng minh.

1) Từ (5), dễ dàng suy ra

$$f(ma+x) \leq a^m f(x), \quad f(nb+x) \leq b^n f(x), \\ m, n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Trong bất đẳng thức đầu tiên ở trên, thay x bởi $nb+x$, ta có

$$f(ma+nb+x) \leq a^m f(nb+x) \leq a^m b^n f(x).$$

Do đó

$$f(ma+nb+x) \leq a^m b^n f(x), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Đặt

$$p := \frac{\log a}{a} = \frac{\log b}{b},$$

ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(t+x) \leq e^{pt} f(x), \quad t \in A, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

trong đó, theo Bổ đề 1, tập $A = \{ma+nb; m, n \in \mathbb{N}\}$

trù mật trong $\mathbb{R}$.

Giả sử rằng x_0 là điểm mà tại đó hàm f liên tục và x là một giá trị thực tùy ý. Bởi tính chất trù mật của A trong tập $\mathbb{R}$, tồn tại một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in A \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = x_0 - x.$$

Từ bất đẳng thức (7), ta có

$$f(t_n+x) \leq e^{pt_n} f(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0 , ta thu được

$$f(x_0) \leq e^{p(x_0-x)} f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ, để chứng minh phần đảo, thay x bởi $x-t$ trong (7), ta được

$$f(x) \leq e^{pt} f(x-t), \quad t \in A, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chọn một điểm $x \in R$ cố định tùy ý và, bởi tính trù mật của A trong R , một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in A \quad (n \in N), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = x - x_0.$$

Thế thì, ta có

$$f(x) \leq e^{pt_n} f(x - t_n), \quad n \in N.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0 , ta thu được bất đẳng thức

$$f(x) \leq e^{p(x-x_0)} f(x_0), \quad x \in R.$$

Do đó, ta có

$$f(x) = e^{p(x)} (f(x_0) - px_0), \quad x \in R.$$

Ta có điều phải chứng minh.

2) Chứng minh tương tự chứng minh phần 2 của Định lý 4.
Định lý được chứng minh hoàn toàn.

Định lý 6. (Dạng “nhân-cộng”)

Giả sử a, b, a, b là các số thực cho trước thỏa mãn

$$0 < a < 1 < b, \quad \frac{a}{\log a} = \frac{b}{\log b},$$

và giả sử rằng hàm $f: I \rightarrow R$ liên tục tại ít nhất một điểm.

1) Nếu $\frac{\log b}{\log a} \notin Q$, thì f thỏa mãn hệ bất đẳng thức hàm

$$f(ax) \leq a + f(x), \quad f(bx) \leq b + f(x), \quad x \in I, \quad (8)$$

thì

i) Trường hợp $I = (0, \infty)$:

$$f(x) = p \log x + f(1), \quad x > 0,$$

ii) Trường hợp $I = (-\infty, 0)$:

$$f(x) = p \log(-x) + f(-1), \quad x < 0,$$

trong đó $p := \frac{a}{\log a}$.

2) Nếu $\frac{\log b}{\log a} \in Q$, thì tồn tại duy nhất một nghiệm hàm liên tục $f: I \rightarrow R$ của hệ phương trình hàm tương ứng

$$f(ax) = a + f(x), \quad f(bx) = b + f(x), \quad x \in I \quad (9)$$

sao cho $f|_{[1,d]} = f_0$, trong đó

$$d := \min \{a^m b^n > 1; m, n \in N\}$$

tồn tại, lớn hơn 1 và $f_0: [1, d] \rightarrow R$ là hàm liên tục cho trước thỏa mãn điều kiện

$$f_0(d) = \frac{a}{\log a} \cdot \log d + f_0(1).$$

Hơn nữa, nếu f_0 là đơn điệu nghiêm ngặt, thì nó trùng với hàm f trên đoạn $[1, d]$.

Chứng minh.

1) i) Giả sử rằng $I = (0, \infty)$.

Từ (8), chứng minh tương tự như các phần trên, ta có

$$f(a^m b^n x) \leq ma + nb + f(x), m, n \in N, x > 0.$$

Đặt

$$p := \frac{a}{\log a} = \frac{b}{\log b},$$

ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(a^m b^n x) \leq p \log(a^m b^n) + f(x), m, n \in N, x > 0,$$

hay

$$f(tx) \leq p \log t + f(x), t \in M, x > 0, \quad (10)$$

trong đó, theo Bổ đề 2, tập

$$M = \{a^m b^n; m, n \in N\}$$

trù mật trong I .

Giả sử rằng $x_0 > 0$ là điểm mà tại đó hàm f liên tục và $x > 0$ là một giá trị tùy ý. Bởi tính chất trù mật của M trong tập I , tồn tại một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in M \quad (n \in N), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{x_0}{x}.$$

Từ bất đẳng thức (10), ta có

$$f(t_n x) \leq p \log t_n + f(x), n \in N.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0 , ta thu được

$$f(x_0) \leq p \log \frac{x_0}{x} + f(x), x > 0.$$

Bây giờ, để chứng minh phần đảo, thay x bởi $\frac{x}{t}$ trong (10), và chọn một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in M \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{x}{x_0}.$$

Thế thì, ta có

$$f(x) \leq p \log \frac{x}{x_0} + f(x_0), \quad x > 0.$$

Do đó, ta có

$$f(x) = f(x_0) - p \log x_0 + p \log x, \quad x > 0.$$

Phần i) được chứng minh.

ii) Giả sử rằng $I = (-\infty, 0)$.

Ta xét hàm $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $g(x) = f(-x)$, $x < 0$, thỏa mãn hệ (8) và chứng minh tương tự như chứng minh phần i).

2) Phần này chứng minh tương tự như chứng minh Định lý 4, phần 2.

Hệ quả 5. Giả sử $a, b, a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các giả thiết của Định lý 4, phần 1. Nếu hàm $f: [(-\infty, 0) \cup (0, \infty)] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ bất đẳng thức (8) và trong mỗi khoảng $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ tồn tại ít nhất một điểm mà tại đó hàm f liên tục, thì

$$f(x) = \begin{cases} p \log x + f(1), & \text{khi } x \in (0, \infty), \\ p \log(-x) + f(-1), & \text{khi } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

trong đó $p := \frac{a}{\log a}$.

Chú ý 1. Giả sử a, b, a, b là các số thực cho trước thỏa mãn $0 < a < 1 < b$ và $\frac{a}{\log a} = \frac{b}{\log b}$. Nếu $0 \in I$, thì không tồn tại hàm nào thỏa mãn hệ (8).

Thật vậy, trong bất đẳng thức (8) nếu đặt $x = 0$, thì $0 \leq a$, $0 \leq b$, mâu thuẫn với giả thiết $ab < 0$.

Định lý 7. (Dạng “nhân”)

Giả sử a, b, a, b là các số thực cho trước thỏa mãn

$$a < 1 < b, \quad \frac{\log a}{\log a} = \frac{\log b}{\log b},$$

và giả sử rằng hàm $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục tại ít nhất một điểm.

1) Nếu $\frac{\log b}{\log a} \notin \mathbb{Q}$, thì f thỏa mãn hệ bất đẳng thức hàm

$$f(ax) \leq a f(x), f(bx) \leq b f(x), x \in I, \quad (11)$$

thì

i) Trường hợp $I = (0, \infty)$:

$$f(x) = f(1)x^p, x > 0,$$

ii) Trường hợp $I = (-\infty, 0)$:

$$f(x) = f(-1)(-x)^p, x < 0,$$

trong đó $p := \frac{\log a}{\log b}$.

2) Nếu $\frac{\log b}{\log a} \in \mathbb{Q}$, thì tồn tại duy nhất một nghiệm hàm liên tục $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I = (0, \infty)$ hoặc $I = (-\infty, 0)$) của hệ phương trình hàm tương ứng

$$f(ax) = a f(x), f(bx) = b f(x), x \in I, \quad (12)$$

sao cho $f|_{[1,d]} = f_0$, trong đó

$$d := \min \{a^m b^n > 1; m, n \in \mathbb{N}\}$$

tồn tại, lớn hơn 1 và $f_0 : [1, d] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục cho trước thỏa mãn điều kiện

$$f_0(d) = f_0(1) d^{\frac{\log a}{\log b}}.$$

Hơn nữa, nếu f_0 là đơn điệu nghiêm ngặt, thì nó trùng với hàm f trên đoạn $[1, d]$.

Chứng minh.

1) i) Giả sử rằng $I = (0, \infty)$.

Từ (11), chứng minh tương tự như các phần trên, ta có

$$f(a^m b^n x) \leq a^m b^n f(x), m, n \in \mathbb{N}, x > 0.$$

Đặt

$$p := \frac{\log a}{\log b} = \frac{\log b}{\log a},$$

ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$$f(a^m b^n x) \leq (a^m b^n)^p f(x), \quad m, n \in N, \quad x > 0,$$

hay

$$f(tx) \leq t^p \cdot f(x), \quad t \in M, \quad x > 0, \quad (13)$$

trong đó, theo Bổ đề 2, tập

$$M = \{a^m b^n; m, n \in N\}$$

trù mật trong I .

Giả sử rằng $x_0 > 0$ là điểm mà tại đó hàm f liên tục và $x > 0$ là một giá trị tùy ý. Bởi tính chất trừ mật của M trong tập I , tồn tại một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in M \quad (n \in N), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{x_0}{x}.$$

Từ bất đẳng thức (13), ta có

$$f(t_n x) \leq t_n^p f(x), \quad n \in N.$$

Cho $n \rightarrow \infty$, bởi tính liên tục của hàm f tại x_0 , ta thu được

$$f(x_0) \leq \left(\frac{x_0}{x}\right)^p f(x), \quad x > 0.$$

Bây giờ, để chứng minh phần đảo, thay x bởi $\frac{x}{t}$ trong (13), và chọn một dãy (t_n) sao cho

$$t_n \in M \quad (n \in N), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{x}{x_0}.$$

Thế thì, ta có

$$f(x) \leq \left(\frac{x}{x_0}\right)^p \cdot f(x_0), \quad x > 0.$$

Phần i) được chứng minh.

ii) Giả sử rằng $I = (-\infty, 0)$.

Ta xét hàm $g: (0, \infty) \rightarrow R$ xác định bởi công thức $g(x) = f(-x)$, $x > 0$, thỏa mãn hệ (11) và chứng minh tương tự như chứng minh phần i).

2) Phần này chứng minh tương tự như chứng minh Định lý 4, phần 2.

Chú ý 2. Giả sử a, b, a, b là các số thực cho trước thỏa mãn $0 < a < 1 < b$ và $\frac{\log a}{\log a} = \frac{\log b}{\log b}$. Nếu $I = R$ hoặc $I = [0, \infty)$ hoặc $I = (-\infty, 0]$ và $f: I \rightarrow R$ thỏa mãn hệ (11), thì $f(0) = 0$.

Thật vậy, bởi một trong hai giả thiết $a < 1 < b$ hoặc $b < 1 < a$ và, hơn nữa, $f(0)(1-a) \leq 0$ và $f(0)(1-b) \leq 0$, ta suy ra $f(0) = 0$.

Từ Chú ý này, ta có

Chú ý 3.

i) Giả sử $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ (11). Nếu $f|_{(0, \infty)}$ và a, b, a, b thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lý 7, phần 1, thì

$$f(x) = \begin{cases} f(1)x^p & \text{khi } x \in (0, \infty), \\ 0 & \text{khi } x = 0, \end{cases}$$

trong đó $p := \frac{\log a}{\log b}$.

ii) Giả sử $f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ (11). Nếu $f|_{(-\infty, 0)}$ và a, b, a, b thỏa mãn tất cả các giả thiết của Định lý 7, phần 1, thì

$$f(x) = \begin{cases} f(-1)(-x)^p & \text{khi } x \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{khi } x = 0, \end{cases}$$

trong đó $p := \frac{\log a}{\log b}$.

Hệ quả 6. Giả sử $a, b, a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các giả thiết của Định lý 7, phần 1.

i) Nếu hàm $f: [(-\infty, 0) \cup (0, \infty)] \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ bất đẳng thức (11) và trong mỗi khoảng $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ tồn tại ít nhất một điểm mà tại đó hàm f liên tục, thì

$$f(x) = \begin{cases} f(1)x^p & \text{khi } x \in (0, \infty), \\ f(-1)(-x)^p & \text{khi } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

trong đó $p := \frac{\log a}{\log b}$.

ii) Nếu hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ bất đẳng thức (16) và trong mỗi khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, \infty)$ tồn tại ít nhất một điểm mà tại đó hàm f liên tục, thì

$$f(x) = \begin{cases} f(1)x^p & \text{khi } x \in (0, \infty), \\ 0 & \text{khi } x = 0, \\ f(-1)(-x)^p & \text{khi } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$$

trong đó $p := \frac{\log a}{\log a}$.

Chú ý 4. Ta luôn có các định lý tương tự như các Định lý 4- Định lý 7, với hàm f thỏa mãn các bất đẳng thức có dấu ngược lại.

Pleiku, 7 / 2011
T.Đ.C

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn văn Mậu, “*Bất đẳng thức, định lý và áp dụng*”, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.
- [2] Trịnh Đào Chiến, “*Một số dạng bất phương trình hàm dạng cơ bản*”, Kỷ yếu Hội nghị khoa học về các chuyên đề chuyên Toán bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học phổ thông, Hà Nội - Nam Định, 26-28/11/2010.
- [3] Th. M. Rassias, “*Functional equations, inequalities and applications*”, 73 - 89, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [4] P.I. Kannappan, “*Functional equations and with applications*”, 617 - 636, Springer Monographs in Mathematics, 2009.