TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
KHOA TOÁN-TIN

CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ SƠ CẤP

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HÀM SINH

Giáo viên hướng dẫn: **ThS. Đào Ngọc Minh**

Nhóm sinh viên: **Trương Thị Nhung**
Lăng Thúy Nga
Phạm Thị Lan Phương
Mai Thị Ngoan

Lớp: **K57C**

HÀ NỘI, 9/2010

Mục lục

1 Giới thiệu về hàm sinh và các phép toán trên hàm sinh

1.1 Giới thiệu về hàm sinh

Hàm sinh là một trong những sáng tạo thần tình, bất ngờ, nhiều ứng dụng của toán rời rạc. Nói một cách nôm na, hàm sinh chuyển những bài toán về dãy số thành những bài toán về hàm số. Với điều này chúng ta có thể dễ dàng giải quyết được một số bài toán.

Trong bài này, các dãy số sẽ được để trong dấu ngoặc <> để phân biệt với các đối tượng toán học khác.

Định nghĩa :

Hàm sinh thường của dãy số vô hạng $(a_n)_{n\geq 0}$ là chuỗi lũy thừa hình thức:

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^n + \dots + a_nx^n + \dots$$

Ta gọi hàm sinh là chuỗi lũy thừa hình thức bởi vì thông thường ta sẽ chỉ coi x là một kí hiệu thay thế thay vì một số. Chỉ trong vài trường hợp, ta sẽ cho x nhận các giá trị thực, vì thế ta gần như không để ý đến sự hội tụ của các chuỗi. Có một số loại hàm sinh khác nhau, trong bài này ta chỉ xét đến hàm sinh thường.

Trong bài này ta sẽ ký hiệu sự tương ứng giữa một dãy số và hàm sinh bằng dấu "$\leftrightarrow$" như sau :

$<a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots > \leftrightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$

Ví dụ, dưới đây là một số ví dụ và hàm sinh của chúng

$<0, 0, 0, 0, \dots,> \leftrightarrow 0 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + \dots = 0$

$<1, 0, 0, 0, \dots,> \leftrightarrow 1 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + \dots = 1$

$<3, 2, 1, 0, \dots,> \leftrightarrow 3 + 2.x + 1.x^2 + 0.x^3 + \dots = x^2 + 2x + 3$

Quy tắc ở đây rất đơn giản: Số hạng thứ i của dãy số (đánh số từ 0) là hệ số của x^i trong hàm sinh.

Nhắc lại công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn là :

$$1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1-z}$$

Đẳng thức này không đúng với $|z| \geq 1$. Nhưng một lần nữa ta không quan tâm đến vấn đề hội tụ. Công thức này cho chúng ta công thức tường minh cho hàm sinh của hàng loạt dãy số :

$< 1, 1, 1, 1, \dots > \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \dfrac{1}{1-x}$

$< 1, -1, 1, -1, \dots > \leftrightarrow 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \dfrac{1}{1+x}$

$< 1, a, a^2, a^3, \dots > \leftrightarrow 1 + ax + a^2.x^2 + a^3.x^3 + \dots = \dfrac{1}{1-ax}$

$< 1, 0, 1, 0, \cdots > \leftrightarrow 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Vận dụng điều này, ta có bài toán :

Ví dụ 1. *Tìm công thức tổng quát cho dãy* $(y_n, n \geq 0)$ *với* $y_0 = 1$ *và* $y_n = a.y_{n-1} + b^n, \forall n \geq 1.$

Giải

Xét $G(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n x^n$

Khi đó :

$$\begin{aligned}
G(x) &= y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \\
&= y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a y_{n-1} + b^n) x^n \\
&= y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a y_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b^n x^n \\
&= ax \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n + y_0 - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} b^n x^n \\
&= axG(x) + 1 - 1 + \frac{1}{1 - bx} do (y_0 = 1) \\
&= axG(x) + \frac{1}{1 - bx}
\end{aligned}$$

Vậy $G(x) = axG(x) + \dfrac{1}{1 - bx}$

$\Leftrightarrow G(x)(1 - ax) = \dfrac{1}{1 - bx}$

$\Leftrightarrow G(x) = \dfrac{1}{(1 - ax)(1 - bx)}$

$\Leftrightarrow G(x) = \dfrac{1}{b - a}\left(\dfrac{b}{1 - bx} - \dfrac{a}{1 - ax}\right)$

Mà $\dfrac{b}{1 - bx} = b(1 + bx + b^2x^2 + \dots) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b^{n+1} x^n$

$\dfrac{a}{1 - ax} = a(1a + ax + a^2x^2 + \dots) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n+1} x^n$

$\Rightarrow G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}$

Vậy công thức tổng quát của y_n là: $y_n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}, \forall n \geq 0.$

1.2 Các phép toán trên hàm sinh

Phép màu của hàm sinh nằm ở chỗ ta có thể chuyển các phép toán thực hiện trên dãy số thành các phép toán thực hiện trên hàm sinh tương ứng của chúng. Từ đó ta có thể dễ dàng thực hiện các phép toán.

1.2.1 Nhân với hằng số

Quy tắc 1. *Nếu* $< f_0, f_1, f_2, f_3, \cdots > \leftrightarrow F(x)$ *thì* $< cf_0, cf_1, cf_2, \cdots > \leftrightarrow cF(x)$

Chứng minh:
Ta có:

$$\begin{aligned}< cf_0, cf_1, cf_3, \cdots > \leftrightarrow (cf_0)x + (cf_1) + (cf_3)x^3 + \dots &= c(f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots) \\ &= cF(x)\end{aligned}$$

Ví dụ 2. $< 1, 0, 1, 0, \cdots > \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x^2}$
$< 2, 0, 2, 0, \cdots > \leftrightarrow \dfrac{2}{1-x^2}$

Ví dụ 3. $< 1, a, a^2, a^3, \cdots > \leftrightarrow 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 = \dfrac{1}{1-ax} = f(x)$

Nhân hàm sinh trên với a ta được:
$af(x) = \dfrac{a}{1-ax}$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow af(x) &= a(1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \dots) \\ &= a + a^2x + a^3x^2 + a^4x^3 + \cdots \leftrightarrow < a, a^2, a^3, a^4, \cdots >\end{aligned}$$

1.2.2 Cộng

Quy tắc 2. *Cộng hai hàm sinh tương ứng với việc cộng các số hạng của dãy số theo đúng chỉ số. Nếu* $< f_0, f_1, f_2, \cdots > \leftrightarrow F(x)$ *và* $< g_0, g_1, g_2, \cdots > \leftrightarrow G(x)$ *thì* $< f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots > \leftrightarrow F(x) + G(x)$.

Chứng minh:
Ta có :

$$\begin{aligned}&< f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \cdots > \\ &\leftrightarrow (f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)x + (f_2 + g_2)x^2 + \dots \\ &= (f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots) + (g_0 + g_1x + g_2x^2 + \dots) \\ &= F(x) + G(x)\end{aligned}$$

Ví dụ 4. $< 2, 0, 2, 0, \cdots > \leftrightarrow \dfrac{2}{1-x^2}$

Thật vậy $< 1, 1, 1, 1, \cdots > \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x}$
và $< 1, -1, 1, -1, \cdots > \leftrightarrow \dfrac{1}{1+x}$
Áp dụng quy tắc cộng ta có: $< 2, 0, 2, 0, \cdots > \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2}{1-x^2}$.

1.2.3 Dịch chuyển sang phải

Ta bắt đầu từ một dãy số đơn giản và hàm sinh của nó: $<1,1,1,1,\dots> \leftrightarrow \dfrac{1}{1-x}$. Bây giờ ta dịch chuyển sang phải bằng cách thêm k số 0 vào đầu:
$<0,0,0,\dots,0,1,1,1,\dots> \leftrightarrow x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots = x^k(1+x+x^2+\dots) = \dfrac{x^k}{1-x}$

Như vậy thêm k số 0 vào đầu dãy số tương ứng với việc hàm sinh nhân với x^k. Điều này cũng đúng trong trường hợp tổng quát.

Quy tắc 3. *Nếu* $<f_0, f_1, f_2, \dots> \leftrightarrow F(x)$ *thì* $<0,0,\dots,0,f_0,f_1,f_2,\dots> \leftrightarrow x^kF(x)$

Chứng minh:

$$\begin{aligned}<0,0,\dots,0,f_0,f_1,f_2,\dots> \leftrightarrow f_0x^k + f_1x^{k+1} + f_2x^{k+2+}\dots &= x^k(f_0+f_1x+f_2x^2+\dots)\\ &= x^kF(x)\end{aligned}$$

1.2.4 Đạo hàm

Điều gì sẽ xảy ra nếu ta lấy đạo hàm của hàm sinh? Chúng ta hãy bắt đầu từ việc lấy đạo hàm của một hàm sinh đã trở nên quen thuộc trong dãy số toàn 1:

$$\frac{d}{dx}(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x})$$
$$1+2x+3x^2+4x^3+\dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$<1,2,3,4,\dots> \leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ta tìm được hàm sinh cho dãy số $<1,2,3,4,\dots>$

Tổng quát, việc lấy đạo hàm của hàm sinh có hai tác động lên dãy số tương ứng: Các số hạng được nhân với chỉ số và toàn bộ dãy số được dịch chuyển sang trái 1 vị trí.

Quy tắc 4. *Nếu* $<f_0, f_1, f_2, \dots> \leftrightarrow F(x)$ *thì* $<f_1, 2f_2, 3f_3, \dots> \leftrightarrow \dfrac{dF(x)}{dx}$

Chứng minh:

$$\begin{aligned}<f_1,2f_2,3f_3,\dots> \leftrightarrow f_1 + 2f_2x + 3f_3x^2 + \dots &= \frac{d}{dx}(f_0+f_1x+f_2x^2+f_3x^3+\dots)\\ &= \frac{dF(x)}{dx}\end{aligned}$$

Quy tắc đạo hàm là một quy tắc rất hữu hiệu. Trong thực tế, ta thường xuyên cần đến một trong hai tác động của phép đạo hàm, nhân số hạng với chỉ số và dịch chuyển sang trái. Một cách điển hình, ta chỉ muốn có một tác động và tìm cách "vô hiệu hóa" tác động còn lại.

Ví dụ 5. *Tìm hàm sinh cho dãy số* $<0,1,4,9,16,\dots>$

Giải

Ta có $<0,1,4,9,16,\cdots>=<0,1.1,2.2,3.3,4.4,\cdots>$

Mặt khác $<1,1,1,\cdots>\leftrightarrow \dfrac{1}{1-x}=f(x)$

$\dfrac{df(x)}{dx}=<0,1,2,3,4,\cdots>=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Áp dụng quy tắc dịch chuyển sang phải: $<0,1,2,3,4,\cdots>\leftrightarrow \dfrac{x}{(1-x)^2}=g(x)$

Áp dụng quy tắc đạo hàm, ta được: $<1.1,2.2,3.3,4.4,\cdots>\leftrightarrow \dfrac{dg}{dx}(x)=\dfrac{1+x}{(1-x^3)}$

hay $<1,4,9,16,\cdots>\leftrightarrow \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$

Vậy hàm sinh của dãy số ban đầu tương ứng là: $<0,1,4,9,16,\cdots>\leftrightarrow \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

1.2.5 Quy tắc xoắn

Xét hàm $G(x)=A(x).B(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$

Đặt $d_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$. Ta có hàm sinh cho dãy $\{d_n\}\forall n\geq 0$ chính là hàm $G(x)$. Ta gọi quy tắc này là phép xoắn hay quy tắc xoắn.

Ví dụ 6. *Số Catalan*
Số Catalan là số được xác định một cách truy hồi như sau:
$d_0=d_1=1,\ C_n=d_0d_{n-1}+d_1d_{n-2}+\cdots+d_{n-1}d_0\ =\sum\limits_{i=0}^{n-1}d_id_{n-1-i}\forall n\geq 1$
Số Catalan có nhiều định nghĩa tổ hợp khác nhau, chẳng hạn, số Catalan là số các cách nối 2n điểm trên đường tròn bằng n dây cung không cắt nhau, là số cây nhị phân có gốc có $n+1$ lá, là số đường đi ngắn nhất trên lưới nguyên từ điểm $(0,0)$ đến điểm (n,n) không vượt qua đường thẳng $y=x$,... Ngoài ra, trong quá trình tính cũng đưa ra các định nghĩa về số Catalan: Là các cách tính tích các ánh xạ $f_0,f_1,\dots,f_n$. Sau đây là bài toán quan trọng về số Catalan.
Hãy tính số hạng tổng quát của dãy Catalan.

Giải

Ta có $d_{n+1}=\sum\limits_{i=0}^{n}d_id_{n-i}\forall n\geq 1$

Xét hàm sinh $G(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_nx^n=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_nx_n$ (vì $d_0=1$)

khi đó $G(x)-1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_nx_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}d_id_{n-i}x^n$

Theo quy tắc xoắn ta có: $G(x)-1=xG(x)^2\Rightarrow G(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$

vì $G(x)\geq 0\Rightarrow G(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

ta có: $\sqrt{1-4x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} x^n$(theo khai triển Taylor)

Đồng nhất hai vế ta được: $G(x) = \dfrac{1-(1-2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} x^n)}{2x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} x^n$

Vậy số Catalan là: $d_n = \dfrac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$

Trên đây là một số phép toán trên hàm sinh. Sau đây chúng ta sẽ xét một số bài toán cụ thể sử dụng một vài hàm sinh thường gặp với một số phép toán tương ứng.

2 Sử dụng phương pháp hàm sinh trong giải toán

2.1 Dùng hàm sinh là đa thức

Ví dụ 7. *Cho m, n, r là các số tự nhiên với $r \le m, n$ chứng minh rằng:* $C_{m+n}^{r} = \sum\limits_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k}$

Giải

Xét $f(x) = (1+x)^n$ *và* $g(x) = (1+x)^m$

Ta có $f(x)g(x) = (1+x)^{n+m} = \sum\limits_{r=0}^{n+m} C_{n+m}^{r} x^r$ *(1)*

Mặt khác ta có: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ *và* $g(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j x^j$

$\Rightarrow f(x)g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k \sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j x^j$

$= \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} C_n^k C_m^j x^{k+j} = \sum\limits_{r=0}^{n+m} (\sum\limits_{k=0}^{r} C_n^k Cm^r - kx^r)$ *(2)*

Từ (1) và (2) đồng nhất hóa các hệ số của x^r *ta có:* $C_{n+m}^{r} = \sum\limits_{k=0}^{r} C_n^k C_m^{r-k}$ *(đpcm)*

Ví dụ 8. *Tính* :$S = 1^2C_n^1 + 2^2C_n^2 + 3^2C_n^3 + \cdots + p^2C_n^p + \cdots + n^2C_n^n$

Giải

Xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n$
và $g(x) = x(1+x)^n = C_n^0 x + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^3 + C_n^3 x^4 + \cdots + C_n^n x^{n+1}$
Ta có: $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1}$
$\Rightarrow f'(1) = n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$ (1)
Và có:
$g'(x) = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 x + 3C_n^2 x^2 + 4C_n^3 x^3 + \cdots + (n+1)C_n^n x^n$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g"(x) &= 2n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} \\
&= 2C_n^1 + 3.2C_n^2 x + 4.3C_n^3 x^2 + \cdots + (n+1)nC_n^n x^{n-1} \\
\Rightarrow g"(1) &= 2n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\
&= 2C_n^1 + 3.2C_n^2 + 4.3C_n^3 + \cdots + (n+1)nC_n^n (2)
\end{aligned}$$

Lấy (1) trừ (2) vế với vế ta có:
$S = 2n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} - n2^{n-1} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$.

2.2 Dùng hàm sinh là các chuỗi lũy thừa vô hạn

Đầu tiên chúng ta nhắc lại một số lý thuyết về chuỗi lũy thừa vô hạn. Đây cũng chính là những cơ sở lý thuyết cho phương pháp này.

2.2.1 Cơ sở lý thuyết

- $A = \mathbb{R}[[x]]$ các chuỗi lũy thừa hình thức trên trường thực $\mathbb{R}$ có dạng $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ là một vành với phép cộng và nhân chuỗi thông thường :
  $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n + \sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n$
  $k \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0} k a_n x^n, k \in \mathbb{R}$

- $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n \Leftrightarrow a_n = b_n$

- Trong A, phần tử $u = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ khả nghịch $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$ và $\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n}$

Nhìn chung thì hàm sinh có rất nhiều ứng dụng. Ở đây, chúng ta chỉ xét tới những ứng dụng thường gặp của hàm sinh. Trước tiên phải nói tới là dùng hàm sinh để giải quyết các bài toán về dãy số đệ qui. Khi đã biết công thức truy hồi của dãy, ta có thể dùng hàm sinh để tính công thức của số hạng tổng quát của dãy đó.

2.2.2 Dãy Fibonacci

Dãy Fibonacci là dãy số quen thuộc xác định bởi công thức truy hồi:

$$f_0 = 0; f_1 = 1; f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2$$

Chúng ta sẽ thử dùng hàm sinh để tìm công thức tường minh cho các số hạng của dãy số đó.

a) Tìm hàm sinh :
Khai triển dãy Fibonacci ta được :

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_2 = f_1 + f_0$$
$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$$

Giả sử

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n\geq 0} f_n x^n \\
&= f_0 + f_1 x + \sum_{n\geq 2} f_n x^n \\
&= x + \sum_{n\geq 2} f_n x^n \\
&= x + \sum_{n\geq 2} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n \\
&= x + \sum_{n\geq 2} f_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 2} f_{n-2} x^n \\
&= x + \sum_{n\geq 2} f_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 2} f_{n-2} x^n \\
&= x + x\sum_{n\geq 0} f_n x^n + x^2 \sum_{n\geq 0} f_n x^n \\
&= x + xF(x) + x^2 F(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$
$\Rightarrow < 0; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \cdots > \leftrightarrow \dfrac{x}{1-x-x^2}$
Chúng ta thấy dãy Fibonacci rất khó chịu nhưng hàm sinh của nó lại rất đơn giản.

b) Tìm công thức tường minh của số hạng tổng quát:
Như vậy chúng ta đã tìm hàm sinh của dãy Fibonacci, công việc tiếp theo là tìm hệ số từ hàm sinh. Có một vài cách tiếp cận cho bài toán này, nhưng cách đơn giản nhất là sử dụng phương pháp phân tích. Từ các hàm phân thức ta phân tích thành các phân thức sơ cấp, tìm các hệ số cho các phân thức sơ cấp. Từ đó ta tìm được các hệ số cần tìm.
Cụ thể vào bài toán với dãy số Fibonacci, ta làm như sau:

- Phân tích mẫu số ra thừa số:

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-a_1x)(1-a_2x)} \text{ trong đó } a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

– Tìm các hằng số A_1 và A_2 sao cho :

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A_1}{1-a_1x} + \frac{A_2}{1-a_2x};$$

Ta có thể làm điều này bằng phương pháp hệ số bất định và ta dễ dàng tìm được:

$$A_1 = \frac{1}{a_1-a_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}; A_2 = -\frac{1}{a_1-a_2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{a_1-a_2} - \frac{1}{a_1-a_2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\sum_{n\geq 0} a_1^n x^n - \sum_{n\geq 0} a_2^n x^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\geq 0}(a_1^n - a_2^n)x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)x^n.
\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số, ta được :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

Đây chính là công thức tính số hạng tổng quát của dãy Fibonacci.

Tương tự như vậy, chúng ta cũng có thể dùng phương pháp hàm sinh để giải nhiều bài toán về dãy số khác.

2.2.3 Đếm bằng hàm sinh

Trong phần này chúng ta sẽ biết thêm một ứng độc đáo của hàm sinh nữa, đó là hàm sinh có thể sử dụng cho các bài toán đếm. Cụ thể là bài toán về chọn các phần tử từ một tập hợp thông thường sẽ dẫn tới hàm sinh. Khi hàm sinh được áp dụng theo cách này thì hệ số của x^n chính là số cách chọn n phần tử, tức là với a_n là hệ số của $x^n, \forall n \geq 2$ thì hàm sinh của số cách chọn sẽ là $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Để hiểu rõ hơn ta đi vào các dạng toán sau :

a) Bài toán chọn các phần tử phân biệt

Tổng quát: có bao nhiêu cách chọn n phần tử phân biệt từ tập hợp k phần tử. Bài toán này có thể giải quyết dễ dàng bằng công thức tổ hợp. Nhưng lần này chúng ta sẽ sử dụng hàm sinh. Cụ thể như sau:

Đầu tiên ta hãy xét tập hợp có một phần tử $\{a_1\}$. Ta có :

1 cách chọn	0 phần tử
1 cách chọn	1 phần tử
0 cách chọn	2 phần tử trở lên

$\Rightarrow$ Hàm sinh cho số cách chọn n phần tử từ tập $\{a_1\}$ là $1 + x$.

Tương tự như vậy, hàm sinh cho số cách chọn n phần tử từ tập $\{a_i\}(1 \le i \le k)$ cũng là $1 + x$ (không phụ thuộc vào sự khác biệt giữa các a_i).

Bây giờ ta sẽ chứng minh: hàm sinh cho số cách chọn các phần tử từ hợp của hai tập hợp bằng tích các hàm sinh cho số cách chọn các phần tử từ mỗi tập hợp($*$).

Tiếp tục xét tập 2 phần tử $\{a_1, a_2\}$ ta có :

1 cách chọn	0 phần tử
2 cách chọn	1 phần tử
1 cách chọn	2 phần tử
0 cách chọn	3 phần tử trở lên

$\Rightarrow$ Hàm sinh cho số cách chọn n phần tử từ tập $\{a_1, a_2\}$ là :

$$1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2 = (1 + x)(1 + x)$$

Tiếp tục áp dụng quy tắc này ta sẽ được hàm sinh cho số cách chọn các phần tử từ tập k phần tử :

$$(1 + x)(1 + x) \dots (1 + x) = (1 + x)^k$$

Ta có :$< C_k^0, C_k^1, C_k^2, \dots, C_k^k, 0, 0, \dots > \leftrightarrow C^0 + k, C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k = (1 + x)^k$

Như vậy hệ số của x^n trong $(1 + x)^k$ là C_k^n và bằng số cách chọn n phần tử phân biệt từ tập k phần tử.

b) Bài toán chọn các phần tử có lặp:

Để hiểu cách giải bài toán này trước tiên ta phải mở rộng $(*)$ thành quy tắc xoắn:

Quy tắc xoắn: Gọi $A(x)$ là hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ tập hợp A và $B(x)$ là hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ tập hợp B. Nếu A và B rời nhau thì hàm sinh cho cách chọn các phần tử từ tập A $\cup$ B là $A(x)B(x)$.

Quy tắc này đúng cho cả trường hợp chọn các phần tử phân biệt ,cũng đúng cho trường hợp chọn nhiều lần cùng một phần tử.

Ta có bài toán như sau:

Có 5 loại kẹo : kẹo sữa, kẹo socola, kẹo chanh,kẹo dâu và kẹo cà phê. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 12 cái kẹo từ 5 loại kẹo này.

Bài toán dạng tổng quát : có ba nhiêu cách chọn k phần tử từ tập hợp có n phần tử, trong đó cho phép một phần tử có thể được chọn nhiều lần.

Ta sẽ giải bài toán dạng tổng quát.

Chia tập n phần tử thành hợp của n tập $A_i, 1 \leq i \leq n$; mỗi tập gồm duy nhất một phần tử thuộc tập n phần tử.

Với mỗi tập A_i, ta có :

1 cách chọn	0 phần tử
1 cách chọn	1 phần tử
1 cách chọn	2 phần tử

$\Rightarrow$ Hàm sinh của cách chọn có lặp từ tập A_i là:

$$< 1, 1, 1, 1, \cdots > \leftrightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Áp dụng *quy tắc xoắn:*$\Rightarrow$ Hàm sinh của cách chọn (có lặp) các phần tử từ tập hợp n phần tử sẽ là :

$$\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x}\cdots\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Bây giờ ta cần tính hệ số của x^k trong $\dfrac{1}{(1-x)^n}$

Để làm việc này, ta thiết lập khai triển Taylor của $f(x) := \dfrac{1}{(1-x)^n}$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f"(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}x^k + \ldots$$

$\Rightarrow$Hệ số của x^k là:

$$\frac{f^{(k)}}{k!} = C_{n+k-1}^{k}$$

Như vậy số cách chọn k phần tử có lặp từ tập hợp có n phần tử là C_{n+k-1}^{k}.
Quay lại với bài toán ban đầu, số cách chọn 12 cái kẹo từ 5 loại kẹo rất đơn giản sẽ là C_{16}^{12}.
Các bạn có thể dùng phương pháp khác để thử lại kết quả này.

Ví dụ 9. *Bài toán chọn quả (ứng dụng phương pháp đếm bằng hàm sinh). Có bao nhiêu cách sắp một giỏ n trái cây thỏa mãn điều kiện sau:*

- *Số táo phải chẵn.*
- *Số chuối phải chia hết cho* 5.
- *Chỉ có thể có nhiều nhất* 4 *quả cam.*
- *Chỉ có thể có nhiều nhất* 1 *quả đào.*

Bài toán có những điều kiện ràng buộc rất phức tạp và ta có cảm giác như việc giải bài toán là vô vọng. Nhưng hàm sinh lại cho ta một cách giải quyết nhanh gọn.

Giải

Trước tiên ta đi tìm hàm sinh cho cách chọn từng loại quả:

Chọn táo:

1 cách chọn	0 quả táo
0 cách chọn	1 quả táo
1 cách chọn	2 quả táo
0 cách chọn	3 quả táo

Như thế ta có hàm sinh $A(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1-x^2}$.
Tương tự ta tìm được hàm sinh cho cách chọn chuối là:

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \cdots = \frac{1}{1-x^5}$$

Hàm sinh cho cách chọn cam và đào hơi khác một chút.
Ta có :

1 cách chọn	0 quả cam
1 cách chọn	1 quả cam
1 cách chọn	2 quả cam
1 cách chọn	3 quả cam
1 cách chọn	4 quả cam
0 cách chọn	5 quả cam

$\Rightarrow$ Hàm sinh là $C(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \dfrac{1 - x^5}{1 - x}$

Tương tự ta tìm được hàm sinh cho cách chọn đào là $D(x) = 1 + x = \dfrac{1 - x^2}{1 - x}$

Áp dụng *quy tắc xoắn:* $\Rightarrow$ Hàm sinh cho cách chọn từ cả 4 loại quả là:

$A(x)B(x)C(x)D(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}\dfrac{1}{1 - x^5}\dfrac{1 - x^5}{1 - x}\dfrac{1 - x^2}{1 - x} = \dfrac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$

Như vậy cách sắp giỏ trái cây gồm n trái đơn giản là $n + 1$ cách.

Ví dụ 10. *Bài toán nghiệm nguyên (Ví dụ 3 sách giáo trình): Tính số nghiệm nguyên không âm của phương trình:*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_d = n$$

Giải

Vì $x_1, x_2, \ldots, x_d$ nguyên không âm nên suy ra $x_i (1 \leq i \leq d)$ nhận các giá trị $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Ta tìm hàm sinh cho cách chọn mỗi $x_i (1 \leq i \leq d)$.

Có

1 cách chọn	giá trị 0
1 cách chọn	giá trị 1
1 cách chọn	giá trị 2
1 cách chọn	giá trị 3

$\Rightarrow$ Hàm sinh cho cách chọn mỗi x_i là $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x}$.

Áp dụng *quy tắc xoắn:* $\Rightarrow$ Hàm sinh cho cách chọn bộ số $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_d)$ là $\dfrac{1}{(1 - x)^d}$.

Gọi u_n là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_d = n$. Khi đó hàm sinh của dãy với các số hạng dạng u_n chính là hàm sinh cho số cách chọn bộ số $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_d)$.

Tức là $\sum\limits_{k \geq 0} u_k x^k = \dfrac{1}{(1 - x)^d} = \sum\limits_{k \geq 0} C^k_{k+d-1} x^k$.

Vậy $u_n = C^n_{n+d-1}$.

3 Bài tập

Bài 1. Với n là số nguyên dương ,chứng minh rằng:

- a)$C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n2^{n-1}$.

- b)$2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$.

- c)$(-1)^r C_r^r C_n^r + (-1)^{r+1} C_{r+1}^r + \cdots + (-1)^n C_n^r C_n^n = 0$.

Giải

- a)Xét $f(x) = (1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1)$.
  Lấy đạo hàm hai vế ta được
  $n(1+x)^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1} (2)$.
  Thay $x = 1$ vào (2) ta có,
  $n2^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k$(đpcm)

- b)Lấy đạo hàm cấp hai của (1) và thay $x = 1$ vào biểu thức vừa nhận được ta có được điều cần chứng minh.

- c)Lấy đạo hàm cấp $r$theo hai vế của (1) ta được,
  $n(n-1)\dots(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum\limits_{k=r}^{n} k(k-1)\dots(k-r+1)C_n^k x^{k-r} (4)$ Chia hai vế của (4) cho$r!$ ta được:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r!} n(n-1)\dots(n-r+1)(1+x)^{n-r} &= \sum_{k=r}^{n} \frac{k(k-1)\dots(k-r+1)}{r!} x^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{n} \frac{k!}{r!(k-r)!} C_n^k x^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{n} C_k^r x^{k-r} (5)
\end{aligned}$$

  Thay$x = -1$ vào (5) ta được: $\sum\limits_{k=r}^{n} (-1)^k C_k^r C_n^k = 0$

Bài 2. Với n là số nguyên dương, CMR: $C_n^2 + 2C_n^3 + \cdots + (n-1)C_n^n > (n-2)2^{n-1}$

Giải

Với $x \in R, n \in N$, xét $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n$ (1)
Thay $x = 1$ vào (1) ta được: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$ (2)
Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:
$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1}x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}$ (3)
Thay $x = 1$ vào (3) ta được: $n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$ (4)
Lấy (4) trừ (2) vế với vế ta được:
$n2^{n-1} - 2^n = -C_n^0 + C_n^2 + 2C_n^3 + \cdots + (n-1)C_n^n$
$\Leftrightarrow C_n^2 + 2c_n^3 + \cdots + (n-1)C_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1 > (n-2)2^{n-1} \Rightarrow$đpcm

Bài 3. Rút gọn biểu thức sau:

- a)$S = \sum_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k$

- b)$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{1+k}$

- c)$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{1+k}$

Giải

- a) Xét hàm $f(x) = (1+x)^n = \sum\limits_{k=o}^{n} C_n^k x^k$
  Suy ra $xf(x) = x(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1}$
  Lấy đạo hàm hai vế ta được:
  $nx(1+x)^{n-1} + (1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k x^n (*)$
  Thay $x = 1$ vào $(*)$, ta có $S = n2^{n-1} + 2^n = (n+2)2^{n-1}$
  Tức là: $S = (n+2)2^{n-1}$

- b)Xét $f(x) = (1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$
  Lấy tích phân hai vế ta được:
  $\int_0^t (1+x)^n dx = \int_0^n \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k dx \Rightarrow \frac{(1+t)^{n+1}-1}{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1}C_n^k}{k+1}(2)$
  Thay $t = 2$ vào (2) ta được:
  $\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$

- c)Thay $t = -1$ vào(2) ta được:
  $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{-1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$

Bài 4. Tính tổng sau:

- 1)$A = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k}$

- 2)$B = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k}$

Giải

- 1)Ta xét $f(x) = (1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k x^{k-1} = \frac{(1+x)^n - 1}{x}$
  Lấy tích phân hai vế: $\int_0^1 \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k x^{k-1} dx = \int_0^1 \frac{(1+x)^n - 1}{x} dx$
  Đặt $I_n = \int_0^1 \frac{(1+x)^n - 1}{x} dx$
  Khi đó, $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{k}$
  Mà $I_k - I_{k-1} = \int_0^1 \frac{(1+x)^k - (1+x)^{k-1}}{x} dx$ nên ta có $I_k - I_{k-1} = \frac{2^k - 1}{k}$ và $I_0 = \int_0^1 0 dx = 0$
  Vậy $I_n = I_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (I_k - I_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
  Từ đó ta có ngay tổng cần tìm.

- 2)Ta có: $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k = (1-x)^n \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k x^{k-1} = \frac{1-(1-x)^n}{x}$
  Lấy tích phân hai vế ta được: $I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x} dx = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k}$
  Mà $I_k - I_{k-1} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{k-1} - (1-x)^k}{x} dx$
  $I_k - I_{k-1} = \int_0^1 (1-x)^{k-1} dx = \frac{1}{k}$ và $J_o = 0$
  Nên $J_n = J_o + \sum\limits_{k=1}^{n} (J_k - J_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
  Vậy $B = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Bài 5. Cho $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, chứng minh rằng:
$S_n - C_n^1 S_{n-1} + C_n^2 S_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} S_1 = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Giải

Xét $f(x) = (x-1)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n C_n^n$. (1)
$\Rightarrow f(1) = 0 = 1 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n$ (2)
Lấy (1) trừ (2) vế với vế ta có:
$(x-1)^n = x^n - 1 - C_n^1(x^{n-1} - 1) + C_n^2(x^{n-2} - 1) - \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}(x-1)$
chia hai vế cho $x - 1$ và lấy tích phân trên [0,1] ta được:

$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^1 (x-1)^{n-1}dx$
$= \int_0^1 (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)dx - C_n^1 \int_0^1 (x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1)dx + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \int_0^1 dx$
$= S_n - C_n^1 S_{n-1} + C_n^2 S_{n-2} + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} S_1 \Rightarrow$đpcm.

Bài 6. Thu gọn các biểu thức sau:
$\sum\limits_{d_1+d_2+\cdots+d_k=m\le n} C_n^{d_1} C_n^{d_2} \ldots C_n^{d_k}$

Giải

Vẫn xét đa thức $f(t) = (1+t)^n = \sum\limits_{d_i=0}^{n} C_n^{d_i}.t^{d_i} (i = 1, 2, \ldots, k)$
Khi đó, $(f(t))^{kn} = \sum\limits_{j=0}^{kn} C_{kn}^{j} t^j$
Như vậy, số hạng bậc $m \le n$ là: $C_{kn}^m t^m$.
Mặt khác $(f(t))^{kn} = \underbrace{(1+t)^n.(1+t)^n \ldots (1+t)^n}_{kln}. = \sum\limits_{d_1=o}^{n} C_n^{d_1} t^{d_1} \cdots \sum\limits_{d_k=0}^{n} C_n^{d_k} t^{d_k}$.
Nhân đa thức một cách thông thường thì ta có số hạng bậc $m = d_1 + d_2 + \cdots + d_k \le n$ là: $\sum\limits_{d_1+\cdots+d_k=m\le n} C_n^{d_1} C_n^{d_2} \ldots C_n^{d_k} t^m$.
Từ đó ta rút ra hệ thức sau:

$$\sum_{d_1+\cdots+d_k=m\le n} C_n^{d_1} C_n^{d_2} \ldots C_n^{d_k} = \sum_{kn}^{m}.$$

Bài 7. Dùng chuỗi $f(x) = \sum\limits_{k\ge 0} x^{2k+1}$ để xây dựng hàm sinh cho số nghiệm nguyên lẻ của phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_d = n$ $(*)$.

Giải

Trong phương trình $(*)$ thì $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_d$ có vai trò như nhau nên ta chỉ cần tìm hàm sinh cho cách chọn một $x_i (1 \le i \le d)$ bất kì. Vì x_i nguyên dương lẻ nên x_i nhận các giá trị :$1, 3, 5, 7, \ldots$.
Như vậy hàm sinh cho cách chọn một x_i là :
$f(x) = x + x^3 + x^5 + \cdots = \sum\limits_{k\ge 0} x^{2k+1}$
Ta có $f(x) = \sum\limits_{k\ge 0} x^{2k+1} = \dfrac{x}{1-x^2}$
Áp dụng quy tắc xoắn ta tìm được hàm sinh cho cách chọn bộ số $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_d)$ là $\dfrac{x^d}{(1-x^2)^d}$

Bài 8. Xác định dãy số $(u_n)n \ge 0$ biết $u_0 = u_1 = 1$ và$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \forall n \ge 2$ trong các trường hợp sau: $(a, b) = (1, 2), (a, b) = (3, -4)$

textbfGiải

Ta có hàm sinh của dãy $(u_n)n \ge 0$ là $F(x) = \sum\limits_{n\ge 0} u_n x^n$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned}
F(x) &= u_0 + u_1x + \sum_{n\geq 2} u_nx^n \\
&= 1 + x + \sum_{n\geq 2}(au_{n-1} + bu_{n-2})x^n \\
&= 1 + x + a\sum_{n\geq 2} u_{n-1}x^n + b\sum_{n\geq 2} u_{n-2}x^n \\
&= 1 + x + ax(\sum_{n\geq 0} u_nx^n - u_0) + bx^2\sum_{n\geq 0} u_nx^n \\
&= 1 + x + axF(x) - ax + bx^2F(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1 - ax + x}{1 - ax - bx^2}$.

- TH1:$(a, b) = (1, 2)$ ta có:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{1 - x - 2x^2} \\
&= \frac{1}{(1 + x)(1 - 2x)} \\
&= \frac{1}{3(1 + x)} - \frac{2}{3(1 - 2x)} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^nx^n - \frac{2}{3}\sum_{n\geq 0} 2^nx^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n - 2^n}{3}x^n.
\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số $\Rightarrow u_n = \dfrac{(-1)^n - 2^n}{3}, \forall n \geq 2$

- TH2: $(a, b) = (3, -4)$ Ta có $F(x) = \dfrac{1 - 2x}{1 - 3x + 4x^2}$

Bài 9. Xác định dãy số $(u_n)n \geq 0$ biết $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ và$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} + cu_{n-3}, \forall n \geq 3$ trong các trường hợp sau: $(a, b, c) = (6, -11, 6), (a, b, c) = (5, 1, -5)$

Giải

Xét $G(x) = \sum\limits_{n\geq 0} u_nx^n (1)$ là hàm sinh của dãy $(u_n)n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
G(x) &= u_0 + u_1x + u_2x^2 + \sum_{n\geq 3} u_nx^n \\
&= u_0 + u_1x + u_2x^2 + \sum_{n\geq 3}(au_{n-1} + bu_{n-2} + cu_{n-3})x^n \\
&= u_0 + u_1x + u_2x^2 + ax(\sum_{n\geq 0} u_nx^n - u_1x - u_0) + bx^2(\sum_{n\geq 0} u_nx^n - u_0) + cx^3\sum_{n\geq 0} u_nx^n \\
&= 1 + x + x^2 + ax(G(x) - x - 1) + bx^2(G(x) - 1) + cx^3G(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow G(x) = \dfrac{(1-a-b)x^2 + (1-a)x + 1}{1 - ax - bx^2 - cx^3}$

- TH $(a, b, c) = (6, -11, 6)$:

$$G(x) = \frac{6x^2 - 5x + 1}{1 - 6x + 11x^2 - 6x^3} = \frac{1}{1-x}$$

  $\Rightarrow G(x) = \sum\limits_{n \geq 0} x^n (2)$
  Đồng nhất hệ số $(1), (2)$ ta có $u_n = 1, \forall n \geq 0$

- TH $(a, b, c) = (5, 1. - 5)$:
  $G(x) = \dfrac{-5x^2 - 4x + 1}{1 - 5x - x^2 + 5x^3} = \sum\limits_{n \geq 0} x^n (3)$ Đồng nhất hệ số $(1), (3)$ ta có $u_n = 1, \forall n \geq 0$

Bài 10. Dùng hàm sinh để xác định số cách chia 10 quả bóng giống nhau cho 4 đứa trẻ để mỗi đứa nhận ít nhất 2 quả.

Giải

Để giải bài toán ta tìm hàm sinh cho số cách chia bóng cho một đứa trẻ
Giả thiết cho mỗi đứa nhận ít nhất 2 quả bóng nên ta suy ra

0 cách đứa trẻ nhận	0 quả
0 cách đứa trẻ nhận	1 quả
1 cách đứa trẻ nhận	2 quả
1 cách đứa trẻ nhận	3 quả

Vậy hàm sinh cho cách chia đó là $x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
Áp dụng quy tắc xoắn ta tìm được hàm sinh cho cách chia bóng cho 4 dứa trẻ là :

$$\begin{aligned}
F(x) &= (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4 \\
&= x^8 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^4 \\
&= \frac{x^8}{(1-x)^4} \\
&= x^8 \sum_{n \geq 0} C^k_{4+k-1} x^k \\
&= \sum_{n \geq 0} C^k_{3+k} x^{k+8}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Số cách chia 10 quả bóng chính là hệ số của x^{10} và bằng $C_5^2 = 10$ cách.

Bài 11. Giả sử có 4 loai kẹo : socola,chanh, dâu, sữa.Tìm hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo thảo mãn các điều kiện khác nhau khác nhau sau đây

a) Mỗi một loại kẹo xuất hiện số lẻ lần.

b) Số kẹo của mỗi một loại kẹo chia hết cho 3.

c) Không có kẹo socola và có nhiều nhất 1 kẹo chanh.

d) Có $1, 3$ hay 11 cái kẹo socola,$2, 4$ hoặc 5 cái kẹo chanh.

e) Mỗi loại kẹo xuất hiện ít nhất 10 lần.

Giải

a) Vì mỗi loại kẹo xuất hiện là như nhau nên ta chỉ cần tìm hàm sinh cho số cách chọn một loại kẹo.
Ta có

0 cách chọn	0 cái
1 cách chọn	1 cái
0 cách chọn	2 cái
1 cách chọn	3 cái
...	...

Vậy hàm sinh cho số cách chọn một loại kẹo là : $x + x^3 + x^5 + \dots$
Áp dụng quy tắc xoắn ta tìm được hàm sinh cho cách chọn bốn loại kẹo là:

$$\begin{aligned} F(x) &= (x^{+}x^3 + x^5 + \dots)^4 \\ &= x^4(1 + x^2 + x^4 + \dots)^4 \\ &= \frac{x^4}{(1-x^2)^4} \end{aligned}$$

b) Ta có số cách chọn kẹo thỏa mãn điều kiện số kẹo của mỗi một loại kẹo chia hết cho 3.

1 cách chọn	0 cái
0 cách chọn	1 cái
0 cách chọn	2 cái
1 cách chọn	3 cái
0 cách chọn	4 cái
0 cách chọn	5 cái
1 cách chọn	6 cái
...	...

$\Rightarrow$ Hàm sinh cho số cách chọn một loại kẹo thảo mãn điều kiện trên là:
$1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots$.
Áp dụng quy tắc xoắn ta tìm được hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ bốn loại kẹo là:

$$F(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)^4 = \frac{1}{(1-x^3)^4}$$

c) Hàm sinh cho số cách chọn kẹo socola là 1.
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo chanh là $1 + x$.
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo dâu là $1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$.
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo sữa là $1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$
Áp dụng quy tắc xoắn ta tìm được hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ bốn loại kẹo là:
$F(x) = 1(1+x)\dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

d) Hàm sinh cho số cách chọn kẹo socola là $x + x^3 + x^{11}$.
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo chanh là $x^2 + x^4 + x^5$.
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo dâu là $1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$.
Hàm sinh cho số cách chọn kẹo sữa là $1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$
Áp dụng quy tắc xoắn ta tìm được hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ bốn loại kẹo là:
$G(x) = (x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)\dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x^3}{(1-x)^2}(1+x^2+x^{10})(x+x^2+x^3)$

e) Hàm sinh cho số cách chọn kẹo sao cho một loại kẹo xuất hiện ít nhất 10 lần là:
$x^{10} + x^{11} + x^{12} + \ldots$
Áp dụng quy tắc xoắn ta tìm được hàm sinh cho số cách chọn n cái kẹo từ bốn loại kẹo là:

$$F(x) = (x^{10} + x^{11} + x^{12} + \ldots)^4 = x^{40}(1 + x + x^2 + \ldots)^4 = \frac{x^{10}}{(1-x)^4}$$

Bài 12. Sử dụng hàm sinh giải các hệ thức đệ qui sau:

a) $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 2$

b) $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1}$

c) $a_4 = 6, a_1 = 30, a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$

d) $a_1 = 4, a_1 = 12, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$

Giải

a) $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 2$
Xét hàm sinh của dãy con $(a_n)n \geq 0$ là:

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n (1)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
G(x) &= a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1}(3a_{n-1} + 2)x^n \\
&= 1 + 3\sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n + 2\sum_{n\geq 1} x^n \\
&= 1 + 3x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + 2\sum_{n\geq 0} x^n - 2 \\
&= 3xG(x) + \frac{2}{1-x} - 1 \\
&= 3xG(x) + \frac{1+x}{1-x} - 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1+x}{(1-x)(1-3x)} \\
&= \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-x} \\
&= 2\sum_{n\geq 0}(3x)^n - \sum_{n\geq 0} x^n \\
&= \sum_{n\geq 0}(2.3^n - 1)x^n (*)
\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của (1) và $(*)$ ta được $a_n = 2.3^n - 1)$

b) $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1}$
Xét hàm sinh $G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n (1)$

Khi đó

$$\begin{aligned} G(x) &= a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n \\ &= 1 + \sum_{n\geq 1}(3a_{n-1} + 4^{n-1})x^n \\ &= 1 + 3\sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n + \sum_{n\geq 1} 4^{n-1}x^n \\ &= 1 + 3x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + x\sum_{n\geq 0}(4x)^n \\ &= 1 + 3xG(x) + \frac{x}{1-4x} \\ &= 3xG(x) + \frac{1-3x}{1-4x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow G(x) = \dfrac{1}{1-4x} = \sum\limits_{n\geq 1} 4^n x^n (2)$ Đồng nhất hệ số của (1) và (2) ta được $a_n = 4^n$.

c) $a_4 = 6, a_1 = 30, a_n = 5a_{n-1} - a_{n-2}$
Xét hàm sinh $G(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n (1)$
Khi đó

$$\begin{aligned} G(x) &= a_0 + a_1x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1x + \sum_{n\geq 2}(5a_{n-1} + 6a_{n-2})x^n \\ &= a_0 + a_1x + 5\sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^n - 6\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n \\ &= a_0 + a_1x + 5x(\sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0) - 6x^2\sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ &= 6 + 5xG(x) + 6x^2G(x) \end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{6}{1-5x-6x^2} \\ &= \frac{6}{7(1+x)} + \frac{36}{7(1-6x)} \\ &= \frac{6}{7}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n + \frac{36}{7}\sum_{n\geq 0}(6x)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{6}{7}((-1)^n + 6^{n+1})x^n (2) \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của (1) và (2) ta được $a_n = \dfrac{6}{7}((-1)^n + 6^{n+1})$.

d) $a_0 = 4, a_1 = 12, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$

Xét hàm sinh $G(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n (1)$

Khi đó

$$\begin{aligned}
G(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2}(a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n)x^n \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^n + 2\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n + \sum_{n\geq 0}(2x)^n \\
&= a_0 + a_1 x + x(\sum_{n\geq 0} a_n x^n - a_0) - 2x^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0}(2x)^n - 2x - 1 \\
&= 4 + 12x + x(G(x) - 4) + 2x^2 G(x) + \frac{1}{1-2x} - 2x - 1 \\
&= x(G(x) - 4) + 2x^2 G(x) + 3 + 6x + \frac{1}{1-2x}
\end{aligned}$$

Như vậy,

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{12x^2 - 4}{(2x^2 + x - 1)(1-2x)} \\
&= \frac{-8}{9(1+x)} + \frac{171}{8(1-2x)} + \frac{369}{8(1-2x)^2} \\
&= \frac{-8}{9}\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n + \frac{171}{8}\sum_{n\geq 0}(2x)^n + \frac{369}{8}\sum_{n\geq 0}(n+1)(2x)^n \\
&= \sum_{n\geq 0}(\frac{-8}{9}(-1)^n + \frac{171}{8}2^n + x^n\frac{369}{8}(n+1)(2)^n)x^n (2)
\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của (1) và (2) ta được $a_n = \frac{-8}{9}(-1)^n + \frac{171}{8}2^n + x^n\frac{369}{8}(n+1)(2)^n$