BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BỘ QUỐC PHÒNG

HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

Bài toán quy hoạch toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội

Võ Minh Phổ

Chuyên ngành: Toán học

Mã số: 62 46 30 01

Người hướng dẫn khoa học:

1. GS. TSKH Hoàng Xuân P

2. PGS. TS. Phan Thành Anh

2011

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những kết quả được trình bày trong luận án là mới, đã được công bố trên các tạp chí Toán học quốc tế. Các kết quả viết chung với GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú và PGS. TS. Phan Thành An đã được sự đồng ý của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác trước đó.

Nghiên cứu sinh

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn, chỉ bảo của GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú và PGS. TS. Phan Thanh An. Tác giả chân thành cảm ơn sự giúp đỡ mọi mặt mà các Thầy đã dành cho. Tác giả bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và chân thành tới GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú, Thầy đã quan tâm, hướng dẫn tận tình, nghiêm khắc và tạo mọi điều kiện để tác giả có thể hoàn thành những mục tiêu đặt ra cho luận án. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên, PGS. TS. Tạ Duy Phượng, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm và các đồng nghiệp thuộc Phòng Giải tích số và Tính toán Khoa học Viện Toán học vì đã có những ý kiến quý báu cho tác giả trong quá trình nghiên cứu.

Tác giả xin được bày tỏ lòng cảm ơn đến Ban chủ nhiệm Khoa Công Nghệ thông tin, Phòng Sau đại học và Ban Giám đốc Học viện Kỹ thuật Quân sự đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả có nhiều thời gian thực hiện luận án.

Tác giả cũng bày tỏ lòng biết ơn đến PGS. TS. Đào Thanh Tĩnh, PGS. TS. Nguyễn Đức Hiếu, PGS. TS. Nguyễn Thiện Luận, PGS. TS. Tô Văn Ban, TS. Nguyễn Nam Hồng, TS. Nguyễn Hữu Mộng, TS. Vũ Thanh Hà, TS. Nguyễn Mạnh Hùng, TS. Nguyễn Trọng Toàn, TS. Ngô Hữu Phúc, TS. Tống Minh Đức, TS. Lê Đình Sơn, TS. Trần Nguyên Ngọc và tất cả các đồng nghiệp trong Khoa Công Nghệ thông tin, HVKTQS, đã động viên, khích lệ và có những trao đổi hữu ích trong suốt thời gian nghiên cứu và công tác.

Tác giả cảm ơn sâu sắc GS. TSKH. Phạm Thế Long, Giám đốc Học Viện KTQS, người đã tạo mọi điều kiện về mặt thủ tục cũng như chuyên môn để tác giả có thể hoàn thành luận án này.

Cuối cùng tác giả gửi lời cám ơn tới vợ và các con, những người đã động viên, chăm sóc và tạo mọi điều kiện cho tác giả trong quá trình làm luận án.

Mục lục

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG

- $I\!R^n$: Không gian Euclide n chiều
- $\|\cdot\|$: Chuẩn Euclide trong $I\!R^n$
- $\langle x, y\rangle$: Tích vô hướng của véc tơ x, y
- $B(x,r) := \{y \mid \|y-x\| < r\}$: Hình cầu mở bán kính r tâm x
- $\bar{B}(x,r) := \{y \mid \|y-x\| \leq r\}$: Hình cầu đóng bán kính r tâm x
- $A \in I\!R^{n\times n}$, $A \succ 0$: Ma trận đối xứng xác định dương
- A^T : Ma trận chuyển vị của ma trận A
- $\lambda_{\min}, (\lambda_{\max})$: Giá trị riêng nhỏ nhất (lớn nhất) của ma trận A
- $\lambda(A)$: Tập các giá trị riêng của ma trận A
- $\|A\| = \{\sqrt{\max\lambda} \mid \lambda \in \lambda(A^TA)\}$: Chuẩn của ma trận A trong $I\!R^{n\times n}$
- $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$: Hàm toàn phương lồi ngặt
- $p(x),\ \sup_{x\in D} |p(x)| \leq s$ với $s \in [0, +\infty[$: Hàm nhiễu giới nội
- $\tilde{f} = f + p$: Hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội
- $f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \inf,\ x \in D$: Bài toán quy hoạch toàn phương (P)
- $f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \sup,\ x \in D$: Bài toán quy hoạch toàn phương (Q)
- $f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + p(x) \to \inf, x \in D$: Bài toán quy hoạch toàn phương lồi ngặt với nhiễu $(\tilde{P})$
- $f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + p(x) \to \sup, x \in D$: Bài toán quy hoạch toàn phương lồi ngặt với nhiễu $(\tilde{Q})$
- $\partial g(x^*)$: Dưới vi phân của g tại điểm x^*

- $\mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m) := \sum_{i=0}^{m} \mu_i g_i(x)$: Hàm Lagrange
- Tính chất (M_γ) : Mỗi điểm γ-cực tiểu x^* của f là điểm cực tiểu toàn cục
- Tính chất (I_γ) : Mỗi điểm γ-infimum x^* của f là điểm infimum toàn cục
- $\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f}) := \{x \mid x \in D,\ \tilde{f}(x) \leq \alpha\}, \alpha \in I\!R$: Tập mức dưới của hàm $\tilde{f} = f + p$
- $h_1(\gamma) := \inf_{x_0,\ x_1 \in D,\ \|x_0 - x_1\| = \gamma} \Big(\frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - f(\frac{1}{2}(x_0 + x_1))\Big)$
- $h_2(\gamma) := \inf_{x_0,\ x_1 \in D,\ \|x_0 - x_1\| = \gamma, -x_0 + 2x_1 \in D} \Big(f(x_0) - 2f(x_1) + f(-x_0 + 2x_1)\Big)$
- $\operatorname{aff} D$: Bao aphin của tập D
- $\operatorname{ext} D$: Tập các điểm cực biên của tập lồi đa diện D
- $J_D(x^*) := \operatorname{ext} D \setminus \{x^*\},\ x^* \in \operatorname{ext} D$
- $d(x, D) := \inf_{y \in D} \|x - y\|$: Khoảng cách từ x đến D
- $\operatorname{conv} D$: Bao lồi của tập D
- $d_D := \min_{x^* \in \operatorname{ext} D} \{d\big(x^*, \operatorname{conv} J_D(x^*)\big)\}$
- $D(x^*, \beta) := \{x \in D \mid x = (1 - \alpha)x^* + \alpha y,\ y \in D, 0 \leq \alpha \leq 1 - \beta\}$, $x^* \in \operatorname{ext} D,\ \beta \in [0, 1]$
- $C^0(D) := \{p : D \to I\!R \mid \|p\|_{C^0} := \sup_{x \in D} |p(x)| < +\infty\}$
- $\bar{B}_{C^0}(0, r)$: Hình cầu đóng bán kính r tâm 0 trong $C^0(D)$

MỞ ĐẦU

Bài toán quy hoạch toàn phương truyền thống có dạng

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \inf, \quad x \in D$$

trong đó $A \in I\!R^{n\times n}$ là ma trận vuông, $b \in I\!R^n$ là véc tơ và $D \subset I\!R^n$ là tập lồi.

Cùng với bài toán quy hoạch lồi, bài toán quy hoạch toàn phương được nhiều nhà toán học Việt nam và quốc tế nghiên cứu, ví dụ như H. W. Kuhn và A. W. Tucker [22], B. Bank và R. Hasel [5], E. Blum và W. Oettli [7], B. C. Eaves [12], M. Frank và P. Wolfe [13], O. L. Magasarian [26], G. M. Lee, N. N. Tam và N. D. Yen [31], H. X. Phu [45], H. X. Phu và N. D. Yen [53], M. Schweighofer [57], H. Tuy [63], [64], [72], H. H. Vui và P. T. Son [66]...

Các kết quả quan trọng đã thu được khi nghiên cứu các bài toán quy hoạch toàn phương của các nhà toán học là về sự tồn tại nghiệm tối ưu, điều kiện cần tối ưu, điều kiện đủ tối ưu, thuật toán tìm nghiệm tối ưu, tính ổn định của nghiệm tối ưu khi các bài toán trên bị tác động bởi nhiễu. Nhiều kết quả nghiên cứu về bài toán trên đã được ứng dụng để giải các bài toán trong kinh tế và kỹ thuật, như bài toán lựa chọn đầu tư (portfolio selection) ([27], [28]), bài toán phát điện tối ưu (economic power dispatch) ([6], [11], [69]), bài toán kinh tế đối sánh (matching economic), ([17]), bài toán máy hỗ trợ véc tơ (support vector machine) ([29])...

Khi A là nửa xác định dương hoặc nửa xác định âm thì bài toán trên có thể phân rã thành hai bài toán khác nhau sau:

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \inf, \quad x \in D \tag{P}$$

và

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \sup, \quad x \in D. \tag{Q}$$

Luận án này nghiên cứu các bài toán quy hoạch toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội sau:

$$\tilde{f}(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + p(x) \to \inf, \quad x \in D \qquad (\tilde{P})$$

và

$$\tilde{f}(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + p(x) \to \sup, \quad x \in D, \qquad (\tilde{Q})$$

trong đó $p : D \to I\!R$ thỏa mãn điều kiện $\sup_{x\in D} |p(x)| \le s$ với giá trị $s \in [0, +\infty[$ và A trong các bài toán $(P), (Q), (\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$ được giả thiết là ma trận đối xứng xác định dương.

Vì sao các bài toán trên được chọn để nghiên cứu? Rõ ràng, khi $s = 0$ thì các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$ chính là các bài toán (P) và (Q), hay nói cách khác các bài toán (P) và (Q) là các trường hợp riêng của các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$. Đây là lý do để tiến hành nghiên cứu các bài toán trên, tối thiểu từ quan điểm lý thuyết. Tuy nhiên, còn một số lý do thực tế khác dưới đây, cho thấy việc nghiên cứu các bài toán $(\tilde{P}), (\tilde{Q})$ là thực sự cần.

Lý do thứ nhất: $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ là hàm mục tiêu ban đầu và p là hàm nhiễu nào đó. Hàm nhiễu p có thể bao gồm các tác động bổ sung (tất định hoặc ngẫu nhiên) lên hàm mục tiêu và các lỗi gây ra trong quá trình mô hình hóa, đo đạc, tính toán... Điểm đặc biệt là ở chỗ, chúng ta hạn chế chỉ xét nhiễu giới nội. Hạn chế này là không quá ngặt, có thể được thỏa mãn trong nhiều bài toán thực tế, chẳng hạn như trong hai ví dụ minh họa sau đây.

Một trong những ứng dụng nổi bật của quy hoạch toàn phương là bài toán lựa chọn đầu tư (H. M. Markowitz [27], [28]). Bài toán phát biểu như sau: Phân phối vốn qua n chứng khoán (asset) có sẵn để có thể giảm thiểu rủi ro và tối đa lợi nhuận, tức là tìm véc tơ tỉ lệ $x \in D,\ D := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}$ để $f(x) = \omega x^T \Sigma x - \rho^T x$ đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó $x_j, j = 1, \dots, n$, là tỷ lệ chứng khoán thứ j trong danh mục đầu tư, ω là tham số rủi ro, $\Sigma \in I\!R^{n\times n}$ là ma trận hiệp phương sai, $\rho \in I\!R^n$ là véc tơ lợi nhuận kỳ vọng. Vì Σ và ρ thường không được xác định chính xác mà chỉ xấp xỉ bởi $\tilde{\Sigma}$ và $\tilde{\rho}$, do đó chúng ta phải cực tiểu hóa hàm $\tilde{f}(x) = \omega x^T \tilde{\Sigma} x - \tilde{\rho}^T x = f(x) + p(x)$, trong đó $p(x) = \omega x^T(\tilde{\Sigma} - \Sigma)x - (\tilde{\rho} - \rho)^T x$. Khi quy định, không được bán khống, tức là $x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$, thì tập chấp nhận được D là giới nội. Vì vậy nhiễu p cũng giới nội trên D. Nói một cách tổng quát, tính giới nội của nhiễu luôn được đảm bảo khi D giới nội và p liên tục trên D. Giả thiết này cũng phù hợp với nhiều bài toán thực tế.

Một ví dụ nữa cho thấy là nhiễu giới nội luôn xuất hiện khi giải một bài toán tối ưu (P) hoặc (Q) nào đó bằng máy tính. Do phần lớn các số thực không thể biểu diễn chính xác bằng máy tính, nên đối với hầu hết $x \in D$ ta không thể tính chính xác đại lượng $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ mà chỉ có thể xấp xỉ $f(x)$ bởi một số dấu chấm động $\tilde{f}(x)$ nào đó. Hàm $\tilde{f}$ không lồi, không toàn phương và thậm chí là không liên tục trên D. Khi đó hàm $p := \tilde{f} - f$ mô tả các lỗi tính toán. Các lỗi đó bị chặn bởi một cận trên $s \in [0, +\infty[$ nào đó có thể ước lượng được, tức là $\sup_{x\in D} |p(x)| \leq s$. Ngoài ra, bằng cách sử dụng các số dấu chấm động dài hơn và/hoặc các thuật toán tốt hơn, ta có thể giảm cận trên s.

Lý do thứ hai: $\tilde{f}$ là hàm mục tiêu đích thực và f là hàm mục tiêu được lý tưởng hóa hoặc là hàm mục tiêu thay thế. Trong thực tế, nhiều hàm thể hiện một số mục tiêu thực tiễn được giả định là lồi, hoặc toàn phương, hoặc có một số tính chất thuận tiện đã được nghiên cứu kỹ, hoặc dễ nghiên cứu, nhưng thực ra thì không phải là như vậy. Điều này đã được H. X. Phu, H. G. Bock và S. Pickenhain đề cập đến trong [48]. Trong bối cảnh đó, $p = \tilde{f} - f$ là hàm hiệu chỉnh. Có thể giả thiết p là giới nội (tối thiểu trên tập chấp nhận được) bởi một số dương khá bé s, vì nếu $|p(x)|$ quá lớn thì sự thay thế không còn phù hợp nữa.

Để giải thích điều này, ta đề cập đến vấn đề thường được nghiên cứu của phát điện tối ưu, tức là bài toán phân bố lượng điện năng cho từng tổ máy phát nhiệt điện sao cho tổng chi phí (giá thành) là cực tiểu, đồng thời vẫn đáp ứng được nhu cầu lượng điện năng và thoả mãn ràng buộc về công suất phát ra của mỗi tổ máy. Người ta thường giả thiết (xem [6], [11], [69],...) hàm chi phí tổng cộng (bao gồm các chi phí nhiên liệu (fuel cost), chi phí tải sau (load-following cost), chi phí dự phòng quay (sprinning-reserve cost), chi phí dự phòng bổ sung (supplemental-reserve cost), chi phí tổn thất phát và truyền dẫn điện năng) là hàm toàn phương, lồi ngặt và có dạng

$$F(P) = \sum_{i=1}^{n} F_i(P_i),$$

trong đó n là số tổ máy phát, $P := (P_1, P_2, \ldots, P_n)$, $P_i \in [P_{i\min}, P_{i\max}]$ là lượng điện năng phát ra của tổ máy thứ i, $P_{i\min}, P_{i\max}$ là công suất phát nhỏ nhất và lớn nhất của tổ máy phát thứ i, $F_i(P_i) = a_i + b_i P_i + c_i P_i^2$ là hàm chi phí của tổ máy phát thứ i và a_i, b_i, c_i là các hệ số giá của tổ máy phát thứ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dĩ nhiên, giả thiết toàn phương, lồi ngặt của hàm mục tiêu là quá lý tưởng. Chi phí thực tế có thể không là hàm toàn phương và cũng không là hàm lồi ngặt. Như vậy, để giả thiết về tính toàn phương và lồi ngặt của hàm mục tiêu được thỏa mãn, cần hàm giới nội p hiệu chỉnh hàm chi phí thực tế. Đặc biệt (xem [62], [6], [11], [69],...), nếu hiệu ứng điểm-van được xét đến thì hàm chi phí toàn phương phải được hiệu chỉnh bởi tổng hữu hạn các hàm dạng sin, tức là

$$F(P) = \sum_{i=1}^{n} \big(F_i(P_i) + |e_i \sin(f_i(P_{i\min} - P_i))|\big),$$

trong đó e_i, f_i là các hệ số hiệu ứng điểm-van. Rõ ràng hàm hiệu chỉnh $p := \sum_{i=1}^{n} |e_i \sin(f_i(P_{i\min} - P_i))|$ là giới nội.

Để ngắn gọn, ta thường gọi p là hàm nhiễu (mặc dù nó không chỉ đóng vai trò đó như đã giải thích ở trên), $\tilde{f}$ là hàm bị nhiễu và $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$ là các bài toán nhiễu. Thật ra, chúng chỉ là các thuật ngữ vay mượn, không phải lúc nào cũng chính xác như thường lệ.

Những vấn đề gì là mới của các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$ cần được nghiên cứu? Câu hỏi này là cần thiết, vì đã có những kết quả nghiên cứu đặc sắc theo các khía cạnh khác nhau về tính ổn định của các bài toán nhiễu lồi và/hoặc nhiễu toàn phương. Điểm chung của phần lớn các công trình nghiên cứu từ trước đến nay là nhiễu không làm thay đổi những thuộc tính tiêu biểu của bài toán ban đầu. Ví dụ bài toán lồi bị nhiễu vẫn giữ nguyên tính lồi (như trong các nghiên cứu của M. J Canovas [8], D. Klatte [21], B. Kumer [23]...) và các bài toán toàn phương giữ được tính toàn phương (như trong các nghiên cứu của J. V. Daniel [10], G. M. Lee, N. N. Tam và N. D. Yen [31], K. Mirnia và A. Ghaffari-Hadigheh [30], H. X. Phu [45], H. X. Phu và N. D. Yen [53]...). Điều khác biệt là, hàm mục tiêu $\tilde{f}$ của các bài toán nhiễu trong luận án này không lồi, không toàn phương mặc dù hàm f là lồi ngặt và toàn phương. Hơn nữa, vì nhiễu p chỉ giả thiết là giới nội, nên hàm bị nhiễu $\tilde{f}$ có thể không liên tục tại bất cứ điểm nào. Với những hàm mục tiêu như vậy, dường như sẽ không thể thu được kết quả gì đặc biệt. Mục tiêu của luận án là chỉ ra điều ngược lại.

Luận án gồm 4 chương.

Chương 1 với tiêu đề *"Bài toán quy hoạch lồi, toàn phương và hàm lồi thô"* trình bày Định lý Kuhn-Tucker của bài toán quy hoạch lồi, Định lý về điều kiện cực trị của bài toán quy hoạch toàn phương và một số loại hàm lồi thô như γ-lồi ngoài, Γ-lồi ngoài, γ-lồi trong cùng một số tính chất tối ưu của chúng.

Các khái niệm, các tính chất, các định lý được dẫn ra trong chương này sẽ được sử dụng để nghiên cứu các vấn đề đặt ra trong các chương sau.

Chương 2 với tiêu đề *"Điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$"* nghiên cứu tính γ-lồi ngoài của hàm toàn phương với nhiễu giới nội, điểm cực tiểu toàn cục, điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, khảo sát tính ổn định nghiệm và mở rộng Định lý Kuhn-Tucker cho bài toán này.

Chương 3 với tiêu đề *"Tính Γ-lồi ngoài của hàm mục tiêu và điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$"* nghiên cứu tính Γ-lồi ngoài của hàm mục tiêu $\tilde{f}$ (theo cách tiếp cận tô pô), qua đó nhận được một số kết quả mạnh hơn những kết quả nghiên cứu về điểm cực tiểu toàn cục, điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ được chỉ ra trong Chương 2.

Chương 4 của luận án có tiêu đề *"Điểm supremum của Bài toán $(\tilde{Q})$"* nghiên cứu tính chất và tính ổn định của các điểm supremum toàn cục và điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$.

Các kết quả đạt được trong luận án bao gồm:

- Chỉ ra các điều kiện đủ để hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài, Γ-lồi ngoài và γ-lồi trong.
- Chứng minh được đường kính của tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ không vượt quá $\gamma^* = 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.
- Chỉ ra tính ổn định nghiệm của Bài toán $(\tilde{P})$ theo cận trên s của hàm nhiễu.
- Mở rộng Định lý Kuhn-Tucker cho Bài toán $(\tilde{P})$.
- Chỉ ra các tính chất (mạnh hơn các tính chất đã có) của các điểm cực tiểu toàn cục và điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ khi sử dụng tính Γ-lồi ngoài của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$.
- Chứng minh được sự tồn tại và vị trí của các điểm supremum toàn cục trên miền D.
- Khẳng định tính ổn định của tập các điểm supremum toàn cục khi D là đa diện lồi và tập các điểm supremum địa phương khi D là tập lồi đa diện của Bài toán $(\tilde{Q})$ theo nhiễu p.

Các kết quả chính của luận án đã được trình bày tại các xemina "Tối ưu hóa và Tính toán hiện đại" của Khoa Công nghệ thông tin (Học viện KTQS), "Tối ưu và Tính toán khoa học" của Phòng Giải tích số và Tính toán khoa học (Viện Toán học), Hội thảo "Tối ưu và Tính toán Khoa học" (Ba Vì, Hà Nội, tháng 4 năm 2010). Các kết quả này cũng đã được công bố trên các tạp chí *Optimization, Mathematical Methods of Operations Research* và *Journal of Optimization Theory and Applications*.

Chúng tôi đang tiếp tục nghiên cứu một số vấn đề về lý thuyết và tính toán ứng dụng trong thực tế của các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$, hy vọng rằng trong thời gian tới sẽ có thêm một số kết quả mới.

CHƯƠNG 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH LỒI, QUY HOẠCH TOÀN PHƯƠNG VÀ HÀM LỒI THÔ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại Định lý Kuhn-Tucker cho bài toán quy hoạch lồi, Định lý về điều kiện cần cực trị cho bài toán quy hoạch toàn phương. Đồng thời chúng tôi cũng trình bày lại một số khái niệm, tính chất của hàm lồi thô như γ-lồi ngoài, Γ-lồi ngoài và γ-lồi trong.

Các khái niệm, các kết quả dẫn ra ở trong chương này, sẽ được sử dụng nhiều lần trong các chương sau.

Trong suốt luận án này, $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide n-chiều, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ là các tập lồi, và trong nhiều trường hợp D được giả thiết là tập lồi đa diện. Với $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$, ta ký hiệu

$$\begin{aligned} x_\lambda &:= (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, \\ [x_0, x_1] &:= \{x_\lambda \mid 0 \le \lambda \le 1\}, \\ ]x_0, x_1] &:= [x_0, x_1] \setminus \{x_0\}. \end{aligned}$$

Các tập hợp $[x_0, x_1[$ và $]x_0, x_1[$ cũng được định nghĩa tương tự.

Với r là số thực dương, các tập hợp

$$\begin{aligned} B(x,r) &:= \{y \mid \|y-x\| < r\}, \\ \bar{B}(x,r) &:= \{y \mid \|y-x\| \le r\}, \\ S(x,r) &:= \{y \mid \|y-x\| = r\}, \end{aligned}$$

lần lượt được gọi là các hình cầu mở, hình cầu đóng và mặt cầu tâm x bán kính r. Ngoài ra, trong luận án này chúng tôi luôn ký hiệu:

- f là hàm toàn phương lồi ngặt có dạng

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle,\ x \in D \tag{1.0.1}$$

trong đó $A \in I\!R^{n\times n}$ là ma trận đối xứng xác định dương (nếu A không đối xứng ta có thể thay A bởi $\frac{1}{2}(A + A^T)$).

- $p(x)$ là hàm nhiễu giới nội, tức là

$$\sup_{x\in D} |p(x)| \leq s < +\infty. \tag{1.0.2}$$

- $\tilde{f}(x) := f(x) + p(x)$ được gọi là hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội trên D, gọi tắt là hàm bị nhiễu.

- Ta cũng ký hiệu $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ và $\lambda(A)$ lần lượt là các giá trị riêng nhỏ nhất, lớn nhất và tập các giá trị riêng của ma trận A.

1.1. Bài toán quy hoạch lồi, quy hoạch toàn phương

Trong mục này, chúng tôi trình bày Định lý Kuhn-Tucker cho bài toán quy hoạch lồi sau:

$$\begin{aligned} g_0(x) &\to \inf, \quad x \in D \\ D = &\ \{x \in S \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}, \end{aligned} \tag{L_1}$$

trong đó $g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 0, \ldots, m,$ là các hàm hàm lồi, $S \subset I\!R^n$ là tập lồi.

Bài toán trên đã được nghiên cứu từ rất sớm, một trong những kết quả quan trọng là định lý Kuhn-Tucker do W. H. Kuhn và A. W. Tucker đưa ra vào năm 1951 trong [22] công trình khai phá của Quy hoạch lồi. Trong Bài toán (L_1) hàm Lagrange được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m) := \sum_{i=0}^{m} \mu_i g_i(x), \tag{1.1.3}$$

trong đó μ_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, nhận các giá trị thực, $x \in D$. Nếu tập D của Bài toán (P) trùng với tập D của Bài toán (L_1) thì hàm Lagrange của Bài toán (P) có dạng

$$\mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(x), \tag{1.1.4}$$

Định lý 1.1.1. (Định lý Kuhn-Tucker, xem [74]).
Xét Bài toán (L).

(a) *Nếu x^* là nghiệm cực tiểu của bài toán thì tồn tại các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0, i = 0, \ldots, m$, sao cho chúng không cùng triệt tiêu, thỏa mãn điều kiện Kuhn-Tucker*

$$\mathcal{L}(x^*, \mu_0, \ldots, \mu_m) = \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m) \tag{1.1.5}$$

và điều kiện bù

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m. \tag{1.1.6}$$

Nếu thêm điều kiện Slater

$$\exists z \in S : g_i(z) < 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m, \tag{1.1.7}$$

thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.

(b) *Nếu tồn tại x^* thỏa mãn (1.1.5), (1.1.6) với $\mu_0 = 1$ thì x^* là nghiệm cực tiểu của Bài toán (L_1).*

Dạng dưới vi phân của Định lý Kuhn-Tucker được phát biểu như sau:

Định lý 1.1.2. (xem [74]) *Giả thiết rằng $g_i : I\!\!R^n \to I\!\!R$, $i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi, cùng liên tục ít nhất tại một điểm của tập lồi $S \subset I\!\!R^n$. Cho x^* là một nghiệm chấp nhận được của Bài toán (L_1).*

(a) *Nếu x^* là nghiệm cực tiểu của bài toán thì tồn tại các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0, i = 0, \ldots, m$, sao cho chúng không cùng triệt tiêu, thỏa mãn phương trình*

$$0 \in \sum_{i=0}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*) + N(x^*|S) \tag{1.1.8}$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m, \tag{1.1.9}$$

trong đó tập

$$\partial g_i(x^*) := \{\xi \mid g_i(x) - g_i(x^*) \geq \langle \xi, x - x^* \rangle \quad \forall x \in I\!R^n\}$$

là dưới vi phân của g_i tại x^* và tập

$$N(x^*|S) := \{\xi \mid \langle \xi, x - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S\}$$

là nón pháp tuyến của S tại x^*.

Nếu điều kiện Slater (1.1.7) *thỏa mãn, thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.*

(b) *Nếu tồn tại x^* thỏa mãn* (1.1.8), (1.1.9) *với $\mu_0 = 1$ thì x^* là nghiệm cực tiểu của Bài toán (L_1).*

Nhận xét 1.1.1. *Nếu $S = I\!R^n$ thì khi đó $N(x^*|S) = \{0\}$, nên biểu thức* (1.1.8) *được thay bởi*

$$0 \in \sum_{i=0}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*). \tag{1.1.10}$$

Đối với bài toán quy hoạch toàn phương ta có định lý sau:

Định lý 1.1.3. (Xem [31]). *Xét bài toán quy hoạch toàn phương*

$$\begin{aligned} &\langle Mx, x \rangle + \langle b, x \rangle \to \inf, \quad x \in D \\ &D = \{x \in I\!R^n \mid \langle c_i, x \rangle \leq d_i,\ i = 1, \ldots, m\}, \end{aligned} \tag{L_2}$$

trong đó $M \in I\!R^{n \times n}$ là ma trận đối xứng, $c_i \in I\!R^n$, $i = 1, \ldots, m$. Khi đó, nếu x^* là nghiệm cực tiểu địa phương thì tồn tại các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$, sao cho chúng thỏa mãn các điều kiện

$$(2Mx^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i = 0, \tag{1.1.6}$$

và

$$\mu_i(\langle c_i, x^* \rangle - d_i) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m. \tag{1.1.7}$$

Định lý 1.1.4. (xem [31], trang 79). *Cho D là tập lồi đa diện, khi đó*

(a) *Nếu M là ma trận đối xứng xác định dương và $D \neq \emptyset$ thì Bài toán (L_2) có điểm cực tiểu toàn cục duy nhất.*

(b) *Nếu M là ma trận đối xứng xác định âm thì điểm cực tiểu địa phương của Bài toán (L_2) (nếu tồn tại) là một điểm cực biên của D.*

Nhận xét 1.1.2. *Kết luận* (b) *của định lý trên tương đương với phát biểu sau "Nếu M đối xứng xác định dương thì điểm cực đại địa phương của Bài toán (Q) là điểm cực biên của D".*

1.2. Hàm lồi suy rộng thô

Hàm $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ được gọi là lồi, nếu $x_0, x_1 \in D$, thì bất đẳng thức

$$g(x_\lambda) \leq (1 - \lambda)g(x_0) + \lambda g(x_1), \tag{1.2.8}$$

thỏa mãn với mọi điểm $x_\lambda \in [x_0, x_1]$. Hàm lồi có nhiều tính chất thú vị không những về phương diện giải tích mà còn về phương diện tối ưu hóa như: tập mức dưới của hàm lồi đang xét là lồi; mỗi điểm cực tiểu địa phương của hàm đang xét là điểm cực tiểu toàn cục; mỗi điểm dừng của hàm đang xét là điểm cực tiểu toàn cục; nếu hàm đang xét đạt giá trị cực đại trên miền lồi compact thì cũng đạt giá trị cực đại tại ít nhất một điểm cực biên. Tuy nhiên trong nhiều bài toán thực tế, hàm cần xét có một số tính chất trên nhưng không phải là hàm lồi. Do đó, đã xuất hiện nhiều loại hàm lồi suy rộng được đặc trưng bởi một trong các tính chất của hàm lồi như: hàm tựa lồi [71], tựa lồi hiện [18], [26], giả lồi [25], [72], lồi bất biến [14] ...

Từ năm 1989 xuất hiện một hướng mới mở rộng khái niệm hàm lồi gọi là hàm lồi thô. Một hàm P-lồi được H. X. Phu gọi là lồi thô nếu như tính chất P thỏa mãn với mọi $x_0, x_1 \in D$ mà $\|x_0 - x_1\| \geq \gamma$, trong đó γ

là một số dương cố định cho trước. Hàm lồi thô δ-lồi, δ-tựa lồi, δ-lồi giữa được T. C. Hu, V. Klee và D. Larman [16] đưa ra vào năm 1989. Tiếp đó năm 1991 R. Klötzler đề xuất khái niệm ρ-lồi và được nghiên cứu bởi H. Hartwig [15] và B. Söllner [73]. Các hàm γ-lồi, γ-tựa lồi, γ-lồi đối xứng, γ-lồi nhẹ, γ-lồi giữa được đề xuất và nghiên cứu bởi H. X. Phu [34]–[37], H. X. Phu và N. N. Hai [49]. Trong luận án này chúng tôi quan tâm và sử dụng nhiều lần các tính chất tối ưu của các hàm γ-lồi ngoài [47], Γ-lồi ngoài [44] và γ-lồi trong [41]–[43]. Các lớp hàm này đều do H. X. Phu đề xuất và nghiên cứu.

Trước khi trình bày mục tiếp theo, chúng tôi nhắc lại định nghĩa về điểm γ-cực biên, một khái niệm được H. X. Phu giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1994 và nghiên cứu trong [35]. Khái niệm này sẽ được sử dụng trong Chương 4 của luận án.

Định nghĩa 1.2.1. ([35]) *Cho $\gamma > 0$ và $D \subset X$ là tập lồi trong không gian tuyến tính định chuẩn X. Điểm $x \in D$ gọi là điểm γ-cực biên (tương ứng γ-cực biên ngặt) của D nếu $x', x'' \in D$ thỏa mãn $x = 0.5(x' + x'')$ thì suy ra $\|x' - x''\| \leq 2\gamma$ (tương ứng $\|x' - x''\| < 2\gamma$).*

1.3. Hàm γ-lồi ngoài

Trong mục này chúng tôi trình bày về hàm γ-lồi ngoài ([46]). Các tính chất tối ưu của lớp hàm này chúng tôi sẽ khai thác sử dụng trong Chương 2.

Định nghĩa 1.3.2. ([46]) *Cho $\gamma > 0$. Hàm $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là γ-lồi ngoài (hoặc γ-lồi ngoài ngặt) với độ thô γ, nếu với mọi x_0, $x_1 \in D$ tồn tại $k \in \mathbb{N}$ và*

$$\begin{aligned} &\lambda_i \in [0,1],\ i = 0, 1, \ldots, k,\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_k = 1, \\ &0 \leq \lambda_{i+1} - \lambda_i \leq \frac{\gamma}{\|x_0 - x_1\|} \ \textit{khi}\ i = 0, 1, \ldots, k-1, \end{aligned}$$

sao cho với $x_{\lambda_i} = (1-\lambda_i)x_0 + \lambda_i x_1,\ i = 0, 1, \ldots, k,$ *thì*

$$g(x_{\lambda_i}) \leq (1-\lambda_i)g(x_0) + \lambda_i g(x_1) \text{ với } i = 0, 1, \ldots, k,$$

(hoặc

$$g(x_{\lambda_i}) < (1-\lambda_i)g(x_0) + \lambda_i g(x_1) \text{ với } i = 1, \ldots, k-1).$$

Định lý 1.3.5. ([46]) Nếu $g : D \subset I\!R^n \to]-\infty, +\infty]$ là γ-lồi ngoài thì $\operatorname{lsc} g$ cũng là γ-lồi ngoài, trong đó $\operatorname{lsc} g(x) := \liminf_{y \to x} g(y)$ với mọi $x \in D$.

Định nghĩa 1.3.3. ([46]) Cho $\gamma > 0, M \subset I\!R^n, M \neq \emptyset$, M được gọi là γ-lồi ngoài với độ thô γ nếu $x_0, x_1 \in M$ và $\|x_0 - x_1\| > \gamma$ suy ra tồn tại $z_0 := x_0, z_1, \ldots, z_k := x_1 \in [x_0, x_1] \cap M$ sao cho

$$\|z_{i+1} - z_i\| \leq \gamma \text{ với i=0, 1,\ldots, k-1.}$$

Định lý 1.3.6. ([46]) Ký hiệu $\mathcal{L}(g, \alpha) := \{x \in D : g(x) \leq \alpha\}$, với $\alpha \in I\!R$ và gọi là tập mức dưới của hàm g. Khi đó, nếu g là hàm γ-lồi ngoài thì $\mathcal{L}(g, \alpha)$ là tập γ-lồi ngoài.

Định nghĩa 1.3.4. (xem [1], [38]) $x^* \in D$ *được gọi là*

1) *điểm γ-cực tiểu của g nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $g(x^*) \leq g(x)$ với mọi $x \in B(x^*, \gamma + \epsilon) \cap D$;*

2) *điểm γ-infimum của g nếu tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho*

$$\liminf_{x \to x^*} g(x) = \inf_{x \in B(x^*, \gamma+\epsilon) \cap D} g(x);$$

3) *điểm infimum toàn cục của g nếu*

$$\liminf_{x \to x^*} g(x) = \inf_{x \in D} g(x).$$

Mệnh đề 1.3.1. ([1], [38]) *x^* là điểm γ-infimum của g khi và chỉ khi điểm này là điểm γ-cực tiểu của* $\operatorname{lsc} g$.

Tính chất tối ưu của hàm γ-lồi ngoài được chỉ ra bởi định lý sau:

Định lý 1.3.7. ([1], [38]) *Nếu g là γ-lồi ngoài thì có các tính chất*

(M_γ) *Mỗi điểm γ-cực tiểu x^* của g là điểm cực tiểu toàn cục.*

(I_γ) *Mỗi điểm γ-infimum x^* của g là điểm infimum toàn cục.*

Mệnh đề sau nêu cho ta đường kính của tập các điểm cực tiểu toàn cục của hàm γ-lồi ngặt.

Mệnh đề 1.3.2. ([42]) *Nếu $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ là hàm γ-lồi ngoài ngặt, thì đường kính của tập các điểm cực tiểu toàn cục không vượt quá γ.*

Đối với hàm lồi ngặt bị nhiễu giới nội ta có mệnh đề về tính γ-lồi ngoài sau đây.

Mệnh đề 1.3.3. ([42]) *Cho $\gamma > 0$, $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ là hàm lồi và*

$$h_1(\gamma) := \inf_{x_0, x_1 \in D,\, \|x_0 - x_1\| = \gamma} \Big(\frac{1}{2}(g(x_0) + g(x_1)) - g(\frac{1}{2}(x_0 + x_1)) \Big) > 0.$$

Khi đó, nếu hàm nhiễu p thỏa mãn

$$|p(x)| \le h_1(\gamma)/2 \text{ với mọi } x \in D$$

thì hàm bị nhiễu $\tilde{g} = g + p$ là γ-lồi ngoài và nếu

$$|p(x)| < h_1(\gamma)/2 \text{ với mọi } x \in D$$

thì $\tilde{g} = g + p$ là γ-lồi ngoài ngặt.

1.4. Hàm Γ-lồi ngoài

Khái niệm hàm Γ-lồi ngoài do H. X. Phu đề xuất và nghiên cứu trong [44]. Trong mục này chúng tôi trình bày lại một số tính chất của lớp hàm Γ-lồi ngoài mà H. X. Phu đã chỉ ra. Một số tính chất tối ưu của lớp hàm này sẽ là cơ sở cho việc nghiên cứu Bài toán $(\tilde{P})$ trong Chương 3.

Định nghĩa 1.4.5. ([44]) *Cho X là không gian véc tơ trên trường số thực, Γ là tập cân trong X tức là $\lambda\Gamma \subset \Gamma$ với mọi $|\lambda| \leq 1$, và D là tập lồi trong X. Hàm $g : D \to I\!R$ được gọi là Γ-lồi ngoài nếu với mọi $x_0, x_1 \in D$ tồn tại tập đóng $\Lambda \subset [0,1]$ và chứa $\{0,1\}$ sao cho*

$$[x_0, x_1] \subset \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} + 0.5\Gamma \tag{1.4.9}$$

và

$$\forall \lambda \in \Lambda : g(x_\lambda) \leq (1-\lambda)g(x_0) + \lambda g(x_1). \tag{1.4.10}$$

Với định nghĩa hàm Γ-lồi ngoài như trên thì hầu hết các hàm lồi thô được định nghĩa ở các mục trên như δ-lồi, ρ-lồi, γ-lồi, γ-lồi đối xứng ... là các trường hợp riêng của lớp hàm này.

Định nghĩa 1.4.6. ([44]) *Tập $S \subset X$ được gọi là Γ-lồi ngoài nếu với mọi $x_0, x_1 \in S$*

$$[x_0, x_1] \subset ([x_0, x_1] \cap S) + 0.5\Gamma,$$

tức là tồn tại $\Lambda \subset [0,1]$ sao cho

$$\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset S,\ [x_0, x_1] \subset \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} + 0.5\Gamma. \tag{1.4.11}$$

Ví dụ 1.4.1. ([44]) Giả sử $z^i \in I\!R$, $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên, $i \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $0 < z^{i+1} - z^i \leq \gamma, i \in \mathbb{Z}$ và $g : I\!R \to I\!R$ sao cho

$$g(x) \geq g(z^i) \quad \forall x \in I\!R \text{ và } i \in \mathbb{Z}.$$

Khi đó $g(x)$ là Γ-lồi ngoài với $\Gamma = \bar{B}(0, \gamma)$.

Mệnh đề 1.4.4. ([44]) *Tập mức dưới của hàm Γ-lồi ngoài là Γ-lồi ngoài.*

Định lý 1.4.8. ([44]) *Cho B là tập cân trong không gian véc tơ X. Khi đó $g : D \subset X \to I\!R$ là hàm Γ-lồi ngoài với $\Gamma = B$ khi và chỉ khi* epi g *là tập Γ-lồi ngoài với $\Gamma = B \times I\!R$.*

Định nghĩa 1.4.7. ([44]) *Cho $g : D \to I\!R$. Điểm $x^* \in D$ gọi là điểm Γ-cực tiểu của g nếu*

$$g(x^*) = \inf_{x \in (x^* + \Gamma) \cap D} g(x)$$

và gọi là Γ*-infimum của* g *nếu*

$$\liminf_{x\in X,\, x\to x^*} g(x) = \inf_{x\in(x^*+\Gamma)\cap D} g(x).$$

Tính chất tối ưu quan trọng của hàm Γ-lồi ngoài được chỉ ra bởi định lý sau:

Định lý 1.4.9. ([44]) *Giả sử* 0 *là điểm trong của tập* Γ *và* $g : D \to I\!R$ *là hàm* Γ*-lồi ngoài. Khi đó*

$$g(x^*) = \inf_{x\in D\cap(\{x^*\}+\Gamma)} g(x) \Longrightarrow g(x^*) = \inf_{x\in D} g(x), \tag{1.4.12}$$

tức là nếu x^* *là điểm* Γ*-cực tiểu thì* x^* *là điểm cực tiểu toàn cục.*

1.5. Hàm γ-lồi trong

Khái niệm hàm γ-lồi trong được H. X. Phu đưa ra nhằm nghiên cứu các điểm cực đại toàn cục và điểm supremum toàn cục. Trong mục này chúng tôi điểm qua một số kết quả nghiên cứu của H. X. Phu trong các bài báo [41], [42] và [43]. Chúng tôi sẽ sử dụng các kết quả đó để nghiên cứu điểm cực đại toàn cục, supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ trong Chương 4 của luận án này.

Định nghĩa 1.5.8. ([42]) *Hàm* $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ *gọi là hàm* γ*-lồi trong (hoặc* γ*-lồi trong ngặt) trên* D *với độ thô* $\gamma > 0$*, nếu tồn tại độ tinh cố định* $\nu \in]0, 1]$ *sao cho*

$$\begin{aligned} &\textit{với mọi } x_0, x_1 \in D \textit{ thỏa mãn } \|x_0 - x_1\| = \nu\gamma \\ &\textit{và } x_{1+1/\nu} = -(1/\nu)x_0 + (1 + 1/\nu)x_1 \in D, \end{aligned}$$

thì

$$\sup_{\lambda\in[2,1+1/\nu]} \Big(g((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) - (1-\lambda)g(x_0) - \lambda g(x_1)\Big) \geq 0,$$

(hoặc

$$\sup_{\lambda\in[2,1+1/\nu]} \Big(g((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) - (1-\lambda)g(x_0) - \lambda g(x_1)\Big) > 0).$$

Ví dụ 1.5.2. ([41]) Cho

$$g(x) = \begin{cases} a & \text{nếu } x \text{ là hữu tỷ} \\ b & \text{nếu } x \text{ là vô tỷ,} \end{cases}$$

nếu $\nu\gamma$ là hữu tỷ thì g là hàm γ-lồi trong với $\gamma > 0$.

Nhận xét 1.5.3. *Khi $\nu = 1$ thì hàm g là γ-lồi trong (hoặc γ-lồi trong ngặt) nếu với $x_0, x_1 \in D$ thỏa mãn $\|x_0 - x_1\| = \gamma$ và $-x_0 + 2x_1 \in D$ kéo theo*

$$-g(x_0) + 2g(x_1) \leq g(-x_0 + 2x_1),$$

(hoặc

$$-g(x_0) + 2g(x_1) < g(-x_0 + 2x_1)).$$

Mệnh đề 1.5.5. ([41]) *Giả sử $g : D \to I\!R$ là γ-lồi trong với độ tinh ν. Nếu $x_1 \in D$ là điểm cực đại của g thì mọi điểm x_0 thỏa mãn*

$$\|x_0 - x_1\| = \nu\gamma, \quad x_{1+1/\nu} = -(1/\nu)x_0 + (1 + 1/\nu)x_1 \in D$$

cũng là điểm cực đại của g trên D.

Định lý 1.5.10. ([41]) *Cho $D \subset I\!R^n$ là tập lồi, giới nội và $g : D \to I\!R$ là hàm γ-lồi trong. Nếu g có điểm cực đại thì có ít nhất một điểm cực đại là điểm γ-cực biên ngặt của D.*

Định lý 1.5.11. ([41]) *Cho $g : D \to I\!R$ là hàm γ-lồi trong ngặt. Nếu g đạt cực đại trên D thì điểm cực đại là điểm γ-cực biên ngặt của D.*

Mệnh đề 1.5.6. ([41]) *Cho $g : D \to I\!R$, D là tập mở tương đối theo bao aphin của D (ký hiệu là* aff *D) là hàm bị chặn trên và γ-lồi trong với độ tinh $\nu \in [0, 1]$. Nếu x_1 là điểm supremum của g, thì với mọi $x_0 \in D$ thỏa mãn*

$$\|x_0 - x_1\| = \nu\gamma, \quad x_{1+1/\nu} = -(1/\nu)x_0 + (1 + 1/\nu)x_1 \in D$$

cũng là điểm supremum của g.

Định lý 1.5.12. ([41]) *Cho $D \subset I\!R^n$ là tập mở tương đối theo* aff D*, $g : D \to I\!R$ bị chặn trên và γ-lồi trong. Nếu g đạt supremum trên D, thì có ít nhất một điểm supremum là điểm γ-cực biên ngặt của D.*

Hệ quả 1.5.1. *Cho $D \subset I\!R^n$ là tập compact, $g : D \to I\!R$ bị chặn trên và lồi trong. Khi đó g có tối thiểu một điểm supremum là điểm biên tương đối của D theo* aff D *hoặc là điểm γ-cực biên ngặt của D.*

Đối với hàm lồi ngặt bị nhiễu, ta có mệnh đề quan trọng về tính γ-lồi trong sau đây.

Mệnh đề 1.5.7. ([42]) *Cho $\lambda > 0$, $\quad g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ là hàm lồi và*

$$h_2(\gamma) := \inf_{x_0, x_1 \in D,\, \|x_0 - x_1\| = \gamma, -x_0 + 2x_1 \in D} \big(g(x_0) - 2g(x_1) + g(-x_0 + 2x_1)\big) > 0.$$

Khi đó, nếu hàm nhiễu p thỏa mãn

$$|p(x)| \leq h_2(\gamma)/4 \text{ với mọi } x \in D$$

thì hàm bị nhiễu $\tilde{g} = g + p$ là γ-lồi trong và nếu

$$|p(x)| < h_2(\gamma)/4 \text{ với mọi } x \in D$$

thì hàm bị nhiễu $\tilde{g} = g + p$ là γ-lồi trong ngặt.

Kết luận: Trong chương này chúng tôi đã trình bày Định lý Kuhn-Tucker cho bài toán lồi, định lý về điều kiện cần cực trị cho bài toán toàn phương, tổng quan về các loại hàm lồi thô và một số tính chất tối ưu của chúng. Những kết quả được trích dẫn sẽ được sử dụng nhiều lần trong các chương sau. Về sự tồn tại nghiệm và tính ổn định nghiệm của bài toán toàn phương có thể tìm thấy trong [5], [7], [10], [13], [31]... và về các loại hàm lồi thô cùng các tính chất của chúng có thể tìm thấy trong [1], [3], [38], [41], [42], [44], [46] và [49],...

CHƯƠNG 2
ĐIỂM INFIMUM TOÀN CỤC CỦA BÀI TOÁN ($\tilde{P}$)

Chương này chủ yếu nghiên cứu tính γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$; các điểm infimum toàn cục của Bài toán ($\tilde{P}$); đường kính của tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán ($\tilde{P}$); tính ổn định nghiệm tối ưu của Bài toán ($\tilde{P}$); tính chất tựa và Định lý Kuhn-Tucker suy rộng cho Bài toán ($\tilde{P}$).

Chúng tôi nhắc lại, $\tilde{f} = f + p$ là hàm bị nhiễu, trong đó f được cho bởi công thức (1.0.1), tức là $f(x) = \langle A, x \rangle + \langle b, x \rangle$, $A \in I\!R^{n\times n}$ là ma trận đối xứng xác định dương và hàm nhiễu p thỏa mãn (1.0.2), nghĩa là

$$\sup_{x\in D} |p(x)| \leq s < +\infty.$$

Ngoài ra, trong suốt chương này ta ký hiệu $\gamma^* := 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ trong đó $\lambda_{\min}$ là giá trị riêng nhỏ nhất của A.

2.1. Tính γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu

Phần lớn các tính chất đặc trưng của các hàm lồi suy rộng không còn đúng khi bị nhiễu, trong khi nhiều ứng dụng thực tế thường bị ảnh hưởng bởi nhiễu tuyến tính hoặc nhiễu phi tuyến. Các tính chất của hàm γ-lồi ngoài và tính ổn định của lớp hàm này theo tính chất lồi đặc trưng của nó khi bị nhiễu tuyến tính đã được nghiên cứu trong [47]. Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu các điều kiện đủ để hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài.

Mệnh đề sau cho ta giá trị cụ thể của hàm $h_1(\gamma)$, hàm này được định nghĩa trong Mệnh đề 1.3.3 Chương 1.

Mệnh đề 2.1.8. *Cho f xác định theo công thức* (1.0.1) *và $\gamma > 0$. Khi đó*

$$h_1(\gamma) := \inf_{x_0,\ x_1 \in D,\ \|x_0 - x_1\| = \gamma} \Big(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) - f(\frac{x_0 + x_1}{2})\Big) \geq \lambda_{\min}\gamma^2/4, \tag{2.1.1}$$

nếu $D = I\!R^n$ thì

$$h_1(\gamma) = \lambda_{\min}\gamma^2/4.$$

Chứng minh. Lấy cặp x_0, x_1 bất kỳ trong D thỏa mãn điều kiện $\|x_0 - x_1\| = \gamma$. Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) - f(\frac{x_0 + x_1}{2}) \\
=\ &\frac{1}{2}\langle Ax_0, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax_1, x_1\rangle + \frac{1}{2}\langle b, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle b, x_1\rangle \\
&-\frac{1}{4}\big\langle A(x_0 + x_1), x_0 + x_1\big\rangle - \frac{1}{2}\langle b, x_0 + x_1\rangle \\
=\ &\frac{1}{2}\langle Ax_0, x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax_1, x_1\rangle - \frac{1}{4}\langle A(x_0 + x_1), x_0 + x_1\rangle \\
=\ &\frac{1}{4}\langle Ax_0, x_0\rangle + \frac{1}{4}\langle Ax_1, x_1\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax_0, x_1\rangle,
\end{aligned}$$

do đó

$$\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) - f(\frac{x_0 + x_1}{2}) = \frac{1}{4}\langle A(x_0 - x_1), x_0 - x_1\rangle. \tag{2.1.2}$$

Gọi $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$, là các giá trị riêng của ma trận xác định dương A (có thể có một số giá trị trùng nhau), $\{e_i \mid\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ là cơ sở trực chuẩn trong $I\!R^n$ và e_i là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ (xem [77]). Khi đó, ta có thể viết

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \zeta_0^i e_i,\ \ x_1 = \sum_{i=1}^{n} \zeta_1^i e_i$$

và

$$\langle A(x_0 - x_1), x_0 - x_1\rangle \ =\ \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\zeta_0^i - \zeta_1^i)e_i, \sum_{j=1}^{n}(\zeta_0^j - \zeta_1^j)e_j\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i(\zeta_0^i - \zeta_1^i)(\zeta_0^j - \zeta_1^j)\langle e_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\zeta_0^i - \zeta_1^i)^2 \\
&\geq \lambda_{\min}\sum_{i=1}^{n}(\zeta_0^i - \zeta_1^i)^2 \\
&= \lambda_{\min}\|x_0 - x_1\|^2 \\
&\geq \lambda_{\min}\gamma^2. \qquad (2.1.3)
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo (2.1.1) thì

$$\begin{aligned}
h_1(\gamma) &= \inf_{x_0,\ x_1\in D,\ \|x_0-x_1\|=\gamma}\Big(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) - f(\frac{x_0+x_1}{2})\Big) \\
&= \inf_{x_0,\ x_1\in D,\ \|x_0-x_1\|=\gamma}\frac{1}{4}\big\langle A(x_0 - x_1), x_0 - x_1\big\rangle,
\end{aligned}$$

nên

$$h_1(\gamma) \geq \lambda_{\min}\gamma^2/4. \qquad (2.1.4)$$

Nếu $D = I\!R^n$ thì ta có thể chọn cặp $x_0,\ x_1 \in I\!R^n$ thỏa mãn $\|x_0 - x_1\| = \gamma$ và $x_0 - x_1$ đồng phương với e_{i_0}, trong đó e_{i_0} là véc tơ riêng trong cơ sở trực chuẩn ứng với véc tơ riêng $\lambda_{\min}$ của ma trận A. Do đó

$$\big\langle A(x_0 - x_1), x_0 - x_1\big\rangle = \lambda_{\min}\|x_0 - x_1\|^2 = \lambda_{\min}\gamma^2. \qquad (2.1.5)$$

Kết hợp (2.1.1)–(2.1.5) ta suy ra điều cần chứng minh. □

Ví dụ 2.1.3. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -5 & -5 & 3 \\ -5 & 15 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 11 & -9 \\ 3 & -5 & -9 & 11 \end{bmatrix}.$$

Khi đó

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 15-\lambda & -5 & -5 & 3 \\ -5 & 15-\lambda & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 11-\lambda & -9 \\ 3 & -5 & -9 & 11-\lambda \end{vmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng $|A - \lambda I| = 0$ tương đương với

$$\lambda^4 - 52\lambda^3 + 832\lambda^2 - 4672\lambda + 5376 = 0.$$

Giải ra ta được các giá trị riêng sau:

$$\lambda_1 = 12; \lambda_2 = 28; \lambda_3 = 6 + 2\sqrt{5}; \lambda_4 = 6 - 2\sqrt{5}$$

và các véc tơ riêng trực chuẩn tương ứng là

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1), \\ e_2 &= \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1), \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{20 + 8\sqrt{5}}}(-2 - \sqrt{5}, -2 - \sqrt{5}, 1, 1), \\ e_4 &= \frac{1}{\sqrt{20 - 8\sqrt{5}}}(-2 + \sqrt{5}, -2 + \sqrt{5}, -1, 1). \end{aligned}$$

Vì ma trận A đối xứng xác định dương và $\lambda_{\min} = 6 - 2\sqrt{5}$ nên

$$h_1(\gamma) = (3 - \sqrt{5})\gamma^2/2.$$

Hai mệnh đề sau đây chỉ ra các điều kiện đủ để hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu là γ-lồi ngoài và γ-lồi ngoài ngặt.

Mệnh đề 2.1.9. *Cho f xác định theo công thức* (1.0.1), *$p : D \subset I\!R^n \to I\!R$ là hàm nhiễu và $\gamma > 0$. Khi đó hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài nếu hàm nhiễu p thỏa mãn điều kiện*

$$|p(x)| \le \lambda_{\min}\gamma^2/8 \text{ với mọi } x \in D. \tag{2.1.6}$$

Chứng minh. Theo (2.1.1) thì $\lambda_{\min}\gamma^2/8 \le h_1(\gamma)/2$, nên từ giả thiết ta có

$$|p(x)| \le h_1(\gamma)/2 \text{ với mọi } x \in D,$$

tức là hàm nhiễu p thỏa mãn điều kiện của Mệnh đề 1.3.3. Áp dụng mệnh đề này ta suy ra $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài. $\square$

Mệnh đề 2.1.10. *Cho f xác định theo công thức* (1.0.1), $p : D \subset I\!R^n \to I\!R$ *là hàm nhiễu và* $\gamma > 0$. *Khi đó hàm bị nhiễu* $\tilde{f} = f + p$ *là* γ*-lồi ngoài ngặt nếu hàm nhiễu* p *thỏa mãn điều kiện*

$$|p(x)| < \lambda_{\min}\gamma^2/8 \textit{ với mọi } x \in D. \tag{2.1.7}$$

Chứng minh. Từ(2.1.1) suy ra $\lambda_{\min}\gamma^2/8 \leq h_1(\gamma)/2$ nên kết hợp với giả thiết ta nhận được

$$|p(x)| < h_1(\gamma)/2 \text{ với mọi } x \in D.$$

Do đó hàm nhiễu p thỏa mãn Mệnh đề 1.3.3, vì thế $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài ngặt. □

Vì $\gamma^* = 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ và $\sup_{x\in D}|p(x)| \leq s < +\infty$, nên

$$\sup_{x\in D}|p(x)| \leq s = \frac{\lambda_{\min}\gamma^{*2}}{8}.$$

Do đó

$$|p(x)| \leq \frac{\lambda_{\min}\gamma^{*2}}{8} \text{ với mọi } x \in D.$$

Mặt khác, nếu $\gamma > \gamma^*$ thì

$$\sup_{x\in D}|p(x)| = \frac{\lambda_{\min}\gamma^{*2}}{8} < \frac{\lambda_{\min}\gamma^{2}}{8},$$

suy ra

$$|p(x)| < \frac{\lambda_{\min}\gamma^{2}}{8} \text{ với mọi } x \in D.$$

Từ hai kết quả trên, suy ra hàm nhiễu p thỏa mãn (2.1.6) của Mệnh đề 2.1.9 và bất đẳng thức (2.1.7) của Mệnh đề 2.1.10, do đó ta nhận được mệnh đề quan trọng sau:

Mệnh đề 2.1.11. *Xét hàm bị nhiễu giới nội* $\tilde{f} = f + p$. *Khi đó* $\tilde{f} = f + p$ *là* γ*-lồi ngoài với* $\gamma \geq \gamma^*$ *và* γ*-lồi ngoài ngặt với* $\gamma > \gamma^*$.

Ví dụ 2.1.4 dưới đây chỉ ra rằng γ^* là giá trị nhỏ nhất để mọi hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu là γ-lồi ngoài.

Ví dụ 2.1.4. Lấy $\gamma < 2\sqrt{2}$, chọn γ_1 sao cho $\gamma < \gamma_1 < 2\sqrt{2}$. Xét các hàm

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2,\\
p(x) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \neq \gamma_1 i,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ -1 & \text{nếu } x = \gamma_1 i,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vì $\sup_{x \in I\!R} |p(x)| = 1$, $\lambda_{\min} = 1$ nên $\gamma^* = 2\sqrt{2}$. Theo Mệnh đề 2.1.11 thì $\tilde{f} = f + p$ là γ^*-lồi ngoài. Ta cũng tính được $\tilde{f}(x_0) = -1$ khi $x_0 = 0$ và $\tilde{f}(x_1) = {\gamma_1}^2 - 1$ khi $x_1 = \gamma_1$. Mặt khác, với mọi $\lambda \in]\,0, 1[$ thì

$$\lambda \tilde{f}(x_0) + (1-\lambda)\tilde{f}(x_1) = -\lambda + (1-\lambda)({\gamma_1}^2 - 1) = {\gamma_1}^2 - 1 - \lambda {\gamma_1}^2$$

và

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(x_\lambda) &= \tilde{f}(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1)\\
&= \tilde{f}((1-\lambda)\gamma_1) = (1-\lambda)^2 {\gamma_1}^2 + 1\\
&= {\gamma_1}^2 - 2{\gamma_1}^2\lambda + {\gamma_1}^2\lambda^2 + 1.
\end{aligned}
$$

Để chứng minh $\tilde{f} = f + p$ không là hàm γ-lồi ngoài, ta cần chỉ ra

$$\tilde{f}(x_\lambda) > \lambda \tilde{f}(x_0) + (1-\lambda)\tilde{f}(x_1) \text{ với mọi } \lambda \in]\,0, 1[,$$

tức là

$${\gamma_1}^2 - 2{\gamma_1}^2\lambda + {\gamma_1}^2\lambda^2 + 1 > {\gamma_1}^2 - 1 - \lambda{\gamma_1}^2$$

tương đương với

$${\gamma_1}^2{\lambda_1}^2 - {\gamma_1}^2\lambda + 2 > 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên, vì với $\gamma_1 < 2\sqrt{2}$, biệt thức $\Delta = {\gamma_1}^4 - 8{\gamma_1}^2 = {\gamma_1}^2({\gamma_1}^2 - 8)$ nhận giá trị âm.

Ví dụ sau cho thấy hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội có thể không γ-lồi ngoài ngặt khi $\gamma = \gamma^*$.

Ví dụ 2.1.5. Cho các hàm

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2,\\
p(x) &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \neq \pm\sqrt{2}i,\ i = 1, 2, \ldots \\ -1 & \text{nếu } x = \pm\sqrt{2}i,\ i = 1, 2, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Vì $\sup_{x\in I\!R}|p(x)| = 1, \lambda_{\min} = 1$ nên $\gamma^* = 2\sqrt{2}$. Theo Mệnh đề 2.1.11 thì $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài với $\gamma = \gamma^*$. Ta dễ dàng tính được $\tilde{f}(x_0) = 1, \tilde{f}(x_1) = 1$ với $x_0 = -\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2}$. Mặt khác, nếu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài ngặt với $\gamma = \gamma^*$ thì tồn tại ít nhất một giá trị $\lambda \in]\,0, 1[$ sao cho

$$\tilde{f}(x_\lambda) < \lambda\tilde{f}(x_0) + (1-\lambda)\tilde{f}(x_1).$$

Tuy nhiên

$$\tilde{f}(x_\lambda) = x_\lambda^2 + 1 \geq 1 = \lambda\tilde{f}(x_0) + (1-\lambda)\tilde{f}(x_1)$$

nên $\tilde{f} = f + p$ không là hàm γ-lồi ngoài ngặt với $\gamma = \gamma^*$.

Một trong những tính chất của hàm lồi là tập mức dưới của hàm lồi là lồi. H. X. Phu đã đưa ra khái niệm tập γ-lồi ngoài [47] (Định nghĩa 1.3.4, Chương 1) và chỉ ra tính chất tương tự: Tập mức dưới của hàm γ-lồi ngoài là tập γ-lồi ngoài. Các tính chất của tập γ-lồi ngoài được nghiên cứu và trình bày kỹ trong [1] và [47]. Đối với lớp hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội, ta có thêm tính chất sau đây của tập mức dưới

Mệnh đề 2.1.12. *Cho $\gamma > 0$, ký hiệu*

$$\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f}) := \{x \mid x \in D,\ \tilde{f}(x) \leq \alpha\}$$

là tập mức dưới của hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$. Khi đó, nếu hàm nhiễu p thỏa mãn điều kiện

$$|p(x)| \leq \lambda_{\min}\gamma^2/8 \quad \text{với mọi } x \in D,$$

thì tập $\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f})$ là γ-lồi ngoài.

Chứng minh. Giả thiết trên thỏa mãn Mệnh đề 2.1.9, nên suy ra $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài. Theo Định lý 1.3.6 (hoặc Mệnh đề 2.2 [47]) thì tập mức dưới của hàm γ-lồi ngoài là γ-lồi ngoài, do đó $\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f})$ là tập γ-lồi ngoài. □

Mệnh đề 2.1.13. *Tập mức dưới $\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f})$ của hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là tập γ-lồi ngoài với $\gamma \geq \gamma^*$.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 2.1.11 thì $\tilde{f} = f + p$ là hàm γ-lồi ngoài với $\gamma \geq \gamma^*$ nên theo Mệnh đề 2.1.12 ta suy ra $\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f})$ là tập γ-lồi ngoài với $\gamma \geq \gamma^*$. □

2.2. Điểm cực tiểu toàn cục và điểm infimum toàn cục

Mệnh đề dưới đây (được suy ra từ các định lý 1.3.7 Chương 1 và Mệnh đề 2.1.11), cho phép ta xác định điểm cực tiểu toàn cục và điểm infimum toàn cục thông qua việc tìm kiếm các điểm γ-cực tiểu và γ-infimum, của hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội.

Mệnh đề 2.2.14. *Xét hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$. Khi đó*

(a) *Nếu $x^* \in D$ là điểm γ- cực tiểu của $\tilde{f} = f + p$ với $\gamma \geq \gamma^*$, thì $x^* \in D$ là điểm cực tiểu toàn cục của $\tilde{f} = f + p$.*

(b) *Nếu x^* là điểm γ-infimum của $\tilde{f} = f + p$ với $\gamma \geq \gamma^*$ thì x^* là điểm infimum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$.*

Đối với hàm γ-lồi ngoài, nói chung tập các điểm cực tiểu toàn cục có thể không giới nội, điều này có thể thấy rõ qua hàm $g(x) := x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$, là hàm γ-lồi ngoài với $\gamma = 1$ và tập các điểm cực tiểu toàn cục là $\{i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Tuy nhiên, đối với hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.2.15. *Ký hiệu* $\arg\min \tilde{f}$ *là tập các điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Khi đó*

$$\|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\| \leq \gamma^* \textit{ với mọi } \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \arg\min \tilde{f},$$

tức là

$$\operatorname{diam}(\arg\min \tilde{f}) \leq \gamma^*.$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 2.1.11 thì $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài ngặt khi

$$\gamma > \gamma^* = 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}},$$

nên $\tilde{f} = f + p$ thỏa mãn Mệnh đề 1.3.2, vì vậy

$$\mathrm{diam}(\arg\min \tilde{f}) \leq \gamma \text{ với mọi } \gamma > \gamma^*.$$

Do đó suy ra

$$\mathrm{diam}(\arg\min \tilde{f}) \leq \gamma^*.$$

□

2.3. Các tính chất của điểm infimum toàn cục

Ở mục trước, trong Mệnh đề 2.2.15 chúng tôi đã nghiên cứu đường kính của tập các điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán quy hoạch toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội $(\tilde{P})$. Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu đường kính của tập các điểm infimum toàn cục và tính ổn định của tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ theo cận trên s của hàm nhiễu p.

Nghiên cứu các điểm infimum toàn cục, trong mục này ta sử dụng hàm bao đóng nửa liên tục dưới (xem [54], trang 68-90) $\mathrm{lsc}\,\tilde{f}(x) := \liminf_{y\to x,\, y\in D} \tilde{f}(y)$ và có bổ đề sau:

Bổ đề 2.3.1. *Xét hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$. Khi đó*

(a) *Với mọi $x \in D$ thì* $\mathrm{lsc}\,\tilde{f}(x) = f(x) + \mathrm{lsc}\,p(x)$,

(b) $\sup_{x\in D} |\mathrm{lsc}\,p(x)| \leq \sup_{x\in D} |p(x)| \leq s$.

Chứng minh. (a) Ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{lsc}\,\tilde{f}(x) &= \lim \inf_{y\to x,\, y\in D} \tilde{f}(y) \\ &= \inf\{\eta : \exists y_n \to x, y_n \in D,\, \eta = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(y_n)\}. \end{aligned}$$

Vì $f(x)$ liên tục nên

$$\begin{aligned} \mathrm{lsc}\,\tilde{f}(x) &= \lim \inf_{y\to x,\, y\in D} \tilde{f}(y) \\ &= f(x) + \inf\{\eta' : \exists y_n \to x, y_n \in D,\, \eta' = \lim_{n\to\infty} p(y_n)\}. \end{aligned}$$

Do đó, đối với hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội thì

$$\operatorname{lsc}\tilde{f}(x) = f(x) + \operatorname{lsc} p(x).$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned} |\operatorname{lsc} p(x)| &= |\liminf_{y\to x,\, x\in D} p(x)| \\ &\le \liminf_{y\to x,\, x\in D} |p(x)| \\ &\le \liminf_{y\to x,\, x\in D} \sup_{x\in D} |p(x)|, \end{aligned}$$

nên

$$\sup_{x\in D} |\operatorname{lsc} p(x)| \le \sup_{x\in D} |p(x)| \le s < +\infty.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Vì tập các điểm cực tiểu toàn cục là tập con của tập các điểm infimum toàn cục, nên mệnh đề sau là trường hợp tổng quát của Mệnh đề 2.2.15.

Mệnh đề 2.3.16. *Nếu $\tilde{x}_1^*$, $\tilde{x}_2^*$ là hai điểm infimum toàn cục bất kỳ của Bài toán $(\tilde{P})$ thì*

$$\|\tilde{x}_1^* - \tilde{x}_2^*\| \le \gamma^*.$$

Chứng minh. Vì $\tilde{x}_1^*$, $\tilde{x}_2^*$ là hai điểm infimum toàn cục bất kỳ của Bài toán $(\tilde{P})$, nên theo Mệnh đề 1.3.1 và (a) của Bổ đề 2.3.1 ta suy ra $\tilde{x}_1^*$, $\tilde{x}_2^*$ là các điểm cực tiểu toàn cục của $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$.

Mặt khác, từ (b) của Bổ đề ta có

$$2\sqrt{2\sup_{x\in D}|\operatorname{lsc} p(x)|/\lambda_{\min}} \le 2\sqrt{2\sup_{x\in D}|p(x)|/\lambda_{\min}} \le 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}} = \gamma^*,$$

nên theo Mệnh đề 2.1.11 ta suy ra $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ là γ-lồi ngoài ngặt khi $\gamma > \gamma^*$. Áp dụng Mệnh đề 2.2.15 cho hàm $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ ta nhận được

$$\|\tilde{x}_1^* - \tilde{x}_2^*\| \le \gamma^*.$$

Mệnh đề đã được chứng minh. □

Ví dụ 2.3.6. Xét các hàm

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \\ p(x) &= \begin{cases} -0.5 & \text{nếu } |x| \geq 1 \\ 0.5 & \text{nếu } |x| < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó

$$\tilde{f}(x) = f(x) + p(x) = \begin{cases} x^2 - 0.5 & \text{nếu } |x| \geq 1 \\ x^2 + 0.5 & \text{nếu } |x| < 1, \end{cases}$$

có ba điểm infimum toàn cục là $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $s = \sup_{x \in I\!R} |p(x)| = 0.5$, $\lambda_{\min} = 1$ và $\gamma^* = 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}} = 2\sqrt{2 \times 0.5} = 2$. Theo mệnh đề trên thì

$$2 = \max\{\|x_i - x_j\| \ \mid i, j = 1, 2, 3\} \leq 2 = 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}},$$

suy ra

$$\max\{\|x_i - x_j\| \ \mid i, j = 1, 2, 3\} = \gamma^*.$$

Biểu thức cuối cho phép kết luận đường kính của tập các điểm infimum toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu nói chung không nhỏ hơn γ^*.

Khi xét lớp hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội, câu hỏi được đặt ra là: Các điểm infimum toàn cục của hàm này thay đổi như thế nào so với điểm cực tiểu toàn cục duy nhất x^* của hàm toàn phương (nếu tồn tại)? có thể đánh giá được khoảng cách giữa chúng hay không? Định lý sau sẽ trả lời cho ta câu hỏi này.

Định lý 2.3.13. *Nếu $x^* \in D$ là điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P), $\tilde{x}^* \in D$ là điểm infimum toàn cục bất kỳ của Bài toán $(\tilde{P})$, thì*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2.$$

Chứng minh. Ta xét các trường hợp sau:

i) $\tilde{x}^*$ là cực tiểu toàn cục của $\tilde{f} = f + p$. Đặt

$$\begin{aligned}\varphi(t) : &= f(x^* + t(\tilde{x}^* - x^*)) - f(x^*)\\ &= \langle Ax^*, x^*\rangle + \langle b, x^*\rangle + \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* - x^*\rangle t\\ &\quad + \langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\rangle t^2 - \langle Ax^*, x^*\rangle + \langle b, x^*\rangle\\ &= \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* - x^*\rangle t + \langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\rangle t^2.\end{aligned}$$

Do đó

$$\varphi'(t) = \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* - x^*\rangle + 2\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\rangle t \tag{2.3.8}$$

và

$$\varphi''(t) = 2\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\rangle. \tag{2.3.9}$$

Mặt khác, vì x^* là cực tiểu toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt f trên D, nên $\varphi(t) \geq 0$ với mọi $t \in [0, 1]$. Ta có

$$\varphi'(0) = \lim_{t\searrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} \geq 0.$$

Kết hợp biểu thức (2.3.8) khi $t = 0$ với bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* - x^*\rangle \geq 0. \tag{2.3.10}$$

Theo công thức Tay lo thì

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2}t^2$$

nên, với $t = \frac{1}{2}$ ta suy ra

$$\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi'(0)\frac{1}{2} + \varphi''(0)\frac{1}{8}.$$

Thay các giá trị của $\varphi'(0), \varphi''(0)$ theo các công thức (2.3.8) và (2.3.9) ta nhận được

$$f(\frac{\tilde{x}^* + x^*}{2}) = f(x^*) + \frac{1}{2}\langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* - x^*\rangle + \frac{1}{4}\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\rangle. \tag{2.3.11}$$

Theo biểu thức (2.1.2) thì

$$\frac{1}{4}\Big\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\Big\rangle = \frac{1}{2}f(\tilde{x}^*) + \frac{1}{2}f(x^*) - f(\frac{\tilde{x}^* + x^*}{2}), \tag{2.3.12}$$

nên thay $f(\frac{\tilde{x}^*+x^*}{2})$ ở (2.3.11) vào (2.3.12), chuyển vế và rút gọn ta được

$$\left\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^* \right\rangle = f(\tilde{x}^*) - f(x^*) - \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* - x^* \rangle.$$

Kết hợp với (2.3.10) suy ra

$$\left\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^* \right\rangle \le f(\tilde{x}^*) - f(x^*). \tag{2.3.13}$$

Đặt $\eta := \|\tilde{x}^* - x^*\|$, từ (2.1.3) và (2.3.13) suy ra

$$\lambda_{\min}\eta^2 \le f(\tilde{x}^*) - f(x^*). \tag{2.3.14}$$

Mặt khác, vì $\tilde{x}^*$ là điểm cực tiểu toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ nên

$$f(\tilde{x}^*) + p(\tilde{x}^*) \le f(x^*) + p(x^*).$$

Kết hợp với $\sup_{x \in D} |p(x)| \le s$, ta suy ra

$$0 \le f(\tilde{x}^*) - f(x^*) \le 2s. \tag{2.3.15}$$

Thay (2.3.15) vào (2.3.14) ta nhận được

$$\lambda_{\min}\eta^2 \le 2s$$

tương đương với

$$\eta \le \sqrt{2s/\lambda_{\min}}\,.$$

ii) $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục (không là điểm cực tiểu toàn cục) của $\tilde{f} = f + p$. Khi đó $\tilde{x}^*$ là điểm cực tiểu toàn cục của $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$. Sử dụng i) cho hàm $\operatorname{lsc}\tilde{f}$ ta cũng nhận được

$$f(\tilde{x}^*) - f(x^*) \le \operatorname{lsc} p(\tilde{x}^*) - \operatorname{lsc} p(x^*).$$

Đặt $\eta := \|\tilde{x}^* - x^*\|$. Theo Bổ đề 2.3.1 thì

$$\operatorname{lsc} p(\tilde{x}^*) - \operatorname{lsc} p(x^*) \le 2s,$$

nên

$$f(\tilde{x}^*) - f(x^*) \le 2s. \tag{2.3.16}$$

Kết hợp (2.3.16) với (2.3.13), ta suy ra

$$\lambda_{\min}\eta^2 \leq 2s,$$

vì vậy

$$\eta \leq \sqrt{2s/\lambda_{\min}},$$

tức là

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2.$$

Định lý đã được chứng minh. □

Định lý trên đã được H. X. Phu chứng minh rất gọn trong [51].

2.4. Tính chất tựa và điều kiện tối ưu

Trong mục này, ta nghiên cứu tính chất tựa của hàm $\tilde{f} = f + p$ và sự tồn tại các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, cụ thể là Định lý Kuhn-Tucker suy rộng cho Bài toán $(\tilde{P})$ khi D là tập lồi thỏa mãn một trong hai trường hợp sau:

$$D = \{x \in S \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}, \tag{2.4.17}$$

trong đó $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi và $S \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đóng, hoặc

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c_i, x\rangle \leq d_i,\ i = 1, \ldots, m\}. \tag{2.4.18}$$

Một tính chất đặc biệt của hàm lồi bất kỳ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là với $x^* \in \mathbb{R}^n$ nào đó, tồn tại $\xi \in \mathbb{R}^n$ gọi là dưới vi phân sao cho

$$g(x) \geq g(x^*) + \langle \xi, x - x^*\rangle,\ \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^n,$$

tức là tại mọi điểm $x^* \in \mathbb{R}^n$ hàm lồi g tựa trên một hàm tuyến tính $g(x^*) + \langle \xi, x - x^*\rangle$ và ta gọi là tính chất tựa của g. Trong trường hợp $g = f$ thì $\xi = 2Ax^* + b$. Vì hàm nhiễu p chỉ giả thiết giới nội nên không hy vọng hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ có tính chất tựa như trên. Tuy nhiên, ta sẽ chỉ ra hàm lồi thô $\tilde{f}$ sẽ cũng có tính chất tựa thô. Muốn vậy, ta viết lại tính chất tựa như sau:

$$g(x^*) + \langle \xi, x^* \rangle \le g(x) + \langle \xi, x \rangle, \text{ với mọi } x \in I\!R^n. \qquad (2.4.19)$$

Thay thế vế trái của (2.4.19) bởi

$$\inf_{x' \in B(x^*, r)} \left(\tilde{f}(x') - \langle \xi, x' \rangle \right) \text{ hoặc } \min_{x' \in \bar{B}(x^*, r)} \left(\tilde{f}(x') - \langle \xi, x' \rangle \right)$$

với một $r > 0$ hợp lý nào đó và vế phải của (2.4.19) bởi $\tilde{f}(x) - \langle \xi, x \rangle$ ta được

$$\inf_{x' \in B(x^*, r)} \left(\tilde{f}(x') - \langle \xi, x' \rangle \right) \le \tilde{f}(x) - \langle \xi, x \rangle \text{ với mọi } x \in I\!R^n,$$

hoặc

$$\min_{x' \in \bar{B}(x^*, r)} \left(\tilde{f}(x') - \langle \xi, x' \rangle \right) \le \tilde{f}(x) - \langle \xi, x \rangle \text{ với mọi } x \in I\!R^n.$$

Những công thức trên mô tả tính chất tựa thô của hàm $\tilde{f}$. Tính chất này đã được H. X. Phu chỉ ra khi nghiên cứu các hàm γ-lồi ngoài tổng quát [44]. Bằng cách sử dụng Định lý 2.3.13 cho hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$, mệnh đề dưới đây cho ta kết quả tốt hơn, tức là chỉ ra $r = \gamma^*/2$ và $\xi = 2Ax^* + b$.

Mệnh đề 2.4.17. ([51]) *Cho $D = I\!R^n$. Khi đó với $x^* \in I\!R^n$ và $\epsilon > 0$ thì*

$$\inf_{x' \in B(x^*, \gamma^*/2 + \epsilon)} \left(\tilde{f}(x') - \langle \xi, x' \rangle \right) \le \tilde{f}(x) - \langle \xi, x \rangle \textit{ với mọi } x \in I\!R^n,$$

Đặc biệt, nếu p là nửa liên tục dưới thì

$$\min_{x' \in \bar{B}(x^*, \gamma^*)} \left(\tilde{f}(x') - \langle \xi, x' \rangle \right) \le \tilde{f}(x) - \langle \xi, x \rangle \textit{ với mọi } x \in I\!R^n.$$

Mệnh đề trên được H. X. Phu chỉ ra. Chứng minh chi tiết có thể xem trong [51]

Trong quá trình khảo sát điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, chúng tôi sử dụng bổ đề sau:

Bổ đề 2.4.2. *Cho hàm $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ là nửa liên tục dưới, bị chặn dưới, D là tập đóng và $\lim_{\|x\|\to+\infty,\, x\in D} g(x) = +\infty$. Khi đó tồn tại x^* là điểm cực tiểu toàn cục của g trên D.*

Chứng minh. Bổ đề này có thể chứng minh như là hệ quả của Định lý 8.2 (xem [76], trang 119-121). Tuy nhiên có thể chứng minh trực tiếp như sau:

Cố định điểm $x_0 \in D$. Vì $\lim_{\|x\|\to\infty,\, x\in D} g(x) = +\infty$ nên

$$\exists r \in [\|x_0\|, +\infty[\quad : x \in D,\ \|x\| > r \Rightarrow g(x) > g(x_0).$$

Do đó, điểm cực tiểu toàn cục nếu có thì sẽ chỉ nằm trong miền $\overline{B}(0,r)\cap D$. Vì g bị chặn dưới nên

$$\inf_{x\in\overline{B}(0,r)\cap D} g(x) > -\infty.$$

Mặt khác, tồn tại dãy $(x_i) \subset \overline{B}(0,r) \cap D$ sao cho

$$\lim_{i\to\infty} g(x_i) = \inf_{x\in\overline{B}(0,r)\cap D} g(x).$$

Tập $\overline{B}(0,r)\cap D$ là đóng, giới nội trong $I\!R^n$ nên là tập compact, vì vậy từ dãy $(x_i) \subset \overline{B}(0,r)\cap D$ có thể trích dãy con hội tụ. Không giảm tổng quát, ta coi chính dãy đó hội tụ, tức là $\lim_{i\to\infty} x_i = x^*$ và $x^* \in \overline{B}(0,r)\cap D$. Vì g là nửa liên tục dưới nên

$$g(x^*) \le \lim_{i\to\infty} g(x_i) = \inf_{x\in\overline{B}(0,r)\cap D} g(x).$$

Do đó x^* là điểm cực tiểu trên $\overline{B}(0,r)\cap D$. Vì điểm cực tiểu của g trên $\overline{B}(0,r)\cap D$ là điểm cực tiểu toàn cục, nên x^* là điểm cực tiểu toàn cục của g trên D. □

Trước khi phát biểu và chứng minh Định lý Kuhn-Tucker suy rộng cho Bài toán $(\tilde{P})$, ta nhắc lại hàm Lagrange cho Bài toán $(\tilde{P})$ được định nghĩa theo công thức (1.1.4), tức là

$$\mathcal{L}(x,\mu_0,\ldots,\mu_m) = \mu_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(x).$$

Định lý 2.4.14. *Giả sử D được cho bởi công thức* (2.4.17).

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, thì tồn tại duy nhất điểm $x^* \in D$ sao cho*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, m$, không cùng triệt tiêu, thỏa mãn điều kiện Kuhn-Tucker

$$\mathcal{L}(x^*, \mu_0, \ldots, \mu_m) = \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m) \tag{2.4.20}$$

và điều kiện bù

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } \ i = 1, \ldots, m. \tag{2.4.21}$$

Nếu điều kiện Slater (1.1.7) *thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.*

(b) *Nếu tồn tại $x^* \in D$ thỏa mãn* (2.4.20), (2.4.21) *với $\mu_0 = 1$ thì tồn tại $\tilde{x}^* \in D$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ trên D, thỏa mãn*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và không có điểm infimum toàn cục nào của Bài toán $(\tilde{P})$ nằm ngoài hình cầu $\overline{B}(x^*, \gamma^*/2)$.

Chứng minh. (a) Xét tập D, vì S là lồi đóng, $g_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi nên $D = \{x \in S \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots m\}$ cũng là lồi đóng. Khi đó

i) Nếu D giới nội, thì vì $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ là lồi ngặt, liên tục nên tồn tại duy nhất điểm cực tiểu toàn cục $x^* \in D$.

ii) Nếu D không giới nội, thì

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \\ &\geq \lambda_{\min}\|x\|^2 - \|b\|\|x\|, \end{aligned}$$

nên

$$\lim_{\|x\| \to +\infty,\ x \in D} f(x) = +\infty.$$

Hàm toàn phương lồi ngặt f trên tập lồi D thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề 2.4.2, do đó tồn tại điểm cực tiểu toàn cục và duy nhất x^* trên D. Vì $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$, nên theo Định lý 2.3.13, ta nhận được

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2.$$

Mặt khác, x^* là cực tiểu toàn cục của f trên D, tức là x^* là nghiệm của Bài toán (P), do đó theo (a) của Định lý Kuhn-Tucker 1.1.1 suy ra tồn tại $\mu_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, m$, sao cho chúng không cùng triệt tiêu, thỏa mãn

$$\mathcal{L}(x^*, \mu_0, \ldots, \mu_m) = \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m)$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } \ i = 1, \ldots, m.$$

Nếu điều kiện Slater (1.1.7) thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$, nên có thể chọn $\mu_0 = 1$.

(b) Vì $x^* \in D$ thỏa mãn điều kiện (2.4.20), (2.4.21) với $\mu_0 = 1$ nên x^* thỏa mãn (b) của Định lý Kuhn-Tucker 1.1.1 cho Bài toán (P). Do đó x^* là điểm cực tiểu toàn cục của f trên D và vì f là lồi ngặt nên x^* là điểm cực tiểu toàn cục duy nhất của f trên D.

Ta chứng minh tồn tại điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Thật vậy, xét hàm $\operatorname{lsc} \tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ trên D, xảy ra các trường hợp sau:

i) D giới nội, khi đó tồn tại $M > 0$ sao cho $\|x\| \leq M$ với mọi $x \in D$. Vì vậy

$$\begin{aligned} \operatorname{lsc} \tilde{f}(x) &\geq \langle Ax, x\rangle - \|b\|\|x\| - \sup_{x \in D} |p(x)| \\ &\geq -\|b\|M - \sup_{x \in D} |p(x)|, \end{aligned}$$

suy ra hàm bị chặn dưới trên D. Vì hàm $\operatorname{lsc} \tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ nửa liên tục dưới, bị chặn dưới trên tập compact D (đóng, giới nội trong $I\!R^n$) nên tồn tại điểm cực tiểu toàn cục $\tilde{x}^*$ của $\operatorname{lsc} \tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ trên D.

ii) D không giới nội. Ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{lsc}\tilde{f}(x) = f(x) + \operatorname{lsc} p(x) &\geq \langle Ax, x\rangle - \|b\|\|x\| - |p(x)| \\ &\geq \lambda_{\min}\|x\|^2 - \|b\|\|x\| - \sup_{x\in D}|p(x)|.\end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{\|x\|\to+\infty,\ x\in D} \operatorname{lsc}\tilde{f}(x) = +\infty.$$

Mặt khác, vì hàm $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ bị chặn dưới và nửa liên tục dưới nên $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ thỏa mãn Bổ đề 2.4.2, vì vậy tồn tại điểm $\tilde{x}^*$ là cực tiểu toàn cục của $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ trên D.

Kết hợp cả hai trường hợp i), ii) suy ra tồn tại $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Ngoài ra áp dụng Định lý 2.3.13 ta có

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và cũng theo Định lý 2.3.13 thì không thể tồn tại điểm infimum toàn cục khác của Bài toán $(\tilde{P})$ nằm ngoài hình cầu $\overline{B}(x^*, \gamma^*/2)$. □

Định lý sau là một mở rộng Định lý 1.1.2, nó chỉ ra điều kiện cần và đủ để tồn tại điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, định lý phát biểu như sau:

Định lý 2.4.15. *Giả sử D được cho bởi* (2.4.17) *và $g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi, cùng liên tục ít nhất tại một điểm của tập S.*

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, thì tồn tại x^* và các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, m$, không cùng triệt tiêu, sao cho*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2,$$

$$0 \in \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*) + N(x^*|S) \tag{2.4.22}$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m, \tag{2.4.23}$$

trong đó $N(x^*|S)$ là nón pháp tuyến của S tại x^*.

Nếu điều kiện Slater (1.1.7) *thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.*

(b) *Nếu tồn tại* $x^* \in D$ *thỏa mãn* (2.4.22), (2.4.23) *với* $\mu_0 = 1$ *thì tồn tại* $\tilde{x}^* \in D$ *là điểm infimum toàn cục của Bài toán* $(\tilde{P})$ *thỏa mãn*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và không có điểm infimum toàn cục khác của $\tilde{f} = f + p$ *trên* D *nằm ngoài hình cầu* $\overline{B}(x^*, \gamma^*/2)$.

Chứng minh. (a) Vì $f = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ nên $\partial f(x^*) = 2Ax^* + b$. Sử dụng Bổ đề 2.4.2, chứng minh tương tự như ở Định lý 2.4.14, ta suy ra tồn tại duy nhất x^* là điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P).

Áp dụng Định lý Kuhn-Tuker 1.1.2 cho Bài toán (P) ta nhận được sự tồn tại các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, m$, sao cho chúng không cùng triệt tiêu, thỏa mãn các điều kiện sau:

$$0 \in \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*) + N(x^*|S)$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } \ i = 1, \ldots, m.$$

Nếu thêm điều kiện Slater (1.1.7) thì $\mu_0 \neq 0$, nên có thể coi $\mu_0 = 1$.

Theo Định lý 2.3.13, mọi điểm cực tiểu toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ phải thỏa mãn:

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2.$$

(b) Nếu $\mu_0 = 1$ và x^* thỏa mãn (2.4.22), (2.4.23), thì theo Định lý Kuhn-Tucker 1.1.2 cho Bài toán (P) suy ra x^* là điểm cực tiểu toàn cục của f trên D. Áp dụng lược đồ chứng minh tương tự phần (b) của Định lý 2.4.14, suy ra tồn tại $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ trên D. Ngoài ra, theo Định lý 2.3.13 thì mọi điểm infimum toàn cục $\tilde{x}^*$ đều phải thỏa mãn:

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2,$$

tức là không có điểm infimum toàn cục nào của $\tilde{f} = f + p$ nằm ngoài hình cầu $\overline{B}(x^*, \gamma^*/2)$. $\square$

Nhận xét 2.4.4. *Nếu* $S = I\!R^n$ *thì* $N(x^*|S) = \{0\}$, *nên biểu thức* (2.4.22) *được thay bởi*

$$0 \in \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*). \tag{2.4.24}$$

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh sự tồn tại điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ khi D là tập lồi đa diện.

Định lý 2.4.16. *Giả sử D được xác định theo công thức* (2.4.18).

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, thì tồn tại duy nhất $x^* \in D$ và các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$, sao cho*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2,$$

$$(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i = 0, \tag{2.4.25}$$

và

$$\mu_i(\langle c_i, x^* \rangle - d_i) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m. \tag{2.4.26}$$

(b) *Nếu có $x^* \in D$ thỏa mãn* (2.4.25), (2.4.26) *thì tồn tại $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ thỏa mãn*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và

$$\|2A\tilde{x}^* + b + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i\| \leq \lambda_{\max}\gamma^*.$$

Chứng minh. (a) Từ giả thiết của mệnh đề suy ra $D \neq \emptyset$. Do f là lồi ngặt nên nếu tồn tại điểm cực tiểu toàn cục trên D thì điểm đó là duy nhất. Theo Hệ quả 2.3 (xem [31], trang 41) thì điều kiện cần và đủ để Bài toán (P) có nghiệm cực tiểu toàn cục là $D \neq \emptyset$, nên tồn tại x^* là cực tiểu toàn cục duy nhất của f trên D.

Vì x^* là điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P) nên theo Định lý 1.1.3 suy ra tồn tại các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$, sao cho chúng thỏa mãn các điều kiện

$$(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i = 0$$

và

$$\mu_i(\langle c_i, x^* \rangle - d_i) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \dots, m.$$

Mặt khác, theo Định lý 2.3.13 ta suy ra

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

với mọi điểm infimum toàn cục $\tilde{x}^*$ của Bài toán $(\tilde{P})$.

(b) Xét Bài toán (P) với $g_i(x) := \langle c_i, x \rangle - d_i$, $i = 1, \dots, m$, khi đó $\partial g_i(x^*) = c_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Theo Định lý 2.4.15 thì các điều kiện (2.4.25) và (2.4.26) là đủ để x^* là điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P). Chứng minh tương tự như phần (b) của Định lý 2.4.14, ta suy ra tồn tại $\tilde{x}^* \in D$ là điểm infimum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ trên D. Theo Định lý 2.3.13 thì mọi điểm infimum toàn cục $\tilde{x}$ của $\tilde{f} = f + p$ phải thỏa mãn

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2.$$

Hơn thế, từ biểu thức (2.4.25) và $\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \lambda(A^T A)\} = \lambda_{\max}$ (xem [2]) cho phép ta biến đổi

$$\begin{aligned}
\|2A\tilde{x}^* + b + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i\| &= \|2Ax^* + b + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i + 2A\tilde{x}^* - 2Ax^*\| \\
&= 2\|A\tilde{x}^* - Ax^*\| \\
&\leq 2\|A\|\|\tilde{x}^* - x^*\| \\
&\leq 2\lambda_{\max}\gamma^*/2 = \lambda_{\max}\gamma^*.
\end{aligned}$$

Do đó định lý được chứng minh. □

Trong [51], ngoài các kết luận ở (b), H. X. Phu còn chỉ ra:

Với $1 \leq i \leq m$, *nếu* $\langle c_i, \tilde{x}^* \rangle < d_i - (2s/\lambda_{\min})^{1/2}\|c_i\|$ *thì*

$$\mu_i = 0.$$

Kết luận: Trong chương này chúng tôi đã chỉ ra: các điều kiện đủ để hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài (các Mệnh đề 2.1.9–2.1.11); điều kiện tồn tại điểm cực tiểu toàn cục và infimum toàn cục (Mệnh đề 2.2.14); thiết lập cận trên đúng của đường kính của tập các điểm cực tiểu toàn cục, infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$; (các mệnh đề 2.2.15, 2.3.16); tính ổn định nghiệm của Bài toán quy hoạch toàn phương bị nhiễu giới nội $(\tilde{P})$ (Định lý 2.3.13); Định lý Kuhn-Tucker suy rộng cho Bài toán $(\tilde{P})$ (các định lý 2.4.14–2.4.16).

CHƯƠNG 3

TÍNH Γ-LỒI NGOÀI CỦA HÀM BỊ NHIỄU VÀ ĐIỂM INFIMUM TOÀN CỤC CỦA BÀI TOÁN $(\tilde{P})$

Trong chương này chúng tôi sử dụng phương pháp tiếp cận tô pô để nghiên cứu: các tính chất của hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$; quan hệ giữa các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$; tính ổn định của tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$; tính chất tựa và điều kiện tồn tại điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$.

3.1. Tính Γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu

Trong mục này ta nghiên cứu tính Γ-lồi ngoài của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f}(x) = f(x) + p(x)$, trong đó f, p được cho bởi các công thức (1.0.1) và (1.0.2), tương ứng.

Định nghĩa 3.1.9. *Cho f thỏa mãn công thức* (1.0.1)*. Hàm $h_1(., z)$ theo hướng z được định nghĩa như sau:*

$$h_1(\mu, z) := \inf_{x \in I\!R^n} \Big(\frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(x + \mu z) - f(x + \frac{1}{2}\mu z)\Big), \tag{3.1.1}$$

trong đó $\mu \in I\!R$ và $z \in I\!R^n$.

Ta ký hiệu

$$m(\gamma, z) := \inf\{\mu \mid h_1(\mu, z) > \gamma\} \tag{3.1.2}$$

và

$$M(\gamma) := \{tz \mid z \in I\!R^n, |t| \le m(\gamma, z)\}. \tag{3.1.3}$$

Bổ đề sau cho ta các giá trị của $h_1(\mu, z)$, $m(\gamma, z)$ và các tính chất của tập $M(\gamma)$.

Bổ đề 3.1.3. *Với mọi $z \in I\!R^n$ và $z \neq 0$, ta có*

(a) $h_1(\mu, z) = \frac{\mu^2}{4}\langle Az, z\rangle$.

(b) $m(\gamma, z) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\langle Az, z\rangle}}$.

(c) $M(\gamma) = \{x \mid x \in I\!R^n,\ \langle Ax, x\rangle \leq 4\gamma\}$.

(d) *$M(\gamma)$ là tập lồi, đóng và cân.*

(e) *$0 \in M(\gamma)$ là điểm trong của tập $M(\gamma)$.*

Chứng minh. (a) Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x+\mu z) - f(x + \frac{1}{2}\mu z)\\
= \;& \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2}\langle b, x\rangle + \frac{1}{2}\langle A(x+\mu z), (x+\mu z)\rangle + \frac{1}{2}\langle b, (x+\mu z)\rangle\\
& -\langle A(x+\frac{1}{2}\mu z), (x+\frac{1}{2}\mu z)\rangle - \langle b, (x+\frac{1}{2}\mu z)\rangle\\
= \;& \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \mu\langle Ax, z\rangle + \frac{\mu^2}{2}\langle Az, z\rangle - \langle Ax, x\rangle\\
& -\mu\langle Ax, z\rangle - \frac{\mu^2}{4}\langle Az, z\rangle\\
= \;& \frac{\mu^2}{4}\langle Az, z\rangle. \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

Do đó, theo (3.1.1) suy ra

$$h_1(\mu, z) = \frac{\mu^2}{4}\langle Az, z\rangle.$$

(b) Theo (3.1.2) thì

$$m(\gamma, z) = \inf\{\mu \mid h_1(\mu, z) > \gamma\},$$

tương đương với

$$m(\gamma, z) = \inf\{\mu \mid \frac{\mu^2}{4}\langle Az, z\rangle > \gamma\},$$

nên

$$m(\gamma, z) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\langle Az, z\rangle}}.$$

(c) Giả sử $x \in M(\gamma)$, khi đó tồn tại $z \in I\!R^n$ và $t \in I\!R$ thỏa mãn

$$x = tz, |t| \leq 2\sqrt{\gamma/\langle Az, z\rangle}.$$

Ta có

$$\langle Ax, x\rangle = t^2\langle Az, z\rangle \leq (\langle Az, z\rangle)4\gamma/\langle Az, z\rangle = 4\gamma.$$

Do đó $\langle Ax, x\rangle \leq 4\gamma$. Ngược lại, giả sử $x \in I\!R^n$ thỏa mãn $\langle Ax, x\rangle \leq 4\gamma$. Nếu $x = 0$, theo cách xây dựng $m(z, \gamma)$ và $M(\gamma)$ ở các công thức (3.1.2) và (3.1.3) thì $x \in M(\gamma)$. Nếu $x \neq 0$ thì $\langle Ax, x\rangle > 0$. Đặt $z = lx$, khi đó $\langle Az, z\rangle = l^2\langle Ax, x\rangle$, vì vậy có thể chọn l sao cho

$$h_1(\mu, z) = \frac{\mu^2}{4}\langle Az, z\rangle = \frac{\mu^2}{4}l^2\langle Ax, x\rangle > \gamma.$$

Mặt khác, theo (3.1.2) thì

$$\begin{aligned} m(\gamma, z) &= \inf\{\mu \mid h_1(\mu, z) > \gamma\} \\ &= \inf\{\mu \mid \frac{\mu^2}{4}\langle Az, z\rangle > \gamma\} \\ &= \inf\{\mu \mid \frac{\mu^2}{4}l^2\langle Ax, x\rangle > \gamma\}. \end{aligned}$$

Do đó

$$m(\gamma, z) = \frac{2}{|l|}\sqrt{\frac{\gamma}{\langle Ax, x\rangle}} \geq \frac{1}{|l|}.$$

Như vậy, với $x = \frac{1}{l}z$ thì $|\frac{1}{l}| \leq m(\gamma, z)$. Theo định nghĩa $M(\gamma)$ trong công thức (3.1.3) ta suy ra $x \in M(\gamma)$.

(d) $M(\gamma)$ đối xứng là hiển nhiên. Ta chứng minh $M(\gamma)$ là đóng. Thật vậy, giả sử $x_n \in M(\gamma)$ và $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, khi đó theo (c) Bổ đề 3.1.3 ta có

$$\langle Ax_n, x_n\rangle \leq 4\gamma \text{ với mọi } n \in I\!N,$$

cho $n \to \infty$, ta suy ra $x \in M(\gamma)$.
Vì hàm $\langle Ax, x\rangle$ là lồi ngặt, nên tập mức dưới

$$M(\gamma) = \{x \in I\!R^n \mid \langle Ax, x\rangle \leq 4\gamma\}$$

là tập lồi.

(e) Chọn $\delta := 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\max}}$. Với mọi $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in B(0, \delta)$, biểu diễn x theo cơ sở trực chuẩn là các véc tơ riêng của A ta được

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {\xi_i}^2 \\
&\leq \lambda_{\max} \|x\|^2 \\
&\leq 4\gamma.
\end{aligned}$$

Suy ra $B(0, \delta) \subseteq M(\gamma)$. Vì thế 0 là điểm trong của $M(\gamma)$. □

Mệnh đề 3.1.18. *Cho f thỏa mãn công thức* (1.0.1), $\gamma > 0$ *và* $\Gamma = M(\gamma)$. *Khi đó hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài nếu*

$$|p(x)| \leq \gamma/2 \text{ với mọi } x \in D.$$

Chứng minh. Lấy x_0, x_1 bất kỳ trong D, khi đó xảy ra các trường hợp sau:

i) $x_0 - x_1 \in M(\gamma)$. Đặt $\Lambda = \{0, 1\}$, ta có

$$[x_0, x_1] \subset \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} + 0.5M(\gamma)$$

và hiển nhiên với $\lambda \in \{0, 1\}$ thì

$$\tilde{f}(x_\lambda) = \lambda \tilde{f}(x_0) + (1 - \lambda)\tilde{f}(x_1).$$

ii) $x_0 - x_1 \notin M(\gamma)$. Đặt $z := x_0 - x_1$, $\alpha := (\langle Az, z\rangle)/4$ và $l := m(\gamma, z)$. Áp dụng lần lượt (c) và (b) của Bổ đề 3.1.3 ta được

$$\alpha = \langle Az, z\rangle > 4\gamma \quad \text{và} \quad l = m(\gamma, z) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\langle Az, z\rangle}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Do đó $0 < l < 1$.

Mặt khác, vì

$$\begin{aligned}\big\langle A(l(x_0-x_1)), l(x_0-x_1)\big\rangle &= l^2\langle A(x_0-x_1), x_0-x_1\rangle\\ &= 4l^2\alpha\\ &= 4\gamma, \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

nên

$$l(x_0-x_1)\in M(\gamma) \tag{3.1.6}$$

và

$$tl(x_0-x_1)\notin M(\gamma) \text{ với mọi } |t|>1.$$

Vì $0<l<1$ nên $\Lambda := [l/2, 1-l/2]\cup\{0,1\}$ là tập đóng khác rỗng nằm trong đoạn $[0,1]$ và

$$\{x_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\} = [x_{l/2}, x_{1-l/2}]\cup\{x_0,x_1\}. \tag{3.1.7}$$

Ta cần chứng minh

$$[x_0,x_1]\subset\{x_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}+0.5M(\gamma). \tag{3.1.8}$$

Vì

$$\begin{aligned}[x_{l/2}, x_{1-l/2}] &= \big\{x_\lambda \mid \lambda\in[l/2,1-l/2]\big\}\\ &= \big[(1-\frac{l}{2})x_0+\frac{l}{2}x_1, \frac{l}{2}x_0+(1-\frac{l}{2})x_1\big]\\ &= \big[x_0+\frac{l}{2}(x_1-x_0), x_0+(1-\frac{l}{2})(x_1-x_0)\big]\end{aligned}$$

nên

$$\begin{aligned}[x_0,x_1] &= \big[x_0, x_0+\frac{l}{2}(x_1-x_0)\big]\cup[x_{l/2},x_{1-l/2}]\\ &\quad \cup\big[x_0+(1-\frac{l}{2})(x_1-x_0), x_1\big].\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Lấy $\overline{x}\in[x_0,x_1]$, từ biểu thức (3.1.9) ta xét các trường hợp sau:

i) $\overline{x}\in[x_{l/2},x_{1-l/2}]$. Vì $0\in M(\gamma)$ và $[x_{l/2},x_{1-l/2}]\subset\{x_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ theo (3.1.7), nên

$$\overline{x}\in\{x_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}+0.5\,M(\gamma).$$

ii) $\overline{x} \in \big[x_0, x_0 + \frac{l}{2}(x_1 - x_0)\big]$. Khi đó tồn tại $t \in [0,1]$ sao cho

$$\begin{aligned}\overline{x} &= (1-t)x_0 + t(x_0 + \frac{l}{2}(x_1 - x_0)) \\ &= (1-t)x_0 + tx_0 + t\frac{l}{2}(x_1 - x_0) \\ &= x_0 + t\frac{l}{2}(x_1 - x_0). \qquad (3.1.10)\end{aligned}$$

Theo (3.1.6) thì $l(x_1 - x_0) \in M(\gamma)$ và vì $t \in [0,1]$ nên $tl(x_1 - x_0) \in M(\gamma)$. Do đó $t\frac{l}{2}(x_1 - x_0) \in 0.5M(\gamma)$. Mặt khác, $x_0 \in \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ theo định nghĩa tập Λ. Vì vậy, từ công thức (3.1.10) ta suy ra

$$\overline{x} \in \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} + 0.5\, M(\gamma).$$

iii) $\overline{x} \in \big[x_0 + (1 - \frac{l}{2})(x_1 - x_0), x_1\big]$. Khi đó tồn tại $t \in [0,1]$ sao cho

$$\begin{aligned}\overline{x} &= t\big(x_0 + (1 - \frac{l}{2})(x_1 - x_0)\big) + (1-t)x_1 \\ &= tx_0 + t(1 - \frac{l}{2})(x_1 - x_0) + x_1 - tx_1 \\ &= x_1 + t\frac{l}{2}(x_0 - x_1). \qquad (3.1.11)\end{aligned}$$

Lý luận tương tự như trong trường hợp ii), vì $x_1 \in \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ và $t\frac{l}{2}(x_1 - x_0), t\frac{l}{2}(x_0 - x_1) \in M(\gamma)$, nên từ công thức (3.1.11) suy ra

$$\overline{x} \in \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} + 0.5\, M(\gamma).$$

Kết hợp cả ba trường hợp i), ii) và iii) ta suy ra công thức (3.1.8).

Xét bất kỳ $\lambda \in \Lambda \backslash \{0,1\}$, ký hiệu

$$\lambda^{'} := \lambda - \frac{l}{2}; \lambda^{''} := \lambda + \frac{l}{2},$$

ta dễ dàng nhận thấy $\lambda^{'}, \lambda^{''} \in [0,1]$, $\lambda = (\lambda^{'} + \lambda^{''})/2$. Vì

$$\begin{aligned}x_\lambda &= (1 - \frac{\lambda^{'} + \lambda^{''}}{2})x_0 + \frac{\lambda^{'} + \lambda^{''}}{2}x_1 \\ &= \frac{1}{2}\big((1-\lambda^{'})x_0 + \lambda^{'}x_1 + (1-\lambda^{''})x_0 + \lambda^{''}x_1\big),\end{aligned}$$

nên

$$x_\lambda = \frac{x_{\lambda'} + x_{\lambda''}}{2}. \qquad (3.1.12)$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} x_{\lambda'} - x_{\lambda''} &= (\lambda - \frac{l}{2})x_0 + (1 - \lambda + \frac{l}{2})x_1 - (\lambda + \frac{l}{2})x_0 - (1 - \lambda - \frac{l}{2})x_1 \\ &= l(x_1 - x_0). \end{aligned}$$

Theo (3.1.6) thì $l(x_1 - x_0) \in M(\gamma)$, vậy

$$x_{\lambda'} - x_{\lambda''} \in M(\gamma).$$

Mặt khác, vì

$$\big\langle A(x_{\lambda'} - x_{\lambda''}), x_{\lambda'} - x_{\lambda''} \big\rangle = \big\langle A(l(x_1 - x_0)), l(x_1 - x_0) \big\rangle$$

nên theo (3.1.5) thì

$$\big\langle A(x_{\lambda'} - x_{\lambda''}), x_{\lambda'} - x_{\lambda''} \big\rangle = 4\gamma. \tag{3.1.13}$$

Xét hàm toàn phương lồi ngặt $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$, vì

$$(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) = (1 - \frac{\lambda^{'} + \lambda^{''}}{2})f(x_0) + (\frac{\lambda^{'} + \lambda^{''}}{2})f(x_1),$$

và

$$\begin{aligned} &(1 - \frac{\lambda^{'} + \lambda^{''}}{2})f(x_0) + (\frac{\lambda^{'} + \lambda^{''}}{2})f(x_1) \\ &= \frac{1}{2}\big((1-\lambda^{'})f(x_0) + \lambda^{'} f(x_1)\big) + \frac{1}{2}\big((1-\lambda^{''})f(x_0) + \lambda^{''} f(x_1)\big) \end{aligned}$$

nên

$$(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \geq \frac{1}{2}\big(f(x_{\lambda'}) + f(x_{\lambda''})\big). \tag{3.1.14}$$

Từ các biểu thức (3.1.12), (3.1.14) và (2.1.2) suy ra

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - f(x_\lambda) \\ \geq\ & \frac{1}{2}\big(f(x_{\lambda'}) + f(x_{\lambda''})\big) - f(\frac{x_{\lambda'} + x_{\lambda''}}{2}) \\ =\ & \frac{1}{4}\big\langle A(x_{\lambda''} - x_{\lambda'}), x_{\lambda''} - x_{\lambda'} \big\rangle. \end{aligned}$$

Do đó kết hợp với (2.1.6) ta được

$$(1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - f(x_\lambda) \geq \gamma \tag{3.1.15}$$

Xét hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ ta có

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)\tilde{f}(x_0) + \lambda\tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_\lambda) \\
&= (1-\lambda)\big(f(x_0) + p(x_0)\big) + \lambda\big(f(x_1) + p(x_1)\big) - \big(f(x_\lambda) + p(x_\lambda)\big) \\
&\geq (1-\lambda)\big(f(x_0) - \gamma/2\big) + \lambda\big(f(x_1) - \gamma/2\big) - \big(f(x_\lambda) + \gamma/2\big) \\
&= (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) - f(x_\lambda) - \gamma.
\end{aligned}$$

Áp dụng (3.1.15) ta suy ra

$$(1-\lambda)\tilde{f}(x_0) + \lambda\tilde{f}(x_1) - \tilde{f}(x_\lambda) \geq 0.$$

Trường hợp $\lambda = 0, \lambda = 1$ thì biểu thức trên luôn đúng.

Tóm lại, với x_0, $x_1 \in D$, tồn tại tập đóng $\Lambda \subset [0,1]$ chứa $\{0,1\}$ sao cho thỏa mãn (2.3.12) và

$$\forall \lambda \in \Lambda : \tilde{f}(x_\lambda) \leq (1-\lambda)\tilde{f}(x_0) + \lambda\tilde{f}(x_1).$$

Theo định nghĩa suy ra $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài, với $\Gamma = M(\gamma)$. □

Nhận xét 3.1.5. *Trong $I\!R^n$ với chuẩn Euclide, ta nhận thấy*

$$\bar{B}(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\max}}) \subseteq M(\gamma) \subseteq \bar{B}(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}}). \tag{3.1.16}$$

Thật vậy, gọi $\{e_i \mid \; i = 1, 2, \ldots, n\}$ là cơ sở trực chuẩn trong $I\!R^n$, trong đó e_i là véc tơ riêng đơn vị ứng với giá trị riêng λ_i, $i = 1, 2 \ldots, n$, của ma trận đối xứng xác định dương A (có thể có một số giá trị trùng nhau). Khi đó với mọi $x \in I\!R^n$ thì $x = \sum_{i=1}^n \zeta_i e_i$ và

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i\zeta_i e_i, \sum_{j=1}^n \zeta_j e_j \Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \zeta_i \zeta_j \langle e_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_i^2.
\end{aligned}$$

nên

$$\lambda_{\min}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_{\max}\|x\|^2. \tag{3.1.17}$$

Do đó, nếu $x \in \bar{B}(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\max}})$ thì

$$\langle Ax, x\rangle \leq \lambda_{\max}\|x\|^2 \leq 4\gamma,$$

nên suy ra

$$B(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\max}}) \subseteq M(\gamma). \tag{3.1.18}$$

Nếu $x \in M(\gamma)$, theo (c) Bổ đề 3.1.3 thì $\langle Ax, x\rangle \leq 4\gamma$, do đó kết hợp với vế trái của (3.1.17) ta được

$$\lambda_{\min}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq 4\gamma,$$

nên

$$\|x\| \leq 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}}\,.$$

Biểu thức cuối cho ta

$$M(\gamma) \subset \overline{B}(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}}). \tag{3.1.19}$$

Kết hợp các biểu thức (3.1.18) và (3.1.19) ta nhận được (3.1.16).

Gọi e_{i_0} là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng bé nhất $\lambda_{\min}$. Đặt $\pm y_0 = \pm 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}}\, e_{i_0}$, ta có $\langle Ay_0, y_0\rangle = 4\gamma$, tức là $\pm y_0 \in M(\gamma)$. Vì

$$\|\pm y_0\|^2 = 4(\gamma/\lambda_{\min})\|e_{i_o}\|^2 = 4\gamma/\lambda_{\min},$$

nên $\pm y_0 \in \bar{B}(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}})$. Do đó suy ra

$$\pm y_0 \in M(\gamma) \text{ và } \pm y_0 \in S(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}}). \tag{3.1.20}$$

Kết hợp (3.1.16) và (3.1.20) ta suy ra $M(\gamma)$ nằm trong hình cầu $\overline{B}(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}})$, tiếp xúc với mặt cầu này tại 2 điểm riêng biệt đối xứng với nhau qua tâm của nó.

Mặt khác, nếu $\lambda_{\max} > \lambda_{\min}$, gọi e_{j_0} là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng lớn nhất $\lambda_{\max}$ của ma trận A. Đặt $y := te_{j_0}, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\max}} < t \leq 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}}$, khi đó

$$\langle Ay, y\rangle = t^2\lambda_{\max}\langle e_{j_0}, e_{j_0}\rangle = t^2\lambda_{\max} > \lambda_{\max}4\gamma/\lambda_{\max} = 4\gamma,$$

tức là $y \notin M(\gamma)$. Mặt khác, vì $\|y\| = \|te_{j_0}\| \leq 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\max}} \leq 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}}$ nên $y \in \overline{B}(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}})$. Do vậy, nếu $\lambda_{\max} > \lambda_{\min}$ thì tập $M(\gamma)$ thực sự nằm trong hình cầu $\overline{B}(0, 2\sqrt{\gamma/\lambda_{\min}})$.

Mệnh đề 3.1.19. *Hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài với $\Gamma = M(2s)$.*

Chứng minh. Hiển nhiên ta có

$$|p(x)| \leq \sup_{x \in D} |p(x)| \text{ với mọi } x \in D,$$

tức là

$$|p(x)| \leq s = 2s/2 \text{ với mọi } x \in D.$$

Theo Mệnh đề 3.1.18, hàm $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài với $\Gamma = M(2s)$. □

Trong [44] khi nghiên cứu tập Γ-lồi ngoài (định nghĩa 1.4.6), H. X. Phu đã chỉ ra một số tính chất cơ bản của tập này. Mệnh đề dưới đây chỉ nêu thêm tính chất Γ-lồi ngoài của tập mức dưới của hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội, với tập Γ cụ thể phụ thuộc vào cận trên s của $|p|$.

Mệnh đề 3.1.20. *Tập mức dưới $\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f})$ của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài, với $\Gamma = M(2s)$.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.1.19 thì hàm $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài với $\Gamma = M(2s)$. Mặt khác, Mệnh đề 1.4.4 Chương 1, khẳng định tập mức dưới của hàm Γ-lồi ngoài là Γ-lồi ngoài, nên suy ra $\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f})$ là Γ-lồi ngoài, với $\Gamma = M(2s)$. □

3.2. Điểm infimum toàn cục của bài toán nhiễu

Một tính chất quan trọng của hàm lồi là cực tiểu địa phương là cực tiểu toàn cục. Đối với hàm Γ-lồi ngoài ta có tính chất gần giống sau:

Mệnh đề 3.2.21. *Cho* $\Gamma = M(2s)$ *nếu* $x^* \in D$ *là điểm* Γ*-cực tiểu của hàm bị nhiễu giới nội* $\tilde{f} = f + p$*, thì* x^* *là điểm cực tiểu toàn cục của* $\tilde{f}$*.*

Chứng minh. Định lý 1.4.9 Chương 1 khẳng định, nếu Γ có 0 là điểm trong, $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ là Γ-lồi ngoài và x^* là điểm Γ-cực tiểu thì x^* là điểm cực tiểu toàn cục của g trên D. Theo Mệnh đề 3.1.18 thì $\tilde{f} = f + p$ là hàm Γ-lồi ngoài với $\Gamma = M(2s)$ và theo (e) của Bổ đề 3.1.3 thì 0 là điểm trong của $M(2s)$, nên các điều kiện của Định lý 1.4.9 thỏa mãn, do đó x^* là điểm cực tiểu toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ trên D. □

Trong [50] H. X. Phu chỉ ra định lý sau:

Định lý 3.2.17. *Cho* $\Gamma = M(2s)$ *và* $x^* \in D$ *là điểm* Γ*-infimum của hàm bị nhiễu giới nội* $\tilde{f} = f + p$*. Khi đó* x^* *là điểm infimum toàn cục của* $\tilde{f} = f + p$*.*

Chứng minh chi tiết được trình bày trong [50].

Nghiên cứu hiệu của các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2.22. *Nếu* $\tilde{x}_1^*$, $\tilde{x}_2^*$ *là hai điểm infimum toàn cục bất kỳ của Bài toán* $(\tilde{P})$ *thì*

$$\tilde{x}_1^* - \tilde{x}_2^* \in M(2s).$$

Chứng minh. Theo (2.1.2) thì

$$\frac{1}{2}f(\tilde{x}_1^*) + \frac{1}{2}f(\tilde{x}_2^*) - f(\frac{\tilde{x}_1^* + \tilde{x}_2^*}{2}) = \frac{1}{4}\big\langle A(\tilde{x}_1^* - \tilde{x}_2^*), \tilde{x}_1^* - \tilde{x}_2^*\big\rangle. \tag{3.2.21}$$

Ta lại có $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$, nên

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{lsc}\tilde{f}(\tilde{x}_1^*) + \frac{1}{2}\operatorname{lsc}\tilde{f}(\tilde{x}_2^*) - \operatorname{lsc}\tilde{f}(\frac{\tilde{x}_1^* + \tilde{x}_2^*}{2}) \\
= \;& \frac{1}{2}f(\tilde{x}_1^*) + \frac{1}{2}f(\tilde{x}_2^*) - f(\frac{\tilde{x}_1^* + \tilde{x}_2^*}{2}) \\
&+\frac{1}{2}\operatorname{lsc} p(\tilde{x}_1^*) + \frac{1}{2}\operatorname{lsc} p(\tilde{x}_2^*) - \operatorname{lsc} p(\frac{\tilde{x}_1^* + \tilde{x}_2^*}{2}).
\end{aligned}$$

Kết hợp với (3.2.21) ta suy ra

$$\frac{1}{2}\mathrm{lsc}\,\tilde f(\tilde x_1) + \frac{1}{2}\mathrm{lsc}\,\tilde f(\tilde x_2^*) - \mathrm{lsc}\,\tilde f(\frac{\tilde x_1^* + \tilde x_2^*}{2})$$
$$= \frac{1}{4}\big\langle A(\tilde x_1^* - \tilde x_2^*), (\tilde x_1^* - \tilde x_2^*)\big\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{lsc}\,p(\tilde x_1^*) + \frac{1}{2}\mathrm{lsc}\,p(\tilde x_2^*) - \mathrm{lsc}\,p(\frac{\tilde x_1^* + \tilde x_2}{2}).$$

Vì $\sup_{x\in D}|p(x)| \le s < +\infty$, nên theo (b) Bổ đề 2.3.1 suy ra $\sup_{x\in D}|\mathrm{lsc}\,p(x)| \le s$. Thay vào biểu thức trên ta được

$$\frac{1}{2}\mathrm{lsc}\,\tilde f(\tilde x_1^*) + \frac{1}{2}\mathrm{lsc}\,\tilde f(\tilde x_2^*) - \tilde f(\frac{\tilde x_1^* + \tilde x_2^*}{2}) \ge \frac{1}{4}\big\langle A(\tilde x_1^* - \tilde x_2^*), \tilde x_1 - \tilde x_2^*\big\rangle - 2s.$$

Mặt khác, theo Mệnh đề 3.4.3 [1] thì $\tilde x_1^*, \tilde x_2^*$ là các điểm cực tiểu toàn cục của $\mathrm{lsc}\,\tilde f(x)$, tức là $\mathrm{lsc}\,\tilde f(\tilde x_1^*) = \mathrm{lsc}\,\tilde f(\tilde x_2^*)$, nên từ biểu thức trên suy ra

$$\mathrm{lsc}\,\tilde f(\tilde x_1^*) - \mathrm{lsc}\,\tilde f(\frac{\tilde x_1^* + \tilde x_2^*}{2}) \ge \frac{1}{4}\big\langle A(\tilde x_1^* - \tilde x_2^*), \tilde x_1^* - \tilde x_2^*\big\rangle - 2s. \qquad (3.2.22)$$

Thay

$$\mathrm{lsc}\,\tilde f(\tilde x_1^*) - \mathrm{lsc}\,\tilde f(\frac{\tilde x_1 + \tilde x_2^*}{2}) \le 0$$

vào vế trái của (3.2.22) và chuyển vế ta nhận được

$$\big\langle A(\tilde x_1^* - \tilde x_2^*), (\tilde x_1^* - \tilde x_2^*)\big\rangle \le 8s.$$

Do đó từ (c) Bổ đề 3.1.3 và biểu thức trên ta suy ra

$$\tilde x_1^* - \tilde x_2^* \in M(2s).$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Từ Nhận xét 3.1.5, khi $\lambda_{\max} > \lambda_{\min}$ ta suy ra

Nhận xét 3.2.6. *Mệnh đề* 3.2.22 *mạnh hơn Mệnh đề* 2.3.16 *Chương 2.*

Ví dụ 3.2.7. Xét hàm toàn phương lồi ngặt

$$f(x) = 0.25\,{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2,\ x = (\xi_1, \xi_2)$$

và hàm nhiễu

$$p(x) = \begin{cases} -0.5 & \text{nếu } 2 \le \|x\| \le 100 \\ \ \ 0.5 & \text{nếu } \|x\| < 2. \end{cases}$$

Khi đó

$$s := \sup_{\|x\| \le 100} |p(x)| = 0.5$$

và

$$\tilde{f}(x) = f(x) + p(x) = \begin{cases} 0.25\,{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 - 0.5 & \text{nếu } 2 \le \|x\| \le 100 \\ 0.25\,{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 + 0.5 & \text{nếu } \|x\| < 2. \end{cases}$$

Ta thấy rằng

$$\{(0,0)\} \cup \{x = (\xi_1, \xi_2) \mid 0.25\,{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 = 1\}$$

là tập các điểm infimum toàn cục của $\tilde{f}(x)$.

Lấy $z \in I\!R^n, z \neq 0$ bất kỳ, tia $\{tz \mid t \in I\!R\}$ cắt tập các điểm infimum toàn cục tại $\tilde{x_0} = (0,0)$ và tại $\tilde{x_1} = (\tilde{\xi_1}, \tilde{\xi_2}), \tilde{x_2} = (-\tilde{\xi_1}, -\tilde{\xi_2})$ thỏa mãn

$$0.25\,\tilde{\xi_1}^2 + \tilde{\xi_2}^2 = 1.$$

Ta thấy rằng

$$\tilde{x_1} - \tilde{x_2} = (2\tilde{\xi_1}, 2\tilde{\xi_2}), \tilde{x_2} - \tilde{x_1} = (-2\tilde{\xi_1}, -2\tilde{\xi_2})$$

nên $\tilde{x_1} - \tilde{x_2}, \tilde{x_2} - \tilde{x_1}$ đối xứng với nhau qua $\tilde{x_0} = (0,0)$ và

$$\tilde{x_1} - \tilde{x_2}, \tilde{x_2} - \tilde{x_1} \in \{x = (\xi_1, \xi_2) \mid 0.25\,{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2 = 4\} \subset M(1) = M(2s),$$

tức là với mọi phương $z \neq 0$ luôn tồn tại 2 điểm infimum toàn cục $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ của $\tilde{f}$ để $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2, \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1$ đối xứng qua $(0,0)$ và nằm trên biên của $M(1)$. Do đó suy ra tập $M(1)$ là tập nhỏ nhất chứa hiệu của hai điểm infimum bất kỳ của ví dụ trên, vì thế đánh giá ở Mệnh đề 3.2.22 là không thể tốt hơn.

3.3. Tính ổn định của tập các điểm infimum toàn cục

Tính ổn định của tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ đã được xét đến trong Chương 2. Hai định lý dưới đây là những kết quả cơ bản của mục này.

Định lý 3.3.18. *Nếu x^* là điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P), $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Khi đó*

$$\tilde{x}^* \in x^* + 0.5M(2s). \tag{3.3.23}$$

Chứng minh. Vì $f(\tilde{x}^*) \geq f(x^*)$ nên

$$\begin{aligned}
f(\tilde{x}^*) - f(x^*) &\geq \frac{1}{2}f(\tilde{x}^*) + \frac{1}{2}f(x^*) - f(x^*) \\
&= \frac{1}{2}f(\tilde{x}^*) - \frac{1}{2}f(x^*) \\
&= \frac{1}{2}\big(\langle A\tilde{x}^*, \tilde{x}^*\rangle + \langle b, \tilde{x}^*\rangle - \langle Ax^*, x^*\rangle - \langle b, x^*\rangle\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\langle A(x^* + \tilde{x}^* - x^*), x^* + \tilde{x}^* - x^*\rangle + \langle b, x^* + \tilde{x}^* - x^*\rangle \\
&\quad -\langle Ax^*, x^*\rangle - \langle b, x^*\rangle\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\langle Ax^*, x^*\rangle + 2\langle Ax^*, \tilde{x}^* - x^*\rangle + \langle A\tilde{x}^* - x^*, \tilde{x}^* - x^*\rangle \\
&\quad +\langle b, \tilde{x}^* - x^*\rangle + \langle b, x^*\rangle - \langle Ax^*, x^*\rangle - \langle b, x^*\rangle\big).
\end{aligned}$$

Rút gọn biểu thức trên ta được

$$\frac{1}{2}\big(\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\rangle + \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* - x^*\rangle\big) \leq f(\tilde{x}^*) - f(x^*).$$

Theo (2.3.10) Chương 2 thì $\langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* - x^*\rangle \geq 0$ nên từ biểu thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{2}\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\rangle \leq f(\tilde{x}^*) - f(x^*). \tag{3.3.24}$$

Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm cực tiểu toàn cục của $\tilde{f}$ thì $\tilde{f}(\tilde{x}^*) - \tilde{f}(x^*) \leq 0$ và có thể biến đổi

$$\begin{aligned}
f(\tilde{x}^*) - f(x^*) &= \tilde{f}(\tilde{x}^*) - \tilde{f}(x^*) - p(\tilde{x}^*) + p(x^*) \\
&\leq \tilde{f}(\tilde{x}^*) - \tilde{f}(x^*) + 2s \\
&\leq 2s.
\end{aligned}$$

Do đó kết hợp với (3.3.24) ta được

$$\langle A(\tilde{x}^* - x^*), \tilde{x}^* - x^*\rangle \leq 4s. \tag{3.3.25}$$

Nếu $\tilde{x}^*$ chỉ là điểm infimum toàn cục của $\tilde{f}$ thì nó là điểm cực tiểu toàn cục của $\operatorname{lsc}\tilde{f} = f + \operatorname{lsc} p$ nên $\operatorname{lsc}\tilde{f}(\tilde{x}^*) - \operatorname{lsc}\tilde{f}(x^*) \leq 0$. Kết hợp với $\sup_{x\in D} |\mathrm{lsc\,p(x)}| \leq \mathrm{s}$ ta suy ra

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}^*) - f(x^*) &= \operatorname{lsc}\tilde{f}(\tilde{x}^*) - \operatorname{lsc}\tilde{f}(x^*) - \operatorname{lsc} p(\tilde{x}^*) + \operatorname{lsc} p(x^*) \\ &\leq \operatorname{lsc}\tilde{f}(\tilde{x}^*) - \operatorname{lsc}\tilde{f}(x^*) \\ &\leq 2s. \end{aligned}$$

Thay bất đẳng thức trên vào (3.3.24) ta lại nhận được (3.3.25).

Từ (3.3.25) và định nghĩa tập $M(\gamma)$ ta suy ra

$$\tilde{x}^* - x^* \in 0.5M(2s),$$

tức là $\tilde{x}^* \in x^* + 0.5M(2s)$. □

Nhận xét 3.3.7. *Định lý 3.3.18 mạnh hơn Định lý 2.3.13 ở Mục 2.3 Chương 2.*

Ví dụ sau đây cho ta thấy tập $0.5M(2s)$ là nhỏ nhất trong các tập chứa $\tilde{x}^* - x^*$.

Ví dụ 3.3.8. Xét hàm toàn phương lồi ngặt

$$f(x) = {\xi_1}^2 + 2{\xi_2}^2$$

trên $I\!R^2$ và hàm nhiễu

$$p(x) = \begin{cases} s - f(x) & \text{nếu } x = (\xi_1, \xi_2) \in 0.5M(2s) \\ 0 & \text{nếu } x = (\xi_1, \xi_2) \notin 0.5M(2s)\ . \end{cases}$$

Khi đó

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} s & \text{nếu } x = (\xi_1, \xi_2) \in 0.5M(2s) \\ f(x) & \text{nếu } x = (\xi_1, \xi_2) \in I\!R^2 \setminus 0.5M(2s). \end{cases}$$

Ta thấy, $x^* = 0$ là điểm cực tiểu duy nhất của f trên $I\!R^2$ và $\tilde{f}$ đạt cực tiểu tại mọi $\tilde{x}^* \in 0.5M(s)$. Do đó ta suy ra $0.5M(2s)$ là tập nhỏ nhất chứa $\tilde{x}^* - x^*$.

Gọi S_0 là tập các điểm cực tiểu của Bài toán (P) và S_s là tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Khoảng cách Hausdorff là đại lượng:

$$d_H(S_0, S_s) = \max\{\sup_{x \in S_0} \inf_{y \in S_s} \|x - y\|, \sup_{y \in S_s} \inf_{x \in S_0} \|x - y\|\}.$$

Trong [50] H. X. Phu đã phát biểu và chứng minh định lý sau:

Định lý 3.3.19. *Giả sử Bài toán (P) có điểm cực tiểu x^* và*

$$(x^* + \bar{B}(0, r)) \cap D \textit{ là đóng với giá trị } r > 0 \textit{ nào đó }.$$

Nếu

$$\sup_{x \in D} |p(x)| \leq s \leq \frac{1}{2} r^2 \lambda_{\min},$$

thì tập S_s là khác rỗng và

$$d_H(\{x^*\}, S_s) \leq \sqrt{2s/\lambda_{\min}}\,.$$

3.4. Dưới vi phân suy rộng thô và điều kiện tối ưu

Trong mục 2.4 Chương 2, chúng tôi đã trình bày tính chất tựa và điều kiện tối ưu của Bài toán $(\tilde{P})$. Ở mục này ta xét lại các tính chất trên và nhận được các kết quả tổng quát hơn các kết quả trước đó.

Định nghĩa 3.4.10. ([50]) *Cho tập cân Γ ta nói ξ là dưới vi phân suy rộng thô của hàm $g : D \to I\!R$ tại điểm $x^* \in D$ nếu*

$$\inf_{x' \in (x^* + \Gamma) \cap D} \big(g(x') + \langle \xi, x' \rangle\big) \leq g(x) + \langle \xi, x \rangle \textit{ với mọi } x \in D.$$

Khi $g = \tilde{f} = f + p$ ta có định lý sau:

Định lý 3.4.20. *Giả sử $0 < \sup_{x \in D} |p(x)| \leq s < +\infty$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$. Khi đó, với $x^* \in D$ nào đó thì*

$$\inf_{x' \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D} \big(\tilde{f}(x') - \langle 2Ax^* + b, x' \rangle\big) \leq \tilde{f}(x) - \langle 2Ax^* + b, x \rangle \textit{ với mọi } x \in D.$$

Trong trường hợp đặc biệt, nếu D đóng và p là nửa liên tục dưới, thì với mỗi $x^* \in D$ tồn tại

$$\tilde{x}^* \in \big(x^* + 0.5M(2s)\big) \cap D$$

sao cho

$$\tilde{f}(\tilde{x}^*) - \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* \rangle = \min_{x' \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D} \big(\tilde{f}(x') - \langle 2Ax^* + b, x' \rangle\big)$$

và

$$\tilde{f}(\tilde{x}^*) - \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^* \rangle \le \tilde{f}(x) - \langle 2Ax^* + b, x \rangle \text{ với mọi } x \in D,$$

hoặc tương đương là

$$\tilde{f}(x) \ge \tilde{f}(\tilde{x}^*) + \langle 2Ax^* + b, x - \tilde{x}^* \rangle \text{ với mọi } x \in D.$$

Định lý này do H. X. Phu phát biểu và chứng minh trong [50].

Nghiên cứu sự tồn tại điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, ta có Định lý Kuhn-Tucker suy rộng như sau:

Định lý 3.4.21. *Xét Bài toán $(\tilde{P})$ với miền D được cho bởi* (2.4.17). *Khi đó*

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục, thì tồn tại duy nhất $x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D$ và các nhân tử Lagrange $\mu_0 \ge 0, \mu_1 \ge 0, \ldots, \mu_m \ge 0$, sao cho chúng không cùng triệt tiêu, thỏa mãn điều kiện Kuhn-Tucker*

$$\mathcal{L}(x^*, \mu_0, \ldots, \mu_m) = \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m), \tag{3.4.26}$$

điều kiện bù

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m. \tag{3.4.27}$$

Nếu điều kiện Slater (1.1.7) *thỏa mãn thì $\mu_0 \ne 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.*

(b) *Nếu tồn tại x^* thỏa mãn* (3.4.26) *và* (3.4.27) *với $\mu_0 = 1$ thì tồn tại $\tilde{x}^* \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D$ là infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$.*

Chứng minh. (a) Giả thiết (a) của định lý cũng là giả thiết (a) của Định lý 2.4.14 Chương 2, nên suy ra tồn tại duy nhất điểm $x^* \in D$ và các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, m$, sao cho chúng không cùng triệt tiêu, thỏa mãn điều kiện Kuhn-Tucker

$$\mathcal{L}(x^*, \mu_0, \ldots, \mu_m) = \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m)$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } \ i = 1, \ldots, m.$$

Nếu điều kiện Slater (1.1.7) thỏa mãn, thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$. Ngoài ra, x^* là cực tiểu toàn cục của Bài toán (P) trên D, nên theo Định lý 3.3.18 ta suy ra $x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D$.

(b) Vì các giả thiết của định lý cũng là các giả thiết của Định lý 2.4.14 Chương 2, nên tồn tại $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Mặt khác, theo Định lý 1.1.5 thì x^* là điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P) trên D. Do đó, áp dụng Định lý 3.3.18 ta suy ra

$$\tilde{x}^* \in (x^* + \in 0.5M(2s)) \cap D.$$

Định lý được chứng minh. □

Mở rộng Định lý 2.4.15 là định lý sau:

Định lý 3.4.22. *Giả sử D được cho bởi công thức* (2.4.17), $g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 1, \ldots, m$, *là các hàm lồi, cùng liên tục ít nhất tại một điểm của tập lồi, đóng $S \subset I\!R^n$. Khi đó*

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ thì tồn tại duy nhất $x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D$ và các nhân tử Lagrange $\mu_0 \geq 0, \mu_1 \geq 0, \ldots, \mu_m \geq 0$, chúng không cùng triệt tiêu thỏa mãn*

$$0 \in \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*) + N(x^*|S) \tag{3.4.28}$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \textit{ với mọi } \ i = 1, \ldots, m, \tag{3.4.29}$$

trong đó $N(x^*|S)$ *là nón pháp tuyến của* S *tại* x^*.

Nếu điều kiện Slater (1.1.7) *thỏa mãn thì* $\mu_0 \neq 0$ *và có thể coi* $\mu_0 = 1$.

(b) *Nếu có* $x^* \in D$ *thỏa mãn* (3.4.28) *và* (3.4.29) *với* $\mu_0 = 1$ *thì tồn tại* $\tilde{x}^* \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D$ *là điểm infimum toàn cục duy nhất của Bài toán* $(\tilde{P})$.

Chứng minh. (a) Vì giả thiết của Định lý 2.4.15 cũng là giả thiết của định lý này, nên tồn tại $x^* \in D$ và các nhân tử Lagrange $\mu_i, i = 0, \ldots, m$, thỏa mãn các điều kiện

$$0 \in \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*) + N(x^*|S)$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m,$$

trong đó $N(x^*|S)$ là nón pháp tuyến của S tại x^*. Đồng thời, theo Định lý Kuhn-Tucker cho Bài toán (P) ta cũng suy ra x^* là cực tiểu toàn cục duy nhất của Bài toán (P). Áp dụng Định lý 3.3.18 cho các điểm $\tilde{x}^*$ và x^* ta nhận được

$$x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D.$$

Ta cũng suy ra, nếu điều kiện Slater (1.1.7) thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.

(b) Các điều kiện (3.4.28) và (3.4.29) thỏa mãn (b) của Định lý 2.4.15, nên tồn tại $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Mặt khác các điều kiện (3.4.28) và (3.4.29) thỏa mãn Định lý Kuhn-Tucker cho Bài toán (P) nên x^* là cực tiểu toàn cục duy nhất của hàm toàn phương lồi ngặt f. Áp dụng Định lý 3.3.18 cho các điểm $\tilde{x}^*$ và x^* ta suy ra

$$\tilde{x}^* \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D.$$

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.4.8. (a) *Nếu* $S = I\!R^n$ *thì khi đó* $N(x^*|S) = \{0\}$, *nên biểu thức* (3.4.28) *được thay bởi*

$$0 \in \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*).$$

(b) *Nếu* $g_i, i = 1, \ldots, m$ *lồi, khả vi liên tục thì biểu thức trên có dạng*

$$0 = \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \bigtriangledown g_i(x^*).$$

Khi D là tập lồi đa diện ta có định lý sau:

Định lý 3.4.23. *Giả sử* D *được cho bởi* (2.4.18). *Khi đó*

(a) *Nếu* $\tilde{x}^*$ *là điểm infimum toàn cục của Bài toán* $(\tilde{P})$ *thì tồn tại duy nhất* $x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D$ *và các nhân tử Lagrange* $\mu_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$, *sao cho*

$$(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i = 0, \tag{3.4.30}$$

$$\mu_i(\langle c_i, x^* \rangle - d_i) = 0 \text{ với mọi } \ i = 1, \ldots, m. \tag{3.4.31}$$

Hơn thế nữa ta có

$$2A\tilde{x}^* + b + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i \in AM(2s).$$

(b) *Nếu có* $x^* \in D$ *thỏa mãn* (3.4.30), (3.4.31) *thì tồn tại* $\tilde{x}^* \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D$ *là điểm infimum toàn cục của Bài toán* $(\tilde{P})$.

Chứng minh. (a) Giả thiết của định lý cũng là giả thiết của Định lý 2.4.16, do đó tồn tại duy nhất x^* cùng các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, m$, sao cho

$$(2Ax^* + b) + \sum_{i=1} \mu_i c_i = 0$$

và

$$\mu_i(\langle c_i, x^* \rangle - d_i) = 0 \text{ với mọi } \ i = 1, \ldots, m.$$

Mặt khác x^* là điểm cực tiểu toàn cục duy nhất của Bài toán (P) nên theo Định lý 3.3.18 suy ra

$$x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D.$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} 2A\tilde{x}^* + b + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i &= 2Ax^* + b + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i + 2A\tilde{x}^* - 2Ax^* \\ &= 2A(\tilde{x}^* - x^*) \\ &\in AM(2s). \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

(b) Các điều kiện (3.4.30) và (3.4.31) thỏa mãn (b) của Định lý 2.4.16, do đó tồn tại $\tilde{x}^* \in D$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Vì x^* là cực tiểu toàn cục duy nhất của Bài toán (P) nên theo Định lý 3.3.18 suy ra mọi điểm infimum toàn cục $\tilde{x}^* \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D$. Định lý được chứng minh. □

Kết luận: Trong chương này chúng tôi đã giải quyết được những vấn đề cơ bản được đặt ra ở đầu chương là: chỉ ra các điều kiện đủ để hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài (các Mệnh đề 3.1.18 – 3.1.19); chứng minh điểm Γ-cực tiểu (Γ-infimum) là điểm cực tiểu toàn cục (infimum toàn cục) khi $\Gamma = M(2s)$ (các Mệnh đề 3.2.21 – 3.2.22); xác lập được quan hệ giữa điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P) và điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, đồng thời chứng minh được tính ổn định nghiệm theo khoảng cách Hausdorff (các định lý 3.3.18, 3.4.20); trình bày dưới vi phân suy rộng thô của hàm $\tilde{f} = f + p$ và chỉ ra các điều kiện tối ưu của Bài toán $(\tilde{P})$ (các định lý 3.4.21 – 3.4.23).

CHƯƠNG 4
ĐIỂM SUPREMUM CỦA BÀI TOÁN $(\tilde{Q})$

Bài toán được xét trong chương này là

$$\tilde{f}(x) := f(x) + p(x) \to \sup, \quad x \in D, \tag{$\tilde{Q}$}$$

trong đó D là tập lồi, f thỏa mãn công thức (1.0.1), tức là $f = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle, A \in I\!R^{n\times n}$ là ma trận đối xứng xác định dương, p là nhiễu giới nội, tức là

$$\sup_{x\in D} |p(x)| \leq s < +\infty.$$

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu tính γ-lồi trong của hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$; một số tính chất của điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$; tính ổn định của tập các điểm supremum toàn cục và tính ổn định của tập các điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$ theo nhiễu p.

4.1. Tính γ-lồi trong của hàm bị nhiễu

Trong mục này, ta trình bày một số điều kiện đủ để hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong. Đó là các mệnh đề sau:

Mệnh đề 4.1.23. *Cho $\gamma > 0$, f, p xác định theo công thức* (1.0.1) *và* (1.0.2)*, tương ứng. Khi đó*

(a) *Nếu $\sup_{x\in D} |p(x)| \leq \lambda_{\min}\gamma^2/2$, thì $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong.*

(a) *Nếu $\sup_{x\in D} |p(x)| < \lambda_{\min}\gamma^2/2$, thì $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong ngặt.*

Chứng minh. Xét bất kỳ $x_0, x_1 \in D$ thỏa mãn $\|x_0 - x_1\| = \gamma, -x_0 + 2x_1 \in D$, ta có

$$\begin{aligned}
& f(x_0) - 2f(x_1) + f(-x_0 + 2x_1) \\
= \ & \langle Ax_0, x_0\rangle + \langle b, x_0\rangle - 2\langle Ax_1, x_1\rangle - 2\langle b, x_1\rangle \\
& + \langle A(-x_0 + 2x_1), (-x_0 + 2x_1)\rangle + \langle b, -x_0 + 2x_1\rangle \\
= \ & 2\langle Ax_0, x_0\rangle - 4\langle Ax_0, x_1\rangle + 2\langle Ax_1, x_1\rangle \\
= \ & 2\langle A(x_0 - x_1), x_0 - x_1\rangle.
\end{aligned}$$

Không giảm tính tổng quát ta gọi $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$, là các giá trị riêng của ma trận đối xứng xác định dương A (có thể có một số giá trị trùng nhau), $\{e_i \mid\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ là cơ sở trực chuẩn trong $I\!R^n$ và đồng thời e_i là véc tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_i,\ i = 1, 2 \ldots, n$. Khi đó

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \zeta_0^i e_i,\ x_1 = \sum_{i=1}^{n} \zeta_1^i e_i$$

và

$$\begin{aligned}
2\langle A(x_0 - x_1), x_0 - x_1\rangle &= 2\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\zeta_0^i - \zeta_1^i)e_i, \sum_{j=1}^{n}(\zeta_0^j - \zeta_1^j)e_j\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i(\zeta_0^i - \zeta_1^i)(\zeta_0^j - \zeta_1^j)\langle e_i, e_j\rangle \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\zeta_0^i - \zeta_1^i)^2 \\
&\geq 2\lambda_{\min}\|x_0 - x_1\|^2.
\end{aligned}$$

Từ biểu thức cuối và định nghĩa hàm $h_2(\gamma)$ trong Mệnh đề 1.5.7 ta nhận được

$$h_2(\gamma) := \inf_{x_0, x_1 \in D,\, \|x_0 - x_1\| = \gamma, -x_0 + 2x_1 \in D} \big(f(x_0) - 2f(x_1) + f(-x_0 + 2x_1)\big) \geq 2\lambda_{\min}\gamma^2. \tag{4.1.1}$$

Theo giả thiết (a) và biểu thức (4.1.1) thì

$$|p(x)| \leq h_2(\gamma)/4 \text{ với mọi } x \in D,$$

nên áp dụng Mệnh đề 1.5.7 ta suy ra $\tilde{f}$ là γ-lồi trong.

Tương tự theo giả thiết (b) và biểu thức (4.1.1) ta cũng có

$$|p(x)| < h_2(\gamma)/4 \text{ với mọi } x \in D.$$

Áp dụng Mệnh đề 1.5.7 ta suy ra $\tilde{f}$ là γ-lồi trong ngặt.

Vậy (a), (b) được chứng minh. □

Mệnh đề 4.1.24. *Cho f xác định theo công thức* (1.0.1), *p thỏa mãn* (1.0.2). *Khi đó hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong với $\gamma \geq \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ và γ-lồi trong ngặt với $\gamma > \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.*

Chứng minh. Ta thấy với $\sqrt{2s/\lambda_{\min}} \leq \gamma$ (hoặc $\sqrt{2s/\lambda_{\min}} < \gamma$) tương đương với

$$\sqrt{\sup_{x\in D} |p(x)|/\lambda_{\min}} \leq \gamma \text{ (hoặc } \sqrt{\sup_{x\in D} |p(x)|/\lambda_{\min}} < \gamma),$$

tức là

$$\sup_{x\in D} |p(x)| \leq \lambda_{\min}\gamma^2/2 \text{ (hoặc } \sup_{x\in D} |p(x)| < \lambda_{\min}\gamma^2/2).$$

Áp dụng Mệnh đề 4.1.23 ta suy ra được mệnh đề trên. □

4.2. Điểm supremum toàn cục của hàm bị nhiễu

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu một số tính chất của điểm cực đại toàn cục và supremum toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$. Cụ thể là chỉ ra vị trí của các điểm cực đại toàn cục, supremum toàn cục và một số điều kiện tồn tại điểm cực đại toàn cục, điểm supremum toàn cục của lớp hàm này trên tập lồi D.

Ứng dụng các định lý 1.5.10 và 1.5.11 cho lớp hàm toàn phương bị nhiễu ta nhận được các mệnh đề sau:

Mệnh đề 4.2.25. *Cho $f : D \subset I\!R^n \to I\!R$ xác định theo công thức* (1.0.1). *Nếu hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ đạt giá trị cực đại, thì nó đạt cực đại toàn cục tại một số điểm γ-cực biên ngặt nào đó của D, với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.*

Chứng minh. Trước tiên, với các giả thiết trên ta chứng minh D giới nội. Giả sử D không giới nội, tức là tồn tại dãy $(x^k) \subset D$ sao cho $\lim_{k\to+\infty} \|x^k\| = +\infty$. Ta có

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(x)| &= |\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + p(x)| \\ &\geq \langle Ax, x\rangle - \|b\|\|x\| - \sup_{x\in D} |p(x)|, \end{aligned}$$

và $\langle Ax, x\rangle \geq \lambda_{\min}\|x\|^2$ do A là đối xứng xác định dương, nên

$$|\tilde{f}(x)| \geq \lambda_{\min}\|x\|^2 - \|b\|\|x\| - s.$$

Biểu thức cuối cho ta $\lim_{k\to+\infty} |\tilde{f}(x^k)| = +\infty$, điều này trái với giả thiết tồn tại giá trị cực đại toàn cục của hàm $\tilde{f}$. Mặt khác, theo Mệnh đề 4.1.24 thì $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. Áp dụng Định lý 1.5.10, ta suy ra điều cần chứng minh. □

Mệnh đề 4.2.26. *Cho $f : D \subset I\!R^n \to I\!R$ xác định theo công thức* (1.0.1). *Khi đó nếu hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ đạt giá trị cực đại toàn cục trên D, thì chỉ có thể đạt cực đại toàn cục tại những điểm γ-cực biên của D, với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử, tồn tại $y \in D$ là điểm cực đại toàn cục của $\tilde{f} = f + p$, nhưng y không phải là điểm γ-cực biên với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$, tức là

$$\exists y',\, y'' \in D : y = 0.5(y' + y''), \|y' - y''\| > 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}}.$$

Chọn $\epsilon > 0$ sao cho $2\gamma_1 := \|y' - y''\| - 2\epsilon > 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. Theo Mệnh đề 3.1.19 thì hàm toàn phương bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong ngặt với $\gamma = \gamma_1$, nên $\tilde{f} = f + p$ thỏa mãn Định lý 1.5.11. Vì vậy, điểm cực đại toàn cục y của $\tilde{f} = f + p$ chỉ có thể là điểm γ-cực biên ngặt với $\gamma = \gamma_1$, tức là từ $y = 0.5(y' + y'')$ suy ra $\|y' - y''\| < 2\gamma_1$. Điều nhận được là mâu thuẫn với giả thiết $\|y' - y''\| > 2\gamma_1$. Do đó mệnh đề đã được chứng minh. □

Ở mục trước ta đã xét các điểm cực đại của hàm γ-lồi trong. Đối với lớp hàm này, sự tồn tại điểm cực đại toàn cục nói chung không bảo đảm, thậm chí khi hàm là γ-lồi trong xác định trên tập compact. Vì vậy khái niệm điểm cực đại toàn cục được mở rộng ra như sau:

Định nghĩa 4.2.11. ([43]) *$x^* \in D$ được gọi là điểm supremum toàn cục của $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ nếu*

$$\limsup_{y \to x^*,\ y \in D} g(y) \geq g(x) \text{ với mọi } x \in D.$$

Định nghĩa 4.2.12. *$x^* \in D$ được gọi là điểm supremum địa phương của $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ nếu*

$$\exists \delta > 0 : \limsup_{y \to x^*,\ y \in D} g(y) \geq g(x) \text{ với mọi } x \in \bar{B}(x^*, \delta) \cap D.$$

Với định nghĩa trên ta thấy mỗi điểm cực đại toàn cục là điểm supremum toàn cục, nhưng ngược lại thì không, điều đó có thể thấy qua ví dụ đơn giản $g(x) = x - [x]$ xác định trên $I\!R, [x]$ là phần nguyên của x. Để nghiên cứu các điểm supremum toàn cục ta sẽ sử dụng một số tính chất của hàm bao đóng nửa liên tục trên, hàm đó được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 4.2.13. (xem [43]) *Cho $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$, hàm $\operatorname{usc} g$ xác định như sau*

$$\operatorname{usc} g(x) := \limsup_{y \to x, y \in D} g(y),$$

được gọi là hàm bao đóng nửa liên tục trên của g trên D.

Bổ đề 4.2.4. *Ta có các tính chất sau của hàm bao đóng nửa liên tục trên:*

(a) *$x^* \in D$ là điểm supremum toàn cục của g trên D khi và chỉ khi x^* là điểm cực đại toàn cục của hàm $\operatorname{usc} g$ trên D.*

(b) *$x^* \in D$ là điểm supremum địa phương của g trên D khi và chỉ khi x^* là điểm cực đại địa phương của hàm $\operatorname{usc} g$ trên D.*

(c) *Nếu $\tilde{f} = f + p$ thì $\operatorname{usc} \tilde{f} = f + \operatorname{usc} p$ và $\operatorname{usc} \tilde{f}$ là γ-lồi trong với $\gamma \geq \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ và γ-lồi trong ngặt với $\gamma > \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.*

Chứng minh. (a) Giả sử x^* là điểm supremum toàn cục của g trên D. Khi đó

$$\operatorname{usc} g(x^*) = \limsup_{y\to x^*,\ y\in D} g(y) \geq g(x) \text{ với mọi } x \in D.$$

Mặt khác, với $x \in D$ thì

$$\operatorname{usc} g(x) = \limsup_{y\to x,\ y\in D} g(y),$$

nên

$$\operatorname{usc} g(x) \leq \operatorname{usc} g(x^*) \text{ với mọi } x \in D.$$

Do đó suy ra x^* là điểm đạt cực đại toàn cục của $\operatorname{usc} g(x)$ trên D.

Ngược lại, nếu x^* là điểm đạt cực đại của $\operatorname{usc} g$, tức là

$$\operatorname{usc} g(x^*) \geq \operatorname{usc} g(x) \text{ với mọi } x \in D,$$

thì

$$\operatorname{usc} g(x^*) = \limsup_{x\to x^*,\ x\in D} g(x) \geq \operatorname{usc} g(x) \geq g(x) \text{ với mọi } x \in D.$$

Ta suy ra x^* là điểm supremum toàn cục của g trên D.

(b) Chứng minh tương tự (a).

(c) Lấy $x \in D$, ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{usc} \tilde{f}(x) &= \limsup\nolimits_{y\to x, y\in D} \tilde{f}(y) \\
&= \sup\{\eta : \exists y_n \to x, y_n \in D,\ \eta = \lim\nolimits_{n\to+\infty} \tilde{f}(y_n)\} \\
&= f(x) + \sup\{\eta' : \exists y_n \to x, y_n \in D,\ \eta' = \lim\nolimits_{n\to+\infty} p(y_n)\},
\end{aligned}$$

nên

$$\operatorname{usc} \tilde{f}(x) = f(x) + \operatorname{usc} p(x).$$

Mặt khác, với mọi $x \in D$ thì

$$\begin{aligned}
|\operatorname{usc} p(x)| = |\limsup_{y\to x,\ y\in D} p(y)| &= |\lim_{\delta\searrow 0} \sup_{y\in B(x,\delta)} p(y)| \\
&\leq \lim_{\delta\searrow 0} \sup_{y\in B(x,\delta)} |p(y)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\le \lim_{\delta \searrow 0} \sup_{y \in D} |p(y)| \\ &\le \lim_{\delta \searrow 0} s \\ &= s. \end{aligned}$$

Do đó, áp dụng Mệnh đề 4.1.24 cho hàm usc $\tilde{f} = f + \operatorname{usc} p$ ta suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 4.2.9. *Nói chung từ một hàm là γ-lồi trong không suy ra hàm bao đóng nửa liên tục trên của nó là γ-lồi trong* (xem Ví dụ 2.4 [43]).

Hệ quả 4.2.2. *Cho f xác định theo công thức* (1.0.1). *Nếu $\tilde{f} = f + p$ có điểm supremum toàn cục trên D, thì tồn tại điểm supremum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ là điểm γ-cực biên ngặt, với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.*

Chứng minh. Nếu hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ có điểm supremum toàn cục trên D, thì theo Bổ đề 4.2.4, điểm đó là điểm cực đại toàn cục của hàm usc $\tilde{f} = f + \operatorname{usc} p$. Vì vậy, từ Mệnh đề 1.3.1 suy ra hàm usc $\tilde{f} = f + \operatorname{usc} p$ có điểm cực đại toàn cục là điểm γ-cực biên ngặt với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. Áp dụng lại (c) của Bổ đề 4.2.4 ta suy ra $\tilde{f} = f + p$ có một số điểm supremum toàn cục là điểm γ-cực biên ngặt với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. □

Hệ quả 4.2.3. *Cho f xác định theo công thức* (1.0.1). *Khi đó hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ chỉ đạt supremum toàn cục tại những điểm γ-cực biên của D, với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.2.4, nếu $\tilde{f} = f + p$ có điểm supremum toàn cục thì điểm đó là điểm cực đại của hàm usc $\tilde{f} = f + \operatorname{usc} p$ và hàm usc $\tilde{f} = f + \operatorname{usc} p$ là γ-lồi trong với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. Do đó áp dụng Mệnh đề 2.1.10 ta suy ra, tập các điểm cực đại của usc $\tilde{f} = f + \operatorname{usc} p$, chỉ có thể là các điểm γ-cực biên của D. Áp dụng lại (c) Bổ đề 4.2.4 ta suy ra các điểm supremum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ chỉ có thể là các điểm γ-cực biên với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. □

Hệ quả 4.2.4. *Cho f xác định theo công thức* (1.0.1), *D là tập compact. Nếu hàm nhiễu $\tilde{f} = f + p$ có điểm supremum toàn cục trên D thì có ít nhất một điểm là điểm biên tương đối D theo* aff D *trong đó* aff D *là bao tuyến tính của tập D, hoặc là điểm γ-cực biên của D với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$, là điểm supremum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ trên D.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 4.1.24 thì $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. Nếu D là compact, thì suy ra hàm $\tilde{f} = f + p$ bị chặn trên trên D. Theo Hệ quả 1.5.1 suy ra tồn tại điểm supremum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ trên D. Từ Định lý 2.4 [43] suy ra, có ít nhất một điểm supremum là điểm biên tương đối D theo aff D hoặc là điểm γ-cực biên của D với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. □

Ví dụ 4.2.9. Cho

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, x \in [-1, 1], \\ p(x) &= \begin{cases} -0.5 & \text{nếu } x \in [-1, -0.5] \cup [0.5, 1] \\ 0.5 - 2x^2 & \text{nếu } x \in]-0.5, 0.5[. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó

$$s = \sup_{x \in [-1,1]} |p(x)| = 0.5, \lambda_{\min} = 1, \gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}} = 1,$$

và

$$x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = -x_0 + 2x_1 = 1,$$

là các điểm supremum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$, trong đó x_0, x_1 là điểm cực biên, còn x_1 là điểm γ-cực biên với $\gamma = 1$. Ví dụ trên cho thấy, có thể tồn tại điểm supremum toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ không phải là điểm γ-cực biên ngặt với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$. Ví dụ cũng cho thấy, nếu $x_0, x_1 \in D, \|x_0 - x_1\| = \gamma$ thì có thể tập $\{-x_0 + 2x_1 \mid -x_0 + 2x_1 \in D\} \neq \emptyset$.

Mệnh đề 4.2.27. *Cho $\gamma > 0$, $x_1 \in D$ là điểm supremum toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ và* $\sup_{x \in D} |p(x)| \leq$

$\lambda_{\min}\gamma^2/2$. *Khi đó nếu* $x_0 \in D, \|x_0 - x_1\| = \gamma, -x_0 + 2x_1 \in D$ *thì* x_0 *và* $-x_0 + 2x_1$ *cũng là các điểm supremum toàn cục của* $\tilde{f} = f + p$.

Chứng minh. Vì $\sup_{x\in D} |p(x)| \le \lambda_{\min}\gamma^2/2$, nên áp dụng Mệnh đề 2.1.9 ta suy ra $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong. Vì $\|x_0 - x_1\| = \gamma$ và $-x_0 + 2x_1 \in D$, suy ra

$$\begin{aligned} f(x_0) - 2f(x_1) - f(-x_0 + 2x_1) &= 2\langle A(x_0 - x_1), (x_0 - x_1)\rangle \\ &\ge 2\lambda_{\min}\gamma^2. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Do đó

$$\begin{aligned} &f(x_0) - 2f(x_1) + f(-x_0 + 2x_1) \\ &= \Big(f(x_0) + \operatorname{usc} p(x_0)\Big) - 2\Big(f(x_1) + \operatorname{usc} p(x_1)\Big) \\ &\quad + \Big(f(-x_0 + 2x_1) + \operatorname{usc} p(-x_0 + 2x_1)\Big) \\ &\quad - \operatorname{usc} p(x_0) + 2\operatorname{usc} p(x_1) - \operatorname{usc} p(-x_0 + 2x_1) \\ &= \operatorname{usc} \tilde{f}(x_0) - 2\operatorname{usc} \tilde{f}(x_1) + \operatorname{usc} \tilde{f}(-x_0 + 2x_1) \\ &\quad - \operatorname{usc} p(x_0) + 2\operatorname{usc} p(x_1) - \operatorname{usc} p(-x_0 + 2x_1). \end{aligned}$$

Chuyển vế biểu thức cuối và kết hợp với (4.2.2) ta suy ra

$$\begin{aligned} &\operatorname{usc} \tilde{f}(x_0) - 2\operatorname{usc} \tilde{f}(x_1) + \operatorname{usc} \tilde{f}(-x_0 + 2x_1) \\ &\ge 2\lambda_{\min}\gamma^2 - 4\sup_{x\in D} |\operatorname{usc} p(x)| \\ &\ge 2\lambda_{\min}\gamma^2 - 2\lambda_{\min}\gamma^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$\operatorname{usc} \tilde{f}(x_0) - 2\operatorname{usc} \tilde{f}(x_1) + \operatorname{usc} \tilde{f}(-x_0 + 2x_1) \ge 0,$$

tức là

$$\operatorname{usc} \tilde{f}(x_0) + \operatorname{usc} \tilde{f}(-x_0 + 2x_1) \ge 2\operatorname{usc} \tilde{f}(x_1).$$

Vì x_1 là các giá trị cực đại toàn cục của hàm usc$\tilde{f}$ nên từ bất đẳng thức trên suy ra x_0, $-x_0 + 2x_1$ cực đại toàn cục của usc$\tilde{f}$ và vì vậy x_0, $-x_0 + 2x_1$ là điểm supremum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$ trên D. □

Mệnh đề 4.2.28. *Cho* x_1 *là điểm supremum toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội* $\tilde{f} = f + p$, *trong đó* $\sup_{x \in D} |p(x)| \leq s < +\infty$. *Nếu* $x_0 \in D$ *và* $-x_0 + 2x_1$ *thỏa mãn*

$$\|x_0 - x_1\| = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}\,, -x_0 + 2x_1 \in D$$

thì x_0 *và* $-x_0 + 2x_1$ *cũng là các điểm supremum toàn cục của* $\tilde{f} = f + p$.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 4.1.24 thì $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi trong với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$, nên thỏa mãn Mệnh đề 4.2.27, do đó ta suy ra điều phải chứng minh. □

4.3. Tính chất của tập các điểm supremum toàn cục

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu quan hệ giữa tập các điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ với tập các điểm supremum toàn cục của Bài toán (Q), khi D là tập lồi đa diện, tức là

$$D := \{x \in I\!R^n \mid \langle c_i, x\rangle \leq d_i,\ c_i \in I\!R^n,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

Bắt đầu từ phần này của chương ta sử dụng một số ký hiệu sau:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ext} D &:= \{x^* \mid x^* \text{ là điểm cực biên của tập lồi đa diện } D\}.\\
J_D(x^*) &:= \operatorname{ext} D \setminus \{x^*\}, x^* \in \operatorname{ext} D.\\
d(x, D) &:= \inf_{y \in D} \|x - y\|.\\
d_D &:= \min_{x^* \in \operatorname{ext} D} \{d\big(x^*, \operatorname{conv} J_D(x^*)\big)\}.\\
D(x^*, \beta) &:= \{x \in D \mid x = (1-\alpha)x^* + \alpha y,\ y \in D,\\
&\qquad 0 \leq \alpha \leq 1 - \beta\},\ x^* \in \operatorname{ext} D, \beta \in [0, 1].
\end{aligned}$$

và $|\operatorname{ext} D|$ là số điểm cực biên của D.

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 4.3.5. *Cho* $D \subset I\!R^n$ *là đa diện lồi, khi đó*

(a) *Tồn tại $\beta_0 > 0$ để với mọi $\beta \in [0, \beta_0]$ ta có*

$$D = \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} D(x^*, \beta).$$

(b) *Tồn tại $\gamma_0 > 0$ sao cho với mọi $\gamma \in [0, \gamma_0]$ tập các điểm γ-cực biên của miền D nằm trong tập*

$$\bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}(x^*, \gamma) \cap D.$$

(c) *Tồn tại $s_0 > 0$ sao cho với mọi $s \in [0, s_0]$ tập các điểm γ-cực biên của D với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ nằm trong tập*

$$\bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}(x^*, \sqrt{2s/\lambda_{\min}}\,) \cap D.$$

Chứng minh. Trường hợp $|\operatorname{ext} D| = 1$. Theo giả thiết D là đa diện lồi nên $D = \operatorname{ext} D = \{x^*\}$. Do đó các kết luận (a), (b), (c) là hiển nhiên. Ta xét trường hợp $|\operatorname{ext} D| \geq 2$.

(a) Nếu $\beta = 0$ thì $D = D(x^*, 0)$ với mọi $x^* \in \operatorname{ext} D$ nên

$$D = \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} D(x^*, 0). \tag{4.3.3}$$

khẳng định (a) đúng khi $\beta = 0$. Xét trường hợp $\beta > 0$. Ta thấy rằng $D(x^*, \beta) \subseteq D$ với mọi $x^* \in \operatorname{ext} D$ và $\beta > 0$ nên $\bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} D(x^*, \beta) \subseteq D$.

Ngược lại, ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử với mọi $\beta_0 > 0$, tồn tại $\beta \in]0, \beta_0]$ và $\overline{x} \in D$ sao cho

$$\overline{x} \notin \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} D(x^*, \beta),$$

khi đó

$$\overline{x} \notin D(x^*, \beta) \text{ với mọi } x^* \in \operatorname{ext} D.$$

Cố định $x^* \in \operatorname{ext} D$, vì D là đa diện lồi và $\overline{x} \in D$ nên $\overline{x}$ có thể biểu diễn thông qua các điểm cực biên, tức là tồn tại $\overline{\alpha}(y^*)$, $y^* \in \operatorname{ext} D$ thỏa mãn $\overline{\alpha}(y^*) \geq 0, \sum_{y^* \in \operatorname{ext} D} \overline{\alpha}(y^*) y^* = 1$, sao cho

$$\overline{x} = \sum_{y^* \in \operatorname{ext} D} \overline{\alpha}(y^*) y^* = \overline{\alpha}(x^*) x^* + \sum_{y^* \neq x^*} \overline{\alpha}(y^*) y^*. \tag{4.3.4}$$

Nếu $\overline{\alpha}(x^*) = 1$ thì $\overline{x} \equiv x^*$, suy ra $\overline{x} \in D(x^*, \beta)$. Điều này trái với giả thiết, do đó $\overline{\alpha}(x^*) < 1$. Biểu thức (4.3.4) có thể viết lại như sau

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \sum_{y^* \in \operatorname{ext} D} \overline{\alpha}(y^*) y^* \\
&= \overline{\alpha}(x^*) x^* + \big(1 - \overline{\alpha}(x^*)\big) \sum_{y^* \neq x^*} \frac{\overline{\alpha}(y^*)}{1 - \overline{\alpha}(x^*)} y^* \\
&= \overline{\alpha}(x^*) x^* + \big(1 - \overline{\alpha}(x^*)\big) x' \\
&= \big(1 - \alpha(x^*)\big) x^* + \alpha(x^*) x', \qquad (4.3.5)
\end{aligned}
$$

trong đó

$$\alpha(x^*) := 1 - \overline{\alpha}(x^*),\ x' := \sum_{y^* \neq x^*} \frac{\overline{\alpha}(y^*)}{1 - \overline{\alpha}(x^*)} y^* \in \operatorname{conv} J_D(x^*) \subset D.$$

Vì $\overline{x} \notin D(x^*, \beta)$ với mọi $x^* \in \operatorname{ext} D$, nên từ định nghĩa $D(x^*, \beta)$ và (4.3.5) suy ra

$$1 - \beta < \alpha(x^*) \leq 1 \text{ với mọi } x^* \in \operatorname{ext} D.$$

Nếu lấy $\beta_0 < 1/|\operatorname{ext} D|$ thì với mọi $\beta \in \,]\,0, \beta_0]$ ta có

$$
\begin{aligned}
\sum_{x^* \in \operatorname{ext} D} \alpha(x^*) \geq |\operatorname{ext} D| \min x^* \in \operatorname{ext} D\{\alpha(x^*)\} &\geq |\operatorname{ext} D| - |\operatorname{ext} D|\beta \\
&> |\operatorname{ext} D| - 1 \\
&\geq 1.
\end{aligned}
$$

Điều này trái với giả thiết $\sum_{x^* \in \operatorname{ext} D} \alpha(x^*) = 1$. Do đó kết hợp với (4.3.3) ta suy ra (a).

(b) Lấy $\beta \in]0, \beta_0]$, khi đó theo (a) thì

$$D = \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} D(x^*, \beta).$$

Đặt $\gamma_1 := d_D - d_D\beta$. Ta chứng minh, với $\gamma \in]0, \gamma_1]$ và với mọi $x^* \in \operatorname{ext} D$ thì

$$\bar{B}(x^*, \gamma) \cap D \subseteq D(x^*, \beta).$$

Thật vậy, lấy $x^* \in \operatorname{ext} D$, giả sử $x \in \bar{B}(x^*, \gamma) \cap D$. Khi đó

$$\begin{aligned} x &= \sum_{y^* \in \operatorname{ext} D} \overline{\alpha}(y^*) y^* \\ &= \overline{\alpha}(x^*) x^* + \sum_{y^* \neq x^*,\, y^* \in \operatorname{ext} D} \overline{\alpha}(y^*) y^*. \end{aligned}$$

Nếu $\overline{\alpha}(x^*) = 1$ thì $x \equiv x^*$, do đó suy ra $x \in D(x^*, \beta)$. Nếu $\overline{\alpha}(x^*) < 1$, viết lại biểu thức trên giống như ở (4.3.5), ta được

$$x = \big(1 - \alpha(x^*)\big) x^* + \alpha(x^*) x',$$

trong đó $x' \in \operatorname{conv} J_D(x^*)$. Biểu thức trên có thể biến đổi thành

$$x^* - x = \alpha(x^*)(x^* - x'),$$

nên kết hợp với $x \in \bar{B}(x^*, \gamma)$ ta suy ra

$$\alpha(x^*) \|x^* - x'\| \leq \gamma.$$

Vì $\|x^* - x'\| \geq d$ nên $\alpha(x^*) d \leq \gamma$ và do đó

$$\alpha(x^*) \leq \frac{\gamma}{d} = \frac{\gamma_1}{d} \leq 1 - \beta.$$

Từ định nghĩa $D(x^*, \beta)$ và biểu thức này ta suy ra $x \in D(x^*, \beta)$, vì vậy

$$\bar{B}(x^*, \gamma) \cap D \subseteq D(x^*, \beta), \text{ với mọi } x^* \in \operatorname{ext} D. \tag{4.3.6}$$

Vì $D = \cup_{x^* \in \operatorname{ext} D} D(x^*, \beta)$ nên từ (4.3.6) suy ra có thể chọn được $\gamma_2 < \gamma_1$ sao cho với mọi $\gamma \in [0, \gamma_2]$ để

$$D \setminus \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \big(\bar{B}(x^*, \gamma) \cap D\big) \neq \emptyset. \tag{4.3.7}$$

Thật vậy, lấy $x \in D, x \notin \operatorname{ext} D$, đặt $t := \min_{x^* \in \operatorname{ext} D} \|x - x^*\| > 0$, khi đó với mọi $\gamma < t$ và $x^* \in \operatorname{ext} D$ thì $x \notin \bar{B}(x^*, \gamma)$. Do đó ta có (4.3.7).

Đặt $\gamma_0 := \min\{\gamma_1, \gamma_2, \beta d_D/2\}$. Ta chứng minh rằng nếu $\gamma \in [0, \gamma_0]$ thì mọi $x \in D \setminus \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \big(\bar{B}(x^*, \gamma) \cap D\big)$ không phải là điểm γ-cực biên của miền D. Ta xét các trường hợp sau:

i) $\gamma \in]0, \gamma_0]$. Theo (a) $x \in D \backslash \cup_{x^* \in \text{ext}\, D} \big(\bar{B}(x^*, \gamma) \cap D\big)$ suy ra tồn tại $y^* \in \text{ext}\, D$ sao cho $x \in D(y^*, \beta)$. Vì $D, D(y^*, \beta)$ là các tập compact nên gọi $t_0 := \max\{t \mid y^* + t(x - y^*) \in D\}$ và $t_1 := \max\{t \mid y^* + t(x - y^*) \in D(y^*, \beta)\}$. Ta ký hiệu

$$x'' := y^* + t_0(x - y^*) \text{ và } x' := y^* + t_1(x - y^*),$$

khi đó $x'' \in D,\ x' \in D(y^*, \beta)$ và

$$[y^*, x] \subset [y^*, x'] \subset [y^*, x''[. \tag{4.3.8}$$

Ta khẳng định $x'' \in \text{conv} J_D(y^*)$. Thật vậy, nếu điều này không xảy ra thì $x'' \in D \setminus \text{conv} J_D(y^*)$ và có thể biểu diễn như (4.3.5), tức là

$$x'' = \big(1 - \alpha(y^*)\big) y^* + \alpha(y^*) y, \text{ trong đó } \alpha(y^*) < 1 \text{ và } y \in \text{conv}\, J_D(y^*).$$

Do đó $x'' \in \,]\, y^*, y\, [$, điều này trái với cách chọn x'', nên $x'' \in \text{conv}\, J_D(y^*)$.

Do $x' \in D(y^*, \beta)$ nên tồn tại $\alpha_1 \in [0, 1 - \beta]$ và $y \in D$ sao cho

$$x' = (1 - \alpha_1) y^* + \alpha_1 y. \tag{4.3.9}$$

Từ (4.3.8) ta suy ra $y \in]y^*, x'']$ do đó có thể viết

$$y = \alpha_2 y^* + (1 - \alpha_2) x'',\ \alpha_2 \in]0, 1].$$

Thay y từ công thức trên vào (4.3.9) ta được

$$\begin{aligned} x' &= (1 - \alpha_1) y^* + \alpha_1 y \\ &= (1 - \alpha_1) y^* + \alpha_1(\alpha_2 y^* + (1 - \alpha_2) x'') \\ &= (1 - \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2) y^* + (\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2) x'' \\ &= (1 - \alpha_0) y^* + \alpha_0 x'' \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

trong đó $\alpha_0 := \alpha_1 - \alpha_1\alpha_2$ và dễ nhận thấy $\alpha_0 \le 1 - \beta$.

Mặt khác, $x'' \in \text{conv}\, J_D(y^*)$ và biểu thức (4.3.10) có dạng tương đương $x'' - x' = (1 - \alpha_0)(x'' - y^*)$ nên

$$\|x'' - x'\| = (1 - \alpha_0)\|x'' - y^*\| \ge \beta d \ge \gamma_0 > \gamma. \tag{4.3.11}$$

Kết hợp biểu thức (4.3.11) với $x \notin \bigcup_{x^* \in \mathrm{ext}\, D} \bar{B}(x^*, \gamma)$ ta được

$$\|x - y^*\| > \gamma \text{ và } \|x - x''\| > \gamma.$$

Như vậy khoảng cách từ điểm $x \in [y^*, x'']$ đến hai điểm y^* và x'' lớn hơn γ nên suy ra tồn tại $y', y'' \in [y^*, x''] \subset D$ sao cho $x = 0.5(y' + y'')$ và $\|y' - y''\| > 2\gamma$. Do đó x không phải là điểm γ-cực biên của miền D.

ii) $\gamma = 0$, khi đó $\mathrm{ext}\, D = \bigcup_{x^* \in \mathrm{ext}\, D} \bar{B}(x^*, \gamma) \cap D$.

Kết hợp cả hai trường hợp i), ii) ta suy ra (b).

(c) Đặt $s_0 = \lambda_{\min}\gamma_0^2/2$, với γ_0 thỏa mãn (b) của bổ đề. Ta thấy $s \in [0, s_0]$ khi và chỉ khi $\sqrt{2s/\lambda_{\min}} \in [0, \gamma_0]$, nên áp dụng (b) ta suy ra tập các điểm γ-cực biên của miền D với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ nằm trong

$$\bigcup_{x^* \in \mathrm{ext}\, D} \bar{B}(x^*, \sqrt{2s/\lambda_{\min}}) \cap D.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Ví dụ sau đây cho thấy tập các điểm γ-cực biên có thể nhỏ hơn thực sự tập $\bigcup_{x^* \in \mathrm{ext}\, D} \bar{B}(x^*, \gamma) \cap D$.

Ví dụ 4.3.10. Cho $D \subset I\!R^2$ là tam giác có các đỉnh

$$x_0 = (0, 0),\ x_1 = (\sqrt{3}, 1),\ x_2 = (-\sqrt{3}, 1).$$

Cho $\gamma = 0.25$, khi đó tập các điểm γ-cực biên của D với $\gamma = 0.25$ nằm trong $\big(\bar{B}(x_0, 0.25) \cup \bar{B}(x_1, 0.25) \cup \bar{B}(x_2, 0.25)\big) \cap D$. Cho $x_0' = (0, 0.2) \in \bar{B}(x_0, 0.25)$, $x_1' = (-\sqrt{3}/5, 0.2)$, $x_2' = (\sqrt{3}/5, 0.2)$, khi đó $x_0' = 0.5(x_1' + x_2')$ và $\|x_1' - x_0'\| = \|x_2' - x_0'\| = \sqrt{3}/5 > 0.25$. Ta suy ra $x_0' \in \bar{B}(x_0, 0.25)$ nhưng không phải là điểm γ-cực biên của D với $\gamma = 0.25$.

Ta ký hiệu

$$C^0(D) := \{p : D \to I\!R \mid \sup_{x \in D} |p(x)| < +\infty\}.$$

Bổ đề 4.3.6. *Nếu $C^0(D)$ được trang bị các phép toán $(p_1 + p_2)(x) := p_1(x) + p_2(x), (\alpha p)(x) := \alpha p(x)$, $x \in D$, $\alpha \in I\!R$ và chuẩn $\|p\|_{C^0} := \sup_{x\in D} |p(x)| < +\infty$ thì $(C^0(D), \|.\|_{C^0})$ là không gian Banach.*

Chứng minh. $C^0(D)$ là không gian tuyến tính định chuẩn được suy trực tiếp từ định nghĩa các phép toán và chuẩn trên $C^0(D)$. Ta chứng minh $C^0(D)$ là không gian Banach. Xét dãy Cosi $\{p_i\}$ trong $C^0(D)$, khi đó theo định nghĩa

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ N : i, \ j \geq N \Rightarrow \|p_i - p_j\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

Từ biểu thức trên suy ra với mọi $x \in D$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ N : i, j \geq N \Rightarrow |p_i(x) - p_j(x)| \leq \epsilon \tag{4.3.12}$$

nên theo định lý Cosi tồn tại $p(x)$ sao cho $\lim_{i\to+\infty} p_i(x) = p(x)$.

Từ biểu thức (4.3.12) khi $j \to +\infty$ thì

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ N : \ i \geq N \Rightarrow |p_i(x) - p(x)| \leq \epsilon$$

với mọi $x \in D$. Suy ra

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ N : \ i \geq N \Rightarrow \|p_i - p\|_{C^0} \leq \epsilon,$$

tức là p_i hội tụ đến p theo chuẩn của $C^0(D)$.

Mặt khác, cố định $i \geq N$, vì

$$\|p\|_{C^0} \leq \|p_i\|_{C^0} + \|p_i - p\|_{C^0} \leq \|p_i\|_{C^0} + \epsilon \leq \|p_N\| + 2\epsilon$$

nên p giới nội trên D. Do đó, dãy Cosi $\{p_i\}$ hội tụ về $p \in C^0(D)$, vậy $C^0(D)$ là không gian Banach. □

Ký hiệu $\bar{B}_{C^0}(0, s)$ là hình cầu đóng tâm 0 bán kính s của không gian $C^0(D)$.

Định nghĩa 4.3.14. (xem [4]) *Cho X, Y là các không gian tuyến tính định chuẩn. Hàm đa trị $F : X \to 2^Y$, được gọi là nửa liên tục trên tại x_0 nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x_0) \subset V$ tồn tại lân cận $U(x_0)$ sao cho*

$$x \in U(x_0) \Longrightarrow F(x) \subset V$$

và được gọi là nửa liên tục dưới tại x_0 nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ tồn tại lân cận $U(x_0)$ sao cho

$$x \in U(x_0) \Longrightarrow F(x) \cap V \neq \emptyset.$$

Gọi $S_{global}(p)$ là tập các điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$, khi đó $S_{global} : C^0(D) \to 2^{I\!R^n}$ và dễ thấy $S_{global}(0)$ là tập các điểm cực đại toàn cục của Bài toán (P). Vì $|\tilde{f}(x)| = |f(x)+p(x)| \geq \lambda_{\min}\|x\|^2 - \|b\|\|x\| - \|p\|_{C^0}$, $|f(x)| \geq \lambda_{\min}\|x\|^2 - \|b\|\|x\|$ và D là tập lồi đa diện nên $S_{global}(p), S_{global}(0)$ khác $\emptyset$ khi và chỉ khi D là đa diện lồi trong $I\!R^n$. Tính ổn định của hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội được thể hiện qua mệnh đề sau:

Định lý 4.3.24. *Xét Bài toán $(\tilde{Q})$. Khi đó*

$$\exists s_0 > 0 \ \forall p \in \bar{B}(0, s_0) : S_{global}(p) \subseteq S_{global}(0) + \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\, \bar{B}(0,1). \tag{4.3.13}$$

Chứng minh. Trước tiên ta nhận xét rằng, nếu D không giới nội hoặc $D = \operatorname{ext} D = \{x^*\}$ thì $S_{global}(p) = S_{global}(0) = \emptyset$ hoặc $S_{global}(p) = S_{global}(0) = \{x^*\}$ với mọi $p \in C^0(D)$, nên kết luận của định lý là đúng. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $|\operatorname{ext} D| \geq 2$ và D là đa diện lồi. Ngoài ra khi $p \equiv 0$ thì kết luận của mệnh đề là hiển nhiên.

Vì hàm toàn phương f lồi ngặt trên D, $\operatorname{ext} D$ là tập các đỉnh của D, nên các điểm cực đại của f nằm trong $\operatorname{ext} D$, nghĩa là $S_{global}(0) \subseteq \operatorname{ext} D$. Ta xét các trường hợp sau:

i) Trường hợp $\operatorname{ext} D = S_{global}(0)$. Theo (c) của Bổ đề 4.3.5, tồn tại $s_0 > 0$ sao cho với mọi $s \in [0, s_0]$, tập các điểm γ-cực biên của miền D với

$\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ nằm trong tập

$$\bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}(x^*, \sqrt{2s/\lambda_{\min}}) \cap D. \qquad (4.3.14)$$

Lấy $p \in C^0(D)$ vì $\|p\|_{C^0} = \sup_{x\in D} |p(x)|$ nên theo Hệ quả 4.2.3 điểm supremum toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là điểm γ cực biên của D với $\gamma = \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}$. Kết hợp với (4.3.14) ta suy ra với mọi $p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_0)$, tức là $\|p\|_{C^0} \le s_0$, thì

$$\begin{aligned} S_{global}(p) &\subseteq \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}\big(x^*, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\,\big) \cap D \\ &\subseteq \bigcup_{x^* \in S_{global}(0)} \bar{B}\big(x^*, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\,\big) \\ &= S_{global}(0) + \bar{B}(0, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\,). \end{aligned}$$

Do đó

$$\exists s_0\ \forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_0) : S_{global}(p) \subseteq S_{global}(0) + \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\,\bar{B}(0,1).$$

Vậy trường hợp $\operatorname{ext} D = S_{global}(0)$ đã được chứng minh.

ii) Trường hợp $S_{global}(0) \subset \operatorname{ext} D$. Giả sử γ_0 thỏa mãn (b) của Bổ đề 4.3.5, đặt $s_1 := \lambda_{\min}\gamma_0^2/2$. Theo (c) của Bổ đề 4.3.5 ta suy ra, với mọi $s \in [0, s_1]$ tập các điểm γ-cực biên của miền D với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ nằm trong tập

$$\bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}\big(x^*, \sqrt{2s/\lambda_{\min}}\,\big) \cap D.$$

Mặt khác, nếu $p \in C^0(D)$ thì điểm supremum toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là điểm γ-cực biên của miền D với $\gamma = \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}$. Do đó

$$\forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_1) : S_{global}(p) \subseteq \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}\big(x^*, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\,\big) \cap D. \quad (4.3.15)$$

Đặt

$$K := \max_{x\in D} f(x), \quad k := \max_{y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)} f(y^*),$$

khi đó với mọi $x^* \in S_{global}(0)$ thì $f(x^*) = K$ và $k < K$.

Lấy $\epsilon \in]0, \frac{K-k}{4}]$. Vì hàm toàn phương lồi ngặt f liên tục tại mọi điểm trên D nên với mỗi $y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)$ ta có

$$\exists \delta = \delta(y^*, \epsilon) > 0, \forall x \in D : \|x - y^*\| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(y^*) + \epsilon.$$

Đặt $\overline{\delta} := \min_{y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)} \delta(y^*, \epsilon)$. Vì tập $\operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)$ là hữu hạn nên $\overline{\delta} > 0$. Do đó

$$\forall y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0), \forall x \in D : \|x - y^*\| \leq \overline{\delta} \Longrightarrow f(x) \leq f(y^*) + \epsilon.$$

Thay $f(y^*) \leq k < K - 4\epsilon$ vào biểu thức trên ta được

$$\forall y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0), \forall x \in D : \|x - y^*\| \leq \overline{\delta} \Longrightarrow f(x) \leq K - 3\epsilon.$$

Đặt $s_2 := \min\{\lambda_{\min}\overline{\delta}^2/2, \epsilon\}$. Khi đó, nếu $p \in \bar{B}(0, s_2)$ thì với mọi $y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)$ và $x \in D$, thỏa mãn $\|x - y^*\| \leq \overline{\delta}$, suy ra

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) = f(x) + p(x) \leq f(x) + \|p\|_{C^0} &\leq K - 3\epsilon + s_2 \\ &\leq f(x^*) - 2\epsilon \\ &\leq \tilde{f}(x^*) - \epsilon, \end{aligned}$$

trong đó $x^* \in S_{global}(0)$.

Do vậy, với mọi $p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_2)$ thì

$$\forall y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0), \forall x \in D : \|x - y^*\| \leq \overline{\delta} \Longrightarrow \tilde{f}(x) \leq \sup_{x \in D} \tilde{f}(x) - \epsilon.$$

Từ biểu thức trên suy ra, nếu $p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_2)$ thì với mọi $y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)$, tập $\bar{B}(y^*, \overline{\delta})$ không chứa điểm supremum toàn cục của hàm $\tilde{f} = f + p$, tức là

$$\forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_2) : S_{global}(p) \cap \bar{B}(y^*, \overline{\delta}) = \emptyset$$

với mọi $y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)$.

Mặt khác, $\sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}} \leq \bar{\delta}$ nên $\bar{B}(y^*, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}) \subseteq \bar{B}(y^*, \bar{\delta})$. Do đó

$$\forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_2) : S_{global}(p) \cap \bigcup_{y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)} \bar{B}\big(y^*, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\big) = \emptyset. \tag{4.3.16}$$

Đặt $s_0 := \min\{s_1, s_2\}$, sử dụng (4.3.15) và (4.3.16) ta suy ra với mọi $p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_0)$, tập các điểm supremum toàn cục $S_{global}(p)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} S_{global}(p) &\subseteq \Big(\bigcup_{y^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}\big(y^*, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\big) \cap D\Big) \\ &\quad \setminus \bigcup_{y^* \in \operatorname{ext} D \setminus S_{global}(0)} \bar{B}\big(y^*, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\big)\Big) \\ &\subseteq \bigcup_{x^* \in S_{global}(0)} \bar{B}\big(x^*, \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\big) \\ &= S_{global}(0) + \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\, \bar{B}(0, 1). \end{aligned}$$

Tóm lại ta nhận được

$$\exists s_0 > 0\ \forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_0) : S_{global}(p) \subseteq S_{global}(0) + \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\, \bar{B}(0, 1).$$

Định lý đã được chứng minh. $\square$

Nhận xét 4.3.10. *Biểu thức* (4.3.13) *tương đương với*

$$\begin{aligned} &\big(\exists s_0 > 0\ \forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_0)\big) \Longrightarrow \\ &\big(\forall \tilde{x}^* \in S_{global}(p),\ \exists x^* \in S_{global}(0) : \|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\big). \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Ngoài ra đại lượng $\sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}$ *ở đánh giá trên là tốt nhất. Kết luận này dựa trên Ví dụ* 4.3.12.

Ta có thể tính s_0 thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 4.3.11. Cho

$$f(x) = x^2,\ x \in [-0.5, 1]$$

Ta có $D = [-0.5, 1]$ nên các điểm cực biên là $x_1^* = -0.5, x_2^* = 1$ và $\lambda_{\min} = 1$, $S_{global}(0) = \{x_2^*\} = \{1\}$. Theo mệnh đề trên thì có thể chọn

$\gamma_0 = 0.75$ và do đó $s_1 = \lambda_{\min}\gamma_0^2/2 \approx 0.28125$. Ta cũng có $K = 1, k = 0.5$ nên có thể chọn $\epsilon = (1 - 0.5)/4 = 0.125$. Ngoài ra với mọi $x \in [-0.5, \sqrt{0.375}]$ thì $f(x) \leq f(-0.5) + \epsilon = 0.25 + 0.125$ nên chọn $\overline{\delta} = 0.5 + \sqrt{0.375} \approx 1.1123$. Vì $s_2 := \min\{\overline{\delta}^2/2, \epsilon\} = 0.125$. nên $s_0 = \min\{s_1, s_2\} = 0.125$. Do đó, trong ví dụ trên với $s_0 = 0.125$ biểu thức (4.3.17) thỏa mãn.

Ví dụ 4.3.12. Cho

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \ x \in [-1, 1], \\ p(x) &= \begin{cases} -s & \text{nếu } x \in [-1, -\sqrt{s}\,] \\ s - x^2 & \text{nếu } x \in \,]-\sqrt{s}, \sqrt{s}\,[\\ -s & \text{nếu } x \in [\sqrt{s}, 1\,]. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $D = [-1, 1]$ nên các điểm cực biên là $x_1^* = -1, x_2^* = 1$ và $\lambda_{\min} = 1$, $\|p\|_{C^0} = s$, $S_{global}(0) = \{x_1^*, x_2^*\} = \{-1, 1\}$. Dễ thấy khi $\gamma_0 = 1$ thì với mọi $\gamma \leq \gamma_0$, tập

$$[-1, -1 + \gamma] \cup [1 - \gamma, 1]$$

là tập các điểm γ-cực biên của $[-1, 1]$. Theo (c) của Bổ đề 4.3.5 và vì $\lambda_{\min} = 1$ nên với mọi $0 \leq s \leq s_0 = \gamma_0^2/2 = 0.5$, tập

$$[-1, -1 + \sqrt{2s}\,] \cup [1 - \sqrt{2s}, 1]$$

chứa tập các điểm γ-cực biên của $[-1, 1]$ với $\gamma = \sqrt{2s}$. Mặt khác, khi $s = s_0 = 0.5$ thì $\|p\|_{C^0} = 0.5, S_{global}(p) = \{-1, 1\} \cup \,]-\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}[$. Nên suy ra $\tilde{x}_3^* := 0$ cũng là điểm supremum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$, tức là $\tilde{x}_3^* \in S_{global}(p)$. Ta cũng có $|\tilde{x}_3^* - x_1^*| = |\tilde{x}_3^* - x_2^*| = |0 - 1| = 1 = \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}$. Do đó, bất đẳng thức (4.3.17) trở thành đẳng thức khi $s = s_0 = 0.5$. Vậy ta kết luận đánh giá ở Định lý 4.3.24 là tốt nhất.

Mệnh đề 4.3.29. *Xét Bài toán $(\tilde{Q})$. Khi đó $S_{global}(p)$ là hàm nửa liên tục trên tại* 0.

Chứng minh. Giả sử $V \subset I\!R^n$ là tập mở bất kỳ thỏa mãn $S_{global}(0) \subset V$. Khi đó

$$\forall x^* \in S_{global}(0), \ \exists \delta(x^*) > 0 : \bar{B}\big(x^*, \delta(x^*)\big) \subset V.$$

Đặt $\overline{\delta} := \min_{x^* \in S_{global}(0)} \delta(x^*)$, vì tập $S_{global}(0)$ là hữu hạn nên $\overline{\delta} > 0$ và

$$\forall x^* \in S_{global}(0) : x^* + \bar{B}\big(0, \overline{\delta}\big) \subset V,$$

tức là

$$S_{global}(0) + \overline{\delta}\bar{B}(0,1) \subset V. \tag{4.3.18}$$

Với s_0 được xác định ở Định lý 4.3.24, đặt $s_1 := \min\{\lambda_{\min}\overline{\delta}^2/2, s_0\}$, khi đó $\sqrt{2s_1/\lambda_{\min}} \le \overline{\delta}$ và $s_1 \le s_0$. Vì vậy, với mọi $p \in C^0(D)$ sao cho $0 < \|p\|_{C^0} \le s_1$ các biểu thức (4.3.15), (4.3.18) đồng thời thỏa mãn. Kết hợp lại ta được

$$\begin{aligned} \forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_1) : S_{global}(p) &\subseteq S_{global}(0) + \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\,\bar{B}(0,1) \\ &\subseteq S_{global}(0) + \overline{\delta}\bar{B}(0,1) \\ &\subset V. \end{aligned}$$

Vậy ta suy ra

$$\forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_1) : S_{global}(p) \subset V,$$

tức là $S_{global}(p)$ nửa liên tục trên tại 0. □

Từ định nghĩa suy ra hàm $\tilde{f} = f + p$ không nửa liên tục dưới tại 0 nếu tồn tại lân cận V thỏa mãn $S_{global}(0) \cap V \neq \emptyset$ và dãy $(p_i), i = 1, 2\ldots$ hội tụ về 0 trong $C^0(D)$ sao cho $S_{global}(p_i) \cap V = \emptyset$ với mọi $i = 1, 2, \ldots.$ Ví dụ sau đây chỉ ra rằng hàm $S_{global}(p)$ không nửa liên tục dưới tại 0.

Ví dụ 4.3.13. Cho

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, x \in [-4, 4] \\ p_i(x) &= \begin{cases} -1/i & \text{nếu } x \in [-4, -3.8] \\ 0 & \text{nếu } x \in]-3.8, 3.8[\\ 1/i & \text{nếu } x \in [3.8, 4], \end{cases} \end{aligned}$$

$i = 1, 2\ldots.$

Từ ví dụ ta có $S_{global}(0) = \{-4, 4\}$, $D = [-4, 4]$, $p_i \in C^0(D)$, $\|p_i\|_{C^0(D)} = 1/i$, $S_{global}(p_i) = \{4\}$ với mọi số nguyên dương i. Lấy tập mở $V =]$-4.1,0.5$[$ khi đó $S_{global}(0) \cap V = \{-4\} \neq \emptyset$. Xét dãy $(p_i) \subset C^0(D)$ ta có $\lim_{i\to\infty} p_i = 0$ và $S_{global}(p_i) = \{4\}$ nên $S_{global}(p_i) \cap V = \emptyset$. Khi đó theo định nghĩa suy ra $S_{global}(p)$ không nửa liên tục dưới tại 0.

4.4. Tính chất của tập các điểm supremum địa phương

Ta biết rằng lớp hàm lồi có tính chất: điểm cực tiểu địa phương là điểm cực tiểu toàn cục. Đối với một số lớp hàm lồi suy rộng thô như γ-lồi ngoài thì tính chất gần như trên vẫn giữ được, tức là nếu $x^* \in D$ là điểm γ-cực tiểu, γ-infimum, thì x^* là cực tiểu toàn cục, infimum toàn cục tương ứng [47], sự liên hệ đó cho phép ta tập trung vào việc nghiên cứu các điểm cực tiểu toàn cục, infimum toàn cục. Tuy nhiên không có sự liên hệ như thế giữa các điểm cực đại toàn cục, supremum toàn cục với các điểm cực đại địa phương, supremum địa phương trong các lớp hàm lồi suy rộng. Do đó trong phần này, chúng tôi tập trung nghiên cứu tập các điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$.

Gọi $S_{local}(p)$ là tập các điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$ khi đó $S_{local} : C^0(D) \to 2^{I\!R^n}$ và dễ thấy $S_{local}(0)$ là tập các điểm cực đại địa phương của Bài toán (Q). Do f là hàm toàn phương lồi ngặt trên tập lồi đa diện D nên $S_{local}(0)$ chỉ có thể là các điểm cực biên của D, tức là một số đỉnh của D.

Trước khi nghiên cứu điểm cực đại, supremum địa phương chúng ta có nhận xét sau:

Nhận xét 4.4.11. *$S_{local}(0)$ có thể bằng $\emptyset$ khi D không giới nội và $S_{local}(0) = \emptyset$ khi D chứa đường thẳng*

Thật vậy, nếu D không giới nội thì $S_{local}(0) = \emptyset, S_{local}(0) \neq \emptyset$ có thể thấy rõ qua việc xét hàm $f(x) = x^2$ trên các miền $D = [0, +\infty[$ và $D = [-1, +\infty[$, tương ứng.

Trường hợp D chứa đường thẳng. Theo lược đồ chứng minh trong Định lý 19.1 [54] thì D có thể biểu diễn dưới dạng $D = D_0 + L$, trong đó $D_0 = D \cap L^{\perp}$ là tập lồi đóng không chứa đường thẳng, L là không gian con tuyến tính, $L^{\perp}$ là không gian con bù vuông góc với L. Giả sử $x \in D$, nếu $x \notin D_0$ thì tồn tại $x' \in D_0 \subseteq D$, $y \neq 0, y \in L$ sao cho $x = x' + y$, đặt $x'' := x' + 2y$, ta nhận được $x', x'' \in D$ và $\|x' - x\| = \|x'' - x\| = \|y\|$. Nếu $x \in D_0$ thì $x' := x - y \in D$ và $x'' := x + y \in D$ với mọi $y \in L$ khi đó $\|x' - x\| = \|x'' - x\| = \|y\|$ nên suy ra D không có điểm cực biên. Vì vậy $S_{local}(0) = \emptyset$.

Vì những lý do trên nên khi nghiên cứu các điểm supremum địa phương ta luôn giả thiết tồn tại điểm supremum địa phương của hàm toàn phương lồi ngặt f, tức là $S_{local}(0) \neq \emptyset$.

Ký hiệu

$$\eta(x^*) := \sup_{x \in D,\ x \neq x^*} \left\langle 2Ax^* + b, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|} \right\rangle.$$

Một số bổ đề sau sẽ được dùng khi nghiên cứu hàm $S_{local}(p)$.

Bổ đề 4.4.7. *Đặt* $\eta_0 := \max_{x^* \in S_{local}(0)} \eta(x^*)$. *Khi đó* $\eta_0 < 0$.

Chứng minh. Hệ quả 19.1.1 [54] khẳng định, tập các điểm cực biên của tập lồi đa diện là hữu hạn, nên hoàn toàn hợp lý khi ta viết $\max_{x^* \in S_{local}(0)} \eta(x^*)$ thay cho $\sup_{x^* \in S_{local}(0)} \eta(x^*)$. Ta ký hiệu

$$\begin{aligned} P_i &:= \{x \in I\!R^n \mid \langle c_i, x \rangle = d_i,\ i = 1, \ldots, m\} \\ F_i &:= \{x \in I\!R^n \mid \langle c_i, x \rangle \leq d_i,\ i = 1, \ldots, m\}. \end{aligned}$$

Vì $x^* \in \operatorname{ext} D$ là điểm cực biên của D nên tồn tại $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ sao cho

$$\{x^*\} = \cap_{j=1}^{k} P_{i_j}.$$

Vì hàm $\langle 2Ax^* + b, u \rangle$ liên tục theo biến u trên tập compact $\cap_{j=1}^{k} F_{i_j} \cap \bar{B}(x^*, 1)$ nên tồn tại $u_0 \in \cap_{j=1}^{k} F_{i_j} \cap \bar{B}(x^*, 1)$, sao cho

$$\langle 2Ax^* + b, u_0 \rangle = \max_{u \in \cap_{j=1}^{k} F_{i_j} \cap \bar{B}(x^*, 1)} \langle 2Ax^* + b, u \rangle.$$

Mặt khác, với mọi $x \in D, x \neq x^*$ thì

$$\begin{aligned}
\Big\langle c_{i_j}, x^* + \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\Big\rangle &= \langle c_{i_j}, x^*\rangle + \frac{\langle c_{i_j}, x\rangle}{\|x - x^*\|} - \frac{\langle c_{i_j}, x^*\rangle}{\|x - x^*\|} \\
&\leq d_{ij} + \frac{d_{ij} - d_{ij}}{\|x - x^*\|} \\
&\leq d_{ij}
\end{aligned}$$

với mọi $j = 1, \ldots, k$ nên

$$x^* + \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|} \in \cap_{j=1}^{k} F_{i_j} \cap \bar{B}(x^*, 1).$$

Do đó

$$\sup_{x \in D, x \neq x^*} \Big\langle 2Ax^* + b, x^* + \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\Big\rangle \leq \langle 2Ax^* + b, u_0\rangle.$$

Biểu thức trên kéo theo

$$\sup_{x \in D, x \neq x^*} \Big\langle 2Ax^* + b, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\Big\rangle \leq \langle 2Ax^* + b, u_0 - x^*\rangle. \tag{4.4.19}$$

Xét tia $x^* + t(u_0 - x^*)$. Ta khẳng định tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho với mọi $t \in [0, \delta_1]$ thì $x^* + tu_0 \in D$.

Thật vậy, nếu $u_0 \in D$ thì

$$x^* + t(u_0 - x^*) \in D \text{ với mọi } t \in [0, 1]. \tag{4.4.20}$$

Nếu $u_0 \notin D$ ta xét các trường hợp sau:

i) $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$. Vì $\langle c_i, x^*\rangle = d_i$ và $\langle c_i, u_0\rangle \leq d_i$ nên với mọi $t \geq 0$ thì

$$\begin{aligned}
\langle c_i, x^* + t(u_0 - x^*)\rangle &= \langle c_i, x^*\rangle + t\langle c_i, u_0 - x^*\rangle \\
&\leq d_i
\end{aligned} \tag{4.4.21}$$

ii) $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Khi đó $\langle c_i, x^*\rangle < d_i$. Đặt $l := \max_{i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}} \langle c_i, u_0 - x^*\rangle$, ta có

$$\begin{aligned}
\langle c_i, x^* + t(u_0 - x^*)\rangle &= \langle c_i, x^*\rangle + t\langle c_i, u_0 - x^*\rangle \\
&\leq \langle c_i, x^*\rangle + tl.
\end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Nếu $l \leq 0$, thì hiển nhiên

$$\langle c_i, x^* + t(u_0 - x^*)\rangle \leq d_i \quad \forall t \geq 0. \tag{4.4.23}$$

Nếu $l > 0$ thì đặt $\delta_1 := \min\{\min_{i \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} (d_i - \langle c_i, x^*\rangle), 1\} > 0$. Do đó, từ (4.4.22) ta suy ra

$$\langle c_i, x^* + t(u_0 - x^*)\rangle \leq d_i \tag{4.4.24}$$

với mọi $t \in [0, \delta_1]$. Kết hợp (4.4.20)–(4.4.24) ta được khẳng định trên.

Xét hàm $\phi(t) := f(x^*+t(u_0-x^*))-f(x^*)$ trên đoạn $[0, \delta_1]$. Vì $\phi(0) = 0$ và $f(x)$ đạt cực đại địa phương tại x^* nên $\phi(t)$ cũng đạt cực đại địa phương tại 0, tức là

$$\exists \delta \in]0, \delta_1] : \phi(t) \leq 0 \ \forall t \in [0, \delta].$$

Như vậy, với mọi $t \in [0, \delta]$ thì

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \big\langle A\big(x^* + t(u_0 - x^*)\big), x^* + t(u_0 - x^*)\big\rangle - \big\langle Ax^*, x^*\big\rangle - \langle b, x^*\rangle \\
&= \big\langle 2Ax^* + b, u_0 - x^*\big\rangle t + \big\langle A(u_0 - x^*), u_0 - x^*\big\rangle t^2 \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Vì $u_0 - x^* \neq 0$ nên $\langle A(u_0 - x^*), u_0 - x^*\rangle > 0$. Do đó từ bất đẳng thức trên cho ta $\big\langle 2Ax^* + b, u_0 - x^*\big\rangle < 0$. Kết hợp bất đẳng thức này với biểu thức (4.4.19) và $S_{local}(0) \subseteq \operatorname{ext} D$ ta suy ra

$$\eta_0 = \max_{x^* \in S_{local}(0)} \eta(x^*) < 0.$$

Bổ đề đã được chứng minh. □

Để tiện theo dõi từ đây ta luôn ký hiệu

$$\begin{aligned}
s_0 &:= \eta_0^2/(12\lambda_{\max}), & (4.4.25)\\
\xi(s) &:= \big(-\eta_0 - \sqrt{\eta_0^2 - 12\lambda_{\max}s}\ \big)/(2\lambda_{\max}), & (4.4.26)
\end{aligned}$$

và nhận thấy rằng nếu $s \in]0, s_0]$ thì $\xi(s) > 0$. Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 4.4.8. *Với mỗi $s \in [0, s_0]$ thì*

$$\forall x^* \in S_{local}(0), \forall x \in D : \|x - x^*\| = \xi(s) \Longrightarrow f(x) \leq f(x^*) - 3s.$$

Chứng minh. Nếu $s = 0$ thì $\xi(s) = 0$ nên kết luận của bổ đề là hiển nhiên.

Nếu $s > 0$, lấy bất kỳ $x^* \in S_{local}(0)$. Với mọi $x \in D,\ x \neq x^*$ ta có

$$f(x) = f(x^*) + \langle 2Ax^* + b, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle \|x - x^*\| + \langle A(x - x^*), x - x^*\rangle,$$

nên, với mọi $x \in D,\ x \neq x^*$ thì

$$f(x) = \langle 2Ax^* + b, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle \|x - x^*\| + \langle A(x - x^*), x - x^*\rangle + 3s + f(x^*) - 3s. \tag{4.4.27}$$

Xét biểu thức

$$\langle 2Ax^* + b, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle \|x - x^*\| + \langle A(x - x^*), x - x^*\rangle + 3s.$$

Vì $\langle A(x - x^*), x - x^*\rangle \leq \lambda_{\max}\|x - x^*\|^2$ và $\xi(s) > 0$, nên với mọi $x \in D$ thỏa mãn $\|x - x^*\| = \xi(s)$, ta được

$$\begin{aligned} &\langle 2Ax^* + b, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle \|x - x^*\| + \langle A(x - x^*), x - x^*\rangle + 3s \\ \leq\ & \lambda_{\max}\xi(s)^2 + \eta_0\xi(s) + 3s. \end{aligned}$$

Vì $s \leq s_0$ và $\xi(s) \leq \xi(s_0)$ nên

$$\lambda_{\max}\xi(s)^2 + \eta_0\xi(s) + 3s \leq \lambda_{\max}\xi(s_0)^2 + \eta_0\xi(s_0) + 3s_0.$$

Thay $s_0, \xi(s)$ được xác định theo (4.4.25) và (4.4.26) ta suy ra

$$\lambda_{\max}\xi(s_0)^2 + \eta_0\xi(s_0) + 3s_0 = 0.$$

Do đó

$$\langle 2Ax^* + b, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}\rangle \|x - x^*\| + \langle A(x - x^*), x - x^*\rangle + 3s \leq 0.$$

Kết hợp biểu thức này với (4.4.27) ta suy ra kết luận của bổ đề. $\square$

Định lý 4.4.25. *Xét Bài toán* $(\tilde{Q})$. *Khi đó*

$$\forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_0) : \max_{x^* \in S_{local}(0)} d\big(x^*, S_{local}(p)\big) \leq \xi(\|p\|_{C^0}).$$

Chứng minh. Nếu $p \equiv 0$ thì điều khẳng định là hiển nhiên.

Lấy bất kỳ $p \in C^0(D)$ sao cho $0 < \|p\|_{C^0} \leq s_0$. Đặt $s := \|p\|_{C^0}$. Do D là tập lồi đa diện nên $\bar{B}\big(x^*, \xi(s)\big) \cap D$ là tập compact. Vì hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ bị chặn (trên) trên tập $\bar{B}\big(x^*, \xi(s)\big) \cap D$, nên $\sup_{x \in \bar{B}(x^*, \xi(s)) \cap D} \tilde{f}(x) < +\infty$. Mặt khác, tồn tại $(\tilde{x}_i)$ trong $\bar{B}\big(x^*, \xi(s)\big) \cap D$ sao cho $\lim_{i\to\infty} \tilde{x}_i = \tilde{x}^*$ và $\lim_{i\to\infty} \tilde{f}(\tilde{x}_i) = \sup_{x \in \bar{B}(x^*, \xi(s)) \cap D} \tilde{f}(x)$.

Ta khẳng định $\tilde{x}^* \in B(x^*, \xi(s)) \cap D$. Thật vậy giả sử kết luận trên là sai, khi đó $\tilde{x}^* \in \Big(\bar{B}\big(x^*, \xi(s)\big) \setminus B\big(x^*, \xi(s)\big)\Big) \cap D$. Ta có

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \bar{B}(x^*, \xi(s)) \cap D} \tilde{f}(x) &= \lim_{i\to\infty} \tilde{f}(\tilde{x}_i) \\ &= \lim_{i\to\infty} \big(f(\tilde{x}_i) + p(\tilde{x}_i)\big). \end{aligned} \tag{4.4.28}$$

Vì tồn tại $\lim_{i\to\infty} \tilde{f}(\tilde{x}_i) = \lim_{i\to\infty} \big(f(\tilde{x}_i) + p(\tilde{x}_i)\big)$, mà hàm toàn phương lồi ngặt f liên tục tại mọi điểm thuộc D nên tồn tại $\lim_{i\to\infty} p(\tilde{x}_i)$. Do đó thay $\lim_{i\to\infty} \big(\tilde{f}(\tilde{x}_i) + p(\tilde{x}_i)\big) = \lim_{i\to\infty} f(\tilde{x}_i) + \lim_{i\to\infty} p(\tilde{x}_i)$ vào (4.4.28) và chú ý rằng $f(\tilde{x}^*) \leq f(x^*) - 3s$ theo Bổ đề 4.4.8, ta được

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \bar{B}(x^*, \xi(s)) \cap D} \tilde{f}(x) &= \lim_{i\to\infty} \big(f(\tilde{x}_i) + \lim_{i\to\infty} p(\tilde{x}_i)\big). \\ &\leq f(\tilde{x}^*) + s \\ &\leq f(x^*) - 3s + s \\ &\leq f(x^*) + p(x^*) - s \\ &= \tilde{f}(x^*) - s. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sup_{x \in \bar{B}(x^*, \xi(s)) \cap D} \tilde{f}(x) \leq \sup_{x \in \bar{B}(x^*, \xi(s)) \cap D} \tilde{f}(x) - s.$$

Biểu thức nhận được là vô lý, nên $\tilde{x}^* \in B(x^*, \xi(s)) \cap D$, do đó suy ra $\tilde{x}^* \in D$ là điểm supremum địa phương của $\tilde{f} = f + p$ trên D. Ngoài ra vì

$\tilde{x}^* \in \bar{B}(x^*, \xi(s))$ nên

$$\begin{aligned}
\max_{x^* \in S_{local}(0)} d\big(x^*, S_{local}(p)\big) &= \max_{x^* \in S_{local}(0)} \inf_{\tilde{y}^* \in S_{local}(p)} \|\tilde{y}^* - x^*\| \\
&\leq \max_{x^* \in S_{local}(0)} \|\tilde{x}^* - x^*\| \\
&\leq \max_{x^* \in S_{local}(0)} \xi(s) \\
&= \max_{x^* \in S_{local}(0)} \xi(\|p\|_{C^0}).
\end{aligned}$$

Tóm lại ta nhận được

$$\forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_0) : \max_{x^* \in S_{local}(0)} d\big(x^*, S_{local}(p)\big) \leq \xi(\|p\|_{C^0}).$$

Định lý đã được chứng minh. □

Mệnh đề 4.4.30. *Hàm đa trị $S_{local}(p)$ là nửa liên tục dưới tại điểm* 0.

Chứng minh. Theo định nghĩa hàm nửa liên tục dưới, nếu $S_{local}(0) = \emptyset$ thì $S_{local}(p)$ nửa liên tục dưới tại 0 là hiển nhiên.

Ta xét trường hợp $S_{local}(0) \neq \emptyset$. Lấy tập mở bất kỳ $V \subset I\!R^n$ thỏa mãn $S_{local}(0) \cap V \neq \emptyset$. Khi đó

$$\exists\, x^* \in S_{local}(0) : x^* \in V.$$

Vì V là tập mở, ta suy ra tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\bar{B}(x^*, \delta) \subset V$. Mặt khác, do $\xi(s)$ được xác định bởi biểu thức (4.4.26) nên

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to 0} \xi(s) &= \lim_{s \to 0} \Big(- \eta_0 - \sqrt{\eta_0^2 - 12\lambda_{\max} s} \Big) / (2\lambda_{\max}) \\
&= \big(- \eta_0 - (-\eta_0) \big) / (2\lambda_{\max}) = 0.
\end{aligned}$$

Biểu thức này cho phép ta chọn số dương $s_1 \leq s_0$ sao cho với mọi $s \in]0, s_1]$ thì $\xi(s) \leq \delta$, vì vậy

$$\bar{B}\big(x^*, \xi(s)\big) \cap D \subset \bar{B}(x^*, \delta) \cap D \subset V. \tag{4.4.29}$$

Mặt khác, theo Định lý 4.4.25, với mọi $p \in C^0(D)$ thỏa mãn $\|p\|_{C^0} \leq s_0$ (được xác định theo (4.4.25)) tồn tại $\tilde{x}^* \in \bar{B}\big(x^*, \xi(\|p\|_{C^0})\big) \cap D$ là điểm supremum địa phương của $\tilde{f} = f + p$, tức là $\tilde{x}^* \in S_{local}(p)$. Vì $s_1 \le s_0$ nên kết hợp với biểu thức (4.4.29) ta nhận được

$$\forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_1) : V \cap S_{local}(p) \neq \emptyset,$$

Do đó $S_{local}(p)$ là nửa liên tục dưới tại điểm 0. □

Từ định nghĩa 4.3.14 ta suy ra hàm $S_{local}(p)$ không nửa liên tục trên tại 0 nếu tồn tại lân cận V thỏa mãn $S_{local}(0) \subseteq V$ và dãy $(p_i), i = 1, 2\ldots$ hội tụ về 0 trong $C^0(D)$ sao cho $S_{global}(p_i) \setminus V \neq \emptyset$ với mọi $i = 1, 2, \ldots$.

Ví dụ sau đây chỉ ra $S_{local}(p)$ không nửa liên tục trên tại 0.

Ví dụ 4.4.14. Cho

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, x \in [\,0, 2\,] \\ p_i(x) &= \begin{cases} 1/i - 2x^2 & \text{nếu } x \in [\,0, \sqrt{1/i}\,] \\ 0 & \text{nếu } x \in [\,0, 2\,] \setminus [\,0, \sqrt{1/i}\,] \end{cases} \end{aligned}$$

$i = 1, 2\ldots$

Ta tính được $\|p_i\|_C^0(D) = 1/i$, $S_{local}(0)$=$\{2\}$ và $S_{local}(p_i) = \{0, 2\}, i = 1, 2, \ldots$. Lấy tập mở $V =]1.5, 2.1[$ ta có $\{2\} = S_{local}(0) \subset V =]1.5, 2.1[$. Trong khi đó với mọi i thì $0 \in S_{local}(p_i)$ nhưng $0 \notin V$, nên suy ra $S_{local}(p_i) \setminus V \neq \emptyset$. Do đó $S_{local}(p)$ không nửa liên tục trên tại 0.

Kết luận: Các kết quả đạt được, cơ bản được trình bày trong các Mục 4.1–4.4, chúng bao gồm: một số điều kiện đủ để hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội là γ-lồi trong (Mệnh đề 4.1.24); các tính chất của các điểm cực đại và supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ (các mệnh đề 4.2.25, 4.2.26, 4.2.27, 4.2.28); tính ổn định, nửa liên tục trên của hàm tập các điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ (Định lý 4.3.24, Mệnh đề 4.3.29); tính ổn định, nửa liên tục dưới của hàm tập các điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$ (Định lý 4.4.25, Mệnh đề 4.4.30).

KẾT LUẬN CHUNG

1. Luận án đã giải quyết được các vấn đề:

- Chỉ ra hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài với mọi $\gamma \geq \gamma^*$, trong đó $\gamma^* = 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}}$; điểm γ^*-cực tiểu của $\tilde{f}$ là điểm cực tiểu toàn cục; đường kính của tập các điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ nhỏ hơn hoặc bằng γ^*; khoảng cách giữa điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ và điểm cực tiểu toàn cục của hàm f nhỏ hơn hoặc bằng γ^*. Ngoài ra tính chất tựa thô và một số điều kiện tối ưu suy rộng của hàm $\tilde{f}$ cũng được trình bày. Các kết quả trên đã được công bố trong bài báo "*Global infimum of strictly convex quadratic functions with bounded perturbation*" (xem Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án).

- Chứng minh được, hàm $\tilde{f}$ là Γ-lồi ngoài với tập cân đặc biệt $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$; điểm Γ-tối ưu địa phương của Bài toán $(\tilde{P})$ là điểm tối ưu toàn cục; hiệu của hai nghiệm tối ưu bất kỳ của Bài toán $(\tilde{P})$ nằm trong tập Γ; $x^* - \tilde{x}^* \in \frac{1}{2}\Gamma$ nếu x^* là nghiệm cực tiểu toàn cục của f trên D và $\tilde{x}^*$ là nghiệm tối ưu toàn cục bất kỳ của Bài toán $(\tilde{P})$; tập nghiệm tối ưu S_s của $(\tilde{P})$ là ổn định theo khoảng cách Hausdorff $d_H(.,.)$. Định lý Kuhn-Tucker suy rộng cho Bài toán $(\tilde{P})$ cũng được chứng minh. Các kết quả trên đã được đăng tải trong bài báo " *Some properties of boundedly disturbed strictly convex quadratic functions*" (xem Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án).

- Chỉ ra hàm $\tilde{f}$ là γ-lồi trong với $\gamma \geq (2/\lambda_{\min})^{\frac{1}{2}}$ và γ-lồi trong ngặt với $\gamma > (2/\lambda_{\min})^{\frac{1}{2}}$; khi D bị chặn và $\gamma = (2/\lambda_{\min})^{\frac{1}{2}}$, mọi điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ chỉ có thể là điểm γ- cực biên của D và có ít nhất một điểm là γ-cực biên ngặt. Một số tính chất quan trọng của tập các điểm supremum toàn cục $S_{global}(p)$ và tập các điểm supremum địa phương $S_{local}(p)$ của Bài toán $\tilde{Q}$ như tính ổn định và tính nửa liên tục cũng được chỉ ra. Phần lớn các kết quả được liệt kê ở trên đã được công bố trong bài báo *"Maximizing strictly convex quadratic functions with bounded perturbation"* (xem Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án).

2. Những vấn cần tiếp tục nghiên cứu:

Luận án chỉ mới đề cập đến một số vấn đề về lý thuyết của Bài toán quy hoạch toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội. Do đó chúng tôi còn tiếp tục nghiên cứu những vấn đề sau đây.

- Xây dựng thuật toán tính toán tìm lời giải tối ưu của các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$.
- Áp dụng thuật toán tính toán tìm lời giải tối ưu của các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$ vào các bài toán thực tế như bài toán phát điện tối ưu, kinh tế đối sánh,...

Tuy nhiên, vì thời gian hạn hẹp nên chúng tôi cũng chưa trả lời được các vấn đề trên. Chúng tôi hy vọng rằng các vấn đề này sẽ sớm được giải quyết.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH
CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

Các bài báo của tác giả liên quan đến luận án là:

1. H. X. Phu and V. M. Pho, *Global infimum of strictly convex quadratic functions with bounded perturbation,* Mathematical Methods of Operations Research, **72(2)**, 2010, 327–345.

2. H. X. Phu and V. M. Pho, *Some properties of boundedly disturbed strictly convex quadratic functions,* Optimization, DOI 10.1080/02331-93100746114, Published online: 07 May 2010.

3. H. X. Phu, V. M. Pho and P. T. An, *Maximizing strictly convex quadratic functions with bounded perturbation,* Journal of Optimization Theory and Applications, **149(1)** 2011, 1–25.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] P. T. An, *Hàm lồi thô và tính ổn định của hàm lồi suy rộng với nhiễu tuyến tính,* Luận án Tiến sĩ Toán học, Đại học Vinh, 1999.

[2] Phạm Kỳ Anh, *Giải tích số,* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia, Hà nội, 1998.

[3] N. N. Hai, *Một số tính chất giải tích của hàm γ-lồi và γ-dưới vi phân,* Luận án Tiến sĩ Toán học, Hà nội, 2001.

[4] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1990.

[5] B. Bank and R. Hasel, *Stability of mixed-integer quadratic programming problems,* Mathematical Programming Study, **21**, 1984, 1–17.

[6] P. P. J. van den Bosch and F. A. Lootsma, *Scheduling of power generation via large-scale nonliear optimization,* Journal of Optimization Theory and Applications, **55**, 1987, 313–326.

[7] E. Blum and W. Oettli, *Direct proof of the existence theorem for quadratic programming,* Operations Research, **20,** 1973, 165–167.

[8] M. J. Canovas, A. Hantoute, M. Lopez and A. Marco, *Lipschitz behavior of convex semi-infinite optimization problems: a variational approach,* Journal of Global Optimization, **41** 2008, 1–13.

[9] C. H. Chen and S. N. Yeh, *Particle swarm optimization for economic power dispatch with valve- point effects,* Transmission and Distribution

Conference and Exposition Latin America, Venezuela, 1–4244–0288–3/20.00, 2006, IEEE.

[10] J. W. Daniel, *Stability of the solution of definite quadratic programs,* Mathematical Programming, **5**, 1973, 41–53.

[11] R. M. S. Danaraj and F. Gajendran, *Quadratic programming solution to emission and economic dispatch problem,* IE(I) Journal-EL, **86**, 2005, 129–132.

[12] B. C. Eaves, *On quadratic programming,* Management Science, **17**, 1971, 698–711.

[13] M. Frank and P. Wolfe, *An algorithm for quadratic programming,* Naval Research Logistics Quarterly, **3**, 1956, 95–110.

[14] M. A. Hanson, *On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions,* Journal of Mathematical Annalysis and Applications, **80**, 1981, 545–550.

[15] H. Hartwig, *Local boundedness and continuity of generalized convex functions,* Optimization, **26**, 1992, 1–13.

[16] T. C. Hu, V. Klee and D. Larman, *Optimization of globally convex functions,* SIAM Journal Control Optimization, **27**, 1989, 1026–1047.

[17] T. R. Jefferson and C. H. Scott, *Quadratic geometric programming with application to maching economics,* Mathematical Programming, **37**, 1985,137-152.

[18] S. Karamardian, *Duality in Mathematical Programming,* Doctoral Thesis, University of California Press, Berkeley, 1965.

[19] J. Kennedy and R. C. Eberhart, *Swarm Intelligence,* Morgan Kaufimann, 2001.

[20] D. Klatte, *On the lower semicontinuity of optimal sets in convex parametric optimization. Point-to-set maps and mathematical programming,* Mathematical Programming Study, **10**, 1979, 104–109.

[21] D. Klatte, *Lower semicontinuity of the minimum in parametric convex programs,* Journal of Optimization Theory and Applications **94**, 1997, 511–517.

[22] H.W. Kuhn and A. W. Tucker, *Nonlinear Programming,* Proceedings of the Second Berkeley Symposium on the Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, 418–492, 1951.

[23] B. Kummer, *Stability of generalized equations and Kuhn-Tucker points of perturbed convex programs,* System modelling and optimization (Copenhagen, 1983), 213–218, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **59**, Springer, Berlin, 1984.

[24] O. L. Mangasarian, *Locally unique solutions of quadratic programs, linear and nonlinear complementarity problems,* Mathematical Programming, **19**, 1980, 200–212.

[25] O. L. Mangasarian, *Pseudo-convex functions,* SIAM Journal on Control, **3**, 1965, 200–212.

[26] B. Matos, *The direct power of adjacent vertex programming methods,* Management science, **12**, 1965, 241–255.

[27] M. H. Markowitz, *Portfolio selectio,* Journal Finance, **7**, 1952, 77–91.

[28] M. H. Markowitz, *Portfolio selectio,* Wiley, New York, 1959.

[29] D. Meyer, F. Leisch and K. Hornik, *The support vector machine under test*, Neurocomputing , bf 55, 2003, 169-186.

[30] K. Mirnia and A. Ghaffari-Hadigheh, *Support set expansion sensitivity analysis in convex quadratic optimization*, Optimization Methods Software, **22**, 2007, 601–616.

[31] G. M. Lee, N. N. Tam and N. D. Yen, *Quadratic Programming and Affine Variational Inequalities,* Springer, 2005.

[32] S. H. Ling, H. K. Lam, F. H. F. Leung and Y. S. Lee, *Improved genetic algorithm for economic load dispatch with valve-point loadings*, 0-7803-7906-3/03/$17.00, 2003, IEEE.

[33] J. B. Park, Y. W. Jeong, H. H. Kim and J. R. Shin, *An Improved particle swarm optimization for economic dispatch with valve-point effect,* Journal of Innovations in Energy Systems and Power, **1**, 2006, 1–7.

[34] H. X. Phu, *γ-subdifferential and γ-convexity of functions on the real line,* Applied Mathematics and Optimization, **27**, 1993, 145–160.

[35] H. X. Phu, *Representation of bounded convex sets by rational convex hull of its gamma-extreme points,* Numerical Functional Analysis and Optimization, **19**, 1994, 915–920.

[36] H. X. Phu, *γ-subdifferential and γ-convex functions on normed spaces,* Journal of Optimization Theory and Applications, **85**, 1995, 649–676.

[37] H. X. Phu, *Some properties of globally δ-convex functions,* Optimization, **35**, 1995, 22–41.

[38] H. X. Phu, *Six kinds of roughly convex functions,* Journal of Optimization Theory and Applications, **92**, 1997, 357–375.

[39] H. X. Phu, *Strictly and roughly convexlike fuctions,* Journal of Optimization Theory and Applications, **117**, 2003, 139–156.

[40] H. X. Phu, *Some basic ideas of rough analysis,* Proceeding of the sixth Vietnamese Mathematical Conference, Hue, 9-2002, 3–31, Hanoi National University Publishing House, Hanoi, 2005.

[41] H. X. Phu, *Inner γ-convex functions in normed spaces,* E-Preprint 2007/01/01, Hanoi Institute of Mathematics, 2007.

[42] H. X. Phu, *Outer γ-convexity and inner γ-convexity of disturbed functions,* Vietnam Journal of Mathematics, **35**, 2007, 107–119.

[43] H. X. Phu, *Supremizers of inner γ-convex functions,* Mathematical Methods of Operations Research, **92(2)**, 2008, 207–222.

[44] H. X. Phu, *Outer Γ-convexity in vector spaces,* Numerical Functional Analysis and Optimization, **25(7, 8)**, 2008, 835–854.

[45] H. X. Phu, *Some properties of solution sets to nonconvex quadratic programming problems,* Optimization, **56**, 2007, 369–383.

[46] H. X. Phu and P. T. An, *Stable generalization of convex functions,* Optimization, **38**, 1996, 309–318.

[47] H. X. Phu and P. T. An, *Outer γ-convexity in normed linear spaces,* Vietnam Journal of Mathematics, **27**, 1999, 323–334.

[48] H. X. Phu, G. Bock and S. Pickenhain, *Rough stability of solutions to nonconvex optimization problems,* Optimization, Dynamics, and Economic Analysis, 22–35, Physica-Verlag, Heidelberg New York, 2000.

[49] H. X. Phu and N. N. Hai, *Some analytical properties of γ–convex functions on the real line,* Journal of Optimization Theory and Applications, **91**, 1996, 671–694.

[50] H. X. Phu and V. M. Pho, *Some properties of boundedly disturbed strictly convex quadratic functions,* Optimization, DOI 10.1080/0233193100746114, Published online: 07 May 2010.

[51] H. X. Phu and V. M. Pho, *Global infimum of strictly convex quadratic functions with bounded perturbation,* Mathematical Methods of Operations Research, **72(2)**, 2010, 327–345.

[52] H. X. Phu, V. M. Pho and P. T. An, *Maximizing strictly convex quadratic functions with bounded perturbation,* Journal of Optimization Theory and Applications, **149(2)**, 2011, 1–25.

[53] H. X. Phu and N. D. Yen, *On the stability of solutions to quadratic programming problems,* Mathematical Programming Study, **89**, 2001, 385–394.

[54] R. T. Rockafeller, *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[55] R. Schultz, *Subdifferentials of perturbed convex functions,* 16th annual conference on mathematical optimization (Sellin, 1984), 106–113, Seminarberichte, 64, Humboldt University, Berlin.

[56] R. Schultz, *Estimates for Kuhn-Tucker points of perturbed convex programs*, Optimization, **19**, 1988, 29–43.

[57] M. Schweighofer, *Global optimization of polynomiald using gradient tentacles and sums of squares,* SIAM Journal Optimization, **106(3)**, 2006, 920–942.

[58] I. Singer, *Duality theorems for perturbed convex optimization,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **81**, 1981, 437–452.

[59] M. Slater, *Lagrange multipliers revisited: A contribution to nonlinear programming,* Cowles Commission Discussion Paper, Mathematics, **403**, 1951.

[60] P. Suburaj, L. Ganesan, K. Ramar and Rajkumar, *A New approach to economic dispatch problem with valve point loading using evolutionary programming,* Interational Journal of Electrical and Power Engineering, **1(2)**, 2007, 251–254.

[61] S. S. Subramani and P. R. Rajeswari, *A Modified particle swarm optimization for economic dispatch problems with non-smooth cost functions*, Interational Journal of Software Computing 3, 2008, 326–332.

[62] J. I. Al-Sumait, A.K. Al-Othman and J. K. Sykulski, *Application of pattern method to power system valve-point economic load dispatch,* Electrical Power and Energy Systems, **29**, 2007, 720–730.

[63] H. Tuy, *On outer approximation methods for solving concave minimization problems,* Acta Mathematica Vietnamica **8**, 1983, 3–34.

[64] H. Tuy and N. T. Hoai-Phuong, *A robust algorithm for quadratic optimization under quadratic constraints,* Journal Global Optimization, **37**, 2007, 527–554.

[65] L. I. Trudzik, *Perturbed convex programming in reflexive Banach spaces,* Nonliear Analysis, **9**, 1985, 61–78.

[66] H. H. Vui and P. T. Son, *Global optimization of polynomiald using the truncated tangency variety and sums of squares,* SIAM Journal Optimization, **19(2)**, 2008, 941–951.

[67] D. N. Wilke, S. Kokand and A. A. Groenwold, *Comparision of linear and classical velocity update rules in particle swarm optomization: Notes on diversity,* Interational Journal for Numerical Methods in Engineering, **70**, 2007, 962–984.

[68] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis–Main Principles and Their Applications,* Springer-Verlag, New York, 1995.

[69] Y. Zhu and K. Tomsovic, *Optimal distribution power flow for systems with disturbed enegy resources*, Int. J. Electr. Power Enegy Systems, **29**, 2007, 260–267.

[70] S. Zlobec, *Characterizing an optimal input in perturbed convex programming*, Mathematical Programming, **25**, 1983, 109–121.

[71] B. De Finetti, *Sulle stratificazioni convesse,* Annali di Matematica Pura ed Applicata, 30, 1949, 173–183.

[72] H. Tuy, *Sules ines galites lines aires,* Colloquium Mathematicum, **13**, 1964, 107–123.

[73] B. Söllner, *Eigenschaften γ-grobkonvexer Mengen und Funktionen,* Diplomarbeit, Universität Leipzig, 1991.

[74] A. D. Ioffe and V. M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems,* (Tiếng Nga), Nauka, Moscow, 1974.

[75] B. N. Pshenhishnui, *Convex Analysis and Extremal Problems,* (Tiếng Nga), Nauka, Moscow, 1980.

[76] M. M. Vainberg, *Variational Method and Method Monotone Operators,* (Tiếng Nga), Nauka, Moscow, 1972.

[77] G. E. Silov, *Finite-dimentional Linear Spaces,* (Tiếng Nga), Nauka, Moscow, 1969.