

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

HOÀNG DIỆU ANH

**PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ
GIẢI BÀI TOÁN Ô NHIỄM MÔI TRƯỜNG**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2013

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

HOÀNG DIỆU ANH

**PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ
GIẢI BÀI TOÁN Ô NHIỄM MÔI TRƯỜNG**

**Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60460112**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: TS. VŨ VINH QUANG

Thái Nguyên – 2013

MỤC LỤC

	Trang
MỤC LỤC	1
LỜI CẢM ƠN	3
MỞ ĐẦU	4
Chương 1: CÁC MÔ HÌNH TOÁN HỌC TRONG VẤN ĐỀ MÔI TRƯỜNG	7
1.1. Phương trình truyền tải vật chất trong khí quyển , tính duy nhất nghiệm	7
1.2. Phương trình truyền tải dừng	12
1.3. Bài toán truyền tải vật chất, tính duy nhất nghiệm	15
1.4. Bài toán liên hợp cho miền ba chiều	19
1.5. Tính duy nhất nghiệm của bài toán liên hợp	23
Chương 2: PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ GIẢI BÀI TOÁN KHÔNG DỪNG	26
2.1. Các lược đồ sai phân xấp xỉ cấp hai cho bài toán không dừng với toán tử phụ thuộc thời gian	26
2.1.1 Bài toán thuần nhất dạng 1	26
2.1.2 Bài toán thuần nhất dạng 2	33
2.2. Phương pháp phân rã	35
2.2.1 Bài toán thuần nhất	35
2.2.2 Bài toán không thuần nhất	37
2.3. Phương pháp phân rã nhiều thành phần	39
2.3.1. Bài toán thuần nhất	40
2.3.2. Bài toán không thuần nhất	42
Chương 3: ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ TRONG	45

BÀI TOÁN Ô NHIỄM KHÍ QUYỀN

3.1. Bài toán ô nhiễm khí quyền	45
3.2. Lược đồ phân rã giải bài toán ô nhiễm khí quyền	47
3.2.1 Lược đồ sai phân	47
3.2.2 Các lược đồ phân rã	49
3.2.3 Kết quả thực nghiệm	53
3.3 Bài toán nhiều nguồn phát	54

KẾT LUẬN	57
-----------------	-----------

TÀI LIỆU THAM KHẢO	58
---------------------------	-----------

PHẦN PHỤ LỤC	59
---------------------	-----------

LỜI CẢM ƠN

Bằng tấm lòng thành kính, tôi xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc và sự kính trọng tới:

- Thầy giáo TS. Vũ Vinh Quang đã quan tâm tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi trong quá trình triển khai nghiên cứu đề tài và hoàn thành luận văn này.

- Các thầy cô trong Khoa Toán – Tin cùng toàn thể các cán bộ, nhân viên trường ĐH Khoa học , trung tâm học liệu của ĐH Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu khoa học, tạo thuận lợi các thủ tục hành chính, tài liệu cần thiết để tôi hoàn thành bài luận văn .

- Ban Giám hiệu trường Phổ thông Dân Tộc Nội Trú Tỉnh – Tỉnh Lai Châu, các thầy cô giáo trong tổ toán và anh em bè bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ, động viên tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Thái Nguyên, ngày 6 tháng 5 năm 2013

Tác giả

Hoàng Diệu Anh

MỞ ĐẦU

Thực tế cho thấy, ô nhiễm môi trường là một vấn đề quan trọng, có tính cấp thiết trên toàn thế giới. Phương pháp phân rã giải bài toán ô nhiễm môi trường có rất nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực. Chẳng hạn, đó là những bài toán về cơ học lưu lượng tử, năng lượng hạt nhân, những quá trình tác động học phi tuyến trong vật lý, hóa học và một số bài toán trong các lĩnh vực khác.

Trong phạm vi đề tài này, chúng tôi đề cập tới các bài toán liên quan đến môi trường và khí hậu. Sự tác động qua lại của các phần tử khí trong môi trường chính là trọng tâm cần nghiên cứu mang tính khoa học và thực tiễn cao vì nó ảnh hưởng trực tiếp tới sự sống trên trái đất.

Trong môi trường không khí, khí quyển, các thành phần khí cũng như các thành phần khác được pha trộn lẫn nhau (theo một tỷ lệ nào đó) dưới tác động của gió và hiện tượng khuếch tán trong môi trường.

Khí thải công nghiệp là tác nhân lớn nhất gây ô nhiễm không khí. Các thực thể vật chất bị nhiễm bẩn ở dạng khí (khói nhà máy, lò hạt nhân, núi lửa, v.v...) được lan truyền, khuếch tán trong khí quyển, tác động với nhau dưới sự ảnh hưởng của nhiệt độ, độ ẩm tạo thành một hợp chất phức tạp, gọi chung là hợp chất khí. Trong quá trình chuyển động các thành phần của hợp chất khí tác động với nhau, một số thành phần đang từ không độc hại trở thành độc hại đối với đời sống sinh vật. Quá trình này dẫn đến ô nhiễm các lục địa và đại dương.

Để giải quyết được vấn đề đó ta cần biết được những quá trình lan truyền và khuếch tán các thực thể nhiễm bẩn trong môi trường vì khi di chuyển chúng sẽ không biến thành những thành phần có hại và ngược lại. Đó là vấn đề rất đáng quan tâm. Vì thế giới không ngừng hoàn thiện, bên cạnh đó

là nền công nghiệp phát triển. Chính vì vậy, để bảo vệ môi trường chúng ta phải điều chỉnh những tiềm năng sẵn có trong thiên nhiên để ít bị mất đi, mà còn nâng cao nó, cải thiện môi trường. Tuy nhiên đòi hỏi một lượng kinh phí rất lớn, cần sự chung tay, góp sức của cả quốc gia và sự quan tâm của nhân loại.

Ở phương diện toán học, nhiệm vụ chủ yếu để giải quyết những vấn đề này là xây dựng được mô hình toán học phản ánh đúng đắn bản chất tự nhiên khách quan của các hiện tượng và tìm ra các mối quan hệ biện chứng về định tính, định lượng, phương pháp hữu hiệu nhằm giải quyết bài toán đặt ra để từ đó định ra chiến lược bảo vệ môi trường sống. Nội dung của đề tài này, chúng tôi trình bày những phương trình liên hợp được phân tích dựa trên các phương trình cơ bản đã được thừa nhận các điều kiện biên, điều kiện ban đầu đồng thời nghiên cứu các phương pháp giải các bài toán thu được kết quả cuối cùng mà nhờ chúng có thể đánh giá được mức độ tác động của thực trạng ô nhiễm trong môi trường của một vùng lãnh thổ.

Nội dung chương 1 là phân tích các mô hình toán học khác nhau của bài toán ô nhiễm môi trường. Mỗi bài toán cơ bản đều được xây dựng thông qua một bài toán liên hợp tương ứng nhờ đẳng thức phân tích Lagrange. Tính duy nhất nghiệm của bài toán cơ bản và bài toán liên hợp đối với những mô hình chính được chứng minh một cách chặt chẽ.

Chương 2 giới thiệu phương pháp sai phân giải bài toán không dừng và thuật toán phân rã 1 thành phần và nhiều thành phần giải các bài toán sai phân thuần nhất và không thuần nhất. Cơ sở toán học của phương pháp phân rã, tính ổn định và tính chính xác của thuật toán đối với từng lược đồ phân rã. Chương 3 xây dựng phương pháp giải các bài toán đặt ra ở chương 1. Do độ phức tạp của phương trình, với những giả thiết về điều kiện biên, giá trị ban đầu chặt chẽ người ta mới nhận được nghiệm chính xác của bài toán. Thực tế

cho thấy các bài toán đặt ra thường rộng hơn, phức tạp hơn. Do đó, việc tìm các phương pháp giải số cho lớp các bài toán trên là một trong những phương pháp hữu hiệu được sử dụng. Luận văn trình bày phương pháp xấp xỉ toán tử vi phân của bài toán khuếch tán đặt ra ở chương 1 bằng toán tử sai phân với độ chính xác cấp hai theo các biến không gian và thỏa mãn tính không âm, xây dựng các lược đồ phân rã đối với bài toán ô nhiễm môi trường từ đó chuyển việc tìm nghiệm số của bài toán về các hệ phương trình đại số dạng 3 đường chéo.

Trong luận văn, các lược đồ phân rã giải bài toán ô nhiễm môi trường được cài đặt bằng ngôn ngữ Matlab trên máy tính PC.

CHƯƠNG 1

CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA TRUYỀN TẢI VÀ KHUYẾT TÁN VẬT CHẤT.

Môi trường, các trạng thái của nó và vấn đề ô nhiễm từ lâu đã trở thành vấn đề trọng tâm nghiên cứu của các nhà khoa học. Các chất thải công nghiệp với các thành phần nhiễm bẩn được thải vào khí quyển và đại dương gây tác động xấu đến môi trường không khí, môi trường nước, đất và môi trường sinh thái của các vùng công nghiệp lớn. Điều này đã làm tăng nồng độ cacbondioxit và các thành phần khác trong khí quyển. Những thay đổi của quá trình sinh thái được biểu hiện rõ nét ở những khu công nghiệp lớn như “Mưa axit” v.v..

Sự lan truyền các thực thể nhiễm bẩn trong khí quyển là do các luồng gió và sự chuyển động rối. Dòng chảy trung bình của các thực thể vật chất ấy được trung bình hoá và được xem như là hiện tượng khuếch tán trên nền chuyển động trung bình.

Ta sẽ xem xét các mô hình toán học khác nhau của sự truyền tải và khuếch tán vật chất trong môi trường lỏng và môi trường khí.

1.1 Phương trình truyền tải vật chất trong khí quyển, tính duy nhất nghiệm(Xem tài liệu [2,5,6]).

Giả sử $\varphi(x, y, z, t)$ là cường độ chất thải nào đó di chuyển cùng với dòng không khí trong khí quyển, ta sẽ xác định nghiệm của bài toán trong một miền hình trụ G với bề mặt S . $S = \Sigma \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_H$,

trong đó Σ là mặt bên (hay mặt xung quanh) của hình trụ G .

Σ_0 là mặt đáy dưới khi $z = 0$.

Σ_H là mặt đáy trên khi $z = H$.

Gọi $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ là véc tơ vận tốc của các phần không khí, được coi như là hàm của x, y, z, t (trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị của các trục x, y, z tương ứng). Sự dịch chuyển của các thực thể vật chất dọc theo quỹ đạo của các hạt không khí với sự bảo toàn cường độ của nó được mô tả bởi phương trình:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (1.1.1)$$

Hay

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.1.2)$$

Do ở lớp dưới khí quyển là lớp tiếp giáp với mặt đất, với độ chính xác khá cao, có thể xem không khí là chất không nén được, thể hiện bằng phương trình liên tục

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.1.3)$$

Từ phương trình (1.1.2) ta đi đến phương trình

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{V} \varphi = 0 \quad (1.1.4)$$

Về sau, nếu không nói gì thêm ta luôn xem $\text{div} \vec{V} = 0$.

Ta đưa vào phương trình (1.1.4) điều kiện ban đầu:

$$\varphi = \varphi_0 \text{ khi } t = 0 \quad (1.1.5)$$

và điều kiện biên trên S của miền trụ G

$$\varphi = \varphi_S \text{ trên } S \text{ khi } u_n < 0 \quad (1.1.6)$$

trong đó φ_0, φ_S là các hàm cho trước, u_n là hình chiếu của véc tơ $\vec{V}$ lên pháp tuyến ngoài đối với mặt S . Để tìm nghiệm $\varphi(x, y, z, t)$ của bài toán (1.1.4)

thỏa mãn các điều kiện (1.1.5) và (1.1.6) ta giả thiết rằng u, v, w là những hàm đã biết.

Phương trình (1.1.4) có thể được khái quát hóa. Nếu trong quá trình dịch chuyển, thành phần vật chất đang xét có tham gia phản ứng với môi trường hay là bị phân giải, thì quá trình này có thể được xem như sự hấp thụ vật chất tỷ lệ với đại lượng σ . Khi đó trong phương trình (1.1.4) xuất hiện thêm số hạng mới $\sigma\varphi$ biểu thị sự gia tăng thành phần φ trong không khí.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi = 0 \quad (1.1.7)$$

Nếu trong miền xác định nghiệm G có các nguồn vật chất làm thay đổi cường độ φ của thành phần không khí đang xét và được mô tả bằng hàm $f(x, y, z, t)$ thì phương trình (1.1.7) có dạng:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi = f \quad (1.1.8)$$

Ta xét bài toán (1.1.8) cùng với các điều kiện:

$$\varphi = \varphi_0 \text{ khi } t = 0$$

$$\varphi = \varphi_s \text{ trên } S \text{ khi } u_n < 0$$

$$w = 0 \text{ khi } z = 0 \vee z = H$$

Nhân cả hai vế (1.1.8) với φ ta được:

$$\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi^2 = f \varphi \quad (1.1.9)$$

Lấy tích phân hai vế của (1.1.9) theo cả không gian và thời gian, tức là trên miền $G \times [0, T]$ ta được:

$$\int_{G \times [0, T]} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt dG + \int_{G \times [0, T]} \varphi \operatorname{div} \vec{V} \varphi dt dG + \int_{G \times [0, T]} \sigma \varphi^2 dt dG = \int_{G \times [0, T]} f \varphi dt dG$$

hay:

$$\int_G dG \int_0^T \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \int_0^T dt \int_G \varphi \operatorname{div} \vec{V} \varphi dG + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi^2 dG = \int_0^T dt \int_G f \varphi dG \quad (1.1.10)$$

Ta có nhận xét:

$$a) \quad \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}$$

$$\int_G dG \int_0^T \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = \int_G dG \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt = \int_G \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{t=0}^{t=T} dG = \int_G \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{t=T} dG - \int_G \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{t=0} dG$$

$$\begin{aligned} b) \quad \operatorname{div} \frac{\vec{V} \varphi^2}{2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u \varphi^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v \varphi^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w \varphi^2}{2} \right) \\ &= \varphi \frac{\partial}{\partial x} (u \varphi) + \varphi \frac{\partial}{\partial y} (v \varphi) + \varphi \frac{\partial}{\partial z} (w \varphi) = \varphi \operatorname{div} \vec{V} \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Như vậy : } \int_0^T dt \int_G \varphi \operatorname{div} \vec{V} \varphi dG = \int_0^T dt \int_G \operatorname{div} \frac{\vec{V} \varphi^2}{2} dG$$

Với nhận xét này thì phương trình (1.1.10) trở thành

$$\int_G \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{t=T} dG - \int_G \frac{\varphi^2}{2} \Big|_{t=0} dG + \int_0^T dt \int_G \operatorname{div} \frac{\vec{V} \varphi^2}{2} dG + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi^2 dG = \int_0^T dt \int_G f \varphi dG \quad (1.1.11)$$

Theo công thức Ostrogradski – Gauss ta có

$$\int_G \operatorname{div} \frac{\vec{V} \varphi^2}{2} dG = \int_S \frac{u_n \varphi^2}{2} dS \quad (1.1.12)$$

Ta nhận thấy rằng, do điều kiện (1.1.10), $u_n = 0$ khi $z = 0 \vee z = H$ nên việc lấy tích phân theo S ở vế phải của (1.1.12) thực chất chỉ còn là lấy tích phân theo mặt bên Σ của hình trụ G . Để không làm mất tính tổng quát, ta kí hiệu tích phân đó được lấy trên S , cho dù có xuất hiện điều kiện (1.1.10) với giả thiết :

$$\varphi = \varphi_0 \text{ khi } t = 0$$

$$\varphi = \varphi_S \text{ trên } S \text{ khi } u_n < 0 \quad (1.1.13)$$

trong đó φ_0, φ_S là các hàm cho trước, vậy hệ thức (1.1.11) trở thành :

$$\int_G \frac{\varphi_T^2}{2} dG + \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^+ \varphi^2}{2} dS + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi^2 dG = \int_G \frac{\varphi_0^2}{2} dG - \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^- \varphi_S^2}{2} dS + \int_0^T dt \int_G f \varphi dG$$

(1.1.14) với $\varphi = \varphi_T$ khi $t = T$

trong đó

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & u_n > 0 \\ 0 & u_n < 0 \end{cases}$$

$$u_n^- = u_n - u_n^+$$

Đẳng thức (1.1.14) chính là đẳng thức tích phân cơ bản để chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán (1.1.8) và (1.1.13).

Thật vậy, giả sử bài toán (1.1.8) và (1.1.13) có hai nghiệm phân biệt φ_1, φ_2 . Khi đó, vì φ_1, φ_2 là nghiệm của bài toán trên nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi_1 + \sigma \varphi_1 = f \\ \varphi_1 = \varphi_0, t = 0 \\ \varphi_1 = \varphi_S, (x, y, z) \in S, u_n < 0 \end{cases} \quad (*)$$

và

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi_2 + \sigma \varphi_2 = f \\ \varphi_2 = \varphi_0, t = 0 \\ \varphi_2 = \varphi_S, (x, y, z) \in S, u_n < 0 \end{cases} \quad (**)$$

Lấy (*) trừ (**) và đặt $\omega = \varphi_1 - \varphi_2$, ta có:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \omega + \sigma \omega = 0 \quad (1.1.15)$$

$$\omega = 0, t = 0$$

$$\omega = 0, (x, y, z) \in S, u_n < 0 \quad (1.1.16)$$

Đối với hàm ω thì đẳng thức (1.1.14) có dạng:

$$\int_G \frac{\omega_T^2}{2} dG + \int_0^T dt \int_S \frac{u_n^+ \omega^2}{2} dS + \sigma \int_0^T dt \int_S \omega^2 dG = 0 \quad (1.1.17)$$

Tất cả các số hạng trong (1.1.17) là dương. Vậy đẳng thức này xảy ra khi và chỉ khi $\omega = 0$, tức $\varphi_1 = \varphi_2$. Như vậy tính duy nhất nghiệm của bài toán hoàn toàn được chứng minh.

1.2 Phương trình truyền tải dừng

Trong phần này ta mô tả quá trình dừng của bài toán truyền tải vật chất:

Xét bài toán :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi = f \quad (1.2.1)$$

$$\varphi = \varphi_0 \text{ khi } t = 0$$

$$\varphi = \varphi_S \text{ trên } S, u_n < 0 \quad (1.2.2)$$

Có nghiệm duy nhất trong lớp hàm $\varphi(x, y, z, t)$ liên tục, khả vi theo tất cả các biến với điều kiện đầu $\varphi_0 = \varphi_0(x, y, z)$ và điều kiện biên $\varphi_S(x, y, z, t)$ là các hàm liên tục với các hệ số $u = u(x, y, z, t)$ liên tục và khả vi, thỏa mãn điều kiện $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ và hàm σ liên tục từng khúc. Từ nay ta có thể coi các điều kiện này được thỏa mãn. Nếu các hệ số u, v, w cùng với các yếu tố cho trước không phụ thuộc thời gian thì bài toán dừng tương ứng với bài toán (1.2.1) và (1.2.2) được phát biểu như sau:

$$\operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi = f \quad (1.2.3)$$

$$\varphi = \varphi_S \text{ trên } S \text{ khi } u_n < 0 \quad (1.2.4)$$

Dễ dàng thấy rằng đẳng thức tương ứng với (1.1.14) có dạng:

$$\int_S \frac{u_n^+ \varphi^2}{2} dS + \sigma \int_G \varphi^2 dG = \int_S \frac{u_n^- \varphi_S^2}{2} dS + \sigma \int_G f \varphi dG \quad (1.2.5)$$

Bằng phương pháp đã trình bày ở mục 1.1, ta có thể thấy rằng bài toán (1.2.3) và (1.2.4) có nghiệm duy nhất.

Như vậy, bài toán (1.2.3) và (1.2.4) mô tả một quá trình truyền tải vật chất riêng, với những dữ kiện cho trước không thay đổi theo thời gian. Tuy vậy, bộ nghiệm tương ứng với những bộ giá trị $\vec{V}, f, \varphi_s$ khác nhau của các bài toán dừng riêng biệt có thể được dùng để mô tả những hiện tượng vật lý phức tạp hơn trong thực tế. Để chứng minh được điều này ta giả sử rằng trong từng giai đoạn khác nhau của các mốc thời gian, sự chuyển động của khối lượng không khí cho trước dù ở trạng thái này hay trạng thái khác trong vùng đang xét có thể coi là trạng thái dừng. Sau mỗi khoảng thời gian như vậy, sự chuyển động của khối lượng vật chất lại có thay đổi và bắt đầu sang một trạng thái dừng mới. Sự thay đổi này diễn ra trong khoảng thời gian ngắn hơn khoảng thời gian tồn tại của dạng chuyển động trong bài toán dừng, có thể xem như sự chuyển động đó diễn ra rất nhanh.

Giả sử có n khoảng thời gian làm xuất hiện bài toán dừng. Bằng cách này ta sẽ đi đến một hệ phương trình độc lập:

$$\operatorname{div} \vec{V}_i \varphi_i + \sigma \varphi_i = f \quad (1.2.6)$$

$$\varphi = \varphi_s \text{ trên } S \text{ khi } u_n < 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.7)$$

trong đó φ_{is} là giá trị của hàm φ_i trên biên S , u_{in} là hình chiếu của véc tơ vận tốc gió loại i trên pháp tuyến ngoài đối với biên, tương ứng với mỗi khoảng thời gian $t_i < t < t_{i+1}$ có độ dài là Δt_i .

Giả sử tất cả các bài toán (1.2.6) và (1.2.7) giải được. Khi đó nghiệm của bài toán trung bình trong thời gian $T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$ mô tả sự phân bố các chất pha trộn được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính như sau:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n \Delta t_i \quad (1.2.8)$$

Có thể gọi bài toán (1.2.6) – (1.2.8) là mô hình thống kê.

Nghiệm của các bài toán dừng dạng (1.2.3)-(1.2.4) và (1.2.6)-(1.2.7) có nhiều điểm chung với nghiệm của bài toán trung bình trong khoảng thời gian T nào đó của sự phân bố vật chất của bài toán không dừng.

Thật vậy, xét bài toán không dừng:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{V} \varphi + \sigma \varphi = f \quad (1.2.9)$$

$$\varphi = \varphi_S \text{ trên } S \text{ khi } u_n < 0$$

$$\varphi(r, T) = \varphi(r, 0), r = (x, y, z) \in G \quad (1.2.10)$$

Ta giả thiết là các hàm $\bar{V}$ và φ không phụ thuộc vào thời gian t .

Tính duy nhất nghiệm của bài toán (1.2.3) và (1.2.4) với các giả thiết tương ứng về độ trơn của các hàm được thiết lập như mục 1.1.

Lấy tích phân hai vế của phương trình (1.2.9) trong đoạn $[0, T]$, ta nhận được phương trình:

$$\int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \int_0^T \operatorname{div} \bar{V} \varphi dt + \int_0^T \sigma \varphi dt = \int_0^T f dt \quad (1.2.10')$$

Chia cả hai vế của phương trình cho T rồi biến đổi ta được:

$$\operatorname{div} \bar{\varphi} + \partial \bar{\varphi} = f, \bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi dt \quad (1.2.11)$$

Từ phương trình này, với tính duy nhất nghiệm của bài toán (1.2.3) và (1.2.4) ta đi đến kết luận: Nghiệm trung bình trong chu kỳ T của bài toán (1.2.9) và (1.2.10) trùng với nghiệm của bài toán (1.2.3) và (1.2.4).

1.3 Bài toán truyền tải vật chất, tính duy nhất nghiệm.

Xét bài toán truyền tải vật chất đã được đưa ra trong mục 1.1

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi = f \quad (1.3.1)$$

$$\varphi = \varphi_0 \text{ khi } t = 0 \quad (1.3.2)$$

Vì thực tế, cùng với quá trình truyền tải các thành phần vật chất còn chịu ảnh hưởng của sự khuếch tán nên ta có thể xem hàm φ như là:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi' \quad (1.3.3)$$

trong đó $\bar{\varphi}$ là giá trị trung bình xấp xỉ bằng φ , nghĩa là:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi dt$$

và φ' là thành phần bổ xung có giá trị rất nhỏ và có thể coi $\bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi dt$

Hoàn toàn tương tự, chúng ta có thể coi

$$\vec{V} = \bar{\vec{V}} + \vec{V}' \quad (1.3.4)$$

trong đó $\bar{\vec{V}}$ là giá trị trung bình xấp xỉ $\vec{V}$; $\vec{V}'$ là thành phần nhiễu.

Lấy tích phân (1.3.1) từ t đến $t+T$ rồi chia kết quả đó cho T ta được:

$$\frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T} + \frac{1}{T} \operatorname{div} \int_t^{t+T} \vec{V} \varphi dt + \sigma \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi dt = \int_t^{t+T} f dt \quad (1.3.5)$$

Nếu bài toán (1.3.1), (1.3.2) không có nguồn ($f = 0$) thì tương ứng với (1.3.5) sẽ là:

$$\frac{\varphi(t+T) - \varphi(t)}{T} + \frac{1}{T} \operatorname{div} \int_t^{t+T} \vec{V} \varphi dt + \sigma \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi dt = 0 \quad (1.3.6)$$

Thay (1.3.3), (1.3.4) vào (1.3.6) ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\varphi}(t+T) - \bar{\varphi}(t)}{T} + \frac{\varphi'(t+T) - \varphi'(t)}{T} + \frac{1}{T} \operatorname{div} \int_t^{t+T} (\bar{\vec{V}} + \vec{V}')(\bar{\varphi} + \varphi') dt + \\ & + \sigma \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\bar{\varphi} + \varphi') dt = 0 \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{\varphi}(t+T) - \bar{\varphi}(t)}{T} + \frac{1}{T} \operatorname{div} \left[\int_t^{t+T} \bar{\bar{V}} \bar{\varphi} dt + \int_t^{t+T} \bar{V}' \varphi' dt \right] +$$

$$+ \sigma \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \bar{\varphi} dt + \sigma \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi' dt = - \frac{\varphi'(t+T) - \varphi'(t)}{T} \quad (1.3.8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{\varphi}(t+T) - \bar{\varphi}(t)}{T} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}} \bar{\varphi} + \operatorname{div} \bar{V}' \varphi' + \sigma \bar{\varphi} = - \frac{\varphi'(t+T) - \varphi'(t)}{T} \quad (1.3.9)$$

Ta giả sử

$$\bar{\varphi} = A \bar{\Phi}, \varphi' = a \Phi' \quad (1.3.10)$$

Trong đó $\bar{\Phi}$ và Φ' là những đại lượng cùng cấp. Theo giả thiết $\varphi' \ll \bar{\varphi}$ nên kí hiệu $\frac{a}{A} = \varepsilon$. Khi đó thay (1.3.10) vào (1.3.9) ta đi đến phương trình tương đương sau:

$$\frac{\bar{\Phi}(t+T) - \bar{\Phi}(t)}{T} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}} \bar{\Phi} + \varepsilon \operatorname{div} \bar{V}' \Phi' + \sigma \bar{\Phi} = \frac{\varepsilon}{T} O(1) \quad (1.3.11)$$

Trong đó $O(1)$ là đại lượng cấp Φ' . Về phải của phương trình (1.3.11) là đại lượng bậc $\frac{\varepsilon}{T}$ đủ nhỏ, nên có thể bỏ qua và phương trình có dạng:

$$\frac{\bar{\Phi}(t+T) - \bar{\Phi}(t)}{T} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}} \bar{\Phi} + \varepsilon \operatorname{div} \bar{V}' \Phi' + \sigma \bar{\Phi} = 0 \quad (1.3.12)$$

Nếu T là khoảng thời gian trong đó hàm $\bar{\Phi}(t)$ biến đổi không lớn thì $\frac{\bar{\Phi}(t+T) - \bar{\Phi}(t)}{T}$ có thể thay bằng đạo hàm $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}$ và kết quả ta đi đến phương trình cho thành phần trung bình:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\bar{V}} \bar{\Phi} + \varepsilon \operatorname{div} \bar{V}' \Phi' + \sigma \bar{\Phi} = 0$$

Số hạng thứ ba ở vế trái của phương trình này biểu thị thành phần khuếch tán của quá trình dịch chuyển các thực thể vật chất trong khí quyển.

Véc tơ vận tốc rối $\overline{\overline{V'}}\overline{\Phi'}$ có thể thay bằng biểu thức thực nghiệm qua đường trung bình như sau:

$$\overline{\overline{V'}}\overline{\Phi'} = -\mu \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x}, \overline{v'}\overline{\Phi'} = -\mu \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y}, \overline{w'}\overline{\Phi'} = -\gamma \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z} \quad (3.1.13)$$

Ở đây $\mu \geq 0, \gamma \geq 0$ là hệ số khuếch tán theo phương nằm ngang và thẳng đứng. Nó được xác định nhờ thực nghiệm đo đạc và là các đại lượng cho trước trong các bài toán về khuếch tán.

Thế các biểu thức (1.3.13) vào (1.3.12) ta đi đến phương trình truyền tải và khuếch tán vật chất trong khí quyển như sau:

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} + \text{div} \overline{\overline{V}}\overline{\Phi} + \sigma \overline{\Phi} = K \overline{\Phi} \quad (1.3.14)$$

trong đó

$$K \overline{\Phi} = \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z} \quad (1.3.15)$$

Nếu thành phần nằm ngang của hệ số khuếch tán là hằng số ($\mu = \text{const}$) thì:

$$K \overline{\Phi} = \mu \Delta \overline{\Phi} + \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z} \quad (3.1.15')$$

trong đó Δ là toán tử Laplace hai chiều.

Cùng với phương trình (1.3.14) cần phải thỏa mãn đẳng thức biểu thị tính không nén được của môi trường.

$$\text{div} \overline{\overline{V}} = 0 \quad (1.3.16)$$

và cho điều kiện ban đầu:

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi^0} \text{ khi } t = 0 \quad (1.3.17)$$

Đối với các điều kiện biên của bài toán chúng ta cần phát biểu sao cho bài toán có nghiệm duy nhất.

Nếu trong môi trường có nguồn thì cần bổ xung vào phương trình (1.3.14) hàm nguồn $f(x, y, z, t)$.

Nhìn chung, với tất cả các yếu tố đã được phân tích và trình bày ở trên thì bài toán truyền tải và khuếch tán vật chất được xét trên miền trụ có biên $S = \Sigma \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_H$ trong đó Σ là mặt bên hay mặt xung quanh của hình trụ G , Σ_0 là mặt đáy dưới khi $z = 0$, Σ_H là mặt đáy trên khi $z = H$ sẽ có dạng:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi &= k \varphi + f \\ \varphi &= \varphi_0 \text{ khi } t = 0 \\ \varphi &= \varphi_s \text{ trên } S \text{ khi } u_n < 0\end{aligned}\tag{1.3.18}$$

Ta có thể đặt điều kiện như sau:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_s \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n < 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n \geq 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \alpha \varphi \text{ trên } \Sigma_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \text{ trên } \Sigma_H\end{aligned}\tag{1.3.19}$$

trong đó $\alpha \geq 0$ là một hàm nào đó đặc trưng cho tác động của lớp khí quyển tiếp giáp với mặt đất. Ngoài ra cần chú ý rằng thành phần thẳng đứng của véc tơ vận tốc gió bằng không trên Σ_0 và Σ_H

$$w = 0 \text{ khi } z = 0 \text{ hoặc } z = H$$

Bài toán truyền tải và khuếch tán với điều kiện biên cho ở dạng (1.3.19) cũng có nghiệm duy nhất. Kết hợp (1.3.18) với (1.3.19) ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi &= k \varphi + f. \\ \varphi &= \varphi_0 \text{ khi } t = 0.\end{aligned}$$

$$\varphi = \varphi_s \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n < 0.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n \geq 0.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi \text{ trên } \Sigma_0. \quad (1.3.20)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ trên } \Sigma_H.$$

1.4 Bài toán liên hợp cho miền 3 chiều.

Xét bài toán cơ bản trong không gian ba chiều:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{V} \varphi + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi = f.$$

$$\varphi = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n < 0.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n \geq 0.$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi \text{ trên } \Sigma_0. \quad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ trên } \Sigma_H.$$

Giả sử nghiệm $\varphi(x, y, z, t)$ của bài toán (1.4.1) liên tục trong miền $G \times [0, T]$ và là hàm khả vi, tuần hoàn theo t với chu kỳ T . Hơn nữa với mỗi t , hàm $\varphi(x, y, z, t)$ thuộc tập $D(A)$ các hàm từ không gian Hilbert thực $L_2(G)$, liên tục và khả vi trong G sao cho:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi \in L_2(G).$$

Ở đây, mỗi hàm thuộc tập $D(A)$ đều thỏa mãn điều kiện biên của (1.4.1)

Ta đi xây dựng bài toán liên hợp như sau.

Nhân phương trình đầu của (1.4.1) với hàm φ^* nào đó và lấy tích phân trên miền xác định của nghiệm $G \times [0, T]$, ta nhận được:

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dG + \int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \bar{V} \varphi dG + \sigma \int_0^T dt \int_G \varphi \varphi^* dG - \\ & - \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} dG - \mu \int_0^T dt \int_G \varphi^* \Delta \varphi dG = \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Thực hiện các biến đổi nhờ công thức tích phân từng phần, công thức Ostrogradski – Gauss, ta có:

$$\int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} dG = \int_G \varphi^* \varphi dG \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T dt \int_G \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} dG. \quad (1.4.4)$$

$$\int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \bar{V} \varphi dG = \int_0^T dt \int_S u_n \varphi \varphi^* dS - \int_0^T dt \int_G \varphi \operatorname{div} \bar{V} \varphi^* dG. \quad (1.4.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} dG = \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \gamma \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma - \\ & - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \gamma \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma + \int_0^T dt \int_G \varphi \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} dG. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

$$\mu \int_0^T dt \int_G \varphi^* \Delta \varphi dG = \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\Sigma + \mu \int_0^T dt \int_G \varphi \Delta \varphi^* dG. \quad (1.4.7)$$

Đưa các giá trị (1.4.4) – (1.4.7) vào (1.4.3) ta được:

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_G \varphi \left(-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \bar{V} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* \right) dG = \\ & = \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG - \int_G \varphi_T \varphi_T^* dG + \int_G \varphi_0 \varphi_0^* dG - \int_0^T dt \int_S u_n \varphi \varphi^* dS + \\ & + \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \gamma \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \gamma \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma + \\ & + \int_0^T dt \int_{\Sigma} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\Sigma. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Bây giờ ta giả sử rằng φ^* thỏa mãn phương trình

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{V} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* = p \quad (1.4.9)$$

và biến đổi vế phải của đẳng thức (1.4.8) trong đó ta thừa nhận điều kiện biên của hàm φ từ (1.4.1) và điều kiện tuần hoàn của hàm φ theo thời gian. Ta giả sử rằng φ^* cũng là hàm tuần hoàn theo thời gian với chu kì T .

Khi đó

$$-\int_G \varphi_T \varphi_T^* dG + \int_G \varphi_0 \varphi_0^* dG = 0. \quad (4.1.10)$$

theo giả thiết

$$\varphi = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n < 0$$

nên

$$\int_0^T dt \int_S u_n \varphi \varphi^* dS = \int_0^T dt \int_{\Sigma} u_n^+ \varphi \varphi^* d\Sigma. \quad (1.4.11)$$

Sử dụng điều kiện:

$$w = 0 \text{ khi } z = 0 \text{ hoặc } z = H.$$

khi đó

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \gamma \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma - \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \gamma \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma. \quad (4.1.12)$$

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \gamma \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right) d\Sigma = - \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \gamma \varphi \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \alpha \varphi^* \right) d\Sigma. \quad (1.4.13)$$

Trong (1.4.12), (1.4.13) ta sử dụng điều kiện biên tương ứng từ (1.4.11) khi $z = 0$, $z = H$. Cuối cùng, sử dụng điều kiện $\varphi = 0$ trên Σ khi $u_n < 0$ và

$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ trên Σ khi $u_n \geq 0$, ta được:

$$\mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Sigma = \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma^+} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Sigma - \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma^-} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma. \quad (1.4.14)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \{(x, y, z) \in \Sigma | u_n \geq 0\} \\ \Sigma^- &= \{(x, y, z) \in \Sigma | u_n < 0\}; \end{aligned}$$

Đưa kết quả tính toán từ các biểu thức (1.4.9) – (1.4.14) vào (1.4.8) ta được:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_G p \varphi dG &= \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG - \int_0^T dt \int_{\Sigma} u_n^+ \varphi \varphi^* d\Sigma - \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \gamma \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \\ &+ \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \gamma \varphi \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \alpha \varphi^* \right) d\Sigma - \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma^+} \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Sigma - \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma^-} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Cùng với phương trình (1.4.9) ta đặt:

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{V} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* = p.$$

$$\varphi^* = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n < 0$$

$$\mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} + u_n \varphi^* = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n \geq 0$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = \alpha \varphi^* \text{ trên } \Sigma_0. \quad (1.4.16)$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0 \text{ trên } \Sigma_H.$$

Trong trường hợp này biểu thức đôi ngẫu có dạng:

$$\int_0^T dt \int_G p \varphi dG = \int_0^T dt \int_G \varphi^* f dG. \quad (1.4.17)$$

Bài toán liên hợp (4.1.16) có thể viết dưới dạng toán tử như sau:

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + A^* \varphi^* = p.$$

Trong đó A^* là toán tử liên hợp với toán tử A . Toán tử này tác động trong không gian Hillbert thực $L_2(G)$ và được định nghĩa bởi đẳng thức:

$$A^* \varphi^* = -\operatorname{div} \vec{V} \varphi^* + \sigma \varphi^* - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^*.$$

Miền xác định $D(A^*)$ của toán tử A^* có thể là tập các hàm φ^* từ $L_2(G)$, liên tục và khả vi trong G sao cho:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} - \mu \Delta \varphi^* \in L_2(G).$$

Mỗi hàm thuộc $D(A^*)$ này đều thỏa mãn điều kiện biên của bài toán (1.4.16)

1.5 Tính duy nhất nghiệm của bài toán liên hợp.

Ta sẽ chỉ ra rằng bài toán liên hợp (1.4.16) có nghiệm duy nhất

Giả sử nghiệm $\varphi^*(x, y, z, t)$ của bài toán liên tục trong miền $G \times [0, T]$ và là hàm khả vi, tuần hoàn theo t (với chu kỳ T). Ngoài ra ta còn giả sử với mỗi t của hàm $\varphi^*(x, y, z, t)$ thuộc vào tập $D(A^*) \subset L_2(G)$.

Nhân phương trình (1.4.16) với φ^* và lấy tích phân trên toàn miền xác định của nghiệm, ta thu được

$$\begin{aligned} & -\int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} dG - \int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \vec{V} \varphi^* dG + \int_0^T dt \int_G \sigma \varphi^{*2} dG - \\ & - \int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} dG - \mu \int_0^T dt \int_G \varphi^* \Delta \varphi^* dG = \int_0^T dt \int_G p \varphi^* dG. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Ta biến đổi từng thành phần ở vế trái của (1.5.1) như sau:

$$\int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \vec{V} \varphi^* dG = \int_0^T dt \int_G \varphi^* \operatorname{div} \vec{V} \frac{\varphi^{*2}}{2} dG = \int_0^T dt \int_{\Sigma} \frac{u_n \varphi^{*2}}{2} d\Sigma \quad (1.5.2)$$

$$\int_0^T dt \int_G \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} dG = \int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \gamma \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma - \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \gamma \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma - \int_0^T dt \int_G \gamma \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right)^2 dG \quad (1.5.3)$$

$$\mu \int_0^T dt \int_G \varphi^* \Delta \varphi^* dG = \mu \int_0^T dt \int_{\Sigma} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Sigma - \mu \int_0^T dt \int_G (\nabla \varphi^*)^2 dG. \quad (1.5.4)$$

trong đó:

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}; \quad (\nabla \varphi)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2;$$

Sử dụng kết quả của (1.5.2) – (1.5.4), hệ thức (1.5.1) đưa về dạng:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T dt \int_G \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{*2}}{\partial t} dG + \int_0^T dt \left\{ \int_G \left(\sigma \varphi^{*2} + \gamma \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right)^2 + \gamma (\nabla \varphi^*)^2 \right) dG - \right. \\ & - \int_{\Sigma} \varphi^* \left(-\frac{u_n \varphi^*}{2} + u_n \varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\Sigma - \int_{\Sigma_H} \gamma \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma + \\ & \left. + \int_{\Sigma_0} \gamma \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma \right\} = \int_0^T dt \int_G p \varphi^* dG. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Vì bài toán là tuần hoàn nên:

$$\int_0^T dt \int_G \frac{\partial \varphi^{*2}}{\partial t} dG = 0. \quad (1.5.6)$$

Từ điều kiện biên

$$\varphi^* = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n < 0. \quad (1.5.7)$$

Ta có

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma^-} \varphi^* \left(-\frac{u_n^- \varphi^*}{2} + u_n^- \varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right) d\Sigma = 0. \quad (1.5.8)$$

Do điều kiện

$$u_n \varphi^* + \mu \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n \geq 0. \quad (1.5.9)$$

nên ta nhận được

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma^+} u_n^+ \varphi^{*2} d\Sigma + \int_0^T dt \int_{\Sigma^+} \mu \varphi^{*2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} d\Sigma = 0. \quad (1.5.10)$$

Chú ý tới hai thành phần cuối ở vế trái của đẳng thức (1.5.5) tương ứng với các điều kiện biên trên Σ_0 và Σ_H , ta có:

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma_H} \gamma \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma = 0. \quad (1.5.11)$$

$$\int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \gamma \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} d\Sigma = \int_0^T dt \int_{\Sigma} \gamma \alpha \varphi^{*2} d\Sigma. \quad (1.5.12)$$

Sử dụng các hệ thức (1.5.6) – (1.5.12), khi đó hệ thức (1.5.5) sẽ trở thành

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_{\Sigma} \frac{u_n^+ \varphi^{*2}}{2} d\Sigma + \int_0^T dt \int_G \sigma \varphi^{*2} dG + \int_0^T dt \int_G \gamma \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} \right)^2 dG + \mu \int_0^T dt \int_G \gamma (\nabla \varphi^*)^2 dG \\ & + \alpha \gamma \int_0^T dt \int_{\Sigma_0} \varphi^{*2} d\Sigma = \int_0^T dt \int_G p \varphi^* dG. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Hệ thức (1.5.5) là hệ thức cơ bản trong việc chứng minh tính duy nhất nghiệm của bài toán đối ngẫu (1.4.16)

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ

GIẢI BÀI TOÁN KHÔNG DỪNG

Trong nhiều trường hợp, việc giải các bài toán phức tạp của phương trình vật lý toán có thể được đưa về việc giải liên tiếp các bài toán đơn giản mà nghiệm của chúng được xác định hiệu quả thông qua công cụ máy tính điện tử. Vấn đề đó có thể thực hiện được trong các trường hợp khi toán tử nửa xác định dương của bài toán gốc được biểu diễn dưới dạng tổng của các toán tử nửa xác định dương đơn giản. Các phương pháp như vậy gọi là các phương pháp phân rã. Bây giờ ta thấy rằng đối với các bài toán này, các phương pháp phân rã mà các tác giả khác nhau đưa vào xét thực chất là tương đương và chỉ sai khác nhau bởi các lược đồ thể hiện khác nhau. Vì thế chúng ta sẽ không phân biệt các phương pháp này. Phạm vi ứng dụng của các phương pháp phân rã để giải các bài toán phức tạp được mô tả bằng các phương trình vật lý toán.

2.1 Các lược đồ sai phân xấp xỉ cấp hai cho bài toán không dừng với toán tử phụ thuộc thời gian(Xem tài liệu [2,5,6]).

2.1.1 Bài toán thuần nhất dạng 1.

Xét bài toán:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = 0 \text{ trên } \Omega \times \Omega_t, \varphi(0) = g. \quad (2.1.1)$$

Trong đó:

φ : là phần tử của không gian các hàm lưới (hay véc tơ giá trị của nghiệm cần tìm tại các điểm lưới).

Ω : là lưới sai phân các biên không gian $\Omega_t = (0, T]$.

$A = A(t)$: là ma trận xấp xỉ của toán tử vi phân (hay toán tử tuyến tính trong không gian các hàm lưới) và A là toán tử nửa xác định dương tức $(A\varphi, \varphi) \geq 0, \forall \varphi$ (thường kí hiệu là $A \geq 0$).

Giả sử bài toán xác định trong một miền không gian đã được rời rạc hóa theo biến không gian, có nghiệm đủ trơn.

Xét lược đồ sai phân sau:

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = 0. \quad (2.1.2)$$

Trong đó:

φ^j : xấp xỉ nghiệm φ tại thời điểm t_j

Λ^j : xấp xỉ ma trận A trong khoảng thời gian $[t_j, t_{j+1}]$

$\tau = t_{j+1} - t_j$: bước lưới theo thời gian

Lược đồ có tên gọi là lược đồ Crank – Nicolson.

- **Tính ổn định của phương pháp.**

Trước hết ta đi chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 2.1.1. với mọi σ là số thực dương và toán tử A nửa xác định dương đều tồn tại nghịch đảo $(E + \sigma A)^{-1}$ và đồng thời $\|(E + \sigma A)^{-1}\| \leq 1$.

Chứng minh

Xét phương trình thuần nhất $(E + \sigma A)\psi = 0$. Vì A nửa xác định dương nên

$$((E + \sigma A)\psi, \psi) = (\psi, \psi) + \sigma(A\psi, \psi) \geq (\psi, \psi). \quad (2.1.3)$$

Vậy nếu $(E + \sigma A)\psi = 0$ thì $(\psi, \psi) = 0$, do đó $\psi = 0$. Hệ thuần nhất chỉ có nghiệm tầm thường cho nên tồn tại nghịch đảo $(E + \sigma A)^{-1}$, hơn nữa với $\psi = (E + \sigma A)^{-1}\varphi$ thì từ (2.1.3) ta có

$$(\psi, \psi) \leq (\varphi, \psi) \Rightarrow \|\psi\| \leq \|\varphi\|.$$

Hay

$$\|(E + \sigma A)^{-1} \varphi\| \leq \|\varphi\|, \forall \varphi.$$

Từ đó

$$\|(E + \sigma A)^{-1}\| \leq 1.$$

Bổ đề 2.1.2.(Bổ đề Kellogg) nếu toán tử A nửa xác định dương và σ là số thực dương thì $\|(E + \sigma A)^{-1}(E - \sigma A)\| \leq 1$.

Chứng minh:

Kí hiệu ϕ là không gian các hàm lưới và đặt

$$T = (E + \sigma A)^{-1}(E - \sigma A).$$

Do $(E + \sigma A)^{-1}(E - \sigma A) = (E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1}$ nên

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sup_{\varphi \in \phi} \frac{((E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1} \varphi, (E - \sigma A)(E + \sigma A)^{-1} \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \\ &= \sup_{\varphi \in \phi} \frac{((E - \sigma A)\psi, (E - \sigma A)\psi)}{((E + \sigma A)\psi, (E + \sigma A)\psi)} \quad (\text{ở đây } \psi = (E + \sigma A)^{-1} \varphi) \\ &= \sup_{\varphi \in \phi} \frac{((\psi, \psi) - 2\sigma(A\psi, \psi) + \sigma^2(A\psi, A\psi))}{((\psi, \psi) + 2\sigma(A\psi, \psi) + \sigma^2(A\psi, A\psi))} \end{aligned}$$

Mặt khác $\sigma > 0$ và $A \geq 0 \Rightarrow \sigma(A\psi, \psi) \geq 0$ từ đó $\|T\| \leq 1$ (đpcm).

Bổ đề 2.1.3.(Bổ đề Kellogg) nếu toán tử A nửa xác định dương và σ là số thực dương và A là toán tử Skew – Hermitian tức là $(A\psi, \psi) = 0, \forall \psi$ thì

$$\left\| \left(E + \frac{1}{2} \sigma A \right)^{-1} \left(E - \frac{1}{2} \sigma A \right) \varphi \right\| \leq \|\varphi\|$$

Chứng minh:

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\left\| (E + \frac{1}{2}\sigma A)^{-1}(E - \frac{1}{2}\sigma A)\varphi \right\|}{\|\varphi\|} &= \frac{\left\| (E + \frac{1}{2}\sigma A)^{-1}(E - \frac{1}{2}\sigma A)\varphi \right\|}{\left\| (E + \frac{1}{2}\sigma A)(E + \frac{1}{2}\sigma A)^{-1}\varphi \right\|}} \\
&= \frac{\left\| (E - \frac{1}{2}\sigma A)(E + \frac{1}{2}\sigma A)^{-1}\varphi \right\|}{\left\| (E + \frac{1}{2}\sigma A)(E + \frac{1}{2}\sigma A)^{-1}\varphi \right\|}} \\
&= \frac{\left\| (E - \frac{1}{2}\sigma A)\psi \right\|}{\left\| (E + \frac{1}{2}\sigma A)\psi \right\|}} \tag{2.1.4}
\end{aligned}$$

Trong đó $\psi = (E + \sigma A)^{-1}\varphi$

Vì A là toán tử skew – Hermiti tức $(A\psi, \psi) = 0$ nên

$$\left\| (E - \frac{1}{2}\sigma A)\psi \right\|^2 = \left\| (E + \frac{1}{2}\sigma A)\psi \right\|^2 = (\|\psi\|^2 + \frac{1}{4}\|A\psi\|^2). \tag{2.1.5}$$

Kết hợp (2.1.4) và (2.1.5) ta được

$$\left\| (E + \frac{1}{2}\sigma A)^{-1}(E - \frac{1}{2}\sigma A)\varphi \right\| = \|\varphi\|. \text{ Như vậy bổ đề được chứng minh.}$$

Bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu sự ổn định của lược đồ (2.1.2), khi đó ta có thể viết lại lược đồ như sau :

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda^j \right) \varphi^{j+1} = \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda^j \right) \varphi^j.$$

Theo bổ đề 2.1.1 tồn tại nghịch đảo $(E + \frac{1}{2}\sigma\Lambda^j)^{-1}$

$$\text{Đặt } T^j = (E + \frac{1}{2}\sigma\Lambda^j)^{-1}(E - \frac{1}{2}\sigma\Lambda^j).$$

Khi đó (2.1.2) tương đương

$$\varphi^{j+1} = T^j \varphi^j. \tag{2.1.6}$$

Theo bổ đề Kellogg $\|T^j\| \leq 1$ suy ra $\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^j\| \leq \dots \leq \|g\|$

Nếu Λ^j là toán tử Skew – Hermitian theo bổ đề 2.1.3 ta có

$$\|\varphi^{j+1}\| = \|\varphi^j\| = \dots = \|g\|.$$

Kết luận: phương pháp phân rã Crank – Nicolson cho bài toán (2.1.1) ổn định vô điều kiện.

- **Cấp chính xác**

Đặt toán tử vi phân

$$L\varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi. \quad (2.1.7)$$

và toán tử sai phân

$$(L_\tau \varphi)^j \equiv \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = 0. \quad (2.1.8)$$

Khi đó sai số xấp xỉ của lược đồ sai phân trên nghiệm đúng của bài toán vi phân

$$(\Psi_\tau)^j = L_\tau(\varphi)^j - (L_\tau \varphi)^j = L_\tau(\varphi)^j. \quad (2.1.9)$$

ở đây $(\varphi)^j$ là nghiệm đúng tại t_j

Khai triển theo công thức Taylor nghiệm đúng φ tại t_j

$$(\varphi)^{j+1} = (\varphi)^j + \tau(\varphi_\tau)^j + \frac{1}{2}\tau^2(\varphi_{\tau\tau})^j + O(\tau^3).$$

trong đó

$$(\varphi_{tt})^j = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)(t_j), \quad (\varphi_t)^j = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)(t_j),$$

Mặt khác từ (2.1.1) thu được:

$$\varphi_t = -A\varphi, \varphi_{tt} = A^2\varphi - A_1\varphi.$$

Từ đó ta có:

$$(\varphi)^{j+1} = (\varphi)^j - \tau A^j (\varphi)^j + \frac{1}{2} \tau^2 \left[(A^j)^2 (\varphi)^j - A_1^j (\varphi)^j \right] + O(\tau)^3.$$

trong đó $A^j = A(t_j), A_1^j = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) (t_j).$

Suy ra

$$\frac{(\varphi)^{j+1} - (\varphi)^j}{\tau} = -A^j (\varphi)^j + \frac{1}{2} \tau \left[(A^j)^2 (\varphi)^j - A_1^j (\varphi)^j \right] + O(\tau^2).$$

và

$$\Lambda^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = \Lambda^j (\varphi)^j - \frac{1}{2} \Lambda^j A^j (\varphi)^j + O(\tau^2).$$

Thế các biểu thức trên vào (2.1.8) thu được:

$$L_\tau (\varphi)^j = (\Lambda^j - A^j) (\varphi)^j - \frac{1}{2} \tau \left[(\Lambda^j - A^j) A^j (\varphi)^j + A_\tau^j (\varphi)^j \right] + O(\tau^2) \quad (2.1.10)$$

hoặc

$$L_\tau (\varphi)^j = \left[\Lambda^j - A^j - \frac{1}{2} \tau A_\tau^j (\varphi)^j \right] (\varphi)^j - \frac{1}{2} \tau (\Lambda^j - A^j) A^j (\varphi)^j + O(\tau^2) \quad (2.1.11)$$

Như vậy nếu chọn $\Lambda^j = A^j$ khi đó thay (2.1.10) vào (2.1.9) ta có sai số phương pháp $(\Psi_\tau)^j = L_\tau (\varphi)^j = \frac{1}{2} \tau A_1^j (\varphi)^j + O(\tau^2)$, do đó bài toán xấp xỉ bài toán vi phân, mặt khác do tính ổn định của lược đồ nên phương pháp hội tụ với độ chính xác cấp một và khi ma trận A không phụ thuộc thời gian thì phương pháp có độ chính xác cấp hai.

Nếu ta chọn $L^j = A^j + \frac{1}{2} \tau A_\tau^j + \dots$ (chẳng hạn chọn xấp xỉ $L^j = A^{j+\frac{1}{2}}$)

thì từ (2.1.11) suy ra

$$(\Psi_\tau)^j = L_\tau (\varphi)^j = O(\tau^2).$$

tức là trong trường hợp ma trận A là hàm theo thời gian thì phương pháp vẫn hội tụ với cấp chính xác 2.

Nhận xét:

a. Nếu nghiệm của lược đồ sai phân cho bài toán vi phân (2.1.11) đưa được về dạng $\varphi^{j+1} = H^j \varphi^j$, trong đó H^j có dạng

$$H^j = E - \tau \Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} (\Lambda^j)^2 + O(\tau^3). \quad (2.1.13)$$

trong đó $\Lambda^j = A^{j+\frac{1}{2}}$ thì lược đồ sai phân xấp xỉ cấp hai đối với bài toán vi phân

Thật vậy, ta có

$$\varphi^{j+1} = \left[E - \tau \Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} (\Lambda^j)^2 + O(\tau^3) \right] \varphi^j.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{(\varphi)^{j+1} - (\varphi)^j}{\tau} = -\Lambda^j \varphi^j + \frac{1}{2} \tau (\Lambda^j)^2 \varphi^j + O(\tau^2).$$

và

$$\Lambda^j \frac{(\varphi)^{j+1} + (\varphi)^j}{\tau} = \Lambda^j \varphi^j - \frac{1}{2} \tau (\Lambda^j)^2 \varphi^j + O(\tau^2).$$

Do đó

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = O(\tau^2).$$

Xét toán tử sai phân

$$(L_\tau \varphi)^j \equiv \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^j}{2} = F^j.$$

trong đó $F^j = O(\tau^2)$ khi đó chú ý $\Lambda^j = A^{j+\frac{1}{2}}$ và sử dụng (2.1.12) ta có

$L_\tau(\varphi)^j = O(\tau^2)$, do đó sai số xấp xỉ của lược đồ sai phân trên nghiệm đúng

của bài toán vi phân $(\Psi_\tau)^j = L_\tau(\varphi)^j - (L_\tau \iota)^j = L_\tau(\varphi)^j - F^j = O(\tau^2)$, từ điều kiện đó ta có điều phải chứng minh.

b. Khai triển T^j theo chuỗi lũy thừa τ , giả sử $\frac{\tau}{2}\|\Lambda^j\| \leq 1$

$$\begin{aligned} T^j &= (E + \frac{1}{2}\tau\Lambda^j)^{-1}(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda^j) \\ &= \left[E - \frac{\tau}{2}\Lambda^j + \frac{\tau^2}{4}(\Lambda^j)^2 + O(\tau^3) \right] \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda^j \right) \\ &= E - \tau\Lambda^j + \frac{\tau^2}{2}(\Lambda^j)^2 + O(\tau^3). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

2.1.2. Bài toán thuần nhất dạng 2

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = 0 \text{ trên } \Omega \times \Omega_t, \quad \varphi(0) = g. \quad (2.1.15)$$

Trong đó $A = A_1 + A_2$, $A_1, A_2 \geq 0$

Xấp xỉ các ma trận A_1, A_2 trên khoảng thời gian $t_j \leq t \leq t_{j+1}$

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha^{j+\frac{1}{2}}, \quad \alpha = 1, 2$$

Xét hệ sai phân gồm hai lược đồ sai phân Crank-Nicolson cho bài toán (2.1.15) như sau

$$\frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}} + \varphi^j}{2} = 0 \quad (2.1.16)$$

$$\frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}} + \varphi^j}{2} = 0$$

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j \right) \varphi^{j+\frac{1}{2}} = \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j \right) \varphi^j \quad (2.1.17)$$

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j \right) \varphi^{j+1} = \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j \right) \varphi^{j+\frac{1}{2}}$$

- **Sự ổn định phương pháp**

Đặt
$$T_{\alpha}^j = (E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_{\alpha}^j)^{-1}(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_{\alpha}^j) \quad \alpha = 1, 2$$

Khử $\varphi^{j+\frac{1}{2}}$ hệ sai phân (2.1.17) có thể đưa về một hệ phương trình

$$\varphi^{j+1} = T^j \varphi^j.$$

trong đó

$$T^j = T_2^j T_1^j = (E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j)^{-1}(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j)(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j)^{-1}(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j).$$

Theo bổ đề Kellongg ta có $\|T_{\alpha}^j\| \leq 1$, do đó $\|T^j\| \leq \|T_1^j\| \leq \|T_2^j\| \leq 1$ nên

$$\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^j\| \leq \dots \leq \|g\|.$$

Nếu Λ_1^j, Λ_2^j là các toán tử Skew – Hermitian thì theo bổ đề 2.1.3 ta có:

$$\|\varphi^{j+1}\| = \|\varphi^j\| = \dots = \|g\|.$$

Kết luận: Phương pháp phân rã (2.1.16) cho bài toán (2.1.15) ổn định.

- **Cấp chính xác**

Khai triển T_{α}^j theo chuỗi lũy thừa τ như (2.1.14), giả thiết $\frac{\tau}{2}\|\Lambda_{\alpha}^j\| \leq 1$:

$$T_{\alpha}^j = E - \tau\Lambda_{\alpha}^j + \frac{\tau^2}{2}(\Lambda_{\alpha}^j)^2 + O(\tau^3) \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.1.18)$$

Suy ra $T^j = T_2^j T_1^j = E - \tau\Lambda^j + \frac{\tau^2}{2}[(\Lambda_1^j)^2 + 2\Lambda_2^j\Lambda_1^j + (\Lambda_2^j)^2] + O(\tau^3).$

Trong đó $\Lambda^j = \Lambda_1^j + \Lambda_2^j$, nếu Λ_{α}^j có tính giao hoán thì

$$T^j = E - \tau\Lambda^j + \frac{\tau^2}{2}(\Lambda^j)^2 + O(\tau^3). \quad (2.1.19)$$

Như vậy $\varphi^{j+1} = T^j \varphi^j$ và φ^j có dạng như (2.1.13) từ đó nếu chọn

$\Lambda_{\alpha}^j = A_{\alpha}^{j+\frac{1}{2}}$ và cùng với nhận xét a) thì phương pháp sai phân (2.1.15) cho bài

toán (2.1.16) khi các toán tử giao hoán có độ chính xác cấp hai. Khi các toán tử Λ_1^j, Λ_2^j giao hoán thì phương pháp phân rã sử dụng các lược đồ Crank – Nicolson (2.2.2) cho bài toán (2.2.1) sẽ hội tụ với độ chính xác cấp hai. Tuy nhiên nếu tính giao hoán không thỏa mãn thì phương pháp không hội tụ với độ chính xác cấp hai nữa mà cho độ chính xác cấp một theo thời gian do đó lược đồ ít được quan tâm trong lĩnh vực giải các bài toán vật lý toán.

Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày phương pháp phân rã nhằm khắc phục nhược điểm trên mà vẫn đảm bảo tính ổn định vô điều kiện và hội tụ với cấp chính xác 2 theo thời gian.

2.2 Phương pháp phân rã.

2.2.1 Xét bài toán thuần nhất.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = 0 \text{ trên } \Omega \times \Omega_t, \quad \varphi(0) = g.$$

Trong đó $A = A_1 + A_2$, $A_1, A_2 \geq 0$

Bây giờ ta xấp xỉ toán tử $A_1(t)$, $A_2(t)$ trên khoảng thời gian trên đoạn $t_{j-1} \leq t \leq t_j$.

$$\text{Đặt} \quad \Lambda_\alpha^j = A_\alpha(t_j) = A_\alpha^j, \alpha = 1, 2$$

Xét hệ phương trình sai phân sau:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{j-\frac{1}{2}} - \varphi^{j-1}}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j-\frac{1}{2}} + \varphi^{j-1}}{2} &= 0 \\ \frac{\varphi^j - \varphi^{j-\frac{1}{2}}}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^j + \varphi^{j-\frac{1}{2}}}{2} &= 0 \\ \frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^{j+\frac{1}{2}} + \varphi^j}{2} &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^{j+\frac{1}{2}}}{2} = 0$$

Hay viết dưới dạng:

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{2}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j-1} \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^j &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{2}} \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^j \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j+1} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

- **Sự ổn định của phương pháp.**

Đặt

$$\begin{aligned} T_\alpha^j &= \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j\right)^{-1} \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j\right) \quad \alpha = 1, 2 \\ T^j &= T_1^j T_2^j T_2^j T_1^j. \end{aligned}$$

Khi đó ta có $\varphi^{j+1} = T^j \varphi^{j-1}$

Theo bổ đề Kellogg ta có $\|T^j\| \leq 1$ do đó $\|T^j\| \leq \|T_1^j\| \|T_2^j\| \|T_2^j\| \|T_1^j\| \leq 1$ nên $\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^{j-1}\| \leq \dots \leq \|g\|$. Như vậy phương pháp ổn định vô điều kiện.

- **Cấp chính xác.**

Khai triển theo chuỗi lũy thừa τ , giả thiết $\frac{\tau}{2}\|\Lambda_\alpha^j\| \leq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} T_1^j T_2^j &= E - \tau\Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} \left[(\Lambda_2^j)^2 + 2\Lambda_1^j \Lambda_2^j + (\Lambda_1^j)^2 \right] + O(\tau^3) \\ T_2^j T_1^j &= E - \tau\Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} \left[(\Lambda_1^j)^2 + 2\Lambda_2^j \Lambda_1^j + (\Lambda_2^j)^2 \right] + O(\tau^3) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Suy ra

$$T^j = T_1^j T_2^j T_2^j T_1^j = E - 2\tau \Lambda^j + \frac{(2\tau)^2}{2} (\Lambda^j)^2 + O(\tau^3). \quad (2.2.4)$$

ở đây ta xét bước đi là 2τ , khi đó $\varphi^{j+1} = T^j \varphi^{j-1}$ với T^j có dạng như (2.2.2) và $\Lambda_\alpha^j = A_\alpha^j$ cùng với nhận xét a) thì phương pháp phân rã (2.2.1) cho bài toán thuần nhất (2.2.1) xét trên khoảng thời gian $t_{j-1} \leq t \leq t_{j+1}$ sẽ hội tụ với độ chính xác cấp hai mà các toán tử Λ_α^j không cần điều kiện phải giao hoán.

2.2.2 Bài toán không thuần nhất.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f \text{ trên } \Omega \times \Omega_t, \quad \varphi(0) = g. \quad (2.2.5)$$

Trong đó

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1, A_2 \geq 0$$

Đặt

$$\Lambda_\alpha^j = A_\alpha^j \quad \alpha = 1, 2$$

Xét hệ phương trình sai phân sau:

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{2}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j-1} \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)(\varphi^j - \tau f^j) &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{2}} \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)(\varphi^j + \tau f^j) \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j+1} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Trong đó $f^j = f(t_j)$

- **Sự ổn định phương pháp**

Đặt

$$T_\alpha^j = (E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j)^{-1}(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j) \quad \alpha=1,2$$

$$T^j = T_1^j T_2^j T_2^j T_1^j$$

Từ hệ (2.3.2) ta được: $\varphi^{j-\frac{1}{2}} = T_1^j \varphi^{j-1}$, $\varphi^j = \varphi^{j-\frac{1}{2}} T_2^j + \tau f^j$,

$$\varphi^{j+\frac{1}{2}} = T_2^j (\varphi^j + \tau f^j), \quad \varphi^{j+1} = T_1^j \varphi^{j+\frac{1}{2}},$$

Khử $\varphi^{j+\frac{1}{2}}, \varphi^j, \varphi^{j-\frac{1}{2}}$ từ các biểu thức trên ta được:

$$\varphi^{j+1} = T^j \varphi^{j-1} + 2\tau T_1^j T_2^j f^j. \quad (2.2.7)$$

Theo bổ đề Kellogg ta có $\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^{j-1}\| + 2\tau \|f^j\|$, từ đó dẫn đến bất đẳng thức ổn định $\|\varphi^j\| \leq \|g\| + j\tau \|f\| \leq \|g\| + T \|f\|$ trong đó $\|f\| = \max_{t_j} \|f^j\|$. Như vậy phương pháp ổn định.

- **Cấp chính xác.**

Biểu diễn T^j và $T_1^j T_2^j$ theo chuỗi lũy thừa τ như (2.2.3),(2.2.4) giả thiết $\frac{\tau}{2} \|\Lambda_\alpha^j\| \leq 1$, thay vào (2.2.7) ta có:

$$\varphi^{j+1} = [E - 2\tau\Lambda^j + 2\tau^2(\Lambda^j)^2] \varphi^{j-1} + 2\tau(E - \tau\Lambda^j) f^j + O(\tau^3). \quad (2.2.8)$$

hay

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j-1}}{2\tau} + \Lambda^j (E - \tau\Lambda^j) \varphi^{j-1} = (E - \tau\Lambda^j) f^j + O(\tau^2).$$

Đặt toán tử sai phân

$$(L_\tau \varphi)^j = F^j \text{ với } F^j = (E - \tau\Lambda^j) f^j + O(\tau^2).$$

Khi đó sai số xấp xỉ của lược đồ sai phân

$$(\Psi_\tau)^j = L_\tau(\varphi)^j - (L_\tau \varphi)^j = L_\tau(\varphi)^j - F^j = O(\tau^2).$$

$$= \frac{(\varphi)^{j+1} - (\varphi)^{j-1}}{2\tau} + \Lambda^j (E - \tau \Lambda^j) (\varphi)^{j-1} - (E - \tau \Lambda^j) f^j + O(\tau^2) \quad (2.2.9)$$

Khai triển theo công thức Taylor nghiệm đúng φ tại t_j

$$(\varphi)^j = (\varphi)^{j-1} + \tau(\varphi_t)^{j-1} + O(\tau^2).$$

Trong đó $(\varphi)^j = \varphi(t_j), (\varphi_t)^j = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(t_j),$

Mặt khác

$$(\varphi_t)^{j-1} = (\varphi_t)^j + O(\tau) = -\Lambda^j (\varphi)^j + f^j + O(\tau).$$

do đó

$$(\varphi)^j = (\varphi)^{j-1} + \tau[-\Lambda^j (\varphi)^j + f^j] + O(\tau^2).$$

rút gọn lại ta được:

$$(E - \tau \Lambda^j) (\varphi)^j = (\varphi)^j - \tau f^j + O(\tau^2).$$

Thế các biểu thức trên vào (2.2.5) thu được:

$$(\Psi_\tau)^j = \frac{(\varphi)^{j+1} - (\varphi)^{j-1}}{2\tau} + \Lambda^j (\varphi)^j + O(\tau^2). \quad (2.2.10)$$

Sai số xấp xỉ của lược đồ sai phân cấp hai kết hợp với điều kiện ổn định suy ra phương pháp phân rã (2.2.2) có độ chính xác cấp hai.

2.3 Phương pháp phân rã nhiều thành phần.

Do độ phức tạp của bài toán cùng với những giả thiết về điều kiện biên và giá trị ban đầu là rất chặt chẽ nên việc tìm nghiệm tường minh cho bài toán ban đầu cho trường hợp tổng quát là không thực hiện được, do đó việc đề xuất các phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán là một trong những hướng nghiên cứu đang phát triển trên thế giới. Trong phần này, chúng tôi trình bày phương pháp phân rã nhiều thành phần cho bài toán và chứng minh tính ổn định vô điều kiện và độ chính xác cấp hai theo thời gian và không gian của phương pháp.

Ý tưởng của phương pháp này là phân rã bài toán phức tạp thành nhiều thành phần nhỏ hơn. Quá trình phân rã đó sẽ giúp chúng ta giải quyết những bài toán phức tạp trong vật lý mà vẫn đảm bảo tiêu chí ổn định vô điều kiện với độ chính xác cấp hai.

Giả sử $A = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}, A_{\alpha} \geq 0 \quad \alpha = \overline{1, n}$. Ta xét trường hợp $n > 2$

2.3.1 Bài toán thuần nhất.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = 0 \text{ trên } \Omega \times \Omega_t, \quad \varphi(0) = g. \quad (2.3.1)$$

Trong đó $A = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha}, A_{\alpha} \geq 0 \quad \alpha = \overline{1, n}$

- **Sự ổn định của phương pháp.**

Đặt $\Lambda = \sum_{\alpha=1}^n \Lambda_{\alpha}^j, \Lambda_{\alpha}^j = A_{\alpha}^j, \quad \alpha = \overline{1, n}$

Xét hệ phương trình sai phân gồm các lược đồ sai phân Crank - Nicolson

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_{\alpha}^j\right)\varphi^{j-\frac{\alpha}{n}} = \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_{\alpha}^j\right)\varphi^{j+\frac{\alpha-1}{n}} \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (2.3.2)$$

khi đó $\varphi^{j+1} = T^j \varphi^j$ trong đó:

$$T_j = \prod_{\alpha=1}^n T_{\alpha}^j, T_{\alpha}^j = \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_{\alpha}^j\right)^{-1} \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_{\alpha}^j\right), \quad \alpha = \overline{1, n}$$

Theo bổ đề Kellogg $\|T_{\alpha}^j\| \leq 1$ nên $\|T_j\| \leq \prod_{\alpha=1}^n \|T_{\alpha}^j\| \leq 1$ suy ra

$$\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^j\| \leq \dots \leq \|g\|.$$

Kết luận: phương pháp phân rã (2.3.2) cho bài toán (2.3.1) ổn định

- **Cấp chính xác**

Từ khai triển $T_{\alpha}^j = E - \tau\Lambda_{\alpha}^j + \frac{\tau^2}{2}(\Lambda_{\alpha}^j)^2 - \dots$

Suy ra

$$T_{\alpha}^j = E - \tau \Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} \left[(\Lambda_{\alpha}^j)^2 + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=\alpha+1}^n (\Lambda_{\alpha}^j \Lambda_{\beta}^j - \Lambda_{\beta}^j \Lambda_{\alpha}^j) \right] + O(\tau^3).$$

Kết luận: phương pháp phân rã (2.3.2) cho bài toán thuần nhất (2.3.1) có độ chính xác cấp một, trong trường hợp nếu toán tử Λ_{α}^j không giao hoán thì phương pháp có độ chính xác cấp hai, còn trong trường hợp toán tử Λ_{α}^j giao hoán thì sơ đồ (2.3.2) được thay bằng hệ sau

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_{\alpha}^j \right) \varphi^{j-1+\frac{\alpha}{n}} &= \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_{\alpha}^j \right) \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{n}} & \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \left(E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_{\alpha}^j \right) \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{n}} &= \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_{\alpha}^j \right) \varphi^{j-1+\frac{\alpha}{n}} & \alpha = n, n-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Hệ phương trình đầu (2.3.3) được giải trên khoảng thời gian $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ trong trường hợp $\alpha = 1, 2, \dots, n$, hệ phương trình thứ hai được giải trên khoảng thời gian $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ trong trường hợp $\alpha = n, n-1, \dots, 1$

Bây giờ ta chứng minh phương pháp (2.3.3) đảm bảo tính ổn định và độ chính xác cấp hai

Thật vậy, ta có $\varphi^{j+1} = T^j \varphi^j$ trong đó $T^j = \prod_{\alpha=1}^n T_{\alpha}^j \prod_{\alpha=n}^1 T_{\alpha}^j$. Do đó từ bổ đề

Kellogg suy ra được tính ổn định của phương pháp.

Mặt khác, từ khai triển T_{α}^j theo lũy thừa của τ (2.3.4) ta có.

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha=1}^n T_{\alpha}^j &= E - \tau \Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} \left[(\Lambda^j)^2 + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=\alpha+1}^n (\Lambda_{\alpha}^j \Lambda_{\beta}^j - \Lambda_{\beta}^j \Lambda_{\alpha}^j) \right] + O(\tau^3) \\ \prod_{\alpha=n}^1 T_{\alpha}^j &= E - \tau \Lambda^j + \frac{\tau^2}{2} \left[(\Lambda^j)^2 + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=\alpha+1}^n (\Lambda_{\alpha}^j \Lambda_{\beta}^j - \Lambda_{\beta}^j \Lambda_{\alpha}^j) \right] + O(\tau^3) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\text{Suy ra } T^j = E - 2\tau \Lambda^j + \frac{(2\tau)^2}{2} (\Lambda^j)^2 + O(\tau^3). \quad (2.3.5)$$

Vậy phương pháp phân rã (2.3.3) đảm bảo tính hội tụ với độ chính xác cấp hai.

2.3.2. Bài toán không thuần nhất

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f \text{ trên } \Omega \times \Omega_t, \varphi(0) = g. \quad (2.3.6)$$

Trong đó $A = \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha, A_\alpha \geq 0 \quad \alpha = \overline{1, n}$.

Sơ đồ phân rã

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j\right)\varphi^{j-1+\frac{\alpha}{n}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j\right)\varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{n}} & \alpha = 1, 2, \dots, n-1 \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j\right)(\varphi^j - \tau f^j) &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{n}} \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{n}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j\right)(\varphi^j + \tau f^j) \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j\right)\varphi^{j+1+\frac{\alpha-1}{n}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j\right)\varphi^{j+1-\frac{\alpha}{n}} & \alpha = n, n-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

- **Sự ổn định của phương pháp.**

Từ hệ (2.3.7)

$$\alpha^{j+1} = \prod_{\alpha=1}^n T_\alpha^j (\varphi^j + \tau f^j), \quad \alpha^j = \prod_{\alpha=n}^1 T_\alpha^j \varphi^{j-1} + \tau f^j.$$

Do đó

$$\alpha^{j+1} = \prod_{\alpha=1}^n T_\alpha^j \prod_{\alpha=n}^1 T_\alpha^j \alpha^{j-1} + 2 \prod_{\alpha=1}^n T_\alpha^j f^j. \quad (2.3.8)$$

Theo bổ đề Kellogg $\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^{j-1}\| + 2\tau\|f^j\|$ dẫn đến

$$\|\varphi^j\| \leq \|g\| + j\tau\|f\| \leq \|g\| + T\|f\|.$$

trong đó $\|f\| = \max_{t_j} \|f^j\|$.

Kết luận: Bất đẳng thức cho ta tính ổn định của sơ đồ (2.3.7)

- **Cấp chính xác.**

Từ khai triển (2.3.4) và 2.3.5) ta có

$$\varphi^{j+1} = \left[E - 2\tau\Lambda^j + 2\tau^2(\Lambda^j)^2 \right] \varphi^{j-1} + 2\tau(E - \tau\Lambda^j) f^j + O(\tau^3). \quad (2.3.9)$$

Suy ra phương pháp phân rã (2.4.7) hội tụ với độ chính xác cấp hai theo thời gian. Do đó phương pháp phân rã (2.4.7) có thể biểu diễn bởi hệ sai phân sau :

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j \right) \varphi^{j-1+\frac{\alpha}{n}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j \right) \varphi^{j-1+\frac{\alpha-1}{n}} & \alpha=1,2,\dots,n-1 \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j \right) \varphi^j &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j \right) \varphi^{j-\frac{1}{n}} + \tau f^j \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j \right) \varphi^{j+\frac{1}{n}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j \right) \varphi^j + \tau f^j & (2.3.10) \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j \right) \varphi^{j+1+\frac{\alpha-1}{n}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_\alpha^j \right) \varphi^{j+1-\frac{\alpha}{n}} & \alpha=n,n-1,\dots,1 \end{aligned}$$

Bằng cách khử tương tự các trường hợp trên ta được:

$$\varphi^{j+1} = \prod_{\alpha=1}^n T_\alpha^j \prod_{\alpha=n}^1 T_\alpha^j \varphi^{j-1} + \prod_{\alpha=1}^n T_\alpha^j \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j \right) f^j + \tau \prod_{\alpha=1}^{n-1} T_\alpha^j \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j \right)^{-1} f^j \quad (2.3.11)$$

Tính ổn định của phương pháp được đảm bảo nhờ bổ đề 2.1.1 và bổ đề Kellogg $\|\varphi^{j+1}\| \leq \|\varphi^{j-1}\| + 2\tau\|f^j\|$.

Từ đó có bất đẳng thức ổn định $\|\varphi^j\| \leq \|g\| + j\tau\|f\| \leq \|g\| + T\|f\|$.

Mặt khác

$$\tau \prod_{\alpha=1}^n T_\alpha^j \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j \right)^{-1} f^j + \tau \prod_{\alpha=1}^{n-1} T_\alpha^j \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_n^j \right)^{-1} f^j =$$

$$\begin{aligned}
&= \tau \prod_{\alpha=1}^{n-1} T_{\alpha}^j (T_n^j + E) \left(E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_n^j \right)^{-1} f^j \\
&= \tau \left(E - \tau \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Lambda_{\alpha}^j \right) (2E - \tau \Lambda_n^j) \left(E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_n^j \right) f^j + O(\tau^3) \\
&= \tau \left(E - \tau \sum_{\alpha=1}^{n-1} \Lambda_{\alpha}^j \right) (2E - 2\tau \Lambda_n^j) f^j + O(\tau^3) \\
&= 2\tau (E - \tau \Lambda^j) f^j + O(\tau^3).
\end{aligned}$$

Do đó ta đưa được về phương trình dạng

$$\varphi^{j+1} = \left[E - 2\tau \Lambda^j + 2\tau^2 (\Lambda^j)^2 \right] \varphi^{j-1} + 2\tau (E - \tau \Lambda^j) f^j + O(\tau^3).$$

Vậy phương pháp phân rã (2.3.7) có độ chính xác cấp hai theo thời gian.

CHƯƠNG 3

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ TRONG BÀI TOÁN Ô NHIỄM KHÍ QUYỂN

Hiện nay, ô nhiễm khí quyển là vấn đề thời sự đang được xã hội quan tâm. Môi trường khí quyển đang có nhiều biến đổi rõ rệt và có ảnh hưởng xấu đến môi trường sống của con người cũng như các sinh vật. Ô nhiễm môi trường khí quyển tạo nên sự ngột ngạt, ảnh hưởng đến môi trường, gây nhiều bệnh cho con người và môi trường tự nhiên. Vì vậy, vấn đề bảo vệ, gìn giữ môi trường là hết sức cần thiết. Điều đó đặt ra bài toán về ô nhiễm khí quyển cần được giải quyết.

Khi mô tả quá trình khuếch tán chất ô nhiễm trong không khí bằng mô hình toán học thì mức độ ô nhiễm không khí thường được đặc trưng bằng trị số nồng độ chất ô nhiễm phân bố trong không gian và biến đổi theo thời gian.

3.1 Bài toán ô nhiễm khí quyển(Xem tài liệu [2]).

Xét bài toán lan truyền khí thải gây bởi nguồn phát thải, phương trình của bài toán được viết như sau:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi = f. \quad (3.1.1)$$

Với điều kiện ban đầu $\varphi = g$ khi $t = 0$. (3.1.2)

Trong đó $\varphi(x, y, z, t)$ là nồng độ của khí thải trong môi trường tại điểm (x, y, z) ở thời điểm t , u, v, w là các thành phần của véc tơ vận tốc gió như đã đề cập ở chương 1, f là công suất khí thải, g là phân bố nồng độ ban đầu của chất khí thải, σ là đặc trưng hệ số biến đổi khí thải trong quá trình

lan truyền, μ, γ là hệ số khuếch tán rối ngang và thẳng đứng, Δ là toán tử Laplace hai chiều.

Nếu $f = Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$, δ là hàm Dirac thì bài toán trở thành bài toán lan truyền khí thải gây bởi nguồn điểm đặt tại (x_0, y_0, z_0) có cường độ Q .

Để hạn chế, ta sẽ quan sát và nghiên cứu bài toán trong miền $G = [0, X] \times [0, Y] \times [0, H]$, với bề mặt $S = \Sigma \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_H$.

Trong đó

Σ là mặt xung quanh của miền G .

Σ_0 là mặt đáy dưới khi $z = 0$.

Σ_H là mặt đáy trên khi $z = H$.

Chất ô nhiễm được khuếch tán từ nguồn phát ra môi trường xung quanh là nhờ gió. Nhưng gió càng lớn càng làm giảm sự khuếch tán theo chiều đứng của luồng khí thải, luồng khí thải càng sớm tiếp xúc với mặt đất. Do ở lớp dưới khí quyển (lớp tiếp giáp với mặt đất) với độ chính xác cao có thể xem không khí là chất không nén được, nên véc tơ vận tốc gió $\vec{V}$ được thể hiện bởi phương trình liên tục.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Ngoài ra, thành phần thẳng đứng của véc tơ vận tốc gió triệt tiêu trên các mặt đáy $w = 0$ khi $z = 0 \vee z = H$.

Để xác định tính duy nhất nghiệm φ của bài toán, chúng ta cần xác định các ràng buộc nồng độ của khí thải φ trên biên S của miền G . Từ thực tế và lý thuyết phương trình vật lý toán có thể viết các điều kiện biên của bài toán lan truyền khí thải gây ra bởi nguồn phát thải như sau:

$$\varphi = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n < 0.$$

$$\varphi = 0 \text{ trên } \Sigma \text{ khi } u_n \geq 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha \varphi \text{ trên } \Sigma_0 \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ trên } \Sigma_H.$$

Trong đó $\alpha \geq 0$ là hệ số hấp thụ hoặc phản xạ mặt đáy. Bài toán trên hoàn toàn thỏa mãn tính duy nhất nghiệm, điều khẳng định đã được chứng minh ở chương 1.

3.2 Lược đồ phân rã giải bài toán ô nhiễm khí quyển.

3.2.1 Lược đồ sai phân(Xem tài liệu [1]).

Sử dụng phương trình liên tục ta thu được phương trình

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \left(w \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \sigma \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \Delta \varphi = f \end{aligned}$$

Ta viết lại phương trình của bài toán lan truyền khí thải gây ra bởi nguồn phát thải như sau:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + L\varphi = f \text{ trên } G \times (0, T]. \quad (3.1.4)$$

với

$$\begin{aligned} L_1 \varphi &= \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ L_2 \varphi &= \left(v \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ L_3 \varphi &= \left(w \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \varphi + \sigma \varphi \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Giả thiết rằng nghiệm của bài toán đủ trơn trong miền $G \times [0, T]$. Ta phủ miền G bằng lưới sai phân

$$\Omega = \left\{ (x_k = kh_x, y_l = lh_y, z_m = mh_z), k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}, m = \overline{0, M} \right\}.$$

Các toán tử vi phân L_i được xấp xỉ bằng các toán tử sai phân A_i

$$\begin{aligned} A_1\varphi &= \frac{(u^*\varphi)_x + (u^*\varphi)_{\bar{x}}}{2} - \mu\varphi_{xx} \\ A_2\varphi &= \frac{(v^*\varphi)_y + (v^*\varphi)_{\bar{y}}}{2} - \mu\varphi_{yy} \\ A_3\varphi &= \frac{(w^*\varphi)_z + (w^*\varphi)_{\bar{z}}}{2} - (\gamma^*\varphi_z)_z + \sigma\varphi \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Trong đó u^*, v^*, w^*, γ^* là những hàm lưới xác định trên lưới Ω và

$$u_k^* = u_{k-\frac{1}{2}}, v_l^* = v_{l-\frac{1}{2}}, w_m^* = w_{m-\frac{1}{2}}, \gamma_m^* = \gamma_{m-\frac{1}{2}}.$$

Chú ý ở đây chúng ta chỉ viết chỉ số theo một hướng, không chỉ viết các chỉ số của các hướng khác, khi viết các chỉ số dưới k, l, m sẽ tương ứng các hướng của các biến x, y, z , ví dụ: $u_{k-\frac{1}{2}}$ thay cho $u_{k-\frac{1}{2}lm}$.

Hệ (3.1.6) có thể viết lại như sau:

$$\begin{aligned} (A_1\varphi)_k &= \frac{u_{k+\frac{1}{2}}\varphi_{k+1} - u_{k-\frac{1}{2}}\varphi_{k-1}}{2h_x} - \mu \frac{\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}}{h_x^2} \\ (A_2\varphi)_l &= \frac{v_{l+\frac{1}{2}}\varphi_{l+1} - v_{l-\frac{1}{2}}\varphi_{l-1}}{2h_y} - \mu \frac{\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1}}{h_y^2} \\ (A_3\varphi)_m &= \frac{w_{m+\frac{1}{2}}\varphi_{m+1} - w_{m-\frac{1}{2}}\varphi_{m-1}}{2h_z} - \frac{\gamma_{m+\frac{1}{2}}(\varphi_{m+1} - \varphi_m) - \gamma_{m-\frac{1}{2}}(\varphi_m - \varphi_{m-1})}{h_z^2} + \sigma\varphi_m \\ k &= \overline{1, K}, l = \overline{1, L}, m = \overline{0, M-1}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Với các điều kiện biên được phân rã như sau:

$$\varphi_k = 0 \quad \text{tại } k=0, k=K$$

$$\varphi_l = 0 \quad \text{tại } l=0, l=L$$

$$\frac{\varphi_m - \varphi_{m-1}}{h_z} = \alpha \varphi_m \text{ tại } m=0 \quad (3.1.8)$$

$$\varphi_m = 0 \text{ tại } m=M.$$

Bổ đề 1. Các toán tử sai phân A_i xấp xỉ cấp 2 đối với các toán tử vi phân L_i

Bổ đề 2. Với giả thiết đặc trưng hệ số biến đổi khí thải, các hệ số khuếch tán rối ngang và thẳng đứng σ, μ, γ trong quá trình lan truyền, và các thành phần u, v, w của véc tơ vận tốc gió không âm, khi đó các toán tử A_i không âm.

3.2.2 Các lược đồ phân rã

Do các toán tử A_i không giao hoán và đã chứng minh ở trên là không âm, nên để giải bài toán lan truyền khí thải, ta sử dụng phương pháp phân rã nhiều thành phần với các thể hiện khác nhau.

Cụ thể, bài toán lan truyền khí thải gây ra bởi nguồn phát thải có thể được giải bởi sơ đồ sai phân sau:

$$\text{Đặt } \Lambda_\varphi^j = A_\varphi^j, \varphi = 1, 2, 3$$

- **Lược đồ phân rã thứ nhất**

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j-\frac{2}{3}} = \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j-1}, \varphi_0^{j-\frac{2}{3}} = 0, \varphi_K^{j-\frac{2}{3}} = 0$$

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{3}} = \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^{j-\frac{2}{3}}, \varphi_0^{j-\frac{1}{3}} = 0, \varphi_L^{j-\frac{1}{3}} = 0$$

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_3^j\right)(\varphi^j - \tau f^j) = \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_3^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{3}}, \frac{\varphi_1^j - \varphi_0^j}{h_z} = \alpha \varphi_0^j, \varphi_M^j = 0$$

$$\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_3^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{3}} = \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_3^j\right)(\varphi^j - \tau f^j), \frac{\varphi_1^{j+\frac{1}{3}} - \varphi_0^{j+\frac{1}{3}}}{h_z} = \alpha \varphi_0^{j+\frac{1}{3}}, \varphi_M^{j+\frac{1}{3}} = 0$$

$$\begin{aligned}\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^{j+\frac{2}{3}} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2^j\right)\varphi^{j+\frac{1}{3}}, \varphi_0^{j+\frac{2}{3}} = 0, \varphi_L^{j+\frac{2}{3}} = 0 \\ \left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j+1} &= \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j+\frac{2}{3}}, \varphi_0^{j+1} = 0, \varphi_K^{j+1} = 0.\end{aligned}$$

- **Lược đồ phân rã thứ hai.**

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{j-\frac{3}{4}} - \varphi^{j-1}}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j-\frac{3}{4}} + \varphi^{j-1}}{2} &= 0, \varphi_0^{j-\frac{3}{4}} = 0, \varphi_K^{j-\frac{3}{4}} = 0 \\ \frac{\varphi^{j-\frac{2}{4}} - \varphi^{j-\frac{3}{4}}}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^{j-\frac{2}{4}} + \varphi^{j-\frac{3}{4}}}{2} &= 0, \varphi_0^{j-\frac{2}{4}} = 0, \varphi_L^{j-\frac{2}{4}} = 0 \\ \frac{\varphi^{j-\frac{1}{4}} - \varphi^{j-\frac{2}{4}}}{\tau} + \Lambda_3^j \frac{\varphi^{j-\frac{1}{4}} + \varphi^{j-\frac{2}{4}}}{2} &= 0, \frac{\varphi_1^{j-\frac{1}{4}} - \varphi_0^{j-\frac{1}{4}}}{h_Z} = \alpha \varphi_0^{j-\frac{1}{4}}, \varphi_M^{j-\frac{1}{4}} = 0 \\ \varphi^{j+\frac{1}{4}} &= \varphi^{j-\frac{1}{4}} + 2\tau f^j \\ \frac{\varphi^{j+\frac{2}{4}} - \varphi^{j+\frac{1}{4}}}{\tau} + \Lambda_3^j \frac{\varphi^{j+\frac{2}{4}} + \varphi^{j+\frac{1}{4}}}{2} &= 0, \frac{\varphi_1^{j+\frac{2}{4}} - \varphi_0^{j+\frac{1}{4}}}{h_Z} = \alpha \varphi_0^{j+\frac{2}{4}}, \varphi_M^{j+\frac{2}{4}} = 0 \\ \frac{\varphi^{j+\frac{3}{4}} - \varphi^{j+\frac{2}{4}}}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^{j+\frac{3}{4}} + \varphi^{j+\frac{2}{4}}}{2} &= 0, \varphi_0^{j+\frac{3}{4}} = 0, \varphi_L^{j+\frac{3}{4}} = 0 \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+\frac{3}{4}}}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^{j+\frac{3}{4}}}{2} &= 0, \varphi_0^{j+1} = 0, \varphi_K^{j+1} = 0.\end{aligned}$$

- **Lược đồ phân rã thứ ba.**

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{j-\frac{2}{3}} - \varphi^{j-1}}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j-\frac{2}{3}} + \varphi^{j-1}}{2} &= 0, \varphi_0^{j-\frac{2}{3}} = 0, \varphi_K^{j-\frac{2}{3}} = 0 \\ \frac{\varphi^{j-\frac{1}{3}} - \varphi^{j-\frac{2}{3}}}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^{j-\frac{1}{3}} + \varphi^{j-\frac{2}{3}}}{2} &= 0, \varphi_0^{j-\frac{1}{3}} = 0, \varphi_L^{j-\frac{1}{3}} = 0 \\ \frac{\varphi^j - \varphi^{j-\frac{1}{3}}}{\tau} + \Lambda_3^j \frac{\varphi^j + \varphi^{j-\frac{1}{3}}}{2} &= f^j, \frac{\varphi_1^j - \varphi_0^j}{h_Z} = \alpha \varphi_0^j, \varphi_M^j = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\varphi^{j+\frac{1}{3}} - \varphi^j}{\tau} + \Lambda_3^j \frac{\varphi^{j+\frac{1}{3}} + \varphi^j}{2} &= f^j, \frac{\varphi_1^j - \varphi_0^j}{h_z} = \alpha \varphi_0^{j+\frac{1}{3}}, \varphi_M^{j+\frac{1}{3}} = 0 \\ \frac{\varphi^{j+\frac{2}{3}} - \varphi^{j+\frac{1}{3}}}{\tau} + \Lambda_2^j \frac{\varphi^{j+\frac{2}{3}} + \varphi^{j+\frac{1}{3}}}{2} &= 0, \varphi_0^{j+\frac{2}{3}} = 0, \varphi_L^{j+\frac{2}{3}} = 0 \\ \frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+\frac{2}{3}}}{\tau} + \Lambda_1^j \frac{\varphi^{j+1} + \varphi^{j+\frac{2}{3}}}{2} &= 0, \varphi_0^{j+1} = 0, \varphi_K^{j+1} = 0.\end{aligned}$$

Nhận xét:

+ Các lược đồ phân rã trên được bắt đầu từ hệ điều kiện ban đầu

$\varphi^0 = g, j = 1, 2, 3, \dots$. Trong chương 3 ta đã chứng minh tính ổn định của ba lược đồ phân rã giải bài toán ô nhiễm khí quyển và nghiệm của bài toán sai phân xấp xỉ nghiệm của bài toán vi phân với cấp chính xác $O(h^2 + \tau^2)$.

Từ phương trình 1 và 3 của sơ đồ thứ nhất ta có:

$$\begin{aligned}\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j-\frac{2}{3}} &= F_1^j \text{ với } F_1^j = -\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1^j\right)\varphi^{j-1}, \\ -\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_3^j\right)\varphi^j &= F_3^j \text{ với } F_3^j = -\tau\left(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_3^j\right)f^j - \left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_3^j\right)\varphi^{j-\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned}-\varphi_k - \frac{1}{2}\tau(\Lambda_1\varphi)_k &= F_{1k} \\ -\varphi_m - \frac{1}{2}\tau(\Lambda_3\varphi)_m &= F_{1m}.\end{aligned}$$

Trong đó kí hiệu:

$$\varphi_k = \varphi_{klm}^{j-\frac{2}{3}}, \Lambda_1 = \Lambda_1^j, F_{1k} = (F_1^j)_k, \varphi_m = \varphi_{klm}^j, \Lambda_3 = \Lambda_3^j, F_{3m} = (F_3^j)_m,$$

Thay công thức các toán tử sai phân vào hai công thức trên ta có:

$$\frac{\tau}{2} \left(\frac{\mu}{h_x^2} - \frac{u_{k+1}}{2h_x} \right) \varphi_{k+1} - \left(1 + \frac{\tau\mu}{h_x^2} \right) \varphi_k + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\mu}{h_x^2} + \frac{u_{k-1}}{2h_x} \right) \varphi_{k-1} = F_{1k}. \quad (3.1.9)$$

Và

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{2} \left(\frac{\gamma_{m+1/2}}{h_z^2} - \frac{w_{m+1/2}}{2h_z} \right) \varphi_{m+1} - \left(1 + \frac{\tau(\gamma_{m+1/2} + \gamma_{m-1/2})}{2h_z^2} + \sigma \right) \varphi_m + \\ & + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\gamma_{m-1/2}}{h_z^2} - \frac{w_{m-1}}{2h_z} \right) \varphi_{m-1} = F_{3m}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Đặt các hệ số của các biểu thức trên

$$\begin{aligned} a_{1k} &= \frac{\tau}{2} \left(\frac{\mu}{h_x^2} - \frac{u_{k+1}}{2h_x} \right) \\ b_{1k} &= \frac{\tau}{2} \left(\frac{\mu}{h_x^2} + \frac{u_{k-1}}{2h_x} \right) \\ c_{1k} &= 1 + \frac{\tau\mu}{h_x^2} \\ a_{3m} &= \frac{\tau}{2} \left(\frac{\gamma_{m+1/2}}{h_z^2} - \frac{w_{m+1/2}}{2h_z} \right) \\ b_{3m} &= \frac{\tau}{2} \left(\frac{\gamma_{m-1/2}}{h_z^2} - \frac{w_{m-1}}{2h_z} \right) \\ c_{3m} &= 1 + \frac{\tau(\gamma_{m+1/2} + \gamma_{m-1/2})}{2h_z^2} + \sigma. \end{aligned}$$

Khi đó các hệ (3.1.9) và (3.1.10) chính là các hệ phương trình đại số tuyến tính với ma trận có dạng ba đường chéo. Với giả thiết μ, γ dương còn các thành phần u, v, w của véc tơ vận tốc gió không âm và tăng theo biến không gian, khi đó với bước lưới đối với các biến không gian thích hợp, ta có các hệ số của hệ 3 đường chéo trên luôn luôn thỏa mãn điều kiện ổn định của phương pháp truy đuổi. Vì vậy các hệ này luôn giải được bằng thuật toán truy

đuổi 3 đường chéo với độ phức tạp tính toán là $O(n)$ trong đó n là số bước lưới sai phân.

3.2.3 Kết quả thực nghiệm(Xem tài liệu [1,3]).

Xuất phát từ phương pháp phân rã nhiều thành phần, việc giải số bài toán ô nhiễm môi trường trong trường hợp một nguồn phát thông qua phương pháp sai phân dẫn tới bài toán giải các hệ phương trình đại số tuyến tính dạng 3 đường chéo. Các hệ này sẽ được giải bằng thuật toán truy đuổi 3 đường chéo. Trong phần này luận văn sẽ đưa ra kết quả giải số trong trường hợp 1 nguồn phát đặt tại tọa độ (0,0,0). Chúng ta sẽ cho trước nghiệm đúng của bài toán và các giá trị vận tốc gió theo các phương, từ đó xác định hàm véc-tơ phải $f(x,y,z)$. Sử dụng phương pháp sai phân chuyển bài toán vi phân về bài toán sai phân và áp dụng thuật toán phân rã chuyển về các hệ phương trình đại số tuyến tính dạng 3 đường chéo. Áp dụng thuật toán truy đuổi giải các hệ đại số từ đó xác định nghiệm số của bài toán. Sai số của phương pháp được xác định bằng công thức $saiso = \max(|\text{nghiem_dung}(i,j,k) - \text{nghiem_gandung}(i,j,k)|)$ trên toàn lưới sai phân.

Kết quả giải số

Hàm nghiệm đúng $udung = 10^8 x(1-x)y(1-y)z^2(1-z)^2t$

Số khoảng chia theo phương x: K=40;

Số khoảng chia theo phương y: L=40;

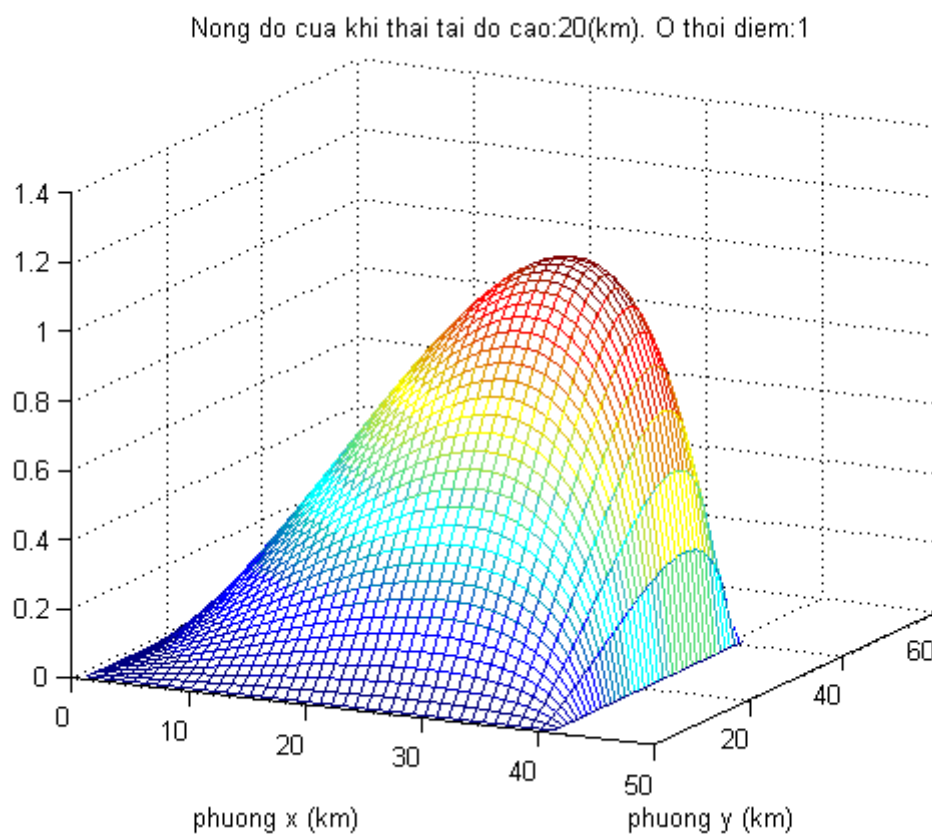
Số khoảng chia theo phương z: M=40;

Số khoảng chia theo thời gian: T=40;

Kết quả thực nghiệm được cho bởi bảng 1

Bảng 1: Sai số ứng với các lưới chia

Lưới chia thời gian	Lưới chia Ox	Lưới chia Oy	Lưới chia Oz	Sai số tuyệt đối
10	10	10	10	0.0111
20	20	20	20	0.0042
30	30	30	30	0.0025
50	50	50	50	0.0013
100	100	100	100	$6.033 \cdot 10^{-4}$



Hình 1: Nồng độ khí thải trong trường hợp 1 nguồn phát

3.3 Bài toán nhiều nguồn phát

Xét bài toán ô nhiễm môi trường được cho bởi phương trình

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f_1 + f_2 + \dots + f_n \text{ trên } \Omega \times \Omega_t,$$

Trong đó $f_k(x - x_k, y - y_k, z - z_k, t), k = 1, 2, \dots, n$ đặc trưng cho các nguồn phát khác nhau đặt tại các tọa độ $A_k(x_k, y_k, z_k)$.

Do tính chất tuyến tính của đạo hàm riêng và của toán tử A , bài toán nhiều nguồn phát trên sẽ tương đương với n bài toán độc lập sau đây :

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + A\varphi_k = f_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó sử dụng phương pháp chồng chất nghiệm, ta sẽ tiến hành sử dụng phương pháp phân rã nhiều thành phần tiến hành giải số lần lượt n bài toán để xác định gần đúng các nghiệm $\varphi_k, k = 1, 2, \dots, n$. Từ đó nghiệm của bài toán nhiều nguồn phát được xác định bởi công thức $\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi_k$ tại mọi lưới điểm.

Sau đây là kết quả trong trường hợp bài toán ô nhiễm có hai nguồn phát đặt tại 2 điểm $A(15, 0, 0), B(0, 15, 0)$

Kết quả giải số

Hàm nghiệm đúng $udung = 10^8 x(1 - x)y(1 - y)z^2(1 - z)^2t$

Số khoảng chia theo phương x: K=40;

Số khoảng chia theo phương y: L=40;

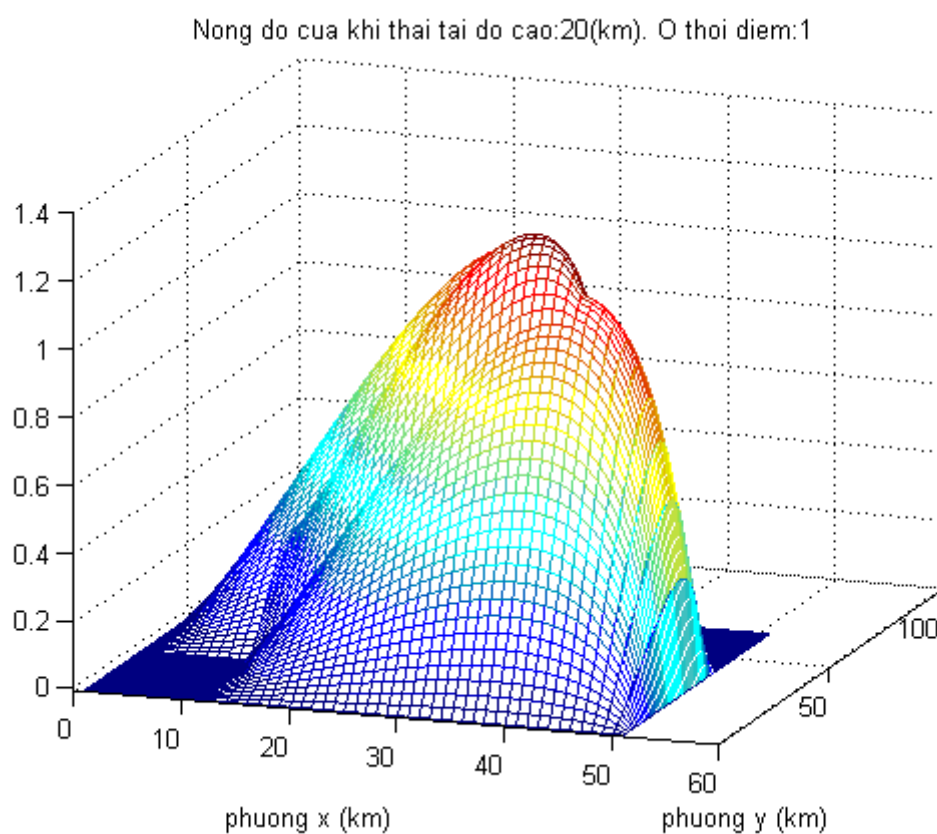
Số khoảng chia theo phương z: M=40;

Số khoảng chia theo thời gian: T=40;

Kết quả thực nghiệm được cho bởi bảng 2

Bảng 2: Sai số ứng với các lưới chia

Lưới chia thời gian	Lưới chia Ox	Lưới chia Oy	Lưới chia Oz	Sai số tuyệt đối
10	10	10	10	0.0123
20	20	20	20	0.0073
30	30	30	30	0.0045
50	50	50	50	0.0056
100	100	100	100	$8.79 \cdot 10^{-4}$



Hình 2: Nồng độ khí thải trong trường hợp 2 nguồn phát

Hoàn toàn tương tự, các lược đồ sai phân dạng 2 và 3 cũng được cài đặt bằng các thuật toán trên môi trường Matlab, các kết quả bằng số cũng khẳng định tính khả thi của các lược đồ.

Kết luận

Luận văn đã đề cập đến việc nghiên cứu mô hình và phương pháp giải bài toán ô nhiễm môi trường, một vấn đề đang được xã hội quan tâm. Kết quả chính của luận văn gồm có:

1. Trình bày và học tập mô hình toán học mô tả bài toán ô nhiễm môi trường và nghiên cứu tính duy nhất nghiệm của bài toán.
2. Trình bày thuật toán phân ra 1 chiều và nhiều chiều giải bài toán ô nhiễm môi trường, chứng minh tính đúng đắn của thuật toán phân rã và đồng thời chỉ ra cấp chính xác của phương pháp.
3. Trên cơ sở phương pháp sai phân và phương pháp phân rã đưa việc tìm nghiệm số của bài toán ô nhiễm môi trường về việc giải các hệ phương trình đại số tuyến tính dạng 3 đường chéo. Đánh giá độ phức tạp của thuật toán
4. Sử dụng ngôn ngữ Matlab và thuật toán truy đuổi 3 đường chéo xác định nghiệm số của bài toán ô nhiễm môi trường trong trường hợp 1 nguồn phát và nhiều nguồn phát chứng tỏ tính khả thi của phương pháp phân rã đối với việc giải bài toán ô nhiễm môi trường.

Hướng phát triển tiếp theo của luận văn là áp dụng các kết quả đạt được về mặt lý thuyết, tiến hành khảo sát và tính toán ô nhiễm đối với môi trường thực tế (cụ thể là tại Thái Nguyên)

Tài liệu tham khảo

[1] Tạ Văn Đĩnh (2002), Phương pháp sai phân và phương pháp phần tử hữu hạn, Nhà xuất bản khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[2] Vũ Vinh Quang, Nguyễn đình Dũng (2008), Các kết quả ứng dụng phương pháp phân rã giải bài toán ô nhiễm môi trường, Tạp chí khoa học và Công nghệ Đại học Thái nguyên, T1 (45), 48-54.

[3] Samarskij A. and Nikolaev E. (1989), Numerical Methods for Grid Equations, Vol. 2, Birkhauser, Basel.

[4] Marchuk G.I. (1982), Methods of Numerical Mathematics, Springer, New York.

[5] Dang Quang A (2002), Monotone difference schemes for solving some problems of air pollution, Advances in Nature Sciences, 3(4), pp. 297-304.

[6] Dang Quang A, Ngo Van Luoc (1992), Extract solution of a stationary problem of air pollution, Proc. of the NCST of Vietnam, 4(2), pp. 39-46.

[7] Dang Quang A, Nguyen Dong Anh (1996), On numerical modeling for dispersion of active pollutants from an elevated point source, Vietnam Journal of math, 24(3), pp. 315-325.

[8] Ngo van Luoc, Dang Quang A, Nguyen Cong Dieu (1993), Analytic and numerical solution of some problems of air pollution, SEA Bull. Math, pp. 105-117.

PHẦN PHỤ LỤC

1. Chương trình nguồn giải bài toán 1 nguồn phát theo thuật toán phân rã

% Trường hợp nguồn phát đặt tại tọa độ (0,0)
% Ngôn ngữ lập trình Matlab 7.0
% Ngày lập trình: 3/1/2013

```
clear all
clc
global X Y Z K M L dem
% Các tham số của bài toán
alpha=1;
muy=1;
sixma=1;
gama=1;
u=2; % Vận tốc gió theo phương x
v=1; % Vận tốc gió theo phương y
w=0; % Vận tốc gió theo phương z
K=40;% Số khoảng chia theo phương x
L=40;% Số khoảng chia theo phương y
M=40;% Số khoảng chia theo phương z
T=40;% Số khoảng chia theo trục thời gian
X=1;
Y=1;
Z=1;
tg=1;
dem=1;
hx=X/K;hxx=hx*hx;
hy=Y/L;hyy=hy*hy;
hz=Z/M;hzz=hz*hz;
to=tg/T;
saio=0;
% Tính giá trị ban đầu
for k=0:K;
    x=k*hx;
    for l=0:L;
        y=l*hy;
        for m=0:M;
            z=m*hz;
            phi1(dem+k,dem+l,dem+m)=0;
        end;
    end;
end;
j=1;
while j<=T;
    t=j*to;
    % Giá trị về phải
    for k=0:K;
        x=k*hx;
        for l=0:L;
            y=l*hy;
            for m=0:M;
                z=m*hz;
```

```

        f(dem+k,dem+l,dem+m)=100*x*y*z*t;% Ham ve phai
    end;
end;
end;
%Giai he 1
for l=0:L;
    for m=0:M;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=1;
        c(dem+K)=1;
        for k=1:K-1;
            c(dem+k)=1+to*muy/hxx;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=0;
        for k=1:K-1;
            b(dem+k)=(muy/hxx-u/(2*hx))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+K)=0;
        for k=1:K-1;
            a(dem+k)=(muy/hxx+u/(2*hx))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;
        F(dem+K)=0;
        for k=1:K-1;
            F(dem+k)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-(to/2)*((u*phi1(dem+k+1,dem+l,dem+m)-u*phi1(dem+k-
1,dem+l,dem+m))/(2*hx)-muy*(phi1(dem+k+1,dem+l,dem+m)-
2*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k-1,dem+l,dem+m))/hxx);
        end;
        phi=truyduoi(a,b,c,F,K);
        for k=0:K;
            phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+k);
        end;
    end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 1

%giai he 2
for k=0:K;
    for m=0:M;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=1;c(dem+L)=1;
        for l=1:L-1;
            c(dem+l)=1+to*muy/hyy;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=0;
        for l=1:L-1;
            b(dem+l)=(muy/hyy-v/(2*hy))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+L)=0;
        for l=1:L-1;
            a(dem+l)=(muy/hyy+v/(2*hy))*to/2;
        end;
    end;
end;

```

```

%tinh he so ve phai F
F(dem+0)=0;
F(dem+L)=0;
for l=1:L-1;
    F(dem+l)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-(to/2)*((v*phi1(dem+k,dem+l+1,dem+m)-
v*phi1(dem+k,dem+l-1,dem+m))/(2*hy)-muy*(phi1(dem+k,dem+l+1,dem+m)-
2*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k,dem+l-1,dem+m))/hyy);
    end;
    phi=truyduoi(a,b,c,F,L);
    for l=0:L;
        phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+l);
    end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 2

%giai he 3
for l=0:L;
    for k=0:K;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=(1+alpha)*hz;c(dem+M)=1;
        for m=1:M-1;
            c(dem+m)=1+(to/(2*hzz))*(gama+gama)+sixma*to/2;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=1;
        for m=1:M-1;
            b(dem+m)=(gama/hzz-w/(2*hz))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+M)=1;
        for m=1:M-1;
            a(dem+m)=(gama/hzz+w/(2*hz))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;
        F(dem+M)=0;
        for m=1:M-1;
            F(dem+m)=to*f(dem+k,dem+l,dem+m)+(to*to/2)*((w*f(dem+k,dem+l,dem+m+1)-
w*f(dem+k,dem+l,dem+m-1)/(2*hz))-(gama*(f(dem+k,dem+l,dem+m+1)-f(dem+k,dem+l,dem+m))-
gama*(f(dem+k,dem+l,dem+m)-f(dem+k,dem+l,dem+m-1)))/hzz+sixma*f(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-
(to/2)*((w*phi1(dem+k,dem+l,dem+m+1)-w*phi1(dem+k,dem+l,dem+m-1)/(2*hz))-
(gama*(phi1(dem+k,dem+l,dem+m+1)-phi1(dem+k,dem+l,dem+m))-gama*(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-
phi1(dem+k,dem+l,dem+m-1)))/hzz+sixma*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)));
        end;
        phi=truyduoi(a,b,c,F,M);
        for m=0:M;
            phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+m);
        end;
    end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 3
%tinh sai so
t=j*to;
% Gia tri nghieng dung
for k=0:K;

```

```

x=k*hx;
for l=0:L;
    y=l*hy;
    for m=0:M;
        z=m*hz;
        phidung(dem+k,dem+l,dem+m)=x*(X-x)*y*(Y-y)*(z-Z)*(z-Z)*z*z*t;%nghiem dung
    end;
end;
end;

for k=0:K;
    for l=0:L;
        for m=0:M;
            if saiso<abs(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-phidung(dem+k,dem+l,dem+m))
                saiso=abs(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-phidung(dem+k,dem+l,dem+m));
            end;
        end;
    end;
end;
if j==T
    break;
end;
%giai he 4
for l=0:L;
    for k=0:K;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=(1+alpha)*hz;c(dem+M)=1;
        for m=1:M-1;
            c(dem+m)=1+(to/(2*hz))*(gama+gama)+sixma*to/2;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=1;
        for m=1:M-1;
            b(dem+m)=(gama/hzz-w/(2*hz))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+M)=1;
        for m=1:M-1;
            a(dem+m)=(gama/hzz+w/(2*hz))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;
        F(dem+M)=0;
        for m=1:M-1;
            F(dem+m)=to*f(dem+k,dem+l,dem+m)+(to*to/2)*((w*f(dem+k,dem+l,dem+m+1)-
            w*f(dem+k,dem+l,dem+m-1)/(2*hz))-(gama*(f(dem+k,dem+l,dem+m+1)-f(dem+k,dem+l,dem+m))-
            gama*(f(dem+k,dem+l,dem+m)-f(dem+k,dem+l,dem+m-1)))/hzz+sixma*f(dem+k,dem+l,dem+m))+phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-
            (to/2)*((w*phi1(dem+k,dem+l,dem+m+1)-w*phi1(dem+k,dem+l,dem+m-1)/(2*hz))-
            (gama*(phi1(dem+k,dem+l,dem+m+1)-phi1(dem+k,dem+l,dem+m))-gama*(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-
            phi1(dem+k,dem+l,dem+m-1)))/hzz+sixma*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)));
        end;
        phi=truyduoi(a,b,c,F,M);
        for m=0:M;
            phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+m);
        end;
    end;
end;

```



```

end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 4

%giai he 5
for k=0:K;
    for m=0:M;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=1;c(dem+L)=1;
        for l=1:L-1;
            c(dem+l)=1+to*muy/hyy;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=0;
        for l=1:L-1;
            b(dem+l)=(muy/hyy-v/(2*hy))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+L)=0;
        for l=1:L-1;
            a(dem+l)=(muy/hyy+v/(2*hy))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;
        F(dem+L)=0;
        for l=1:L-1;
            F(dem+l)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-(to/2)*((v*phi1(dem+k,dem+l+1,dem+m)-
            v*phi1(dem+k,dem+l-1,dem+m))/(2*hy)-muy*(phi1(dem+k,dem+l+1,dem+m)-
            2*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k,dem+l-1,dem+m))/hyy);
        end;
        phi=truyduoi(a,b,c,F,L);
        for l=0:L;
            phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+l);
        end;
    end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 5

%Giai he 6
for l=0:L;
    for m=0:M;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=1;c(dem+K)=1;
        for k=1:K-1;
            c(dem+k)=1+to*muy/hxx;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=0;
        for k=1:K-1;
            b(dem+k)=(muy/hxx-u/(2*hx))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+K)=0;
        for k=1:K-1;
            a(dem+k)=(muy/hxx+u/(2*hx))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;

```

```

F(dem+K)=0;
for k=1:K-1;
    F(dem+k)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-(to/2)*((u*phi1(dem+k+1,dem+l,dem+m)-u*phi1(dem+k-1,dem+l,dem+m))/(2*hx)-muy*(phi1(dem+k+1,dem+l,dem+m)-2*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k-1,dem+l,dem+m))/hxx);
end;
phi=truyduoi(a,b,c,F,K);
for k=0:K;
    phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+k);
end;
end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 6
%tinh sai so
% Gia tri nghieng dung
t=(j+1)*to;
for k=0:K;
    x=k*hx;
    for l=0:L;
        y=l*hy;
        for m=0:M;
            z=m*hz;
            phidung(dem+k,dem+l,dem+m)=x*(X-x)*y*(Y-y)*(z-Z)*(z-Z)*z*z*t;%nghieng dung
        end;
    end;
end;
for k=0:K;
    for l=0:L;
        for m=0:M;
            if saiso<abs(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-phidung(dem+k,dem+l,dem+m))
                saiso=abs(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-phidung(dem+k,dem+l,dem+m)) ;
            end;
        end;
    end;
end;
end;
if j+2>T
    break;
end;
% saiso
j=j+2;
end;
saiso
x=0:hx:1;
y=0:hy:1;
m=floor(M/2);
% Nghieng xap xi
for k=0:K;
    for l=0:L;
        mz(dem+k,dem+l)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m);
    end;
end;
for i=0:K;
    for j=0:L;
        mmz(i+1,j+1)=mz(dem+i,dem+j);
    end;
end;
% Đồ thị mô tả nồng độ ô nhiễm trong hệ tọa độ Oy

```

```

mesh(x,y,mz)
xlabel('phuong x (km)')
ylabel('phuong y (km)')
title(strcat('Nong do cua khi thai tai do cao:',int2str(m), '(km). O thoi diem:',num2str(j*to) ))

```

2. Chương trình nguồn giải bài toán 2 nguồn phát theo thuật toán phân rã

```

% Trường hợp các nguồn phát đặt tại 2 điểm A(15,0,h) và B(0,15,h)
% Ngôn ngữ lập trình Matlab 7.0
% Ngày lập trình: 12/1/2013

```

```

clear all
clc
global X Y Z K M L dem
% Các tham số của bài toán
alpha=1;
muy=1;
sixma=1;
u=2; % Vận tốc gió theo phương x
v=1; % Vận tốc gió theo phương y
w=0; % Vận tốc gió theo phương z
gama=1;

x10=0;y10=15;% Tọa độ nguồn phát thứ nhất
x10=15;y10=0;% Tọa độ nguồn phát thứ hai
K=40;% Số khoảng chia theo phương x
L=40;% Số khoảng chia theo phương y
M=40;% Số khoảng chia theo phương z
T=40;% Số khoảng chia theo trục thời gian
X=1;
Y=1;
Z=1;
tg=1;
dem=1;
hx=X/K;hxx=hx*hx;
hy=Y/L;hyy=hy*hy;
hz=Z/M;hzz=hz*hz;
to=tg/T;
saiso=0;
% Tính giá trị ban đầu
for k=0:K;
    x=k*hx;
    for l=0:L;
        y=l*hy;
        for m=0:M;
            z=m*hz;
            phi1(dem+k,dem+l,dem+m)=0;
        end;
    end;
end;
j=1;
while j<=T;
    t=j*to;

```

```

% Gia tri ve phai
for k=0:K;
    x=k*hx;
    for l=0:L;
        y=l*hy;
        for m=0:M;
            z=m*hz;
            f(dem+k,dem+l,dem+m)=100*x*y*z*t;% Ham ve phai
        end;
    end;
end;
%Giai he 1
for l=0:L;
    for m=0:M;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=1;
        c(dem+K)=1;
        for k=1:K-1;
            c(dem+k)=1+to*muy/hxx;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=0;
        for k=1:K-1;
            b(dem+k)=(muy/hxx-u/(2*hx))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+K)=0;
        for k=1:K-1;
            a(dem+k)=(muy/hxx+u/(2*hx))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;
        F(dem+K)=0;
        for k=1:K-1;
            F(dem+k)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-(to/2)*((u*phi1(dem+k+1,dem+l,dem+m)-u*phi1(dem+k-1,dem+l,dem+m))/(2*hx)-muy*(phi1(dem+k+1,dem+l,dem+m)-2*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k-1,dem+l,dem+m))/hxx);
        end;
        phi=truyduoi(a,b,c,F,K);
        for k=0:K;
            phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+k);
        end;
    end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 1

%giai he 2
for k=0:K;
    for m=0:M;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=1;c(dem+L)=1;
        for l=1:L-1;
            c(dem+l)=1+to*muy/hyy;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=0;
        for l=1:L-1;

```

```

        b(dem+l)=(muy/hyy-v/(2*hy))*to/2;
    end;
    %tinh he so a
    a(dem+L)=0;
    for l=1:L-1;
        a(dem+l)=(muy/hyy+v/(2*hy))*to/2;
    end;
    %tinh he so ve phai F
    F(dem+0)=0;
    F(dem+L)=0;
    for l=1:L-1;
        F(dem+l)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-(to/2)*((v*phi1(dem+k,dem+l+1,dem+m)-
v*phi1(dem+k,dem+l-1,dem+m))/(2*hy)-muy*(phi1(dem+k,dem+l+1,dem+m)-
2*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k,dem+l-1,dem+m))/hyy);
    end;
    phi=truyduoi(a,b,c,F,L);
    for l=0:L;
        phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+l);
    end;
end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 2

%giai he 3
for l=0:L;
    for k=0:K;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=(1+alpha)*hz;c(dem+M)=1;
        for m=1:M-1;
            c(dem+m)=1+(to/(2*hzz))*(gama+gama)+sixma*to/2;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=1;
        for m=1:M-1;
            b(dem+m)=(gama/hzz-w/(2*hz))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+M)=1;
        for m=1:M-1;
            a(dem+m)=(gama/hzz+w/(2*hz))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;
        F(dem+M)=0;
        for m=1:M-1;
            F(dem+m)=to*f(dem+k,dem+l,dem+m)+(to*to/2)*((w*f(dem+k,dem+l,dem+m+1)-
w*f(dem+k,dem+l,dem+m-1)/(2*hz))-(gama*(f(dem+k,dem+l,dem+m+1)-f(dem+k,dem+l,dem+m))-
gama*(f(dem+k,dem+l,dem+m)-f(dem+k,dem+l,dem+m-1)))/hzz+sixma*f(dem+k,dem+l,dem+m))+phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-
(to/2)*((w*phi1(dem+k,dem+l,dem+m+1)-w*phi1(dem+k,dem+l,dem+m-1)/(2*hz))-
(gama*(phi1(dem+k,dem+l,dem+m+1)-phi1(dem+k,dem+l,dem+m))-gama*(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-
phi1(dem+k,dem+l,dem+m-1)))/hzz+sixma*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)));
        end;
        phi=truyduoi(a,b,c,F,M);
        for m=0:M;
            phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+m);
        end;
    end;
end;

```

```

    end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 3
%tinh sai so
t=j*to;
% Gia tri nghieng dung
for k=0:K;
    x=k*hx;
    for l=0:L;
        y=l*hy;
        for m=0:M;
            z=m*hz;
            phidung(dem+k,dem+l,dem+m)=x*(X-x)*y*(Y-y)*(z-Z)*(z-Z)*z*z*t;%nghieng dung
        end;
    end;
end;

for k=0:K;
    for l=0:L;
        for m=0:M;
            if saiso<abs(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-phidung(dem+k,dem+l,dem+m))
                saiso=abs(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-phidung(dem+k,dem+l,dem+m));
            end;
        end;
    end;
end;
if j==T
    break;
end;
%giai he 4
for l=0:L;
    for k=0:K;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=(1+alpha)*hz;c(dem+M)=1;
        for m=1:M-1;
            c(dem+m)=1+(to/(2*hz))*(gama+gama)+sixma*to/2;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=1;
        for m=1:M-1;
            b(dem+m)=(gama/hzz-w/(2*hz))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+M)=1;
        for m=1:M-1;
            a(dem+m)=(gama/hzz+w/(2*hz))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;
        F(dem+M)=0;
        for m=1:M-1;
            F(dem+m)=to*f(dem+k,dem+l,dem+m)+(to*to/2)*((w*f(dem+k,dem+l,dem+m+1)-
            w*f(dem+k,dem+l,dem+m-1)/(2*hz))-(gama*(f(dem+k,dem+l,dem+m+1)-f(dem+k,dem+l,dem+m))-
            gama*(f(dem+k,dem+l,dem+m)-f(dem+k,dem+l,dem+m-1)))/hzz+sixma*f(dem+k,dem+l,dem+m))+phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-
            (to/2)*((w*phi1(dem+k,dem+l,dem+m+1)-w*phi1(dem+k,dem+l,dem+m-1)/(2*hz))-

```

```

(gama*(phi1(dem+k,dem+l,dem+m+1)-phi1(dem+k,dem+l,dem+m))-gama*(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-
phi1(dem+k,dem+l,dem+m-1)))/hzz+sixma*phi1(dem+k,dem+l,dem+m));
end;
phi=truyduoi(a,b,c,F,M);
for m=0:M;
    phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+m);
end;
end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 4

%giai he 5
for k=0:K;
    for m=0:M;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=1;c(dem+L)=1;
        for l=1:L-1;
            c(dem+l)=1+to*muy/hyy;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=0;
        for l=1:L-1;
            b(dem+l)=(muy/hyy-v/(2*hy))*to/2;
        end;
        %tinh he so a
        a(dem+L)=0;
        for l=1:L-1;
            a(dem+l)=(muy/hyy+v/(2*hy))*to/2;
        end;
        %tinh he so ve phai F
        F(dem+0)=0;
        F(dem+L)=0;
        for l=1:L-1;
            F(dem+l)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-(to/2)*((v*phi1(dem+k,dem+l+1,dem+m)-
v*phi1(dem+k,dem+l-1,dem+m))/(2*hy)-muy*(phi1(dem+k,dem+l+1,dem+m)-
2*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k,dem+l-1,dem+m))/hyy);
        end;
        phi=truyduoi(a,b,c,F,L);
        for l=0:L;
            phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+l);
        end;
    end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 5

%Giai he 6
for l=0:L;
    for m=0:M;
        %tinh he so C
        c(dem+0)=1;c(dem+K)=1;
        for k=1:K-1;
            c(dem+k)=1+to*muy/hxx;
        end;
        %tinh he so b
        b(dem+0)=0;
        for k=1:K-1;
            b(dem+k)=(muy/hxx-u/(2*hx))*to/2;
        end;
    end;
end;

```

```

end;
%tinh he so a
a(dem+K)=0;
for k=1:K-1;
    a(dem+k)=(muy/hxx+u/(2*hxx))*to/2;
end;
%tinh he so ve phai F
F(dem+0)=0;
F(dem+K)=0;
for k=1:K-1;
    F(dem+k)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-(to/2)*((u*phi1(dem+k+1,dem+l,dem+m)-u*phi1(dem+k-1,dem+l,dem+m))/(2*hxx)-muy*(phi1(dem+k+1,dem+l,dem+m)-2*phi1(dem+k,dem+l,dem+m)+phi1(dem+k-1,dem+l,dem+m))/hxx);
end;
phi=truyduoi(a,b,c,F,K);
for k=0:K;
    phi2(dem+k,dem+l,dem+m)=phi(dem+k);
end;
end;
phi1=phi2;%ket thuc giai he 6
%tinh sai so
% Gia tri nghieng dung
t=(j+1)*to;
for k=0:K;
    x=k*hxx;
    for l=0:L;
        y=l*hy;
        for m=0:M;
            z=m*hz;
            phidung(dem+k,dem+l,dem+m)=x*(X-x)*y*(Y-y)*(z-Z)*(z-Z)*z*z*t;%nghieng dung
        end;
    end;
end;
for k=0:K;
    for l=0:L;
        for m=0:M;
            if saiso<abs(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-phidung(dem+k,dem+l,dem+m))
                saiso=abs(phi1(dem+k,dem+l,dem+m)-phidung(dem+k,dem+l,dem+m)) ;
            end;
        end;
    end;
end;
if j+2>T
    break;
end;
% saiso
j=j+2;
end;
saiso
x=0:hxx:1;
y=0:hy:1;
m=floor(M/2);
% Nghieng xap xi
for k=0:K;
    for l=0:L;
        mz(dem+k,dem+l)=phi1(dem+k,dem+l,dem+m);
    end;
end;

```



```

    end;
end;
for i=0:K+25;
    for j=0:L+25;
        sum(i+1,j+1)=0;
        sum1(i+1,j+1)=0;
        sum2(i+1,j+1)=0;

    end;
end;

% Nghiệm ứng với nguồn phát thứ nhất
for i=0:K;
    for j=0:L;
        sum1(i+26,j+1)=mz(i+1,j+1);
    end;
end;

% Nghiệm ứng với nguồn phát thứ hai

for i=0:K;
    for j=0:L;
        sum2(i+1,j+26)=mz(i+1,j+1);
    end;
end;
% Chồng chất nghiệm
for i=0:K+15;
    for j=0:L+15;
        sum(i+1,j+1)=sum1(i+1,j+1)+sum2(i+1,j+1);
    end;
end;
% Đồ thị mô tả độ ô nhiễm trong hệ tọa độ Oxyz
mesh(x,y,sum)
xlabel('phuong x (km)')
ylabel('phuong y (km)')
title(strcat('Nong do cua khi thai tai do cao:',int2str(m), '(km). O thoi diem:',num2str(j*to) ))

```