

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ NINH

THUẬT TOÁN NÓN XOAY GIẢI BÀI TOÁN
QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨN
VỚI BIÊN BỊ CHẶN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu	ii
1 Bài toán tối ưu tổng quát và một số mô hình bài toán thực tế	1
1.1 Bài toán tối ưu tổng quát	1
1.2 Một số mô hình thực tế	2
1.2.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất	2
1.2.2 Bài toán vận tải	3
1.2.3 Bài toán cái túi	3
1.3 Tập lồi đa diện	4
1.3.1 Một số khái niệm cơ bản	4
1.4 Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát và một số phương pháp giải	5
1.4.1 Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát	5
1.4.2 Dạng chuẩn và dạng chính tắc	6
1.4.3 Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chuẩn và dạng chính tắc	6
1.5 Một số phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính	7
1.5.1 Phương pháp đơn hình [6]	7
1.5.2 Phương pháp đơn hình cải biên [6]	11
1.5.3 Phương pháp KARMARKAR (điểm trong)[6]	12
2 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát và phương pháp nón xoay	15
2.1 Một số khái niệm cơ bản liên quan đến hàm số tuyến tính	15
2.2 Khái niệm về miền ràng buộc tuyến tính không bị chặn, phương vô hạn chấp nhận được và hướng tăng, giảm của hàm gần lồi-gần lõm	17
2.3 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát	19
2.4 Khái niệm về nón tuyến tính, cạnh của nón và nón - min	19
2.4.1 Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính	19
2.4.2 Khái niệm về cạnh của nón đơn hình	20

2.4.3	Khái niệm về nón xoay $M(r,s)$ sinh ra từ nón M .	24
2.4.4	Định nghĩa Nón - Min	27
2.5	Phương pháp nón xoay tuyến tính	31
2.5.1	Thuật toán nón xoay tuyến tính	31
2.5.2	Bảng lập giải bài toán qui hoạch tuyến tính bởi thuật toán nón xoay tuyến tính và ví dụ minh hoạ	34
3	Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn và thuật toán nón xoay BBC	41
3.1	Thuật toán nón xoay giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn	41
3.1.1	Xây dựng nón – min ban đầu:	42
3.1.2	Thuật toán nón xoay giải bài toán qui hoạch tuyến tính với biến bị chặn:	43
3.1.3	Bảng nón xoay thu gọn giải bài toán qui hoạch tuyến tính với biến bị chặn bằng thuật toán BBC và ví dụ minh hoạ:	44
3.2	Thuật toán nón xoay BBC giải ví dụ KLEE – MINTY với $n=3$	51
3.3	Vài nét về độ phức tạp tính toán của thuật toán BBC và kết luận	56
	Tài liệu tham khảo	58

Mở đầu

Quy hoạch tuyến tính là một bộ phận quan trọng trong quy hoạch toán học. Nhiều vấn đề thực tế có thể mô tả dưới dạng bài toán quy hoạch tuyến tính. Các bài toán quy hoạch phi tuyến thường được giải quyết hiệu quả bằng cách xấp xỉ thông qua bài toán quy hoạch tuyến tính. Trong những thập kỷ qua, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ thông tin, quy hoạch toán học đã có những bước tiến lớn trong đó phải nói đến các phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính gắn liền với tên tuổi của các nhà toán học như L.V. Kantorovich (1939), George Dantzig (1947), Lemke (1954), Leonid Khachian (1979), Karmarkar (1984)...

Bài toán quy hoạch tuyến tính có hai dạng cơ bản là dạng chuẩn và dạng chính tắc, hai dạng này có quan hệ mật thiết với nhau. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là bài toán có miền ràng buộc là một hệ bất phương trình tuyến tính, còn bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là bài toán quy hoạch có miền ràng buộc là một hệ phương trình tuyến tính với các biến của nó có dấu không âm. Chúng ta đã biết, qua các phép biến đổi có thể dễ dàng đưa bài toán từ dạng chuẩn về dạng chính tắc, khi đó sẽ làm cho số chiều của bài toán tăng lên đáng kể nếu số ràng buộc bất phương trình tuyến tính của bài toán dạng chuẩn là lớn, vì phải thêm vào nhiều biến bù (để đưa các ràng buộc bất phương trình về phương trình).

Thuật toán đơn hình cổ điển và đơn hình đối ngẫu do George Dantzig và Lemke đề xuất vào những năm 1947 và 1954 đã giải bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chính tắc. Chúng được coi là những thuật toán cơ bản sử dụng giải các bài toán thực tế trong các viện nghiên cứu ứng dụng và giảng dạy ở các trường Đại học, Cao đẳng trong nước và trên Thế giới.

Để giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng thuật toán đơn hình hay đơn hình đối ngẫu cần biết trước một cơ sở đơn vị xuất phát ban đầu, đôi khi để có được một cơ sở như vậy chúng ta lại phải đi giải một bài toán quy hoạch tuyến tính khác hoặc giải một bài toán tương đương nhiều chiều hơn với một cơ sở “chấp nhận được” gọi là giả phương án và như vậy có thể ta phải trải qua khá nhiều bước lặp (không cần thiết) mới vượt khỏi các giả phương án để đi đến lời giải của bài toán ban đầu. Sự thật các bài toán quy hoạch tuyến tính được xây dựng từ thực tế thông thường đều ở dạng chuẩn và chưa biết được một điểm chấp nhận của miền ràng buộc. Như vậy để giải một bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình và đơn hình đối ngẫu, đòi hỏi chúng ta phải thực hành qua nhiều bước trung gian rồi mới nhận được lời giải của bài

toán gốc.

Chính vì những lý do trên nên luận văn này trình bày phương pháp nón xoay tuyến tính giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn và thuật toán nón xoay tuyến tính giải cho lớp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn gọi là các thuật toán nón xoay BBC, với cơ sở xuất phát ban đầu được nhận biết dễ dàng và trong trường hợp tổng quát có thể xuất phát từ gốc tọa độ là đỉnh của nón Ortang dương R_+^n hay từ véc tơ đơn vị hoặc gần đơn vị. Hơn thế nữa, dù miền ràng buộc của bài toán bị thoái hoá cũng không ảnh hưởng đến tính hữu hạn bước lặp của phương pháp nón xoay. Các thuật toán nón xoay này là các biến thể từ phương pháp nón-min giải bài toán quy hoạch gần lồi-gần lõm đề xuất trong cuốn sách “Quy hoạch gần lồi-gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính”([2]).

Trong các trường hợp khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bằng phương pháp cắt-nhánh cận hoặc tái tối ưu hoá thì việc áp dụng các thuật toán nón xoay tỏ ra rất hiệu quả. Một số ví dụ bằng số minh hoạ cho các thuật toán nón xoay giải chúng trong luận văn này đều được lấy từ sách, giáo trình và nhiều tài liệu, công trình nghiên cứu trong nước và nước ngoài của các tác giả khác nhau. Kết quả tính toán đi đến lời giải của các bài toán này bởi thuật toán nón xoay cho thấy hầu hết số bước lặp và số phép toán trong mỗi bước lặp đều ít hơn rõ rệt so với việc giải chúng bằng các thuật toán đơn hình hay đơn hình đối ngẫu. Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1 trình bày bài toán quy hoạch tổng quát, các khái niệm cơ bản về tập lồi và một số mô hình thực tế đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn cùng với một số phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính quen thuộc và thông dụng.

Chương 2 trình bày những khái niệm cơ bản liên quan đến hàm số tuyến tính, từ đó làm cơ sở lý thuyết cho việc xây dựng phương pháp nón xoay tuyến tính giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi biết một nón-min của hàm mục tiêu bài toán.

Chương 3 (dựa trên phương pháp nón xoay đề nghị trong chương 2) trình bày việc xây dựng thuật toán nón xoay BBC giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn và các ví dụ bằng số minh hoạ cho thuật toán giải này.

Thuật toán nón xoay BBC giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn đề nghị trong luận văn này được xây dựng chi tiết, các bước của thuật toán được trình bày sao cho chúng ta có thể dễ dàng lập trình chuyển sang các chương trình trên máy tính bằng các

ngôn ngữ như Pascal, C, Java... Luận văn này hoàn thành dựa trên các cuốn sách “Quy hoạch gần lồi - gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính” ([2]) và cuốn “Quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay” [1] và trên các sách, tài liệu có trong phần tài liệu tham khảo.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Hoàng Thị Ninh

Chương 1

Bài toán tối ưu tổng quát và một số mô hình bài toán thực tế

1.1 Bài toán tối ưu tổng quát

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biểu như sau:
Cực đại hoá (cực tiểu hoá) hàm

$$f(x) \rightarrow \max(\min), \quad (1.1)$$

Với các điều kiện

$$g_i(x)(\leq, =, \geq)b_i, i = 1, \dots, m. \quad (1.2)$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.3)$$

Bài toán (1.1)–(1.3) được gọi là một quy hoạch, hàm $f(x)$ được gọi là hàm mục tiêu, các hàm $g_i(x), i = 1, \dots, m$ được gọi là các hàm ràng buộc, mỗi đẳng thức trong hệ (1.2) được gọi là một ràng buộc.

Tập hợp

$$D = \{x \in X \mid g_i(x)(\leq, =, \geq)b_i, i = 1, \dots, m\}, \quad (1.4)$$

Được gọi là miền ràng buộc (hay miền chấp nhận được). Mỗi điểm $(x = x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ được gọi là một phương án (hay một lời giải chấp nhận được). Một phương án $x^* \in D$ đạt cực đại (hay cực tiểu) của hàm mục tiêu, cụ thể là :

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D,$$

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D.$$

Được gọi là phương án tối ưu (hay là lời giải) của bài toán (1.1) - (1.3).

Sau đây chúng ta sẽ trình bày các bước xây dựng, khảo sát và phân tích mô hình toán học từ một vấn đề thực tế.

Việc mô hình hóa toán học cho một vấn đề thực tế có thể chia ra làm 4 bước:

Bước 1: Xây dựng mô hình định tính cho vấn đề thực tế, tức là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất và xác lập các quy luật mà chúng phải tuân theo.

Bước 2: Xây dựng mô hình cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình định tính.

Bước 3: Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giải quyết bài toán hình thành trong Bước 2.

Bước 4: Phân tích và kiểm định lại các kết quả thu được trong Bước 3. Ở đây có thể xảy ra một trong hai khả năng sau:

Khả năng 1: Mô hình và các kết quả tính toán phù hợp với thực tế. Khi đó cần lập một bảng tổng kết ghi rõ cách đặt vấn đề, mô hình toán học thuật toán tối ưu, chương trình, cách chuẩn bị số liệu để đưa vào máy tính.

Khả năng 2: Mô hình và các kết quả tính toán không phù hợp với thực tế. Trong trường hợp này cần phải xem xét các nguyên nhân của nó.

1.2 Một số mô hình thực tế

1.2.1 Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu phát biểu như sau: Giả sử một xí nghiệp sản xuất n loại sản phẩm và sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau. Ta đưa vào các kí hiệu sau, x_j là lượng sản phẩm loại j ($j = 1, \dots, n$) mà xí nghiệp sản xuất, c_j là tiền lãi (hay giá bán) đối với một đơn vị sản phẩm j ($j = 1, \dots, n$), a_{ij} là suất chi phí tài nguyên loại i để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j , b_i là lượng dự trữ tài nguyên loại i ($i = 1, \dots, m$). Trong các điều kiện đã cho, hãy xác định các giá trị $x_j, j = 1, \dots, n$ sao cho tổng tiền lãi (hay tổng giá trị sản lượng hàng hóa) là lớn nhất với số tài nguyên hiện có.

Mô hình toán học có dạng bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

Với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

1.2.2 Bài toán vận tải

Có m kho hàng cùng chứa một loại hàng hóa (đánh số $i = 1, \dots, m$), lượng hàng hóa ở kho i là $a_i, i = 1, \dots, m$. Gọi kho i là điểm phát i . Có n địa điểm tiêu thụ loại hàng trên (đánh số $j = 1, \dots, n$ với nhu cầu tiêu thụ ở điểm j là $b_j, j = 1, \dots, n$). Gọi điểm tiêu thụ j là điểm thu j .

Gọi c_{ij} là cước vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ điểm phát i đến điểm thu j . Hàng có thể chuyển từ điểm phát i bất kỳ đến điểm thu j bất kỳ. Hãy lập kế hoạch vận chuyển hàng hóa từ các điểm phát tới các điểm thu sao cho tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất. Ký hiệu x_{ij} là lượng hàng vận chuyển từ điểm phát i đến điểm thu j . Khi đó ta có mô hình toán học:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min,$$

Với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Ngoài ra còn có điều kiện thu phát:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

1.2.3 Bài toán cái túi

Một người du lịch muốn đem theo một cái túi nặng không quá b kilogram. Có n loại đồ vật mà anh ta dự định đem theo. Mỗi một đồ vật loại j có khối lượng a_j kilogram và giá trị c_j . Người du lịch muốn chất vào

túi các đồ vật sao cho tổng giá trị đồ vật đem theo là lớn nhất. Ký hiệu x_j là số đồ vật loại j sẽ chất vào túi. Ta có bài toán sau:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_j \text{ nguyên}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Đây là một bài toán quy hoạch nguyên.

1.3 Tập lồi đa diện

1.3.1 Một số khái niệm cơ bản

1. Đường thẳng, đoạn thẳng, siêu phẳng

Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$. Ta gọi đường thẳng qua a, b là tập hợp điểm có dạng:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda a + (1 - \lambda)b, \forall \lambda \in \mathbb{R}^1\}.$$

Nếu $0 \leq \lambda \leq 1$ thì ta có đoạn thẳng $[a, b]$. Trong không gian hai chiều, phương trình bậc nhất $ax + by = c$ xác định một đường thẳng, một bất phương trình $ax + by \leq c$ xác định một nửa mặt phẳng. Trong không gian ba chiều, một phương trình bậc nhất $ax + by + cz = d$ xác định một mặt phẳng, một bất phương trình $ax + by + cz \leq d$ xác định một nửa không gian.

Ta có thể suy rộng kết quả trên cho không gian n chiều. Tập hợp tất cả các điểm trong không gian n chiều thỏa mãn phương trình

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \alpha.$$

được gọi là một siêu phẳng.

Một bất phương trình $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq \alpha$ xác định một nửa không gian.

2. Tập lồi

Tập $X \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall \lambda \in [0, 1]$ thì $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ hay nói cách khác là nếu X chứa hai điểm x, y thì nó cũng chứa cả đoạn thẳng $[x, y]$. Ví dụ về các tập lồi: Không gian Euclid, các nửa không gian, mặt phẳng, nửa mặt phẳng, hình chữ nhật, hình vuông, hình elip, hình hộp, hình cầu....

3. Tập lồi đa diện

Tập hợp các điểm $x(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn hệ bất phương trình tuyến tính

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

Là một tập lồi. Người ta còn gọi đó là một tập lồi đa diện hay còn gọi là khúc lồi. Một tập lồi đa diện giới nội gọi là một đa diện lồi. Giao của tất cả các tập lồi chứa tập X gọi là bao lồi của nó, ký hiệu $[X]$.

1.4 Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát và một số phương pháp giải

1.4.1 Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

Để nhất quán lập luận ta xét bài toán tìm cực tiểu, sau đó ta sẽ xét cách chuyển bài toán tìm cực đại sang tìm cực tiểu. Bài toán tổng quát của QHTT có dạng:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Nếu gặp bài toán Max, tức là

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad x \in D.$$

Thì giữ nguyên ràng buộc và đưa về bài toán Min bằng cách

$$\bar{f}(x) = - \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad x \in D.$$

Nếu bài toán Min có phương án tối ưu là x^* thì bài toán Max cũng có phương án tối ưu là x^* và

$$f_{\max} = -\bar{f}_{\min}.$$

1.4.2 Dạng chuẩn và dạng chính tắc

- Dạng chuẩn:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

- Dạng chính tắc:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

1.4.3 Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chuẩn và dạng chính tắc

Bất kỳ quy hoạch tuyến tính nào cũng có thể đưa về một trong hai dạng chuẩn hoặc chính tắc nhờ phép biến đổi tuyến tính sau

1. Một ràng buộc:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i,$$

Có thể đưa về ràng buộc:

$$-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i,$$

bằng cách nhân hai vế với (-1) và viết lại:

$$\sum_{j=1}^n a'_{ij} x_j \leq b'_i,$$

2. Một ràng buộc đẳng thức:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i,$$

Có thể thay bằng hai ràng buộc bất đẳng thức:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i,$$

$$-\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i,$$

3. Một biến x không bị ràng buộc dấu có thể thay bởi hiệu của hai biến không âm bằng cách đặt: $x_j = x_j^+ - x_j^-$ với $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$,

4. Một ràng buộc bất đẳng thức:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i,$$

Có thể đưa về ràng buộc đẳng thức bằng cách đưa vào biến phụ $y_i \geq 0$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i = b_i.$$

Về nguyên tắc, áp dụng nhiều lần các phép biến đổi 1, 2 và 3 ta có thể đưa một bài toán QHTT bất kỳ về dạng chuẩn, sau đó áp dụng nhiều lần phép biến đổi 4 ta sẽ đưa nó về dạng chính tắc.

1.5 Một số phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính

1.5.1 Phương pháp đơn hình [6]

Xét bài toán QHTT dưới dạng chính tắc:

$$[< c, x > \rightarrow \max], \quad (1.8)$$

$$[Ax = b], \quad (1.9)$$

$$x \geq 0. \quad (1.10)$$

Thuật toán đơn hình

Bước 1: Xây dựng bảng đơn hình xuất phát. Tìm một phương án cực biên xuất phát x và cơ sở của nó $A_j, j \in J$.

- Xác định các số z_{jk} bởi hệ phương trình

$$A_k = \sum_{j \in J} z_{jk} A_j, \quad (1.11)$$

- Đối với mỗi $k \notin J$, tính các ước lượng

$$\Delta_k = \sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k, \quad (1.12)$$

Còn với $j \neq 0$ thì $\Delta_j = 0$

- Tính giá trị hàm mục tiêu

$$Z_0 = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

Bước 2: Kiểm tra tối ưu.

Nếu $\Delta_k \geq 0$, $k \notin J$ thì x là phương án tối ưu, dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Tìm vectơ đưa vào cơ sở. Có hai khả năng xảy ra :

- Tồn tại $k \notin J$ sao cho $\Delta_k < 0$ và $z_{jk} \leq 0$, với mọi $j \in J$ thì bài toán QHTT không có lời giải tối ưu (Z không bị chặn trên). Dừng thuật toán.
- Đối với mỗi $k \notin J$ sao cho $\Delta_k < 0$ đều tồn tại $j \in J : z_{jk} > 0$. Khi đó chọn chỉ số s theo tiêu chuẩn:

$$\Delta_s = \min \{ \Delta_k \mid \Delta_k < 0 \}. \quad (1.13)$$

Đưa các vectơ A_s vào cơ sở.

Bước 4: Tìm vectơ loại khỏi cơ sở. Xác định

$$\theta_s = \min \left\{ \frac{x_j}{z_{rs}} \mid z_{js} > 0 = \frac{x_r}{z_{rs}} \right\}. \quad (1.14)$$

Và đưa vectơ A_r ra khỏi cơ sở.

Bước 5: Chuyển sang phương án cực biên mới và cơ sở mới. Cơ sở mới là $\{A_j, j \in J'\}$ với $J' = J \setminus \{r\} \cup \{s\}$.

Phương án cực biên mới x' được tính theo công thức:

$$x'_j = \begin{cases} x_j - (x_r/z_{rs})z_{js}, & \text{nếu } j \neq r \\ x_r/z_{rs}, & \text{nếu } j = r \end{cases} \quad (1.15)$$

Khai triển của các vectơ A_k theo các vectơ cơ sở mới được tính theo công thức (1.18). Quay lên bước 2.

Công thức đổi cơ sở và bảng đơn hình

Ta xét các công thức chuyển từ phương án cực biên x với cơ sở j sang phương án cực biên x' với cơ sở j' .

Ta đã có công thức :

$$x'_j = \begin{cases} x_j - (x_r/z_{rs})z_{js}, & \text{nếu } j \neq r \\ x_r/z_{rs}, & \text{nếu } j = r \end{cases}$$

Để tính các thành phần của x' , bây giờ ta thiết lập công thức tính các số z'_{jk} ta có :

$$A_s = \sum_{j \in J} z_{js} A_j,$$

Suy ra

$$A_r = \frac{1}{z_{rs}}(A_s - \sum_{j \in J, j \neq r} z_{js} A_j), \quad (1.16)$$

Mặt khác, ta có

$$A_k = \sum_{j \in J} z_{jk} A_j = \sum_{j \in J, j \neq r} z_{jk} A_j + z_{rk} A_r, \quad (1.17)$$

Thay biểu thức của A_r từ (1.16) vào (1.17), ta được

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{j \in J, j \neq r} z_{jk} A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}}(A_s - \sum_{j \in J, j \neq r} z_{js} A_j) \\ &= \sum_{j \in J, j \neq r} (z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js}) A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} A_s. \end{aligned}$$

Đây là công thức biểu diễn A_k qua cơ sở mới $J' = J \setminus \{r\} \cup \{s\}$.

Bởi vậy, ta có:

$$z'_{jk} = \begin{cases} z_{jk} - (z_{rk}/z_{rs})z_{js}, & \text{nếu } j \neq r \\ z_{rk}/z_{rs}, & \text{nếu } j = r \end{cases} \quad (1.18)$$

Sau khi có z'_{jk} ta tính:

$$\Delta'_k = \sum_{j \in J'} z'_{js} c_j - c_k. \quad (1.19)$$

Để dễ tính toán, tổng mỗi bước lập ta thiết lập bảng đơn hình. Nếu tất cả các số trong dòng cuối (trừ hàm mục tiêu f) đều không âm, nghĩa

là $\Delta_k \geq 0, \forall k$, khi đó x là phương án tối ưu.

c_j	Cơ Sở	Phương Án	$c_1 \dots c_j \dots c_r \dots c_m \dots c_k \dots c_s \dots c_n$
			$A_1 \dots A_j \dots A_r \dots A_m \dots A_k \dots A_s \dots A_n$
c_1	A_1	x_1	$1 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots z_{1k} \dots z_{1s} \dots z_{1n}$
...	...	...	...
c_j	A_j	x_j	$0 \dots 1 \dots 0 \dots 0 \dots z_{jk} \dots z_{js} \dots z_{jn}$
...	...	...	...
c_r	A_r	x_r	$0 \dots 0 \dots 1 \dots 0 \dots z_{rk} \dots z_{rs} \dots z_{rn}$
...	...	...	...
c_m	A_m	x_m	$0 \dots 0 \dots 0 \dots 1 \dots z_{mk} \dots z_{ms} \dots z_{mn}$
...	...	...	...
...	...	f	$0 \dots 0 \dots 0 \dots 0 \dots \Delta_k \dots \Delta_s \dots \Delta_n$

Nếu dòng cuối (không kể f) có những số âm thì xem thử có cột nào cắt dòng cuối ở một số âm mà mọi số trong cột đó đều âm hay không. Nếu có cột nào như thế thì bài toán không có phương án tối ưu. Nếu trái lại thì chọn cột s sao cho

$$\Delta_s = \min \{ \Delta_k / \Delta_k < 0 \}.$$

thì chọn (trong số các dòng cắt cột s ở những số dương) dòng r sao cho

$$\theta_s = \frac{x_r}{z_{rs}} = \min \left\{ \frac{x_j}{z_{js}} / z_{js} > 0 \right\}.$$

Cột s gọi là cột quay. Véc tơ A_s được đưa vào cơ sở. Dòng r gọi là dòng quay. Véc tơ A_r được đưa ra khỏi cơ sở.

Phần tử $z_{rs} > 0$ là giao của cột quay và dòng quay gọi là phần tử chính của phép quay. Các phần tử $z_{js}, j \neq r$ gọi là phần tử quay.

Các công thức (1.15), (1.18) và (1.19) gọi là các công thức đổi cơ sở. Bảng đơn hình mới suy được từ bảng cũ bằng cách thay c_r, A_r trong dòng quay bằng c_s, A_s . Sau đó thực hiện các phép biến đổi dưới đây:

- 1) Chia mỗi phần tử ở dòng quay cho phần tử chính (được số 1 ở vị trí của z_{rs} cũ). Kết quả thu được gọi là dòng chính.
- 2) Lấy mỗi dòng khác trừ đi tích của dòng chính nhân với phần tử quay tương ứng (được số 0 ở mọi vị trí còn lại của cột quay).

Dòng mới = dòng cũ tương ứng – dòng chính $\times$ phần tử quay.

Lưu ý rằng sau phép quay thì ở vị trí Δ_s ta thu được số 0 vì lúc này A_s trở thành véc tơ đơn vị cơ sở, nghĩa là ta đã làm mất số âm nhỏ nhất ở dòng cuối của bảng cũ.

Toàn thể phép biến đổi trên gọi là phép quay xung quanh phần tử chính z_{rs} . Sau khi thực hiện phép quay ta có một phương án mới và một cơ sở mới. Nếu chưa đạt yêu cầu, nghĩa là còn $\Delta_k < 0$ thì ta lại tiếp tục quá trình.

1.5.2 Phương pháp đơn hình cải biên [6]

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc (1.8)–(1.10). Quá trình tính toán của phương pháp đơn hình cải biên được bố trí trong hai bảng sau :

Bảng 1

b_1	a_{11}	$\dots$	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$				
b_m	a_{m1}	$\dots$	a_{ms}	$\dots$	a_{mn}
	c_1	$\dots$	c_s	$\dots$	c_n
$\Delta(1)$	Δ_1	$\dots$	Δ_s	$\dots$	Δ_n
$\Delta(2)$	Δ_1	$\dots$	Δ_s	$\dots$	Δ_n

trong (bảng 1) $m + 1$ dòng đầu lưu các hệ số a_{ij}, b_i, c_j của bài toán (1.8)–(1.10). Từ dòng $m + 2$ trở đi của (bảng 1) lưu các ước lượng Δ_j của từng bước lặp theo công thức :

$$\Delta_k = c_j \overline{Z_k} - c_k = c_j A_j^{-1} A_k - c_k.$$

Bảng 2

c_j	A_j	q_0	q_1	$\dots$	q_m	a_s	$(-)$
c_{j1}	A_{j1}	q_{10}	q_{11}	$\dots$	q_{1m}	z_{1s}	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
c_{jr}	A_{jr}	q_{r0}	q_{r1}	$\dots$	q_{rm}	z_{rs}	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
c_{jm}	A_{jm}	q_{m0}	q_{m1}	$\dots$	q_{mm}	z_{ms}	
		$q_{m+1,0}$	$q_{m+1,1}$	$\dots$	$q_{m+1,m}$	Δ_s	

Bảng này gọi là bảng đơn hình cải biên. Cột c_j ghi hệ số hàm mục tiêu ứng với các biến cơ sở. Cột A_j ghi các vectơ cơ sở, do đó ta cũng nhận được chỉ số các biến cơ sở. Cột q_0 : m phần tử đầu là phương án cực biên đang xét, phần tử cuối là trị số hàm mục tiêu (1.8). Ma trận nghịch đảo cơ sở A_j^{-1} : m dòng đầu của các cột $q_1 \dots q_m$. Phương án của bài toán đối ngẫu, nó được tính theo công thức

$$q_{m+1,0}, q_{m+1,1}, \dots, q_{m+1,m} = c_j A_j^{-1}. \quad (1.20)$$

Cột A_s : m phần tử đầu của cột là khai triển của vectơ đưa vào cơ sở A_s theo cơ sở, phần tử cuối chính là Δ_s .

Thuật toán gồm các bước:

Bước 0: Xây dựng bảng đơn hình xuất phát. Giả sử ta có cơ sở A_j , $j \in J$ và phương án cực biên x . Tính ma trận nghịch đảo A_j^{-1} .

Tính dòng $m + 1$ ứng với các cột $q_1 \dots q_m$: phần tử $q_{m+1,j}$ là tích vô hướng

của cột q_j với cột c_j .

Bước 1: Tìm cột quay và kiểm tra tối ưu.

Tính ước lượng các cột theo công thức $\Delta_k = c_j \bar{z}_k - c_k$ và $A_k = A_j \bar{z}_k$

A_j là tích vô hướng của dòng $m + 1$ thuộc bảng 2 với cột j của bảng 1.

Nếu $\Delta_j \geq 0, \forall j$ thì phương án cực biên đang xét là tối ưu. Trái lại, ta xác định vectơ A_s đưa vào cơ sở theo công thức:

$$\Delta_s = \min\{\Delta_j | \Delta_j < 0, \forall j \notin J\}$$

Bước 2: Tìm dòng quay.

Trước tiên tính cột quay, tức là cột A_s của bảng 2 theo công thức:

$$A_k = A_j \bar{Z}_k \text{ và } \bar{Z}_k = A_j^{-1} A_k.$$

Lấy cột A_s của bảng 1 nhân vô hướng với từng dòng của ma trận A_j^{-1} ta sẽ được từng phần tử của cột A_s thuộc bảng 2. Phần tử cuối của cột A_s bảng 2 lấy là Δ_s .

Nếu $z_{js} \leq 0, \forall j \in J$ thì hàm mục tiêu bài toán quy hoạch tuyến tính không bị chặn trên. Nếu trái lại ta xác định vectơ A_r loại khỏi cơ sở theo công thức:

$$\theta_s = \frac{q_{r0}}{z_{rs}} = \min_{j \in J} \left\{ \frac{q_{j0}}{z_{js}} \mid z_{js} > 0 \right\}.$$

Cột (-) trong bảng 2 để lưu q_{j0}/z_{js} với $j \in J$.

Bước 3: Biến đổi ma trận nghịch đảo mở rộng. Đưa A_s vào cơ sở thay cho A_r và biến đổi toàn bộ các cột $q_0, q_1 \dots q_m$ theo công thức:

$$q'_{jk} = \begin{cases} q_{jk} - (q_{rk}/z_{rs})z_{js}, & \text{nếu } j \neq r \\ q_{rk}/z_{rs}, & \text{nếu } j = r \end{cases} \quad (1.21)$$

Phần tử chính của phép biến đổi là z_{js} . Quay lên bước 1.

1.5.3 Phương pháp KARMARKAR (điểm trong)[6]

Thay cho việc đi theo các cạnh của tập lồi đa diện ràng buộc, từ đỉnh nọ tới đỉnh kia, cho đến khi đạt tới đỉnh tối ưu, các phương pháp điểm trong đi tìm lời giải từ phía trong ràng buộc. Do các phương pháp này không bị bó buộc đi theo các cạnh, cũng như độ dài di chuyển có thể thay đổi, nên rất có lý khi nghĩ rằng phương pháp điểm trong có lẽ nhanh hơn phương pháp đi theo cạnh. Tuy nhiên vẫn chưa có thuật toán điểm trong nào tỏ ra ưu việt hơn phương pháp đơn hình. Vì thế, phần lớn người dùng

phần mềm quy hoạch tuyến tính để giải thường xuyên các bài toán cỡ lớn vẫn quen dùng phần mềm dựa trên các thuật toán đơn hình.

Karmarkar năm (1984) đã đề ra một loại thuật toán điểm trong mới, cho phép giải quy hoạch tuyến tính trong thời gian đa thức. Về cơ bản thuật toán Karmarkar khác với thuật toán đơn hình, song hai thuật toán này vẫn có nhiều điểm chung. Trước hết đó là cả hai đều là các thuật toán lặp và đều xuất phát từ một phương án chấp nhận được của bài toán cần giải. Thứ hai là ở mỗi bước lặp cả hai thuật toán đều di chuyển từ một phương án hiện có tới một phương án tốt hơn. Cuối cùng, quá trình này đều được lặp đi lặp lại cho đến khi đạt tới phương án tối ưu.

Sự khác nhau cơ bản giữa hai thuật toán là ở bản chất của các phương án cần kiểm tra. Trong phương pháp đơn hình, các phương án kiểm tra là những phương án cực biên và việc di chuyển dọc theo cạnh trên biên của miền ràng buộc. Còn trong thuật toán Karmarkar phương án kiểm tra là các điểm trong không nằm trên biên của miền ràng buộc. Vì thế thuật toán Karmarkar và các biến thể của nó có tên gọi là thuật toán điểm trong hay đường trong.

Hơn nữa, trong thuật toán Karmarkar sự di chuyển theo hướng làm cải tiến giá trị mục tiêu với tốc độ nhanh nhất có thể, đồng thời sau mỗi bước lặp tiến hành biến đổi miền ràng buộc để đưa phương án hiện có vào gần tâm của miền, nhờ đó tạo khả năng thực hiện tốt nhất việc di chuyển tiếp theo. Việc làm này được gọi là thay đổi thước đi (rescaling) trong quá trình giải bài toán.

Các phương pháp điểm trong hiện đang trong quá trình phát triển, vì thế khó có thể dự đoán chính xác về vai trò tương lai của nó so với phương pháp đơn hình. Tuy nhiên, hiện nay có thể dự đoán rằng phương pháp đơn hình vẫn là thuật toán hiệu quả nhất để giải các bài toán quy hoạch tuyến tính dưới vài trăm ràng buộc. Đối với các bài toán có khoảng vài trăm ràng buộc và có số biến như thế hoặc lớn hơn thì thời gian giải theo cả hai phương pháp là gần như nhau. Song phương pháp điểm trong sẽ ngày càng được sử dụng rộng rãi để giải các bài toán cỡ tương đối lớn.

Đối với các bài toán cỡ lớn hơn, phương pháp điểm trong tỏ ra nhanh hơn so với phương pháp đơn hình trong đại đa số trường hợp. Khi kích thước lên tới hàng chục ngàn ràng buộc thì phương pháp điểm trong có lẽ là phương pháp duy nhất giải được bài toán. Sở dĩ như vậy là do thuật toán điểm trong có ưu điểm nổi bật là đối với các bài toán cỡ lớn chúng không đòi hỏi nhiều bước lặp như các bài toán cỡ nhỏ.

Chẳng hạn, bài toán với (10.000) ràng buộc, chỉ đòi hỏi dưới (100) bước

lặp. Dẫu rằng thời gian tính toán trên mỗi bước lặp tuy lớn, song số bước lặp ít như thế sẽ làm cho bài toán vẫn giải được. Trái lại, phương pháp đơn hình có lẽ cần tới (20.000) bước lặp, với con số lớn như vậy không thể giải xong bài toán trong thời hạn cho phép.

Chương 2

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát và phương pháp nón xoay

2.1 Một số khái niệm cơ bản liên quan đến hàm số tuyến tính

Hàm tuyến tính là một hàm gần lồi – gần lõm và không bị chặn trên $\mathbb{R}^n$ ([1]). Các kết quả lý thuyết cũng như phương pháp tìm cực tiểu đối với hàm gần lồi-gần lõm đề nghị trong sách “Quy hoạch gần lồi-gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính” ([2]) có thể áp dụng đối với hàm tuyến tính. Vì vậy, trước khi trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn và thuật toán nón xoay, sau đây chúng ta nhắc lại một số khái niệm, định nghĩa, các định lý, hệ quả và các tính chất cơ bản của hàm gần lồi-gần lõm. Việc chứng minh các định lý, hệ quả và các tính chất này, chúng ta có thể tìm trong cuốn sách nói trên.

Định nghĩa 2.1.1. Hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là một hàm tựa lõm (quasi-concave) nếu $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ và $\forall \alpha \in [0, 1]$ ta luôn có

$$f(\alpha.x + (1 - \alpha).y) \geq \min\{f(x), f(y)\}.$$

Định nghĩa 2.1.2. Hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là một hàm tựa lồi (quasi-convex) nếu $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, và $\forall \alpha \in [0, 1]$ ta luôn có:

$$f(\alpha.x + (1 - \alpha).y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Định nghĩa 2.1.3. Hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là một hàm gần lõm (almost-concave) nếu nó là một hàm tựa lõm và thoả mãn

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \min\{f(x), f(y)\}, x, y \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq f(y), \forall \alpha \in (0, 1).$$

Định nghĩa 2.1.4. Hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là một hàm gần lồi (almost-convex) nếu nó là một hàm tựa lồi và thoả mãn

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \max\{f(x), f(y)\}, x, y \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq f(y), \forall \alpha \in (0, 1).$$

Định nghĩa 2.1.5. Hàm $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ được gọi là một hàm gần lồi - gần lõm (almost-convex and almost-concave) nếu nó vừa là một hàm gần lồi vừa là một hàm gần lõm.

Các Định nghĩa (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) là các khái niệm đó được đưa ra trong [1] và [7]. Từ các định nghĩa trên ta suy ra một số tính chất sau của hàm vừa tựa lồi vừa tựa lõm

Tính chất 2.1.1. $\min\{f(x), f(y)\} \leq f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in (0, 1).$

Tính chất 2.1.2. Nếu $f(x) = f(y)$ thì

$$f(x) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = f(y), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Nếu f là một hàm gần lồi-gần lõm thì nó sẽ thoả mãn các tính chất:

Tính chất 2.1.3. Nếu $f(x) = f(y)$ thì

$$f(x) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = f(y), \forall \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

Tính chất 2.1.4. Nếu $f(x) \neq f(y)$ thì $\min\{f(x), f(y)\} < f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ và $\forall \alpha \in (0, 1).$

Ta có thể chứng minh được rằng nếu f là một hàm gần lồi thì cực tiểu địa phương sẽ là cực tiểu toàn cục.

Định lý 2.1.1. Nếu f là một hàm gần lồi - tựa lõm, và $f(x) \leq f(y), \forall x \neq y$ thì $f(x) \leq f(x + \alpha(y - x)), \forall \alpha \geq 0.$

Định lý này cho ta kết luận rằng hàm f gần lồi - tựa lõm và $\forall x \neq y$, mà $f(x) < f(y)$ thì x là điểm cực tiểu của f trên tia $x + \alpha(y - x), \forall \alpha \geq 0.$

Hệ quả 2.1.1. Nếu f là một hàm gần lồi - tựa lõm, và $f(x) \leq f(x + z), \forall x, z \neq 0$, thì $f(x) \leq f(x + \alpha z), \forall \alpha \geq 0.$

Định lý 2.1.2. Giả sử f là hàm liên tục, gần lồi - tựa lõm và z là một điểm tuỳ ý thuộc $\mathbb{R}^n$, nếu $f(y) \geq f(x)$ và $f(x + z) \geq f(x)$ thì $f(y + \alpha z) \geq f(y) \geq f(y - \alpha z) \geq 0, \forall \alpha \geq 0.$

Định lý 2.1.3. Nếu f là một hàm vừa tựa lồi vừa tựa lõm trên $\mathbb{R}^n$ và $z^1, z^2, \dots, z^N$ là các điểm bất kỳ thuộc $\mathbb{R}^n$ ta luôn có

$$\min\{f(z^1), \dots, f(z^N)\} \leq f(\alpha_1 z^1 + \dots + \alpha_N z^N) \leq \max\{f(z^1), \dots, f(z^N)\}$$

$$\forall \alpha_i \in [0, 1]; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1; i = 1, 2, \dots, N.$$

2.2 Khái niệm về miền ràng buộc tuyến tính không bị chặn, phương vô hạn chấp nhận được và hướng tăng, giảm của hàm gần lồi-gần lõm

Ta gọi $P := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$.
 A^i là véc tơ dòng và $A^i \in \mathbb{R}^n, m \geq n$, và $A^i(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), b_i \in \mathbb{R}^1, i = 1, 2, \dots, m$. Hạng của hệ A_i bằng n . Tập P xác định như trên gọi là miền ràng buộc tuyến tính và nó là một miền lồi. Ở đây chúng ta kí hiệu $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ với $X := (x_1, x_2, \dots, x_n), Y := (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Định nghĩa 2.2.1. Miền ràng buộc tuyến tính P được gọi là không bị chặn nếu nó tồn tại ít nhất một điểm chấp nhận x^0 thuộc P và một điểm $z \neq 0$ sao cho $x^0 + \alpha z \in P, \forall \alpha \geq 0$, điểm z được gọi phương vô hạn chấp nhận của P tại x^0 . Tập hợp các điểm $x = x^0 + \alpha z, \forall \alpha \geq 0$ gọi là tia vô hạn chấp nhận được của P .

Từ định nghĩa ta dễ dàng chứng minh được tính chất sau:

Tính chất 2.2.1. $z \neq 0$ là một phương vô hạn chấp nhận được tại $x^0 \in P$ khi và chỉ khi $\langle A^i, z \rangle \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Tính chất 2.2.2. Nếu z là một phương vô hạn chấp nhận được tại $x^0 \in P$ thì z là phương vô hạn chấp nhận được tại mọi điểm $x \in P$.

Định nghĩa 2.2.2. (1). Điểm $z \neq 0$ được gọi là một hướng tăng từ x^0 của hàm gần lồi – gần lõm f nếu $f(x^0) < f(x^0 + \alpha z), \forall \alpha > 0$, hay ta nói f tăng theo hướng z từ x^0 .

(2). Điểm $z \neq 0$ được gọi là một hướng giảm từ x^0 của hàm gần lồi – gần lõm f nếu $f(x^0) > f(x^0 + \alpha z), \forall \alpha > 0$, hay ta nói f giảm theo hướng z từ x^0 .

(3). Điểm $z \neq 0$ gọi là hướng không đổi của f từ x^0 , nếu $f(x^0) = f(x^0 + \alpha z), \forall \alpha \in \mathbb{R}^1$.

Định lý 2.2.1. Nếu tồn tại $\alpha_1 > 0$ mà $f(x) < f(x + \alpha_1 z)$ thì z là một hướng tăng từ x của hàm gần lồi - gần lõm f .

Hệ quả 2.2.1. Nếu $f(x) < f(x + z)$ thì z là một hướng tăng từ x của hàm gần lồi - gần lõm f .

Định lý 2.2.2. Nếu tồn tại $\alpha_1 > 0$ mà $f(x) > f(x + \alpha_1 z)$ thì z là một hướng giảm từ x của hàm gần lồi-gần lõm f .

Hệ quả 2.2.2. Nếu $f(x) > f(x + z)$ thì z là một hướng giảm từ x của hàm gần lồi - gần lõm f .

Định nghĩa 2.2.3. Hàm gần lồi – gần lõm f được gọi là không bị chặn trên $\mathbb{R}^n$ nếu $\forall z \neq 0$ và $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ta có:

- 1) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f(x + \alpha z) = +\infty$, với z là hướng tăng từ x của hàm f .
- 2) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f(x + \alpha z) = -\infty$, với z là hướng giảm từ x của hàm f .

Định lý 2.2.3. Giả sử $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm, nếu $f(x^0) \leq f(x^0 + z)$ thì $f(x) \leq f(x + \alpha z)$, $\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Định lý (2.2.3) cho ta kết luận rằng nếu z là một hướng không giảm của f tại x^0 thì nó cũng là một hướng không giảm của f tại mọi điểm x thuộc $\mathbb{R}^n$. Do đó ta gọi z là một hướng không giảm của hàm f . Từ Định lý (2.2.3) ta dễ dàng chứng minh được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.3. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm, nếu $f(x^0) > f(x^0 + z)$, thì z là một hướng giảm của hàm f , $\forall x \in \mathbb{R}^n$, tức là $f(x) > f(x + \alpha z)$, $\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Và ta gọi z là một hướng giảm của hàm f .

Hệ quả 2.2.4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm, $z \neq 0$ là một hướng giảm của hàm f khi và chỉ khi $f(0) > f(\alpha z)$, $\forall \alpha > 0$.

Hệ quả 2.2.5. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm, nếu $f(x^0) < f(x^0 + z)$, thì z là một hướng tăng của hàm f , $\forall x \in \mathbb{R}^n$, tức là $f(x) < f(x + \alpha z)$, $\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Và ta gọi z là một hướng tăng của hàm f .

Hệ quả 2.2.6. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm, $z \neq 0$ là một hướng tăng của hàm f khi và chỉ khi: $f(0) < f(\alpha z)$, $\forall \alpha > 0$.

Hệ quả 2.2.7. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm và $f(x) > f(y)$ thì $z = x - y$ là một hướng tăng của hàm f và $z = y - x$ là một hướng giảm của hàm f .

Từ Định lý (2.2.3) và Hệ quả (2.2.3) chúng ta dễ dàng có hệ quả dưới đây:

Hệ quả 2.2.8. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm, nếu $z \neq 0$ và $f(x^0) = f(x^0 + z)$, tức z là một hướng không đổi của f tại x^0 thì z là một hướng không đổi của hàm f tại mọi điểm x thuộc $\mathbb{R}^n$, tức là $f(x) = f(x + \alpha z)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Và ta nói z là một hướng không đổi của hàm f .

Hệ quả 2.2.9. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm, $z \neq 0$ là một hướng không đối của hàm f khi và chỉ khi $f(0) = f(\alpha z), \forall \alpha \in \mathbb{R}^1$ và $\alpha \neq 0$.

Từ tính chất thứ (2.1.2) và Hệ quả (2.2.8) ta có thể chứng minh dễ dàng hệ quả sau:

Hệ quả 2.2.10. Nếu $x \neq y$ mà $f(x) = f(y)$ thì $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1$ và $\alpha \neq 0$. chúng ta có $z = \alpha(x - y)$ là hướng không đối của hàm f và $f(u) = f(u + \alpha(x - y)), \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}^1$.

Hệ quả 2.2.11. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ là hàm gần lồi-gần lõm, $z \neq 0$ là một hướng không giảm của hàm f khi và chỉ khi $f(0) \leq f(\alpha z), \forall \alpha \in \mathbb{R}^1$ và $\alpha > 0$.

Chúng ta đã biết, bất kỳ một bài toán quy hoạch tuyến tính nào cũng dễ dàng đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát dưới đây.

2.3 Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát

Xét bài toán qui hoạch tuyến tính sau đây gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát:

$$(L) \begin{cases} f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \rightarrow \min \\ x \in P_L := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m.\} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n, A^i$ là véc tơ dòng và $A^i \in \mathbb{R}^n, m \geq n, A^i(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \neq O(0, \dots, 0), C(c_1, c_2, \dots, c_n), b_i \in \mathbb{R}^1, i = 1, 2, \dots, m$. Hạng của hệ $A^i (i = 1, 2, \dots, m)$ bằng n . Giả thiết này rất bình thường bởi miền ràng buộc P_L của bài toán quy hoạch tuyến tính bao giờ cũng có ràng buộc về dấu của biến x .

2.4 Khái niệm về nón tuyến tính, cạnh của nón và nón - min

2.4.1 Khái niệm về nón đơn hình tuyến tính

Xét tập M được xác định từ n ràng buộc tuyến tính nào đó của P_L , cụ thể là :

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i \in I\}, \quad (2.1)$$

Trong đó $I := \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \subset \{1, 2, \dots, m\}, |I| = n$ (ở đây $|I|$ là số đo hay là số phần tử của tập I) và A_i với $i \in I$ là một hệ độc lập tuyến tính. Tập M gọi là nón đơn hình tuyến tính của hệ ràng buộc P_L với đỉnh x^M là nghiệm (được xác định) thỏa mãn hệ sau

$$\langle A^i, x \rangle + b_i = 0, \forall i \in I, \quad (2.2)$$

Hệ véc tơ A^i với $i \in I$ được gọi là cơ sở của nón M , hay còn gọi là cơ sở của đỉnh x^M . Tập I được gọi là tập chỉ số của cơ sở của nón M .

2.4.2 Khái niệm về cạnh của nón đơn hình

Với mỗi $i \in I$ tập hợp các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn hệ

$$\langle A^r, x \rangle + b_r = 0, \forall r \in I \setminus \{i\}, \quad (2.3)$$

gọi là đường thẳng i của nón M . Tập các điểm x thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \langle A^r, x \rangle + b_r = 0, \forall r \in I \setminus \{i\} \\ \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0 \end{cases}$$

gọi là cạnh i của nón M . Với mỗi $i (i \in I)$, véc tơ $z_M^i, (i \in I)$, xác định bởi hệ

$$\begin{cases} \langle A^r, z_M^i \rangle = 0, \forall r \in I, r \neq i, \\ \langle A^i, z_M^i \rangle = -1 \end{cases} \quad (2.4)$$

gọi là véc tơ chỉ phương của cạnh i của nón M .

Đỉnh x^M của nón M có thể xác định từ (2.2) trong trường hợp biết hệ véc tơ chỉ phương $z_M^i, (i \in I)$, thì chúng ta có thể sử dụng công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i \cdot z_M^i, \quad (2.5)$$

Định lý 2.4.1. Nếu x^M là đỉnh của nón M được xác định từ (2.2), và hệ véc tơ chỉ phương $z_M^i (i \in I)$ của cạnh i của nón M xác định từ (2.4) thì chúng ta có thể xác định đỉnh x^M từ công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i \cdot z_M^i,$$

Chứng minh. Thật vậy, trong vế Trái của (2.2) với mỗi $i' (i' \in I)$, chúng ta thay $x = \sum_{i \in I} b_i \cdot z_M^i$ ta được:

$$\langle A^{i'}, \sum_{i \in I} b_i \cdot z_M^i \rangle + b_{i'} = \sum_{i \in I} b_i \langle A^{i'} \cdot z_M^i \rangle + b_{i'} = -b_{i'} + b_{i'} = 0,$$

(vì z_M^i thoả mãn (2.4)).

Do hệ $A^{i'}$ ($i \in I$) là hệ độc lập tuyến tính nên nghiệm của hệ (2.2) là duy nhất, suy ra ta có công thức (2.5).

Vậy từ Định lý (2.4.1) ta suy ra trong trường hợp biết hệ véc tơ chỉ phương z_M^i ($i \in I$) thì chúng ta có thể xác định đỉnh x^M từ công thức sau:

$$x^M = \sum_{i \in I} b_i \cdot z_M^i,$$

Dễ thấy tập các điểm x nằm trên cạnh i của nón M đều có thể biểu diễn như sau:

$$x = x^M + \lambda_i z_M^i, \lambda_i \geq 0, \forall i \in I. \quad (2.6)$$

□

Định lý 2.4.2. Hệ véc tơ chỉ phương z_M^i với $i \in I$ là một hệ độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử ngược lại hệ véc tơ chỉ phương với $i \in I$ là một hệ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó sẽ tồn tại một trong n véc tơ của hệ được biểu diễn tuyến tính qua các véc tơ còn lại như sau:

$$z_M^{i_0} = \sum_{i \in I(i \neq i_0)} \beta_i \cdot z_M^i,$$

Vậy

$$\langle A^{i_0}, z_M^{i_0} \rangle = \langle A^{i_0}, \sum_{i \in I(i \neq i_0)} \beta_i \cdot z_M^i \rangle = \sum_{i \in I(i \neq i_0)} \beta_i \cdot \langle A^{i_0}, z_M^i \rangle = 0,$$

Điều này mâu thuẫn với (2.4): $\langle A^{i_0}, z_M^{i_0} \rangle = -1$. □

Định lý 2.4.3. Với mỗi x bất kỳ thuộc nón M , luôn có biểu diễn duy nhất:

$$x = x^M + \sum_{i \in I} \lambda_i z_M^i, \lambda_i \geq 0, \forall i \in I.$$

Ngược lại, mọi điểm $x = x^M + \sum_{i \in I} \alpha_i z_M^i, \forall \alpha_i \geq 0, \forall i \in I$ đều thuộc nón M .

Chứng minh. Vì hệ véc tơ chỉ phương z_M^i với $i \in I$ là một hệ độc lập tuyến tính nên tồn tại bộ số duy nhất $\lambda_i, (\forall i \in I)$, sao cho ta có biểu diễn :

$$x - x^M + \sum_{i \in I} \lambda_i z_M^i \Leftrightarrow x = x^M + \sum_{i \in I} \lambda_i z_M^i, \quad (2.7)$$

Mặt khác, vì x là một điểm của nón đơn hình M , từ (2.7) và (2.4) ta suy ra với mỗi $r \in I$:

$$\begin{aligned} \langle A^r, x \rangle + b_r &= \langle A^r, x^M + \sum_{i \in I} \lambda_i z_M^i \rangle + b_r \leq 0 \\ \Leftrightarrow \langle A^r, x^M \rangle + b_r + \sum_{i \in I} \lambda_i \langle A^r, z_M^i \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_r \langle A^r, z_M^r \rangle &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_r &\geq 0, \forall r \in I. \end{aligned}$$

□

Điều ngược lại ta dễ dàng thay biểu diễn của x vào các ràng buộc tương ứng xác định nón đơn hình M để kiểm tra và thấy thoả mãn. Từ định lý này, chúng ta có thể định nghĩa khác về nón đơn hình M như sau:

Định nghĩa 2.4.1. Cho trước một điểm x^M và n véc tơ độc lập tuyến tính $z_M^1, z_M^2, \dots, z_M^n$ khác 0.

$$\text{Tập } M := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = x^M + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot z_M^i, \forall \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \right\}$$

Được gọi là nón đơn hình với đỉnh là x^M và các véc tơ chỉ phương của n cạnh là $z_M^1, z_M^2, \dots, z_M^n$.

Và chúng ta nói rằng nón M được xác định từ hệ gốc cơ sở $\{x^M, z_M^1, z_M^2, \dots, z_M^n\}$.

Định lý 2.4.4. Giả sử M là nón đơn hình xác định bởi (2.1) với tập chỉ số cơ sở I , hệ các véc tơ chỉ phương của n cạnh là z_M^i ($i \in I$) xác định bởi (2.4).

Khi đó với mọi b'_i ($i \in I$), nón:

$$M' := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b'_i \leq 0, i \in I\}$$

Có hệ các véc tơ chỉ phương của n cạnh của nó là $z_{M'}^i = z_M^i$ ($i \in I$ và đỉnh $x^{M'}$ được xác định biểu diễn qua hệ z_M^i ($\forall i \in I$) như sau :

$$x^{M'} = \sum_{i \in I} b'_i z_{M'}^i = \sum_{i \in I} b'_i z_M^i, \quad (2.8)$$

Chứng minh. Thật vậy, $\forall r \in I$ vì nón M và M' có cùng hệ véc tơ cơ sở là A^i ($\forall i \in I$) nên ta có $z_{M'}^i = z_M^i$ ($i \in I$).

Lại có $\langle A^r, x^{M'} \rangle + b'_r = \langle A^r, \sum_{i \in I} b'_i z_M^i \rangle + b'_r = b'_r \langle A^r, z_M^r \rangle + b'_r =$

$$-b'_r + b'_r = 0,$$

Ta ký hiệu:

$$J^+(x^M) := \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : \langle A^j, x^M \rangle + b_j > 0\}. \quad (2.9)$$

Rõ ràng khi $J^+(x^M) = \emptyset$ thì x^M chính là một điểm chấp nhận của bài toán (L). Chúng ta giả sử $J^+(x^M) \neq \emptyset$. Với mỗi $s \in J^+(x^M)$, chúng ta ký hiệu như sau:

$$I^s := \{i \in I : \langle A^s, z_M^i \rangle \neq 0\} \subset I := \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \quad (2.10)$$

$$I^0 := \{i \in I : \langle A^s, z_M^i \rangle = 0\} \subset I := \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \quad (2.11)$$

Ta thấy $I = I^0 \cup I^s$.

Với mỗi $i \in I^s$ thì đường thẳng $x = x^M + \alpha z_M^i$ sẽ giao với siêu phẳng $\langle A^s, x \rangle + b_s = 0$ tại điểm :

$$x^i = x^M + \alpha_i z_M^i, \quad (2.12)$$

trong đó :

$$\alpha_i = -\frac{\langle A^s, x^M \rangle + b_s}{\langle A^s, z_M^i \rangle}, \quad (2.13)$$

Ta gọi

$$I_+^s := \{i \in I^s : \alpha_i > 0\} = \{i \in I^s : \langle A^s, z_M^i \rangle < 0\} = \{i_{s1}, i_{s2}, \dots, i_{sq}\} \quad (2.14)$$

và

$$I_-^s := \{i \in I^s : \alpha_i < 0\}.$$

Rõ ràng $I_+^s \subset I^s \subset I$. □

Định lý 2.4.5. $\forall s \in J^+(x^M)$ ta luôn có $I^s \neq \emptyset$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại $I^s = \emptyset$ thì ta có $I^0 = I := \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Vậy từ đây và (2.11) ta suy ra $\langle A^s, z_M^i \rangle = 0, \forall i \in I$. Mặt khác theo Định lý (2.4.2) thì hệ vectơ $z_M^i (\forall i \in I)$ là độc lập tuyến tính nên suy ra $A^s = O(0, 0, \dots, 0)$ (véc tơ không). Điều này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán (L) là $A^i(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \neq O(0, 0, \dots, 0), \forall i = \{1, 2, \dots, m\}$. □

Định lý 2.4.6. $I_+^s = \emptyset$ thì tập chấp nhận được của bài toán (L) là rỗng

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại bài toán (L) có phương án và x^0 là một điểm chấp nhận của (L), thì x^0 phải là một điểm của nón M và theo Định lý (2.4.3) nó sẽ được biểu diễn như sau:

$$x^0 = x^M + \sum_{i \in I} \lambda_i z_M^i, \lambda_i \geq 0, \forall i \in I. \quad (2.15)$$

Từ giả thiết $A_+^s = \theta$ ta suy ra $\alpha_i \leq 0, i \in I^s$, từ (2.13) lại suy ra

$$\langle A^s, z_M^i \rangle > 0, \forall i \in I^s \Rightarrow \langle A^s, z_M^i \rangle \geq 0, \forall i \in I^s, \quad (2.16)$$

Thay (2.15) vào vế trái của ràng buộc s của P_L ta thấy

$$\begin{aligned} \langle A^s, x^0 \rangle + b_s &= \langle A^s, x^M + \sum_{i \in I} \lambda_i z_M^i \rangle + b_s \\ &= \langle A^s, x^M \rangle + b_s + \sum_{i \in I} \lambda_i \langle A^s, z_M^i \rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Từ (2.15) (2.16) và do $s \in J^+(x^M)$, ta thấy vế phải của (2.17) là số dương. Vậy suy ra

$$\langle A^s, x^0 \rangle + b_s > 0.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết x^0 là một điểm chấp nhận được của bài toán (L). $\square$

Định lý này cho ta kết luận rằng nếu bài toán (L) có ít nhất một điểm chấp nhận được thì I_+^s là một tập khác rỗng

2.4.3 Khái niệm về nón xoay $M(r, s)$ sinh ra từ nón M

Giả sử M là một nón đơn hình tuyến tính của hệ ràng buộc P_L xác định bởi (2.1) và $J^+(x^M) \neq \emptyset$. Khi đó với mỗi $r \in I^s$ tập hợp các điểm x thỏa mãn hệ bất đẳng thức:

$$\begin{cases} \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, \forall i \in I, i \neq r \\ \langle A^s, x \rangle + b_s \leq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Xác định một nón đơn hình tuyến tính gọi là nón xoay $M(r, s)$ đỉnh là

$$x^{M(r, s)} = x^r = x^M + \alpha_r \cdot z_M^r, \quad (2.19)$$

trong đó α_r được xác định từ (2.13). Đỉnh x^r thỏa mãn

$$\langle A^i, x^r \rangle + b_i = 0, \forall i \in I(r, s) = (I \cup \{s\}) \setminus \{r\}.$$

Tập chỉ số mới $I(r, s)$ nhận được từ tập chỉ số cơ sở cũ I bằng cách loại chỉ số r ra khỏi tập cơ sở cũ, đưa chỉ số s vào thay. Ta nói nón xoay $M(r, s)$ sinh ra từ nón M .

Bổ đề 2.4.1. Hệ A^i với $i \in I(r, s)$ là độc lập tuyến tính.

Chứng minh. Thật vậy, nếu ngược lại hệ A_i với $i \in I(r, s)$ là phụ thuộc tuyến tính thì dễ dàng suy ra tồn tại biểu diễn:

$$A^s = \sum_{i \in I \setminus \{r\}} \beta_i A^i \Rightarrow \langle A^s, z_M^r \rangle = \sum_{i \in I \setminus \{r\}} \beta_i \langle A^i, z_M^r \rangle = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với $\langle A^s, z_M^r \rangle \neq 0$ vì $(r \in I^s)$.

Các véc tơ chỉ phương $z_{M(r,s)}^i, i \in I(r, s)$ của nón mới $M(r, s)$ được xác định từ (2.4) với tập chỉ số cơ sở mới $I(r, s)$ hoặc xác định từ một trong các công thức đơn giản dưới đây theo các x^i, x^r, z_M^i, z_M^r (xác định từ (2.4), (2.12), (2.13)) với i, r thuộc I là tập chỉ số của cơ sở cũ:

$$z_{M(r,s)}^i = \begin{cases} z_M^i, & \text{khi } i \in I^0 \\ z_M^i - \frac{\alpha_r}{\alpha_i} z_M^r, & \text{khi } i \in I^s, i \neq r \\ -\frac{1}{\langle A^s, z_M^r \rangle} \cdot z_M^r, & \text{khi } i = s, \end{cases} \quad (2.20)$$

hay

$$z_{M(r,s)}^i = \begin{cases} z_M^i, & \text{khi } i \in I^0 \\ z_M^i - \frac{\langle A^s, z_M^i \rangle}{\langle A^s, z_M^r \rangle} z_M^r, & \text{khi } i \in I^s, i \neq r \\ -\frac{1}{\langle A^s, z_M^r \rangle} \cdot z_M^r, & \text{khi } i = s. \end{cases} \quad (2.21)$$

□

Các công thức này gọi là các công thức đổi cơ sở, bổ đề dưới đây chứng minh các công thức trên.

Bổ đề 2.4.2. Giả sử M là nón xác định bởi

$M := \{x \in R^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i \in I\}$. Với các véc tơ chỉ phương z_M^i của các cạnh xác định theo (2.4), các giao điểm x_i xác định theo (2.12), (2.13). Khi đó nón $M(r, s)$ có đỉnh là $x^{M(r,s)} = x^r$ xác định từ (2.19) với cơ sở tương ứng là $I(r, s) = (I \cup \{s\} \setminus \{r\})$. Và các véc tơ chỉ phương của các cạnh tương ứng là $z_{M(r,s)}^i$ được xác định bởi (2.21).

Chứng minh. Ta có với mỗi $i \in I$ thì:

$$\langle A^j, z_M^i \rangle = 0, \forall j \in I, j \neq i. \quad (2.22)$$

$$\langle A^i, z_M^i \rangle = -1. \quad (2.23)$$

Ta cần chứng minh với mỗi $i \in I(r, s)$ thì:

$$\langle A^j, z_{M(r,s)}^i \rangle = 0, \forall j \in I(r, s), j \neq i,$$

$$\langle A^i, z_{M(r,s)}^i \rangle = -1.$$

Thật vậy

1) Với mỗi $i \in I(r, s)$ mà $i \in I^s, i \neq r$ và chú ý tới (2.22), (2.23) ta có

$$\langle A^j, z_{M(r,s)}^i \rangle = \langle A^j, z_M^i - \frac{\alpha_r}{\alpha_i} z_M^r \rangle = \langle A^j, z_M^i \rangle - \frac{\alpha_r}{\alpha_i} \langle A^j, z_M^r \rangle = 0,$$

Vậy

$$\langle A^j, z_{M(r,s)}^i \rangle = 0, \forall j \in I(r, s), j \neq i,$$

Còn

$$\begin{aligned} \langle A^i, z_{M(r,s)}^i \rangle &= \langle A^i, z_M^i - \frac{\alpha_r}{\alpha_i} z_M^r \rangle \\ &= \langle A^i, z_M^i \rangle - \frac{\alpha_r}{\alpha_i} \langle A^i, z_M^r \rangle \\ &= \langle A^i, z_M^i \rangle \\ &= -1. \end{aligned}$$

Tóm lại ta có: Với mỗi $i \in I^s, i \neq r$.

$$\langle A^j, z_{M(r,s)}^i \rangle = 0, \forall j \in I(r, s), j \neq i,$$

$$\langle A^i, z_{M(r,s)}^i \rangle = -1.$$

(chú ý $\alpha_i \neq 0$, vì $i \in I^s$).

2) Với $i = s$ ta chứng minh như sau: Ta có

$$\begin{aligned} \langle A^j, z_{M(r,s)}^s \rangle &= \langle A^j, -\frac{1}{\langle A^s, z_M^r \rangle} z_M^r \rangle \\ &= -\frac{1}{\langle A^s, z_M^r \rangle} \langle A^j, z_M^r \rangle \\ &= 0, \forall j \in I(r, s), j \neq s. \end{aligned}$$

Còn

$$\begin{aligned} \langle A^s, z_{M(r,s)}^s \rangle &= \langle A^s, -\frac{1}{\langle A^s, z_M^r \rangle} z_M^r \rangle \\ &= -\frac{1}{\langle A^s, z_M^r \rangle} \langle A^s, z_M^r \rangle \\ &= -1. \end{aligned}$$

3) Với mỗi $i \in I(r, s)$ mà $i \in I^0$ và chú ý tới (2.22), (2.23) ta có :

$$\langle A^j, z_{M(r,s)}^i \rangle = \langle A^j, z_M^i \rangle = 0, \forall j \in I(r, s), j \neq i,$$

Còn

$$\langle A^i, z_{M(r,s)}^i \rangle = \langle A^i, z_M^i \rangle = -1.$$

Tóm lại ta có: Với mỗi $i \in I(r, s)$ thì:

$$\langle A^j, z_{M(r,s)}^i \rangle = 0, \forall j \in I(r, s), j \neq i,$$

$$\langle A^i, z_{M(r,s)}^i \rangle = -1.$$

Bổ đề đã được chứng minh. □

2.4.4 Định nghĩa Nón - Min

Định nghĩa 2.4.2. [Nón - Min] Nón đơn hình tuyến tính M với đỉnh là x^M được gọi là nón - min của $f(x) = \langle C, x \rangle$ của bài toán (L) nếu

$$f(x^M) \leq f(x), \forall x \in M.$$

Ta nói M là một nón - min của bài toán (L) khi M là một nón - min của hàm mục tiêu f của bài toán (L) .

Giả sử M là một nón đơn hình xác định từ hệ (2.1) đỉnh là x^M với véc tơ chỉ phương của cạnh i là z_M^i ($\forall i \in I$) xác định bởi (2.4) ta có định lí sau.

Định lý 2.4.7. Nếu $f(x^M) \leq f(x^M + z_M^i), \forall i \in I$ thì M là một nón - min của hàm f .

Chứng minh. Từ giả thiết và theo Hệ quả (2.1.1) ta suy ra :

$$f(x^M) \leq f(x^M + \lambda_i \cdot z_M^i), \forall \lambda_i \geq 0, \forall i \in I, \quad (2.24)$$

Mặt khác, $\forall x \in M$ theo Định lý (2.4.2) ta có:

$$x = x^M + \sum_{i \in I} \lambda_i z_M^i, \forall \lambda_i \geq 0, \forall i \in I,$$

Vậy nếu $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i = 0, \lambda_i = 0, \forall i \in I$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng.

Còn nếu $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i > 0$ thì ta có:

$$f(x) = f(x^M + \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot z_M^i) = f\left(\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} (x^M + \lambda z_M^i)\right), \quad (2.25)$$

Ta thấy $\frac{\lambda_i}{\lambda} \in [0, 1]$ và $\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ nên theo Định lý (2.1.3) ta có:

$$\min_{i \in I} \{f(x^M + \lambda \cdot z_M^i)\} \leq f\left(\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} (x^M + \lambda \cdot z_M^i)\right), \quad (2.26)$$

Từ (2.24), (2.25), (2.26) dễ dàng suy ra:

$$f(x^M) \leq f\left(\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda} (x^M + \lambda \cdot z_M^i)\right) = f(x).$$

Vậy M là nón min của f . □

Từ định lý (2.4.6) và hệ quả (2.2.11) ta dễ dàng suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 2.4.1. M là một nón - min của hàm $f(x) = \langle C, x \rangle$ khi và chỉ khi

$$\langle C, z_M^i \rangle \geq 0, \forall i \in I.$$

Định lý 2.4.8. Giả sử M là một nón đơn hình xác định từ hệ (2.1) đỉnh là x^M , với véc tơ chỉ phương của cạnh i là $z_M^i (i \in I)$ xác định bởi (2.4) là một nón-min của hàm f .

Khi đó mọi nón $M' := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b'_i \leq 0, i \in I, \forall b'_i \in \mathbb{R}^1\}$ cũng là nón - min của hàm f .

Chứng minh. Theo Định lý (2.4.4) thì hệ véc tơ chỉ phương của các cạnh của nón M và M' là như nhau nên theo khái niệm về véc tơ chỉ phương từ (2.4) thì dễ dàng thấy rằng kết luận của định lý là đúng.

Định lý này cho ta thấy một nón đơn hình là một nón - min của một hàm thì nó không phụ thuộc vào vị trí đỉnh của nón đó mà chỉ phụ thuộc vào tọa độ các véc tơ chỉ phương của các cạnh của nón đó.

Giả sử M là nón min của hàm mục tiêu $f(x) = \langle C, x \rangle$ của bài toán (L). Gọi

$$V^s := \left\{ v \in I_+^s : f(x^v) = \min_{i \in I_+^s} \{f(x^i)\} \right\}, \quad (2.27)$$

Vậy

$$V^s := \left\{ v \in I_+^s : \langle C, x^v \rangle = \min_{i \in I_+^s} \{ \langle C, x^i \rangle \} \right\},$$

Thay x^v và x^i xác định từ công thức (2.12) vào trên ta có

$$\begin{aligned}
V^s &:= \left\{ v \in I_+^s : \langle C, x^v \rangle = \min_{i \in I_+^s} \{ \langle C, x^i \rangle \} \right\} \\
&= \left\{ v \in I_+^s : \langle C, x^M + \alpha_v \cdot z_M^v \rangle = \min_{i \in I_+^s} \{ \langle C, x^M + \alpha_i \cdot z_M^i \rangle \} \right\} \\
&= \left\{ v \in I_+^s : \alpha_v \cdot \langle C, z_M^v \rangle = \min_{i \in I_+^s} \{ \alpha_i \cdot \langle C, z_M^i \rangle \} \right\} \\
&= \left\{ v \in I_+^s : -(\langle A^s, x^M \rangle + b_s) \cdot \frac{\langle C, z_M^v \rangle}{\langle A^s, z_M^v \rangle} \right. \\
&\quad \left. = \min_{i \in I_+^s} \left\{ -(\langle A^s, x^M \rangle + b_s) \cdot \frac{\langle C, z_M^i \rangle}{\langle A^s, z_M^i \rangle} \right\} \right\} \\
&= \left\{ v \in I_+^s : -\frac{\langle C, z_M^v \rangle}{\langle A^s, z_M^v \rangle} = \min_{i \in I_+^s} \left\{ -\frac{\langle C, z_M^i \rangle}{\langle A^s, z_M^i \rangle} \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Vậy

$$V^s := \left\{ v \in I_+^s : -\frac{\langle C, z_M^v \rangle}{\langle A^s, z_M^v \rangle} = \min_{i \in I_+^s} \left\{ -\frac{\langle C, z_M^i \rangle}{\langle A^s, z_M^i \rangle} \right\} \right\}. \quad (2.28)$$

□

Định lý 2.4.9. Với mọi $r \in V^s$ xác định từ (2.28) nếu M là một nón-min của hàm mục tiêu của bài toán (L) thì nón $M(r, s)$ xác định từ (2.18) cũng là một nón-min của hàm mục tiêu của bài toán (L) .

Chứng minh. Ta có nón $M(r, s)$ có đỉnh là $x^M(r, s) = x^r$ các phương vô hạn của n cạnh là $z_{M(r,s)}^i$ xác định từ (2.21). Ta phải chứng minh

$$f(x^r) \leq f(x^r + \alpha_i \cdot z_{M(r,s)}^i), \quad \forall i \in I(r, s),$$

Theo giả thiết M là một nón-min của bài toán L nên chúng ta có

$$f(x^M) \leq f(x^M + \alpha_i \cdot z_M^i), \quad \forall i \in I, \forall \alpha_i > 0,$$

Đặc biệt

$$f(x^M) \leq f(x^M + \alpha_r \cdot z_M^r) = f(x^r),$$

Vậy áp dụng Định lý (2.1.2) với $x = x^M$, $y = x^r$, $z = \alpha_i z_M^i$, $i \in I^0$ và $i = s$ chúng ta được :

$$f(x^r) \leq f(x^r + \alpha_i \cdot z_M^i), \quad \forall i \in I^0 \text{ và } i = s.$$

Từ đây và (2.21) ta dễ dàng suy ra

$$f(x^r) \leq f(x^r + \alpha_i \cdot z_{M(r,s)}^i), \quad \forall i \in I^0 \text{ và } i = s, \quad (2.29)$$

Mặt khác, vì $r \in V^s$ nên ta có

$$f(x^r) \leq f(x^i), \forall i \in I_+^s.$$

Từ đây theo định lý (2.1.1) chúng ta được

$$f(x^r) \leq f(x^i + \alpha.(x^i - x^r)), \forall \alpha \geq 0, \forall i \in I_+^s \text{ và } i \neq r,$$

Vậy từ đây và (2.21) ta dễ dàng suy ra

$$f(x^r) \leq f(x^i + \alpha.z_{M(r,s)}^i), \forall \alpha \geq 0, \forall i \in I_+^s \text{ và } i \neq r, \quad (2.30)$$

Với mỗi $i \in \{I \setminus \{I_+^s \cup I^0\}\}$ suy ra $\alpha_i < 0$. Vậy theo định lý (2.1.2) ta dễ dàng có

$$f(x^i) \leq f(x^M + \alpha_i.z_M^i) \leq f(x^M), \forall i \in \{I \setminus \{I_+^s \cup I^0\}\},$$

nhưng

$$f(x^M) \leq f(x^r) \Rightarrow f(x^i) \leq f(x^r), \forall i \in \{I \setminus \{I_+^s \cup I^0\}\},$$

Từ đây và theo định lý (2.1.1) chúng ta có

$$f(x^i) \leq f(x^i + \alpha.(x^r - x^i)), \forall \alpha \geq 0, \forall i \in \{I \setminus \{I_+^s \cup I^0\}\},$$

Áp dụng định lý (2.1.2) ta được

$$f(x^r) \leq f(x^r + \alpha.(x^r - x^i)), \forall \alpha \geq 0, \forall i \in \{I \setminus \{I_+^s \cup I^0\}\},$$

Từ đây và theo (2.21) ta dễ dàng suy ra

$$f(x^r) \leq f(x^r + \alpha.z_{M(r,s)}^i), \forall \alpha \geq 0, \forall i \in \{I \setminus \{I_+^s \cup I^0\}\}, \quad (2.31)$$

Kết hợp từ (2.20), (2.29), (2.30) và (2.31) ta có

$$f(x^r) \leq f(x^r + \alpha_i.z_{M(r,s)}^i), \forall i \in I(r, s).$$

Vậy hàm f là một hàm không giảm dọc theo các cạnh $z_{M(r,s)}^i$ đối với mọi $i \in I(r, s)$. Điều này có nghĩa là $M(r, s)$ là một nón -min của bài toán (L) . Định lý đã được chứng minh. $\square$

Đỉnh $x^{M(r,s)}$ của nón xoay $M(r, s)$ còn có thể xác định từ công thức sau đây khi biết các véc tơ chỉ phương các cạnh của nón xoay $M(r, s)$:

$$x^{M(r,s)} = \sum_{i \in I(r,s)} b_i.z_{M(r,s)}^i. \quad (2.32)$$

Phần dưới đây chúng ta sẽ xây dựng thuật toán nón xoay giải bài toán (L) dựa vào cơ sở lý thuyết trình bày ở các phần trên và Định lý (2.4.9).

2.5 Phương pháp nón xoay tuyến tính

Một áp dụng hay chính xác hơn là một biến thể quan trọng của phương pháp nón – min giải bài toán qui hoạch gần lồi-gần lõm đề nghị trong cuốn sách “Quy hoạch gần lồi-gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính” (NXB Khoa học và kỹ thuật năm 2011) ([2]) trình bày dưới đây sẽ cho chúng ta phương pháp giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với cơ sở xuất phát từ đỉnh một nón-min của hàm mục tiêu gọi là phương pháp nón xoay tuyến tính được thể hiện dưới dạng thuật toán chi tiết.

Thông thường việc biết một nón-min của bài toán nói chung là dễ dàng. Chẳng hạn trong trường hợp miền ràng buộc P_L của bài toán (L) là đa diện ta có thể dễ dàng chỉ ra được một chóp đơn hình với $n + 1$ đỉnh đã biết chứa P_L , đỉnh nào của chóp đơn hình này có giá trị của hàm mục tiêu nhỏ nhất tại đó so với các giá trị của hàm mục tiêu tại các đỉnh còn lại của chóp thì nón chứa chóp đơn hình tương ứng với đỉnh này chính là một nón-min của bài toán (L) .

Thuật toán đề nghị giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn trình bày ở đây chính là một biến thể của thuật toán nón-min giải bài toán quy hoạch gần lồi - gần lõm nói trên với miền ràng buộc thuộc dạng bất phương trình tuyến tính ([2]).

Xét bài toán (L) trong trường hợp biết một nón – min của bài toán (L) . Ý tưởng của thuật toán nón xoay tuyến tính giải bài toán (L) như sau:

Xuất phát từ một nón-min M ban đầu của hàm mục tiêu bài toán, chúng ta kiểm tra xem đỉnh của nó có thuộc miền chấp nhận của bài toán không (tức là đỉnh này có thoả mãn tất cả các ràng buộc không) nếu đỉnh này thuộc miền chấp nhận thì nó là một lời giải của bài toán (L) . Ngược lại ta xây dựng nón xoay mới $M(r, s)$ (vẫn là nón-min) từ nón cũ M của bài toán (L) và lặp lại quá trình kiểm tra nón xoay mới này tương tự như đối với nón M , quá trình này được thực hiện cho đến khi đỉnh của nón xoay mới $M(r, s)$ thuộc miền chấp nhận của bài toán (L) (khi miền ràng buộc của bài toán (L) có phương án) hoặc sẽ phát hiện ra miền ràng buộc của bài toán (L) là rỗng.

2.5.1 Thuật toán nón xoay tuyến tính

Bước chuẩn bị (bước 0). Giả sử ta đã biết M_0 là nón - min của bài toán (L) với tập chỉ số cơ sở là $I_0 := \{i_1^0, i_2^0, \dots, i_n^0\}$, $x^0 = x^{M_0}$ là đỉnh của M_0 và các véc tơ chỉ phương của các cạnh i của nón M^0 là

$$z_0^i = z_{M_0}^i (i \in I^0).$$

Bước k ($k=0, 1, 2, \dots$). Giả sử M_k là nón - min của bài toán (L) (đã được xây dựng) với tập chỉ số cơ sở, đỉnh và các véc tơ chỉ phương của các cạnh tương ứng là $I_k := \{i_1^k, i_2^k, \dots, i_n^k\}$, $x^k = x^{M_k}$ và $z_k^i = z_{M_k}^i$. Xác định tập $J^+(x^k)$ theo (2.9):

$$J^+(x^k) := \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : \langle A^j, x^k \rangle + b_j > 0\}.$$

1) Nếu $J^+(x^k) = \emptyset$ thì dừng lại, x^k chính là một lời giải của bài toán (L).

2) Nếu $J^+(x^k) \neq \emptyset$, ta chọn chỉ số đưa vào cơ sở theo một trong ba khả năng sau:

Ta chọn s_k là một chỉ số tùy ý thuộc $J^+(x^k)$ hoặc ta chọn

$$s_k = \min\{j : j \in J^+(x^k)\} \text{ hoặc } s_k = \max\{j : j \in J^+(x^k)\}, \quad (2.33)$$

gọi là qui tắc min (hoặc gọi là qui tắc max) và xác định

$$I^{s_k} := \{i \in I_k : \langle A^{s_k}, z_k^i \rangle \neq 0\},$$

$$I_+^{s_k} := \{i \in I^{s_k} : \langle A^{s_k}, z_k^i \rangle < 0\} = \{i \in I^{s_k} : \alpha_i^k > 0\} = \{i_{s_k 1}^k, i_{s_k 2}^k, \dots, i_{s_k q_k}^k\}. \quad (2.34)$$

2.1) Nếu $I_+^{s_k} = \emptyset$ thì dừng lại, suy ra bài toán (L) không có phương án.

2.2) Nếu $I_+^{s_k} \neq \emptyset$ thì với mỗi $i \in I_+^{s_k}$ ta tính các giao điểm của siêu phẳng $\langle A^{s_k}, x \rangle + b_{s_k} = 0$ với các cạnh có các véc tơ chỉ phương tương ứng là z_k^i của nón M_k theo (2.12)

$$x_k^i = x^{M_k} + \alpha_i^k z_k^i = x^k + \alpha_i^k z_k^i,$$

Tiếp theo gọi

$$V^{s_k} := \left\{ v \in I_+^{s_k} : -\frac{\langle C, z_k^v \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^v \rangle} = \min_{i \in I_+^{s_k}} \left\{ -\frac{\langle C, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle} \right\} \right\} \quad (2.35)$$

và chọn chỉ số đưa ra khỏi cơ sở theo một trong ba cách sau:

Ta chọn $r_k(s_k)$ là chỉ số tùy ý thuộc V^{s_k} hoặc ta chọn

$$r_k(s_k) = \min\{v : v \in V^{s_k}\} \text{ hoặc } r_k = \max\{v : v \in V^{s_k}\}. \quad (2.36)$$

(cách chọn này gọi là qui tắc chọn min (hoặc là qui tắc chọn max)).

Và ta xây dựng nón xoay $M_{k+1} = M_k(r_k, s_k)$ sinh ra từ nón - min M_k (xem mục(2.4.3)) tập chỉ số cơ sở là $I_{k+1} = I_k(r_k, s_k) = (I_k \cup \{s_k\} \setminus \{r_k\})$ và các véc tơ chỉ phương z_{k+1}^i (sử dụng (2.21))

$$z_{k+1}^i = \begin{cases} z_k^i & \text{khi } i \in I_k^0 \\ (z_k^i - \frac{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k}) & \text{khi } i \in I_k^{s_k}, i \neq r_k \\ -\frac{1}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k} & \text{khi } i = s_k. \end{cases} \quad (2.37)$$

Từ (2.19)

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^{M_k(r_k, s_k)} = x_k^{r_k} = x^k + \alpha_{r_k}^k z_k^{r_k} = x^k - \frac{\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k}}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} z_k^{r_k} \\ &= \sum b_i z_{k+1}^i. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Quay trở lại bước k với $k \leftarrow k + 1$.

Một số chú ý:

1) Từ Định lý (2.4.9) ta dễ dàng có Bổ đề (2.5.1) dưới đây và do đó dễ thấy nón xoay M_{k+1} được xây dựng (trong thuật toán) sinh ra từ nón min trong M_k vẫn là một nón min của bài toán (L) .

2) Sự lựa chọn chỉ số đưa vào $s_k = \min\{j : j \in J^+(x^k)\}$ và chỉ số đưa ra $r_k = \min\{v : v \in V_k^s\}$ sẽ làm cho thuật toán đề nghị trên kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp (không xảy ra xoay vòng). Điều này được chứng minh bởi Định lý (2.5.1) dưới đây.

3) Công thức (2.37) gọi là công thức xoay cơ sở và phân tử $\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle$ được gọi là phân tử xoay, nó là trung tâm để đổi các véc tơ chỉ phương z_k^i của hệ cơ sở cũ sang hệ cơ sở mới z_{k+1}^i theo công thức xoay (2.37).

4) Để cho gọn chúng ta đặt $\langle A^i, x^k \rangle + b_i = A^i(x^k)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Dựa trên Định lý (2.4.9) chúng ta dễ dàng chứng minh được bổ đề sau:

Bổ đề 2.5.1. *Tại mỗi bước lặp k khi giải bài toán (L) theo thuật toán nón xoay tuyến tính với quy tắc chọn chỉ số đưa vào cơ sở và đưa ra khỏi cơ sở là (2.33), (2.34), (2.35) thì nón xoay M_{k+1} được xây dựng trong thuật toán vẫn là một nón - min của hàm mục tiêu và ta có :*

$$f(x^k) \leq f(x^{k+1}), \forall k = 1, 2, \dots$$

Sự lựa chọn $r_k(s_k) = \min\{v : v \in V^{s_k}\}$ và $s_k = \min\{j : j \in J^+(x^k)\}$ (hoặc $r_k(s_k) = \max\{v : v \in V^{s_k}\}$ và $s_k = \max\{j : j \in J^+(x^k)\}$) sẽ

làm cho thuật toán đề nghị trên kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp (không xảy ra xoay vòng). Điều này được chứng minh bởi định lý sau.

Định lý 2.5.1. *Giải bài toán (L) theo thuật toán nón-min với chỉ số chọn đưa vào cơ sở là $s_k = \min\{j : j \in J^+(x^k)\}$ (hoặc $s_k = \max\{j : j \in J^+(x^k)\}$) và chỉ số chọn đưa ra khỏi cơ sở tương ứng là $r_k(s_k) = \min\{v : v \in V^{s_k}\}$ (hoặc tương ứng là $r_k(s_k) = \max\{v : v \in V^{s_k}\}$) sẽ kết thúc sau một số hữu hạn bước lặp và cho ta lời giải của bài toán (L) hoặc phát hiện ra miền ràng buộc P_L của bài toán (L) là rỗng.*

Định lý này vẫn đúng khi giải bài toán quy hoạch tuyến tính gần lồi gần lõm theo thuật toán nón - min đã được chứng minh trong [1].

Năm 1977 R.G. Bland đã đề xuất qui tắc tránh xoay vòng tương tự như trên cho việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc.

2.5.2 Bảng lặp giải bài toán qui hoạch tuyến tính bởi thuật toán nón xoay tuyến tính và ví dụ minh họa

Để dễ tính toán trong mỗi bước lặp k ta thiết lập bảng dưới đây gọi là bảng nón xoay thu gọn giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi biết một nón - min của hàm mục tiêu của bài toán.

Bảng lặp nón - xoay thu gọn

Bảng A

Chỉ số cơ sở	b_i	$c_1 \ c_2 \dots c_j \dots c_n$	$\langle A^i, x^0 \rangle$	$\langle A^i, x^k \rangle$ k=1,2...
1	b_1	$a_{11} \ a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n}$	$\langle A^1, x^0 \rangle + b_1$	$\langle A^1, x^k \rangle + b_1$
2	b_2	$a_{21} \ a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n}$	$\langle A^2, x^0 \rangle + b_2$	$\langle A^2, x^k \rangle + b_1$
...	...	...	...	...
s_k	b_{s_k}	$a_{s_k1} \ a_{s_k2} \dots a_{s_kj} \dots a_{s_kn}$	$\langle A^{s_k}, x^0 \rangle + b_{s_k}$	$\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k}$
...	...	...	...	...
m	b_m	$a_{m1} \ a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mn}$	$\langle A^m, x^0 \rangle + b_m$	$\langle A^m, x^k \rangle + b_m$
i_1^k	$b_{i_1^k}$	$z_{k1}^{i_1^k} \ z_{k2}^{i_1^k} \dots z_{kj}^{i_1^k} \dots z_{kn}^{i_1^k}$	$\langle A^{s_k}, z_k^{i_1^k} \rangle$	$-\frac{\langle C, z_k^{i_{s_k}^k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{i_{s_k}^k} \rangle}$
i_2^k	$b_{i_2^k}$	$z_{k1}^{i_2^k} \ z_{k2}^{i_2^k} \dots z_{kj}^{i_2^k} \dots z_{kn}^{i_2^k}$	$\langle A^{s_k}, z_k^{i_2^k} \rangle$	...
...	...	...	...	...
$(r_k = i_{s_k p_k}^k)$	b_{r_k}	$z_{k1}^{r_k} \ z_{k2}^{r_k} \dots z_{kj}^{r_k} \dots z_{kn}^{r_k}$	$[\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle]$	$-\frac{\langle C, z_k^{r_k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle}$
...	...	...	...	...
i_n^k	$b_{i_n^k}$	$z_{k1}^{i_n^k} \ z_{k2}^{i_n^k} \dots z_{kj}^{i_n^k} \dots z_{kn}^{i_n^k}$	$\langle A^{s_k}, z_k^{i_n^k} \rangle$	$-\frac{\langle C, z_k^{i_{s_k}^k q_k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{i_{s_k}^k q_k} \rangle}$
Bước	x^k	$x_1^k \ x_2^k \dots x_j^k \dots x_n^k$		

Bảng lặp nón – xoay thu gọn A gồm 2 phần (xem bảng A): Các số liệu ban đầu được đưa vào bảng và các số liệu cần tính toán theo các công thức trong thuật toán nón xoay được xây dựng thứ tự theo các bước từ trên xuống dưới và từ trái sang phải như sau:

Bước k (k=0, 1, 2, ...)

Phần thứ nhất của bảng là khai báo số liệu của bước chuẩn bị:

Đưa vào các số liệu ban đầu của bài toán nằm trong các cột bao gồm có cột chỉ số cơ sở 1, 2...m, cột số liệu các giá trị b_i ($i = 1, 2...m$) dòng đầu tiên trên cùng của phần này là các hệ số của hàm mục tiêu và ma trận hệ số các ràng buộc A cụ thể là:

- Cột đầu tiên thứ nhất là cột chỉ số của các véc tơ dòng A^i của ma trận ràng buộc A của bài toán (L) từ 1 đến m.
- Cột thứ hai là cột các giá trị b_i ($i = 1, 2, \dots, m$) của véc tơ cột B của ma trận ràng buộc.
- Dòng đầu tiên trên ma trận A là dòng các toạ độ c_j của véc tơ C của hàm mục tiêu.

- Tiếp theo bên phải cột thứ hai là bảng các giá trị của ma trận ràng buộc $A: a_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$

Sau đó ta chuyển sang tính toán thiết kế phần thứ hai của bảng.

Phần thứ hai của bảng liên với phần thứ nhất là số liệu tính toán các giá trị của hệ véc tơ chỉ phương $z_k^i, \forall i \in I_k$ và các tọa độ của đỉnh x^k

Tại bước k ($k = 0, 1, 2, \dots$) Bảng gồm các cột và ma trận của giá trị các véc tơ chỉ phương $z_k^i (\forall i \in I_k)$ cụ thể như sau:

- Cột thứ nhất là cột chỉ số cơ sở $i \in i_k$.
- Cột thứ hai là cột giá trị b_i với $i \in i_k$.
- Tiếp theo bên phải cột thứ hai là bảng ma trận các véc tơ chỉ phương $z_k^i (\forall i \in I_k)$. Dòng cuối cùng là các giá trị tọa độ của x^k là đỉnh của nón-min M_k đã biết ở bước k .

Đến đây ta có bảng nón xoay tại bước k ($k = 0, 1, 2, \dots$) đã xây dựng xong. Bây giờ ta chuyển sang kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu và xây dựng bảng nón xoay mới ở bước tiếp theo $k + 1$ nếu x^k chưa phải là phương án tối ưu.

- Sau đó chúng ta tính tiếp dòng cuối cùng của phần hai là các tọa độ của đỉnh x^k , chúng ta tính chúng theo giá trị $\langle A^i, x^k \rangle + b_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ và xây dựng tiếp các cột chứa các giá trị này ở bên phải ma trận ràng buộc A trong phần thứ nhất của bảng.

Từ cột các chứa các giá trị $\langle A^i, x^k \rangle + b_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ đã biết ở bước lặp k (vị trí bên phải ma trận ràng buộc A). Theo thuật toán nón xoay ta xác định được tập $J^+(x^k)$ có hai khả năng:

- Nếu $J^+(x^k) = \emptyset$ thì dừng và x^k là một lời giải của bài (L) .
- Nếu $J^+(x^k) \neq \emptyset$ thì theo thuật toán nón xoay ta chọn được chỉ số đưa vào cơ sở s_k và chúng ta tiến hành tính toán các cột sau:
Bên phải bảng $z_k^i, \forall i \in I_k$, ở phần thứ hai của bảng ta xây dựng cột chứa giá trị

$$\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle, \forall i \in I_k.$$

Từ cột giá trị này ta xác định được tập $I_+^{s_k}$ và theo thuật toán ta có hai khả năng:

- + Nếu $I_+^{s_k} = \emptyset$ thì dừng và kết luận bài toán L không có phương án.

+ $I_+^{s_k} \neq \emptyset$ thì từ thuật toán nón xoay chúng ta phải xây dựng cột tính giá trị $\frac{-\langle C, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}, \forall i \in I_+^{s_k}$. Từ đây theo (2.35) và (2.36) của thuật

toán nón xoay tuyến tính ta chọn được chỉ số đưa ra cơ sở là r_k .

Đến đây các thông tin để xây dựng bảng lặp ở bước $k+1$ từ bảng lặp ở bước k đã đầy đủ, chúng ta xây dựng bảng lặp ở bước $k+1$ phía dưới bảng lặp ở bước k như sau:

- Cột đầu tiên của bảng lặp ở bước $k+1$ là cột chỉ số cơ sở $I_{k+1} = (I_k \cup \{s_k\}) \setminus \{r_k\}$ được xây dựng bằng cách chuyển cột chỉ số cơ sở của bảng ở bước lặp k xuống và chỉ cần thay chỉ số r_k bằng chỉ số s_k ở bảng mới là được.
- Cột tiếp theo là cột chứa các giá trị b_i với $i \in I_{k+1}$ (bên phải cột chỉ số cơ sở I_{k+1}) được xây dựng bằng cách chuyển cột chứa các giá trị b_i với $i \in I_k$ của bảng ở bước lặp thứ k xuống và thay giá trị b_{r_k} bằng giá trị b_{s_k} ở bảng mới (bước $k+1$).
- Tiếp theo bên phải cột $b_i (i \in I_{k+1})$ là bảng ma trận các véc tơ chỉ phương $z_{k+1}^i, \forall i \in I_{k+1}$ của nón-min M_{k+1} được tính từ các véc tơ chỉ phương z_k^i của nón - min M_k ở bảng lặp bước k theo công thức xoay (2.37).

Sau đó ta tính toán đến dòng cuối cùng tiếp theo của bảng này là dòng các tọa độ của đỉnh nón - min M_{k+1} là $x^{k+1} = \sum_{i \in I_{k+1}} b_i \cdot z_{k+1}^i$

(theo công thức (2.38))

Đến đây bảng nón xoay mới ở bước lặp $k+1$ đã được xây dựng xong.

Quá trình lặp này sẽ kết thúc sau hữu hạn bước bởi Định lý (2.5.1).

Một số phần tử trung tâm cần chú ý khi xây dựng bảng nón xoay thu gọn là:

- Giá trị $\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k} (k = 0, 1, 2, \dots)$ dương nằm trong cột chứa các giá trị $\langle A^i, x^k \rangle + b_i (i = 0, 1, 2, \dots, m)$ được ở trong dấu móc tròn ($\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k}$) tương ứng với dòng s_k (được chọn đưa vào cơ sở ở bước lặp k) theo mục 2 trong thuật toán nón xoay tuyến tính
- Giá trị $\frac{-\langle C, z_k^{r_k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle}$ nằm trong cột chứa các giá trị $\frac{-\langle C, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}, \forall i \in I_+^{s_k}$ được ở trong dấu móc tròn ($\frac{-\langle C, z_k^{r_k} \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle}$) tương ứng với dòng

r_k (được chọn đưa ra cơ sở ở bước lặp k) theo tiêu chuẩn (2.35) và (2.36) của thuật toán nón xoay tuyến tính.

- Phần tử xoay $\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle$ thuộc cột chứa các giá trị $\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle$, $\forall i \in I_k$ được nằm trong dấu móc vuông là $[\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle]$.

Sau đây là một ví dụ minh họa cho việc giải bài toán qui hoạch tuyến tính bởi thuật toán nón xoay tuyến tính dưới dạng bảng trình bày ở trên khi biết nón-min của hàm mục tiêu. Ví dụ này là một ví dụ đã được giải bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu trình bày trong [6].

$$\begin{cases} x_1 + 4.x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ 2.x_1 + 3.x_2 + 4.x_3 \geq 20 \\ 5.x_1 - 1.x_2 + 2.x_3 \geq 12 \\ 1.x_1 + 2.x_2 - 1.x_3 \leq 2 \\ -1.x_1 + 4.x_2 - 2.x_3 \leq 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy các hệ số c_j của hàm mục tiêu bài toán này đều dương, nên chúng ta có ngay nón-min ban đầu là nón đơn hình R_+^3 đỉnh tại gốc toạ độ. Ta đưa về dạng bài toán (L) để giải bài toán dưới dạng bảng khi biết nón-min ban đầu đỉnh là gốc toạ độ.

$$\begin{cases} x_1 + 4.x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ -2.x_1 - 3.x_2 - 4.x_3 + 20 \leq 0 \\ -5.x_1 + 1.x_2 - 2.x_3 + 12 \leq 0 \\ 1.x_1 + 2.x_2 - 1.x_3 - 2 \leq 0 \\ -1.x_1 + 4.x_2 - 2.x_3 - 1 \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_3 \leq 0. \end{cases}$$

Chúng ta giải ví dụ trên bằng thuật toán nón xoay tuyến tính dưới dạng bảng lặp thu gọn A với nón-min ban đầu $M_0 = R_+^3$ và hệ chỉ số cơ sở là $I_0 = \{5, 6, 7\}$ véc tơ đưa vào và ra khỏi cơ sở theo quy tắc chọn min trong thuật toán như sau:

		1	4	1	$A^i(x^0)$	$A^i(x^1)$	$A^i(x^2)$
(1)	20	-2	-3	-4	(20)	[0]	0
2	12	-5	1	-2	12	2	0
3	-2	1	2	-1	-2	-7	-25/4
4	-1	-1	4	-2	-1	-11	-11
5	0	-1	0	0	[0]	[0]	-1/2
6	0	0	-1	0	[0]	[0]	0
7	0	0	0	-1	[0]	-5	-19/4
5	0	1	0	0	-2	1/2	
6	0	0	1	0	-3	4/3	
(7)	0	0	0	1	[-4]	(1/4)	
Bước 0	x^0	0	0	0			
(5)	0	1	0	-1/2	[-4]	(1/8)	
6	0	0	1	-3/4	5/2		
1	20	0	0	1/4	-1/2	1/2	
Bước 1	x^1	0	0	5			
2	12	1/4	0	-1/8			
6	0	5/8	1	-17/16			
1	20	-1/8	0	5/16			
Bước 2	x^2	1/2	0	19/4			

Đến bảng này cột cuối cùng các số đều nhỏ hơn hoặc bằng không. Vậy phương án tối ưu là $x^{opt}=(1/2;0;19/4)$.

Nếu bài toán này giải bằng phương pháp đơn hình thì chúng ta sẽ phải đưa về bài toán (M) trung gian với số biến của nó tăng lên là 9 (vì phải thêm vào 4 biến bù và 2 biến giả tạo) như sau:

$$\begin{cases} x_1 + 4.x_2 + x_3 + M.x_8 + M.x_9 \rightarrow \min \\ 2.x_1 + 3.x_2 + 4.x_3 - x_4 + x_8 = 20 \\ 5.x_1 - 1.x_2 + 2.x_3 - x_5 + x_9 = 12 \\ 1.x_1 + 2.x_2 - 1.x_3 + x_6 = 2 \\ -1.x_1 + 4.x_2 - 2.x_3 + x_7 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, 9. \end{cases}$$

c_j	A^j	P/A	1	4	1	0	0	0	0	M	M
			A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	A^8	A^9
M	A^8	20	2	3	4	-1	0	0	0	1	0
M	A^9	12	5	-1	2	0	-1	0	0	0	1
0	A^6	2	[1]	2	-1	0	0	1	0	0	0
0	A^7	1	-1	4	-2	0	0	0	1	0	0
Bước	0		-1	-4	-1	0	0	0	0	0	0
			(7)	2	6	-1	-1	0	0	0	0
M	A^8	16	0	-1	6	-1	0	-2	0	1	0
M	A^9	2	0	-11	[7]	0	-1	-5	0	0	1
1	A^1	2	1	2	-1	0	0	1	0	0	0
0	A^7	3	0	6	-3	0	0	1	1	0	0
Bước	1		0	-2	-2	0	0	1	0	0	//
			0	-12	13	-1	-1	-7	0	0	//
M	A^8	100/7	0	[59/17]	0	-1	6/7	16/7	0	1	//
1	A^3	2/7	0	-11/7	1	0	-1/7	-5/7	0	0	//
1	A^1	16/7	1	3/7	0	0	-1/7	2/7	0	0	//
0	A^7	27/7	0	9/7	0	0	-3/7	-8/7	1	0	//
Bước	2		0	-36/7	0	0	-2/7	-3/7	0	0	//
			0	59/7	0	-1	6/7	16/7	0	0	//
4	A^2	100/59	0	1	0	-7/59	6/59	[16/59]	0	//	//
1	A^3	174/59	0	0	1	-11/59	1/59	-17/59	0	//	//
1	A^1	92/59	1	0	0	3/59	-11/59	10/59	0	//	//
0	A^7	99/59	0	0	0	9/59	-33/59	-88/59	1	//	//
Bước	3		0	0	0	-36/59	14/59	57/59	0	//	//
0	A^6	25/4	0	59/16	0	-7/16	6/16	1	0	//	//
1	A^3	19/4	0	17/16	1	-5/16	2/16	0	0	//	//
1	A^1	1/2	1	-10/16	0	2/16	-4/16	0	0	//	//
0	A^7	11	0	88/16	0	-8/16	0	0	1	//	//
Bước	4		0	-57/16	0	-3/16	-2/16	0	0	//	

Đến bảng đơn hình này ta nhận được phương án tối ưu của bài toán trung gian (M) sau 4 bước lặp là $x^{opt}=(1/2, 0, 19/4, 0, 0, 25/4, 0, 0, 0)$. Vậy lời giải của bài toán ban đầu là $x^{opt}=(1/2, 0, 19/4)$.

Rõ ràng từ bảng lặp nón xoay thu gọn ở trên lời giải bài toán được tìm thấy với số bước lặp và số phép tính toán trong mỗi bước ít hơn rõ rệt so với việc tìm lời giải từ bảng đơn hình trên.

Chương 3

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn và thuật toán nón xoay BBC

Trong chương 1, chúng ta đã biết có rất nhiều bài toán kinh tế đưa về các bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khác nhau. Mỗi một lớp bài toán quy hoạch tuyến tính đều có những đặc thù riêng của mình. Vì vậy chúng ta cần phải tận dụng vào các đặc thù riêng của từng lớp bài toán cụ thể để xây dựng những thuật toán riêng hiệu quả cho từng lớp bài toán.

Trong chương này sẽ đưa ra lớp bài toán quy hoạch tuyến tính thường gặp trong thực tế gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn và từ thuật toán nón xoay tuyến tính đề nghị trong chương 2 sẽ xây dựng chi tiết cụ thể thuật toán nón xoay biến bị chặn gọi tắt là thuật toán BBC giải cho lớp bài toán này.

Phần cuối chương này sẽ trình bày thuật toán nón xoay BBC giải một số ví dụ bằng số mà chúng đã được giải bằng các phương pháp khác trích trong các tài liệu và sách của nhiều tác giả khác nhau (để so sánh với nó).

3.1 Thuật toán nón xoay giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn sau đây:

$$(N) \begin{cases} f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min \\ d_j^{\min} \leq x_j \leq d_j^{\max}, j = 1, 2, \dots, n; \\ \langle C^i, x \rangle + d_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, N; \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.1) \\ (3.2) \end{matrix}$$

Trong đó $x, C^i, C \in R^n, x(x_1, x_2, \dots, x_n), C^i(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}), C(c_1, c_2, \dots, c_n)$ là các véc tơ dòng bất kỳ, $d_j^{\max}, d_j^{\min}, d_i, c_j \in R^1; d_j^{\min} < d_j^{\max}$ với $i = 1, 2, \dots, N (N \geq 1), j = 1, 2, \dots, n$.

Ta viết lại bài toán qui hoạch tuyến tính (N) này ở dạng như bài toán (L) đã viết trong chương 2 và chúng ta gọi là bài toán (N_+) :

$$(N_+) \begin{cases} f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \min \\ \langle A^i, x \rangle + b_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Trong đó: $m = N + 2n$.

$$A^i = -E^i (i = 1, \dots, n); b_i = d_i^{\min} (i = 1, \dots, n),$$

$$A^{n+i} = E^i (i = 1, \dots, n); b_{n+i} = -d_i^{\max} (i = 1, \dots, n),$$

$$A^{2n+i} = C^i (i = 1, \dots, N); b_{2n+i} = d_i (i = 1, \dots, N).$$

Dễ thấy hạng của hệ véc tơ $A^i (i = 1, 2, \dots, m = 2n + N)$ bằng n (vì có hệ con là hệ véc tơ đơn vị $A^i = -E^i (i = 1, 2, \dots, n)$ là độc lập tuyến tính).

Gọi $I_c^- := \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : c_i < 0\}, I_c^+ := \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : c_i \geq 0\} \Rightarrow I_c^+ \cup I_c^- = \{1, 2, \dots, n\}$ Để giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn bằng thuật toán nón xoay tuyến tính trước hết chúng ta sẽ trình bày cách xây dựng nón-min ban đầu của hàm mục tiêu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn.

3.1.1 Xây dựng nón – min ban đầu:

Gọi H_0 là nón được xác định từ n ràng buộc trong số các ràng buộc biến bị chặn (3.1):

$$H_0 = \left\{ \begin{array}{l} x \in R^n : \langle A^j, x \rangle + b_j = -x_j + d_j^{\min} \leq 0, \forall j \in I_c^+, \langle A^{n+j}, x \rangle + b_{n+j} \\ = x_j - d_j^{\max} \leq 0, \forall j \in I_c^- \end{array} \right\}$$

Ta dễ dàng thấy H_0 là một nón đơn hình của bài toán (N) với các véc tơ chỉ phương của các cạnh của nón là :

$$z_{H_0}^i = E^i, \forall i \in I_c^+, \text{ và } z_{H_0}^{n+i} = -E^i, \forall i \in I_c^-, \text{ đỉnh là } x^{H_0} \text{ với } x_j^{H_0} =$$

$d_j^{\min}, \forall j \in I_c^+$ và $x_j^{H_0} = d_j^{\max}, \forall j \in I_c^-$. Lại dễ dàng thấy :

$$\begin{aligned} \langle C, x^{H_0} \rangle &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j^{H_0} = \sum_{j \in I_c^-} c_j \cdot x_j^{H_0} + \sum_{j \in I_c^+} c_j \cdot x_j^{H_0} \\ &= \sum_{j \in I_c^-} c_j \cdot d_j^{\max} + \sum_{j \in I_c^+} c_j \cdot d_j^{\min} \leq \langle C, x \rangle. \end{aligned}$$

Từ hệ (2.4) và hệ quả (2.1.1) dễ dàng thấy H_0 chính là một nón – min của hàm mục tiêu bài toán (N_+) và vì vậy chúng ta sẽ chọn nó là nón cơ sở ban đầu trong thuật toán nón xoay trình bày ở mục dưới đây để giải cho lớp bài toán quy hoạch tuyến tính có biến bị chặn.

3.1.2 Thuật toán nón xoay giải bài toán qui hoạch tuyến tính với biến bị chặn:

Theo trên chúng ta có nón H_0 chính là một nón – min của bài toán (N_+) . Và do đó từ thuật toán nón xoay tuyến tính trình bày trong chương 2 chúng ta thu được thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính (N_+) sau đây:

Thuật toán BBC:

Bước chuẩn bị (bước 0): Chọn nón – min ban đầu $M_0 := H_0$, với tập chỉ số cơ sở là $I_0 = I_{H_0} := I_c^+ \cup \{i : i = n + j, \forall j \in I_c^-\}$ đỉnh là $x^{M_0} := x^{H_0}$ với $x_j^{H_0} = d_j^{\min}, \forall j \in I_c^+$ và $x_j^{H_0} = d_j^{\max}, \forall j \in I_c^-$, các véc tơ chỉ phương của các cạnh của M_0 là $z_0^i = z_{H_0}^i = -E^i, \forall i \in I_c^+$ và $z_0^i = z_{H_0}^{n+i} = E^i, \forall i \in I_c^-$.

Bước k (k=0,1,2,3,...): Giả sử M_k là nón - min của bài toán (N_+) (đã được xây dựng) với tập chỉ số cơ sở, đỉnh và các véc tơ chỉ phương của các cạnh của nón M_k tương ứng là $I_k := \{i_1^k, i_2^k, \dots, i_n^k\}; x^k = x^{M_k}$ và $z_k^i = z_{M_k}^i$.

Xác định tập $J^+(x^k)$ theo (2.9):

$$J^+(x^k) := \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : \langle A^j, x^k \rangle + b_j > 0\}.$$

- Nếu $J^+(x^k) = \emptyset$ thì dừng lại, x^k chính là một lời giải của bài toán (N) ,
- Nếu $J^+(x^k) \neq \emptyset$, ta chọn chỉ số đưa vào cơ sở theo một trong ba cách sau:

Ta chọn s_k là một chỉ số tùy ý thuộc $J^+(x^k)$.

và $s_k = \min\{j : j \in J^+(x^k)\}$ (gọi là qui tắc chọn min) hoặc $s_k = \max\{j : j \in J^+(x^k)\}$ (gọi là qui tắc chọn max) và xác định:

$$I^{s_k} := \{i \in I_k : \langle A^{s_k}, z_k^i \rangle \neq 0\};$$

$$I_+^{s_k} := \{i \in I^{s_k} : \langle A^{s_k}, z_k^i \rangle < 0\} = \{i_{s_k 1}^k, i_{s_k 2}^k, \dots, i_{s_k q_k}^k\}, \forall i \in I^{s_k}.$$

b.1 Nếu $I_+^{s_k} = \emptyset$ thì dừng lại, suy ra bài toán (N) không có phương án.

b.2 Nếu $I_+^{s_k} \neq \emptyset$:

$$\text{Gọi } V^{s_k} := \left\{ v \in I_+^{s_k} : -\frac{\langle C, z_k^v \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^v \rangle} = \min_{i \in I_+^{s_k}} \left\{ -\frac{\langle C, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle} \right\} \right\}.$$

và chọn chỉ số đưa ra khỏi cơ sở theo một trong ba cách sau:

Ta chọn $r_k(s_k)$ là chỉ số tùy ý thuộc V^{s_k} .

hoặc $r_k(s_k) = \min\{v : v \in V^{s_k}\}$ hoặc $r_k = \max\{v : v \in V^{s_k}\}$.

(cách chọn này gọi là qui tắc chọn min (hoặc là qui tắc chọn max))

Và ta xây dựng $M_{k+1} = M_k(r_k, s_k)$, $I_{k+1} = I_k(r_k, s_k) = (I_k \cup \{s_k\}) \setminus \{r_k\}$ và các véc tơ chỉ phương z_{k+1}^i (sử dụng (2.37)):

$$z_{k+1}^i = \begin{cases} z_k^i, & \text{khi } i \in I_k^0 \\ (z_k^i - \frac{\langle A^{s_k}, z_k^i \rangle}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k}), & \text{khi } i \in I_k^{s_k}, i \neq r_k \\ -\frac{1}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k}, & \text{khi } i = s_k. \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^{M_k(r_k, s_k)} = x_k^{r_k} = \\ &= x^k - \frac{\langle A^{s_k}, x^k \rangle + b_{s_k}}{\langle A^{s_k}, z_k^{r_k} \rangle} \cdot z_k^{r_k} = \sum_{i \in I_{k+1}} b_i \cdot z_{k+1}^i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Quay trở lại bước k với $k \leftarrow k + 1$.

Sự hữu hạn bước lặp của thuật toán đã được suy ra từ định lý (2.5.1).

3.1.3 Bảng nón xoay thu gọn giải bài toán qui hoạch tuyến tính với biến bị chặn bằng thuật toán BBC và ví dụ minh họa:

Để dễ tính toán khi giải bài toán (N) dưới dạng bài toán (N_+) bằng thuật toán BBC trong mỗi bước lặp k ta thiết lập các bảng nón xoay lặp tương tự như bảng lặp nón xoay thu gọn A trong chương 2. Sau đây là một số ví dụ bằng số minh họa, các ví dụ này được lấy từ các sách đã

được giải bởi các phương pháp thuật toán khác chẳng hạn như phương pháp xử lý biến bị chặn trên trình bày trong [6].

Ví dụ 3.1(xem)[6]:

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \min \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 5 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 \leq x_3 \leq 1 \\ 0 \leq x_4 \leq 1. \end{array} \right.$$

Giải nó bằng phương pháp đơn hình thì ta phải thêm vào rất nhiều biến bù, sau đây chúng ta sẽ giải ví dụ này bởi thuật toán nón xoay BBC đề nghị ở trên.

Bài toán này thuộc dạng bài toán quy hoạch tuyến tính với biến bị chặn (N) ta đưa về dạng bài toán (N_+):

$$\left\{ \begin{array}{l} f = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \min \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -x_3 \leq 0 \\ -x_4 \leq 0 \\ x_1 - 1 \leq 0 \\ x_2 - 1 \leq 0 \\ x_3 - 1 \leq 0 \\ x_4 - 1 \leq 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 5 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5 \leq 0. \end{array} \right.$$

Theo phương pháp xác định nón-min ban đầu của bài toán quy hoạch tuyến tính (N) trình bày ở trên thì chúng ta có tập chỉ số cơ sở ban đầu là: $I_0 = I_{H_0} := I_c^+ \cup \{i : i = 4 + j, \forall j \in I_c^-\}$, với $I_c^- = \{1, 2, 4\}$; $I_c^+ = \{3\}$ với $I_0 = \{3, 5, 6, 8\}$ và nón-min ban đầu của bài toán này là nón đơn hình: $H_0 := \{x \in R^3 : -x_3 \leq 0; x_1 - 1 \leq 0; x_2 - 1 \leq 0; x_4 - 1 \leq 0\}$ Định tại $x^0 = (1, 1, 0, 1)$.

Đưa các số liệu vào bảng nón xoay lặp thu gọn tương ứng và tiến hành tính toán với quy tắc chọn chỉ số đưa vào cơ sở max chúng ta được kết quả sau:

CS	b_j	-2	-3	2	-5	$A^i(x^0)$	$A^i(x^1)$	$A^i(x^2)$
(1)	0	-1	0	0	0	-1	-1	-2/7
2	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1
3	0	0	0	-1	0	[0]	-2/3	-3/7
4	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
5	-1	1	0	0	0	[0]	[0]	-5/7
6	-1	0	1	0	0	[0]	[0]	0
7	-1	0	0	1	0	-1	-1/3	-4/7
8	-1	0	0	0	1	[0]	[0]	0
9	-5	2	2	1	2	1	(5/3)	0
10	-5	1	2	-3	4	(2)	[0]	0
<-(3)	0	0	0	1	0	[-3]	2/3	
5	-1	-1	0	0	0	-1	2	
6	-1	0	-1	0	0	-2	3/2	
8	-1	0	0	0	-1	-4	5/4	
Bước 0	x^0	1	1	0	1			
10	-5	0	0	1/3	0	1/3		
<-(5)	-1	-1	0	0	0	[-7/3]	4/7	
6	-1	0	-1	-2/3	0	-8/3	5/8	
8	-1	0	0	-4/3	-1	-10/3	7/10	
Bước 1	x^1	1	1	2/3	1			
10	-5	-1/7	0	2/7	0			
9	-5	-3/7	0	-1/7	0			
6	-1	8/7	-1	-2/7	0			
8	-1	10/7	0	-6/7	-1			
Bước 2	x^2	2/7	1	3/7	1			

Đến bước 2 này chúng ta thấy cột cuối cùng của bảng này có tất cả các số đều nhỏ hơn hoặc bằng không nên chúng ta có lời giải của bài toán trên sau 2 bước lặp là: $x^{opt} = (2/7, 1, 3/7, 1)$ với $f_{opt} = -(54/7)$.

Ví dụ này nếu giải bằng phương pháp đơn hình thì chúng ta phải đưa bài toán về dạng chính tắc với số chiều bài toán tăng lên là 10 chiều dưới đây:

$$\left\{ \begin{array}{l} f = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \min \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_6 = 5 \\ x_1 + x_7 = 1 \\ x_2 + x_8 = 1 \\ x_3 + x_9 = 1 \\ x_4 + x_{10} = 1 \\ x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, 10 \end{array} \right.$$

Lời giải của bài toán chính tắc này cho bởi bảng đơn hình sau đây:

cơ sở	A^j	P/A	A^1 -2	A^2 -3	A^3 2	A^4 -5	A^5 0	A^6 0	A^7 0	A^8 0	A^9 0	A^{10} 0
0	A^5	5	2	2	1	2	1	0	0	0	0	0
0	A^6	5	1	2	-3	4	0	1	0	0	0	0
0	A^7	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	A^8	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	A^9	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	A^{10}	1	0	0	0	[1]	0	0	0	0	0	1
Bc0			2	3	-2	5	0	0	0	0	0	0
0	A^5	3	2	2	1	0	1	0	0	0	0	2
0	A^6	1	1	[2]	-3	0	0	1	0	0	0	4
0	A^7	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	A^8	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	A^9	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
-5	A^4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Bc1			2	3	-2	0	0	0	0	0	0	-5
0	A^5	2	1	0	4	0	1	-1	0	0	0	-2
-3	A^2	1/2	1/2	1	-3/2	0	0	1/2	0	0	0	2
0	A^7	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	A^8	1/2	-1/2	0	[3/2]	0	0	-1/2	0	1	0	-2
0	A^9	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
-5	A^4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Bc2			1/2	0	5/2	0	0	-3/2	0	0	0	-11
0	A^5	2/3	7/3	0	0	0	1	1/3	0	-5/3	0	10/3
-3	A^2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	A^7	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2	A^3	1/3	-1/3	0	1	0	0	-1/3	0	2/3	0	-4/3
0	A^9	2/3	1/3	0	0	0	0	1/3	0	-2/3	1	4/3
-5	A^4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Bc3			4/3	0	0	0	0	-2/3	0	5/3	0	-23/3
-2	A^1	2/7	1	0	0	0	3/7	1/7	0	-5/7	0	10/7
-3	A^2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	A^7	5/7	0	0	0	0	-3/7	-1/7	1	8/7	0	-10/7
2	A^3	3/7	0	0	1	0	-2/7	-2/7	0	3/7	0	-6/7
0	A^9	4/7	0	0	0	0	-1/7	2/7	0	-2/7	1	6/7
-5	A^4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Bc4			0	0	0	0	-10/7	-6/7	0	-5/7	0	-67/7

Sau 4 bước lặp ta nhận được phương án ở bảng cuối có dòng chứa các giá trị $\Delta_j \leq 0, \forall j$. Vậy lời giải tối ưu của bài toán trên với x^{opt} (2/7, 1,

$3/7, 1, 0, 0, 5/7, 0, 4/7, 0$). Từ đây suy ra lời giải của bài toán ban đầu là $x^{opt}(2/7, 1, 3/7, 1)$. Nhìn vào hai bảng trên chúng ta thấy rõ ràng số bước lặp và số phép tính toán trong mỗi bước lặp của thuật toán nón xoay BBC là ít hơn thuật toán đơn hình rõ rệt.

Ví dụ 3.2

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn sau:

$$\begin{cases} f = -5x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ |x_1| \leq 1 \\ |x_2| \leq 3 \\ |x_3| \leq 2 \\ x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8. \end{cases}$$

Bài toán này có thể đưa về bài toán thuộc dạng bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn (N), ta đưa về dạng bài toán (N_+):

$$\begin{cases} f = -5x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ -x_1 - 1 \leq 0 \\ -x_2 - 3 \leq 0 \\ -x_3 - 2 \leq 0 \\ x_1 - 1 \leq 0 \\ x_2 - 3 \leq 0 \\ x_3 - 2 \leq 0 \\ x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8. \end{cases}$$

Đây là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn, nếu giải nó bằng phương pháp đơn hình thì ta phải thêm vào rất nhiều biến bù. Sau đây chúng ta sẽ giải ví dụ này bởi thuật toán nón xoay BBC đề nghị ở trên.

Theo phương pháp xác định nón-min ban đầu của bài toán quy hoạch tuyến tính (N) trình bày ở trên thì chúng ta có tập chỉ số cơ sở ban đầu là $I_0 = \{3, 4, 5\}$ và nón-min ban đầu của bài toán này là nón đơn hình đỉnh tại $x^0 = (1, 3, -2)$.

Đưa các số liệu vào bảng nón xoay lặp thu gọn tương ứng và tiến hành tính toán với quy tắc chọn chỉ số đưa vào cơ sở max chúng ta được kết quả sau:

cơ sở	b_j	-5	-1	1	$A_i(x^0)$	$A_i(x^1)$
1	-1	-1	0	0	-2	-2
2	-3	0	-1	0	-6	-6
3	-2	0	0	-1	[0]	-3
4	-1	1	0	0	[0]	0
5	-3	0	1	0	[0]	0
6	-2	0	0	1	-4	-1
7	-1	0	1	-2	(6)	0
8	-8	2	1	2	-7	-1
<- (3)	-2	0	0	1	[-2]	(1/2)
4	-1	-1	0	0	0	
5	-3	0	-1	0	-1	1
Bước 0	x^0	1	3	-2		
7	-1	0	0	1/2		
4	-1	-1	0	0		
5	-3	0	-1	-1/2		
Bước 1	x^1	1	3	1		

Đến bước 1 chúng ta thấy cột cuối cùng của bảng này có tất cả các số đều nhỏ hơn hoặc bằng không nên chúng ta có lời giải của bài toán trên sau 2 bước lặp là $x^{opt} = (1, 3, 1)$.

Ví dụ 3.3

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn sau:

$$\begin{cases} f = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min \\ |x_1| \leq 1 \\ |x_2| \leq 3 \\ |x_3| \leq 2 \\ |4x_1 - x_2 - 4x_3| \leq 2. \end{cases}$$

Bài toán này có thể đưa về bài toán thuộc dạng bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn (N), ta đưa về dạng bài toán

(N_+) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min \\ -x_1 - 1 \leq 0 \\ -x_2 - 3 \leq 0 \\ -x_3 - 2 \leq 0 \\ x_1 - 1 \leq 0 \\ x_2 - 3 \leq 0 \\ x_3 - 2 \leq 0 \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2 \leq 0 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 - 2 \leq 0. \end{array} \right.$$

Đây là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn, nếu giải nó bằng phương pháp đơn hình thì ta phải thêm vào rất nhiều biến bù. Sau đây chúng ta sẽ giải ví dụ này bởi thuật toán nón xoay BBC đề nghị ở trên.

Theo phương pháp xác định nón-min ban đầu của bài toán quy hoạch tuyến tính (N) trình bày ở trên thì chúng ta có tập chỉ số cơ sở ban đầu là $I_0 = \{3, 4, 5\}$ và nón-min ban đầu của bài toán này là nón đơn hình đỉnh tại $x^0 = (1, 3, -2)$.

Đưa các số liệu vào bảng nón xoay lặp thu gọn tương ứng và tiến hành tính toán với quy tắc chọn chỉ số đưa vào cơ sở max chúng ta được kết quả sau:

cơ sở	b_j	-1	-3	2	$A_i(x^0)$	$A_i(x^1)$
1	-1	-1	0	0	-2	-2
2	-3	0	-1	0	-6	-6
3	-2	0	0	-1	[0]	-3
4	-1	1	0	0	[0]	0
5	-3	0	1	0	[0]	0
6	-2	0	0	1	-4	-1
7	-2	-4	1	4	-11	0
8	-2	4	-1	-4	(7)	-1
3	-2	0	0	1	-4	1/2
(4)	-1	-1	0	0	[-4]	1/4
5	-3	0	-1	0	1	
Bước 0	x^0	1	-3	2		
3	-2	1	0	1		
8	-2	-1/4	0	0		
5	-3	-1/4	-1	0		
Bước 1	x^1	-3/4	3	-2		

Đến bước 1 chúng ta thấy cột cuối cùng của bảng này có tất cả các số đều nhỏ hơn hoặc bằng không nên chúng ta có lời giải của bài toán trên sau 2 bước lặp là: $x^{opt} = (-3/4, 3, -2)$.

Qua nhiều ví dụ minh họa ở trên, chúng ta thấy nếu giải bài toán quy hoạch tuyến tính với biến bị chặn bởi thuật toán nón xoay BBC thì số bước lặp đi đến lời giải của bài toán là ít hơn số bước lặp khi giải nó bằng thuật toán đơn hình hoặc đơn hình đối ngẫu tương ứng bởi không phải thêm vào các biến bù để đưa về dạng chính tắc. Và rõ ràng trên bảng lặp rút gọn thì ma trận ràng buộc A và véc tơ cột b chỉ cần khai báo một lần trong cơ sở dữ liệu đầu vào ở bước lặp đầu tiên, còn ở những bước lặp sau nó vẫn giữ nguyên giá trị. Còn khi chúng ta giải bài toán này bằng phương pháp đơn hình hay đơn hình đối ngẫu thì tất cả các phần tử của ma trận ràng buộc A và véc tơ cột b đều phải tính lại sau mỗi bước lặp tiếp theo (vì các cột véc tơ cơ sở bị thay đổi vị trí trong bảng sau mỗi bước lặp như chúng ta đã biết). Chính vì vậy mà số phép tính toán của phương pháp đơn hình đối ngẫu là nhiều hơn số phép tính của thuật toán BBC trong mỗi bước lặp.

3.2 Thuật toán nón xoay BBC giải ví dụ KLEE – MINTY với $n=3$

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn trong R^n sau:

$$(G) \begin{cases} G(X) = \sum_{j=1}^n 10^{n-j} \cdot x_j \rightarrow \max \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} \cdot x_j + x_i \leq 100^{i-1}, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Chúng ta đưa bài toán này về dạng bài toán tìm min như sau:

$$\begin{cases} F(X) = -G(X) = - \sum_{j=1}^n 10^{n-j} \cdot x_j \rightarrow \min \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \\ 2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} \cdot x_j + x_i \leq 100^{i-1}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Chúng ta đã biết ví dụ này nếu giải bởi thuật toán đơn hình cổ điển thì sau đúng $2^n - 1$ bước lặp mới đi đến nghiệm tối ưu của bài toán.

Sau đây chúng ta giải bài toán trên trong trường hợp cụ thể với $n = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} G(X) = 100.x_1 + 10.x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \\ x_1 \leq 1, \\ 20.x_1 + x_2 \leq 100 \\ 200.x_1 + 20.x_2 + x_3 \leq 10000. \end{array} \right.$$

Để giải bài toán này bằng thuật toán đơn hình, chúng ta đưa nó về dạng bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc trong R^6 như sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(X) = -G(X) = -100.x_1 - 10.x_2 - x_3 \rightarrow \min \\ x_1 + x_4 = 1, \\ 20.x_1 + x_2 + x_5 = 100 \\ 200.x_1 + 20.x_2 + x_3 + x_6 = 10000 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{array} \right.$$

Ở đây chúng ta phải thêm vào 3 biến bù x_4, x_5, x_6 và dễ dàng thấy chúng chính là các biến cơ sở ban đầu để tiến hành tính toán, kết quả cho bởi bảng sau qua 7 bước lặp:

c_j	A^j	P/án	-100	-10	-1	0	0	0
			A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6
0	A^4	1	[1]	0	0	1	0	0
0	A^5	100	20	1	0	0	1	0
0	A^6	10000	200	20	1	0	0	1
$Bc0$			100	10	1	0	0	0
-100	A^1	1	1	0	0	1	0	0
0	A^5	80	0	[1]	0	-20	1	0
0	A^6	9800	0	20	1	-200	0	1
$Bc1$			0	10	1	-100	0	0
-100	A^1	1	1	0	0	[1]	0	0
-10	A^2	80	0	1	0	-20	1	0
0	A^6	8200	0	0	1	200	-20	1
$Bc2$			0	0	1	100	-10	0
0	A^4	1	[1]	0	0	1	0	0
-10	A^2	100	20	1	0	0	1	0
0	A^6	8000	-200	0	[1]	0	-20	1
$Bc3$			-100	0	1	0	-10	0
0	A^4	1	[1]	0	0	1	0	0
-10	A^2	100	20	1	0	0	1	0
-1	A^3	8000	-200	0	1	0	-20	1
$Bc4$			100	0	0	0	10	-1
-100	A^1	1	1	0	0	1	0	0
-10	A^2	80	0	1	0	-20	[1]	0
-1	A^3	8200	0	0	1	200	-20	1
$Bc5$			0	0	0	0	10	-1
-100	A^1	1	1	0	0	1	0	0
0	A^5	80	0	1	0	-20	1	0
-1	A^3	9800	0	20	1	-200	0	1
$Bc6$			0	-10	0	200	0	-1
0	A^4	1	1	0	0	1	0	0
0	A^5	100	20	1	0	0	1	0
1	A^3	10000	200	20	1	0	0	1
$Bc7$			-200	-20	0	0	0	-1

Vậy sau 7 bước lặp ta nhận được nghiệm tối ưu là: $x^{opt} = (0, 0, 10\ 000, 1, 100, 0)$. Suy ra phương án tối ưu của bài toán ban đầu là $x^{opt} = (0, 0, 10\ 000)$. Bây giờ ta sẽ giải bài toán trên theo thuật toán nón xoay

BBC, trước hết dễ thấy từ 3 ràng buộc cuối cùng của bài toán, ta có:

$$x_1 \leq 1, x_2 \leq 100, x_3 \leq 100^2.$$

Vậy bài toán KLEE-MINTY với $n=3$ ở trên có thể tương đương với bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$(G) \begin{cases} G(X) = -100.x_1 - 10.x_2 - x_3 \rightarrow \min \\ -x_j \leq 0, j = 1, 2, 3 \\ x_1 \leq 1, \\ 20.x_1 + x_2 \leq 100 \\ 200.x_1 + 20.x_2 + x_3 \leq 100^2 \\ x_2 \leq 100 \\ x_3 \leq 100^2. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy bài toán với nón – min xuất phát ban đầu có tập chỉ số cơ sở là $\{4, 7, 8\}$ xác định bởi hệ 3 bất phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 100 \\ x_3 \leq 100^2 \end{cases}$$

Đỉnh của nón – min này là $x^0 (1, 100, 100^2)$ chúng ta có bảng lặp nón xoay thu gọn với quy tắc chọn chỉ số đưa vào cơ sở là chỉ số max như sau:

Chỉ số Cs	b_j	-10^2	-10	-1	$A^j(x^0)$	$A^j(x^1)$	$A^j(x^2)$
1	0	-1	0	0	-1	-1	0
2	0	0	-1	0	-100	10	0
3	0	0	0	-1	-100^2	-100	-100^2
4	-1	1	0	0	0	0	-1
5	-100	2.10	1	0	2.10	-90	-100
6	-100^2	2.10^2	2.10	1	$(2.10^3+2.10^2)$	0	0
7	-100	0	1	0	0	-110	-100
8	-100^2	0	0	1	0	0	0
4	-1	-1	0	0	-200	1/2	
(7)	-100	0	-1	0	[-20]	(1/2)	
8	-100^2	0	0	-1	-1	1	
Bước 0	x^0	1	100	100^2			
(4)	-1	-1	10	0	[-10]	(0)	
6	-100^2	0	-1/20	0	1/20		
8	-100^2	0	1/20	-1	-1/20	10	
Bước 1	x^1	1	-10	100^2			
2	0	-1/10	1	0			
6	-100^2	-1/200	0	0			
8	-100^2	1/200	0	-1			
Bước 2	x^2	0	0	100^2			

Vậy sau 2 bước lặp chúng ta đã nhận được lời giải tối ưu của bài toán, còn nếu giải bằng thuật toán đơn hình thì phải sau 7 bước lặp và số phép tính toán trong mỗi bước cũng nhiều hơn.

Qua nhiều ví dụ minh họa ở trên, chúng ta thấy nếu giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với hàm mục tiêu bị chặn bởi thuật toán nón xoay BBC thì số bước lặp đi đến lời giải của bài toán nói chung là ít hơn số bước lặp khi giải nó bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu tương ứng. Và rõ ràng trên bảng lặp rút gọn thì ma trận ràng buộc A và véc tơ cột B chỉ cần khai báo một lần trong cơ sở dữ liệu đầu vào ở bước lặp đầu tiên, còn ở những bước lặp sau nó vẫn giữ nguyên giá trị. Còn khi chúng ta giải bài toán này bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu thì tất cả các phần tử của ma trận ràng buộc A và véc tơ cột B đều phải tính lại sau mỗi bước lặp tiếp theo (vì các cột véc tơ cơ sở bị thay đổi vị trí trong bảng sau mỗi bước lặp như chúng ta đã biết).

3.3 Vài nét về độ phức tạp tính toán của thuật toán BBC và kết luận

Rõ ràng các thuật toán giải trực tiếp các lớp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn đặc biệt không cần đưa về dạng chính tắc đã bớt đi một khâu trung gian làm cho số chiều bài toán tăng lên và tỏ ra hiệu quả khi áp dụng vào thực tế. Đối với thuật toán nón xoay BBC đề xuất trong luận văn này giải cho lớp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn qua những ví dụ đã được lấy trong các sách, giáo trình đại học và các tài liệu chuyên ngành về quy hoạch tuyến tính. Qua thống kê bước đầu chúng ta thấy số bước lặp trung bình khi giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với biến bị chặn có kích thước cỡ $m \times n$ bằng thuật toán nón xoay BBC là $O(K.n)$ ($1 \leq K \leq 1,5$), trong đó n là số chiều của bài toán và số phép tính toán trong mỗi bước lặp là $O(n \times n)$. Nếu như đánh giá này theo thời gian qua kiểm nghiệm chấp nhận được thì thuật toán nón xoay BBC về mặt học thuật có thể coi là một thuật toán tương tự như thuật toán đơn hình đối ngẫu và tỏ ra hiệu quả hơn vì nó giải trực tiếp cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn không phải thêm các biến bù và phụ. Bởi nếu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với kích thước như trên đưa về dạng chính tắc để giải bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu hoặc đơn hình thì kích thước của bài toán ít nhất sẽ là $(m+n) \times m$ và như vậy số phép tính toán trong mỗi bước khi $m \gg n$ là $((m+n) \times m)$ sẽ lớn hơn $O(n \times n)$ rất nhiều.

Mặt khác đối với bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc bất kỳ (cỡ $m.n$ trong đó m là số ràng buộc chính, n là số chiều của bài toán) khi giải nó bởi phương pháp đơn hình hay đơn hình đối ngẫu đều đòi hỏi biết trước một cơ sở đơn vị của bài toán và như vậy chúng ta đều có thể đưa nó về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tương đương có số chiều của bài toán bằng số biến phi cơ sở là $n - m$. Do đó nếu $n - m \ll n$ thì sử dụng thuật toán nón xoay giải bài toán quy hoạch tuyến tính này sẽ hiệu quả hơn nhiều khi chúng ta giải bài toán ở dạng chính tắc ban đầu, điều này chúng ta đã thấy rõ bởi các ví dụ minh họa trong luận văn.

Rõ ràng mỗi một thuật toán đều có những điểm mạnh riêng và điểm yếu riêng khi sử dụng nó giải cho các lớp bài toán khác nhau. Để so sánh tính hiệu quả của thuật toán này với thuật toán khác khi giải các lớp bài toán khác nhau, nó chỉ mang tính tương đối chứ không thể khẳng định được sự hơn kém nhau thực sự giữa chúng. Vấn đề chúng ta đáng quan tâm hơn đó là đối với lớp bài toán quy hoạch tuyến tính này thì ta sử

dụng phương pháp thuật toán nào tương ứng để giải nó sao cho “hiệu quả nhất”. Ở đây cần nhấn mạnh rằng thuật toán nón xoay BBC về mặt bản chất là phương pháp thuộc lược đồ xấp xỉ ngoài, còn thuật toán đơn hình là phương pháp thuộc lược đồ xấp xỉ trong.

Một vấn đề liên quan đến số bước lặp của phương pháp nón xoay BBC là việc lựa chọn siêu phẳng đưa vào cơ sở của nón-min mới sẽ là mấu chốt để chúng ta có thể giảm được số lượng bước lặp của các thuật toán đề nghị trong luận văn, chúng ta có thể tìm hiểu sâu hơn vấn đề này trong chương IV của cuốn sách “Quy hoạch gần lồi- gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính” [2].

Chúng ta dừng lại việc đánh giá độ phức tạp tính toán của phương pháp nón xoay BBC ở đây. Còn nhiều thời gian cho phép chúng ta có những cải tiến đối với phương pháp nón xoay này từ đó có thể xây dựng được những thuật toán mạnh để giải bài toán quy hoạch tuyến tính nói chung và những dạng đặc biệt của nó nói riêng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Anh Tuấn, Nguyễn Văn Quý (2012), *Quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay*, NXB giáo dục Việt Nam.
- [2] Nguyễn Anh Tuấn (2011) *Quy hoạch gần lồi-gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính*, NXB Khoa học và kỹ thuật. Năm ,128 trang.
- [3] Nguyen Anh Tuan and Pham Canh Duong (1996), *Minimization of An Almost-convex and Almost-concave Function*. *Vietnam Journal of Mathematics*, Volume 24, Number 1, pp 57-74.
- [4] Nguyen Anh Tuan, Tran Van Yen and Nguyen Van Tuan (2005), *An Application of Mathematico-Economic Modeling to the Analysis of Air Transportation Planning of the Vietnam Airlines Corporation*. *Vietnam Journal of Applied Mathematics*, III(2), pp 55-66.
- [5] A.C. Belenski (1982), *Minimization monotone function in a polyhedron set*, *Automatic and Tele-Mechanics* 9, pp 112-121.
- [6] Bùi Thế Tâm, Trần Vũ Thiệu (1998), *Các phương pháp tối ưu hoá* NXB Giao thông vận tải.
- [7] H Tuy. *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer 1998.
- [8] Hoàng Tuy (1967), *Lý thuyết quy hoạch. Tập 1*, NXB Khoa học kỹ thuật.
- [9] Nguyễn Đức Nghĩa (1997), *Tối ưu hoá (quy hoạch tuyến tính và rời rạc)*, NXB Giáo Dục Hà Nội.
- [10] Bùi Minh Trí (2008), *Bài tập Tối ưu hoá*, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật.
- [11] Phan Quốc Khánh, Trần Huệ Nương (2002), *Quy hoạch tuyến tính*, Nhà xuất bản Giáo dục.
- [12] Phạm Đình Phùng, Nguyễn Văn Quý (1993), *Toán Kinh tế*, NXB Thống kê Hà Nội năm.

- [13] Lê Thanh Huệ (2009), *Một số kết quả mới về bài toán quy hoạch tuyến tính* Luận án Tiến sĩ Toán học (Thư viện Viện Toán học, Viện khoa học và Công nghệ Việt Nam).
- [14] Lê Dũng Mưu (1998), *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, NXB Khoa học và kỹ thuật.
- [15] Trần Túc (2000), *Bài tập Quy hoạch tuyến tính*, NXB Khoa học và kỹ thuật.
- [16] Phí Mạnh Ban (2011), *Bài tập quy hoạch tuyến tính*, NXB Đại học Sư phạm.
- [17] Nguyễn Văn Quý (2010), *Bài tập toán Kinh tế*, NXB Tài Chính.