ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ HỒNG

TÍNH DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM NGUYÊN VỚI ĐẠO HÀM CHUNG NHAU MỘT GIÁ TRỊ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ HỒNG

TÍNH DUY NHẤT CỦA CÁC HÀM NGUYÊN VỚI ĐẠO HÀM CHUNG NHAU MỘT GIÁ TRỊ

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Hà Trần Phương

Thái Nguyên, năm 2013

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường ĐHSP-ĐHTN, Viện Toán học. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn trực tiếp của thầy giáo TS. Hà Trần Phương. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy đã tận tình hướng dẫn và tạo điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành luận văn. Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu trường ĐHSP-ĐHTN, các thầy cô trong khoa Toán trường ĐHSP-ĐHTN, các thầy ở Viện Toán đã tạo điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành được luận văn này. Luận văn chắc chắn không tránh khỏi nhiều thiếu sót, rất mong được các thày cô và các bạn quan tâm, đóng góp để bản luận văn được hoàn chỉnh hơn.

Tác giả

Dương Thị Hồng

Mục lục

Mở đầu

Năm 1926, R. Nevanlinna đã chứng minh: *Cho hai hàm phân hình f và g. Nếu tồn tại năm giá trị phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_5 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho*

$$f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j) \quad \text{với mọi } j = 1, 2, \ldots, 5$$

thì $f \equiv g$. Kết quả này cho thấy: một hàm phân hình phức được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược, không kể bội, của năm giá trị phân biệt. Công trình này của Ông được xem như khởi nguồn cho việc nghiên cứu sự xác định của các hàm hay ánh xạ phân hình thông qua ảnh ngược của một tập hữu hạn. Vấn đề này đã thu hút được sự quan tâm rất nhiều nhà toán học trên thế giới: H. Fujimoto, W. Stoll, L. Smiley, M. Ru, Z. Tu, C. C. Yang, G. Frank, M. Reinders, ... và thu được nhiều kết quả quan trọng.

Cho hai hàm phân hình khác hằng f, g. Ta kí hiệu $E(a, f)$ là tập các không điểm của $f(z) - a$, kể cả bội và $\overline{E}(a, f)$ là tập các không điểm của $f(z) - a$, không kể bội. Ta nói hai hàm f, g *chung nhau giá trị a IM (CM)* nếu $\overline{E}(a, f) = \overline{E}(a, g)$ (tương ứng $E(a, f) = E(a, g)$). Vấn đề đặt ra là khi hai hàm phân hình cùng với đạo hàm của chúng chung nhau một (hay một số) giá trị thì có quan hệ với nhau như thế nào.

Năm 1997, C.C Yang và H. X. Hua ([7]) đã chứng minh một kết quả đầu tiên về hàm nguyên chung nhau một giá trị. Các tác giả đã chứng minh: *Cho hai hàm nguyên khác hằng f, g và một số nguyên $n \geqslant 7$. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ chung nhau giá trị 1 CM thì $f = dg$ với một bộ duy nhất gồm $(n+1)$ giá trị d hoặc $g(z) = c_1 e^{cz}, f(z) = c_2 e^{-cz}$, trong đó c_1, c_2 và c là các hằng số thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -1$.* Từ đó đến nay các kết quả của vấn đề này đã được xem xét bởi nhiều nhà toán học: năm 2000, Y. Xu và H. L. Qiu ([6]) đã xem xét lại kết quả của Yang-Hua trong trường hợp chung nhau giá trị 1 IM, năm 2002, M. L Fang ([2]) mở rộng kết quả của Yang-Hua cho đạo hàm bậc k. Năm 2008, J. F. Chen đã mở rộng các kết quả của Xu-Qiu và Fang. Gần đây, L. Xiuquing và L. Weichuan ([5]) đã chứng minh một số kết quả về hàm nguyên chung nhau một giá trị.

Luận văn **"Tính duy nhất của hàm nguyên với đạo hàm chung nhau một giá trị"** là một trong những nghiên cứu theo hướng trên. Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả nghiên cứu về sự duy nhất của hàm nguyên với đạo hàm bậc k có chung nhau một giá trị. Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: *Một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị*. Trong chương này, chúng tôi trình bày những kiến thức cơ sở trong lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình, cần thiết cho việc chứng minh những kết quả trong chương 2.

Chương 2: *Tính duy nhất của hàm nguyên với đạo hàm chung nhau một giá trị*. Đây là chương chính của luận văn, chúng tôi trình bày lại kết quả nghiên cứu của L. Xiuquing và L. Weichuan được công bố [5].

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị

1.1 Các hàm đặc trưng và tính chất

Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm về hàm nguyên và hàm phân hình. Cho f là một hàm xác định trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, lấy giá trị trên $\overline{\mathbb{C}}$, $D \subset \mathbb{C}$ là một miền. Ta nói f *chỉnh hình* tại $z_0 \in D$ nếu tồn tại một lân cận $U \subset D$ của z_0 sao cho

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

với mọi $z \in U$, trong đó $c_n \in \mathbb{C}$ là các hằng số. Hàm $f(z)$ được gọi là *chỉnh hình trên* D nếu nó chỉnh hình tại mọi $z \in D$.

Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* trong miền $D \subset \mathbb{C}$ nếu nó chỉnh hình trong miền D, trừ ra một số các điểm bất thường cực điểm.

Hàm $f(z)$ được gọi là *hàm nguyên* nếu nó chỉnh hình trong toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$; $f(z)$ được gọi là *hàm phân hình* nếu nó phân hình trên $\mathbb{C}$.

Dễ thấy, nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên D thì trong mỗi lân cận của $z \in D$ hàm $f(z)$ biểu diễn được dưới dạng thương của hai hàm chỉnh hình.

Ta nhắc lại, điểm z_0 được gọi là $0-$điểm cấp $m \geqslant 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận của z_0, hàm $f(z)$ có biểu diễn $f(z) = (z - z_0)^m.h(z)$, trong đó $h(z)$ chỉnh hình trong lân cận của z_0 và $h(z_0) \neq 0$. Điểm z_0 được gọi là cực điểm cấp $m \geqslant 0$ của hàm $f(z)$ nếu z_0 là $0-$điểm cấp m của hàm

$\dfrac{1}{f(z)}$. Với hàm phân hình f, ta kí hiệu

$$\operatorname{ord}_f z_0 = \begin{cases} m & \text{nếu } z_0 \text{ là } 0\text{−điểm cấp } m \text{ của } f(z) \\ 0 & \text{nếu } f(z_0) \neq 0, \infty \\ -m & \text{nếu } z_0 \text{ là cực điểm cấp } m \text{ của } f(z). \end{cases}$$

Dế thấy, nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên D thì $f'(z)$ cũng là hàm phân hình trên D. Hàm $f(z)$ và $f'(z)$ có cùng cực điểm, đồng thời, nếu z_0 là cực điểm cấp $m \geqslant 0$ của $f(z)$ thì nó là cực điểm cấp $m+1$ của $f'(z)$. Hơn nữa, hàm $f(z)$ có không quá đếm được các cực điểm trên D.

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng Nevanlinna của một hàm phân hình. Với mỗi số thực dương $x \in \mathbb{R}_+^*$, kí hiệu

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & \text{nếu } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{nếu } x < 1. \end{cases} = \max\{\log x, 0\}.$$

Dễ thấy $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

Định nghĩa 1.1.1. Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Hàm

$$m\,(R, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm phân hình f.

Ta biết, với hàm phân hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, với một số thực $R > 0$ ta có:

$$\log |f(Re^{i\varphi})| = \log^+ |f(Re^{i\varphi})| - \log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\varphi})|}$$

nên

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log \left| f\left(Re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi = m(R, f) - m(R, 1/f).$$

Kí hiệu $n(t, f)$ là số cực điểm kể cả bội của hàm $f(z)$ trong đĩa $\{|z| < t\}$ và $n(0, f) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} n(t, f)$.

Mệnh đề 1.1.2. *Cho f là hàm phân hình và R là một số thực dương. Nếu $f(0) \neq \infty$ thì*

$$\int_0^R \log \frac{R}{t} dn\,(t,f) = \sum_{\nu=1}^{N} \log \left| \frac{R}{b_\nu} \right|,$$

trong đó $b_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, N$, là các cực điểm của hàm f trong đĩa $\{|z| < R\}$.

Chứng minh. Trước hết, bằng phương pháp tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^R \log \frac{R}{t} dn\,(t,f) = \log \frac{R}{t}.n\,(t,f)\Big|_0^R - \int_0^R n\,(t,f)\, d\log \frac{R}{t}$$
$$= \int_0^R n\,(t,f) \frac{dt}{t}.$$

Do hàm f chỉ có hữu hạn cực điểm trong $\{|z| < R\}$ nên hàm $n(t,f)$ chỉ nhận một số hữu hạn giá trị nguyên không âm và tăng theo t. Gọi $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1} \in \{|b_\nu|, \nu = 1, \ldots, N\}$ và r_0, r_n là các số thực không âm sao cho $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{n-1} < r_n = R$ và trên mỗi hình vành khăn $\{r_j < |z| < r_{j+1}\}$ hàm $n(t,f)$ không đổi. Khi đó

$$\int_0^R n\,(t,f) \frac{dt}{t} = \int_{r_0}^{r_1} n\,(t,f)\, \frac{dt}{t} + \int_{r_1}^{r_2} n\,(t,f)\, \frac{dt}{t} + \ldots + \int_{r_{n-1}}^{r_n} n\,(t,f)\, \frac{dt}{t}.$$

Giả sử

$$n(t,f) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \leqslant r_1 \\ \alpha_1 & \text{nếu } r_1 < t \leqslant r_2 \\ \cdots & \\ \alpha_{n-1} = N & \text{nếu } r_{n-1} < t \leqslant r_n = R. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t} &= \int_{r_0}^{r_1} 0.\frac{dt}{t} + \int_{r_1}^{r_2} \alpha_1.\frac{dt}{t} + \cdots + \int_{r_{n-1}}^{r_n} \alpha_{n-1}.\frac{dt}{t} \\ &= \alpha_1 \log t\Big|_{r_1}^{r_2} + \alpha_2 \log t\Big|_{r_2}^{r_3} + ... + \alpha_{n-1}\log t\Big|_{r_{n-1}}^{R} \\ &= \sum_{\nu=1}^{N} \log\frac{R}{r_\nu} = \sum_{\nu=1}^{N}\log\frac{R}{|b_\nu|}.\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh □

Định nghĩa 1.1.3. Hàm $N(R,f) = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \log\frac{R}{|b_\nu|}$ được gọi là *hàm đếm* (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm) của hàm f. Hàm

$$T(R,f) = m(R,f) + N(R,f)$$

được gọi là *hàm đặc trưng* của hàm f (còn được gọi là hàm đặc trưng Nevanlinna).

Bây giờ ta xem xét một số tính chất của các hàm đếm, xấp xỉ và hàm đặc trưng. Sử dụng tính chất

$$\log^+\left|\prod_{i=1}^{K} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{K}\log^+|a_i|$$

và

$$\log^+\left|\sum_{i=1}^{K} a_i\right| \leqslant \log^+\left(K\max_{1\leqslant i\leqslant K}\{|a_i|\}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{K}\log^+|a_i| + \log K,$$

với $a_1,\dots,a_K$ là các số phức, áp dụng cho các hàm phân hình f_j, $j=1,\dots,p$, ta thu được:

Mệnh đề 1.1.4. *Cho f_j là các hàm phân hình và $R > 0$. Khi đó*

$$1)\ m\left(R, \sum_{j=1}^{p} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} m\left(R, f_j\right) + \log p.$$

$$2)\ N\left(R, \sum_{j=1}^{p} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} N\left(R, f_j\right).$$

$$3)\ m\left(R, \prod_{j=1}^{p} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} m\left(R, f_j\right).$$

$$4)\ N\left(R, \prod_{j=1}^{p} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} N\left(R, f_j\right).$$

$$5)\ T\left(R, \sum_{j=1}^{p} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} T\left(R, f_j\right) + \log p.$$

$$6)\ T\left(R, \prod_{j=1}^{p} f_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{p} T\left(R, f_j\right).$$

Định lý 1.1.5 (Công thức Poisson-Jensen). *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong đĩa $\{|z| \leqslant R\}, 0 < R < +\infty$. Giả sử $a_1, \ldots, a_M$ là các $0-$điểm kể cả bội và $b_1, \ldots, b_N$ là các cực điểm kể cả bội của $f(z)$ trong đĩa $\{|z| \leqslant R\}$. Giả sử $z = re^{i\theta}$ là một điểm thuộc đĩa $\{|z| \leqslant R\}$ sao cho $f(z) \neq 0, \infty$. Khi đó:*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\varphi}\right)\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{M} \log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| - \sum_{\nu=1}^{N} \log\left|\frac{R(z - b_\nu)}{R^2 - \overline{b}_\nu z}\right|.$$

Từ công thức Poisson-Jensen, ta có thể tính được giá trị $|f(z)|$ tại mọi điểm trong miền $\{|z| \leqslant R\}$ khi biết $|f(z)|$ trên biên $\{|z| = R\}$ và các $0-$điểm, cực điểm của hàm $f(z)$.

Hệ quả 1.1.6 (Công thức Jensen). *Cho $f(z)$ là hàm phân hình trong đĩa $\{|z| \leqslant R\}, 0 < R < \infty$. Giả sử $a_1, \ldots, a_M$ là các $0-$điểm kể cả bội và*

$b_1, \ldots, b_N$ là các cực điểm kể cả bội của $f(z)$ trong đĩa $\{|z| \leqslant R.\}$. Khi đó nếu $f(0) \neq 0, \infty$, ta có

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(\mathrm{R}e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{\mu=1}^{M} \log\frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{\nu=1}^{N} \log\frac{|b_\nu|}{R}.$$

Từ công thức Jensen, đối với một hàm phân hình $f(z)$ trên $\mathbb{C}$, ta có

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(\mathrm{R}e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(Re^{i\varphi})|} d\varphi$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{M} \log\frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{\nu=1}^{N} \log\frac{|b_\nu|}{R}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\log|f(0)| &= m(R,f) - m\left(R,\frac{1}{f}\right) - N\left(R,\frac{1}{f}\right) + N(R,f)\\ &= \{m(R,f) + N(R,f)\} - \left\{m\left(R,\frac{1}{f}\right) + N\left(R,\frac{1}{f}\right)\right\}\\ &= T(R,f) - T\left(R,\frac{1}{f}\right).\end{aligned}$$

Do đó, công thức Jensen trở thành:

$$T\left(R,\frac{1}{f}\right) = T(R,f) - \log|f(0)|.$$

Bây giờ, nếu $f(z)$ là hàm hằng, tức là $f(z) = a$ với a là một hằng số nào đó, thì

$$m(R,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(Re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|a|\, d\varphi = \log^+|a|.$$

Và

$$T(R,f) = m(R,f) + N(R,f) = m(R,f) = \log^+|a|.$$

1.2 Hai định lý cơ bản

Trong phần này chúng tôi trình bày hai định lý cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna cho các hàm phân hình.

Mệnh đề 1.2.1. *Giả sử f là hàm phân hình, $a \in \mathbb{C}$ là một hằng số tùy ý, khi đó:*

$$|T(R,f) - T(R,f-a)| \leqslant \log^+|a| + \log 2.$$

Chứng minh. Đặt $f = (f-a) + a = f_1 + f_2$ với $f_1 = f - a, f_2 = a$. Ta có:

$$\begin{aligned} T(R,f) &\leqslant T(R,f_1) + T(R,f_2) + \log 2 \\ &= T(R,f-a) + \log^+|a| + \log 2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $T(R,f) - T(R,f-a) \leqslant \log^+|a| + \log 2$. Ngoài ra

$$T(R,f-a) \leqslant T(R,f) + \log^+|a| + \log 2,$$

kéo theo $T(R,f) - T(R,f-a) \geq -\left(\log^+|a| + \log 2\right)$. Vậy

$$|T(R,f) - T(R,f-a)| \leqslant \log^+|a| + \log 2.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Định lý 1.2.2 (Định lý cơ bản thứ nhất). *Giả sử f là hàm phân hình trong miền $\{|z| \leqslant R\}$, $a \in \mathbb{C}$ là một hằng số tùy ý, khi đó:*

$$m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T(R,f) - \log|f(0) - a| + \varepsilon(a,R).$$

trong đó $|\varepsilon(a,R)| \leqslant \log^+|a| + \log 2$.

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) &= T\left(R, \frac{1}{f-a}\right) \\ &= T(R,f-a) - \log|f(0) - a| \\ &= T(R,f) - \log|f(0) - a| + T(R,f-a) - T(R,f). \end{aligned}$$

và $T(R,f-a) - T(R,f) = \varepsilon(a,R)$.

Định lý được chứng minh. □

Với một hàm phân hình $f(z)$ cố định, ta sử dụng các kí hiệu $m\left(r,a\right)$, $N\left(r,a\right)$ theo thứ tự thay cho các kí hiệu $m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$, $N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$.

Mệnh đề 1.2.3 (Bất đẳng thức cơ bản). *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng trong miền $\{|z|\leqslant r\}$ và $a_1,\ldots,a_q,(q\geq 2)$ là những số phức tùy ý đôi một khác nhau, $\delta>0$ và $|a_\mu-a_\nu|\geq\delta$ với $1\leqslant\mu<\nu\leqslant q$. Khi đó ta có:*

$$m\left(r,f\right)+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,a_j\right)\leqslant 2T\left(r,f\right)-N_1\left(r,f\right)+S\left(r,f\right).$$

trong đó

$$N_1\left(r,f\right)=N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+2N\left(r,f\right)-N\left(r,f'\right).$$

$$\begin{aligned}S\left(r,f\right)&=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{f'}{f-a_\nu}\right)+q\log^{+}\frac{3q}{\delta}+\log 2+\log\frac{1}{|f'\left(0\right)|}\\&=o\left(T\left(r,f\right)+\log r\right).\end{aligned}$$

Định lý 1.2.4 (Định lý cơ bản thứ hai). *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình trong miền $\{|z|\leqslant r\}$ và $a_1,\ldots,a_q,(q\geq 2)$ là những số phức tùy ý đôi một khác nhau. Khi đó ta có:*

$$\begin{aligned}(q-1)\,T\left(r,f\right)&\leqslant\sum_{j=1}^{q}N\left(r,a_j\right)+N\left(r,f\right)-N_1\left(r,f\right)+S\left(r,f\right)\\&\leqslant\overline{N}\left(r,f\right)+\sum_{j=1}^{q}\overline{N}\left(r,a_j\right)-N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S\left(r,f\right).\end{aligned}$$

trong đó $S\left(r,f\right)=o\left(T\left(r,f\right)\right)$ khi $r\longrightarrow\infty$, nằm ngoài một tập có độ đo hữu hạn, $N_1\left(r,f\right)=N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+2N\left(r,f\right)-N\left(r,f'\right)$, $N_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)$ là hàm đếm tại các $0-$điểm của f mà không là $0-$điểm của $f-a_j$ với $j=1,\ldots,q$.

Chứng minh. Theo bất đẳng thức cơ bản ta có:

$$m\left(r,f\right)+\sum_{j=1}^{q}m\left(r,a_j\right)\leqslant 2T\left(r,f\right)-N_1\left(r,f\right)+S\left(r,f\right).$$

Cộng thêm vào hai vế đại lượng $N(r,f)+\sum\limits_{j=1}^{q}N(r,a_j)$ ta có:

$$\begin{aligned}
&m(r,f)+N(r,f)+\sum_{j=1}^{q}(m(r,a_j)+N(r,a_j))\\
&\qquad\leqslant 2T(r,f)+\sum_{j=1}^{q}N(r,a_j)+N(r,f)-N_1(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$m(r,f)+N(r,f)=T(r,f)$$

và

$$\begin{aligned}
m(r,a_j)+N(r,a_j)&=m\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)\\
&=T\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)=T(r,f-a_j)+O(1)\\
&=T(r,f)+O(1).
\end{aligned}$$

Điều đó kéo theo

$$\begin{aligned}
&T(r,f)+\sum_{j=1}^{q}\{T(r,f)+O(1)\}\\
&\qquad\leqslant 2T(r,f)+\sum_{j=1}^{q}N(r,a_j)+N(r,f)-N_1(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$(q-1)T(r,f)\leqslant\sum_{j=1}^{q}N(r,a_j)+N(r,f)-N_1(r,f)+S(r,f).$$

Hơn nữa ta có:

$$\begin{aligned}
&N(r,f)+\sum_{j=1}^{q}N(r,a_j)-N_1(r,f)+S(r,f)\\
&=\sum_{j=1}^{q}N(r,a_j)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N(r,f')-N(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}$$

Vì

$$N(r, f') = \overline{N}(r, f) + N(r, f)$$

nên

$$N(r, f') - N(r, f) = \overline{N}(r, f). \tag{1.1}$$

Ngoài ra:

$$\sum_{j=1}^{q} N(r, a_j) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) = \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, a_j) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) \tag{1.2}$$

Thật vậy, giả sử b là nghiệm bội $k > 1$ của phương trình $f = a_j$, $j = 1, \ldots, q$ thì b là nghiệm bội $(k-1)$ của phương trình $f' = 0$.

Ta có: $\sum\limits_{j=1}^{q} N(r, a_j) = \sum\limits_{b} \log \frac{r}{|b|}$.

Với mỗi b bội $k > 1$ thì đại lượng $\log \frac{r}{|b|}$ được tính k lần trong $\sum\limits_{j=1}^{q} N(r, a_j)$ và $(k-1)$ lần trong $N\left(r, \dfrac{1}{f'}\right)$.

Vậy $\log \frac{r}{|b|}$ được tính đúng 1 lần trong hiệu $\sum\limits_{j=1}^{q} N(r, a_j) - N\left(r, \dfrac{1}{f'}\right)$.

Chú ý rằng: $N\left(r, \frac{1}{f'}\right) = \sum\limits_{b} \log \frac{r}{|b|} + \sum\limits_{b'} \log \frac{r}{|b'|}$ trong đó b là nghiệm của phương trình $f = a_j$, $j = 1, \ldots, q$ và b' là nghiệm của phương trình $f' = 0$ nhưng không là nghiệm của phương trình $f = a_j$, $j = 1, \ldots, q$. Từ đó suy ra (1.2).

Kết hợp (1.1) và (1.2) ta có:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{q} N(r, a_j) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N(r, f') - N(r, f) + S(r, f) \\
&\qquad = \overline{N}(r, f) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, a_j) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f).
\end{aligned}$$

Vậy

$$(q-1)\, T(r, f) \leqslant \overline{N}(r, f) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, a_j) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f).$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Cho f là hàm chỉnh hình hoặc phân hình trên $\mathbb{C}$ và $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Nếu a hữu hạn ta kí hiệu

$$E\left(a, f\right) = \{(z, m) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N} | f(z) = a \text{ bội } m\}$$

là tập hợp các $0-$điểm của $f - a$ kể cả bội.

$$\overline{E}\left(a, f\right) = \{z \in \mathbb{C} | f\left(z\right) = a\}$$

là tập hợp các $0-$điểm của $f - a$ không kể bội.

Giả sử $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ta kí hiệu

$$E\left(S, f\right) = \bigcup_{a \in S} E\left(a, f\right)$$

và

$$\overline{E}\left(S, f\right) = \bigcup_{a \in S} \overline{E}\left(a, f\right).$$

Định nghĩa 1.2.5. Nếu $E\left(a, f\right) = E\left(a, g\right)$ thì ta nói f và g chung nhau giá trị a kể cả bội, nếu $\overline{E}\left(a, f\right) = \overline{E}\left(a, g\right)$ thì ta nói f và g chung nhau giá trị a không kể bội.

Định lý sau đây được gọi là Định lý năm điểm của Nevanlinna, nó cho thấy một hàm phân hình phức được xác định một cách duy nhất bởi ảnh ngược của 5 điểm phân biệt.

Định lý 1.2.6 (Định lý 5 điểm). *Giả sử f và g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Nếu tồn tại các giá trị phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_5 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sao cho $\overline{E}\left(a_j, f\right) = \overline{E}\left(a_j, g\right), \; j = 1, ..., 5$ thì $f \equiv g$.*

Chứng minh. Ta có:

$$\{z \,| f_1\left(z\right) = a_j\} = \{z \,| f_2\left(z\right) = a_j\}, \; \forall j = 1, ..., 5$$

nên

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1 - a_j}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2 - a_j}\right)$$

và gọi chung là $\overline{N}(r, a_j)$.

Ta áp dụng Định lý cơ bản thứ 2 của Nevanlinna cho hàm f_1 và năm điểm $a_1, \ldots, a_5$:

$$4T(r, f_1) \leqslant \sum_{j=1}^{5} \overline{N}(r, a_j) + \overline{N}(r, f_1) + S(r, f_1).$$

Ta thấy

$$\overline{N}(r, f_1) \leqslant N(r, f_1) \leqslant T(r, f_1)$$

Do đó:

$$4T(r, f_1) \leqslant \sum_{j=1}^{5} \overline{N}(r, a_j) + T(r, f_1) + S(r, f_1)$$

tương đương với

$$3T(r, f_1) \leqslant \sum_{j=1}^{5} \overline{N}(r, a_j) + S(r, f_1). \tag{1.3}$$

Tương tự với hàm f_2 ta có:

$$3T(r, f_2) \leqslant \sum_{j=1}^{5} \overline{N}(r, a_j) + S(r, f_2) \tag{1.4}$$

Cộng (1.3) và (1.4) ta được:

$$3(T(r, f_1) + T(r, f_2)) \leqslant 2\sum_{j=1}^{5} N(r, a_j) + S(r, f_1) + S(r, f_2) \tag{1.5}$$

Giả sử f_1 và f_2 là hai hàm phân hình phân biệt khác hằng số. Do $f_1 - f_2 \neq 0$ nên $\dfrac{1}{f_1 - f_2}$ cũng là hàm phân hình. Theo định lý cơ bản thứ nhất ta có:

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{1}{f_1 - f_2}\right) &= T(r, f_1 - f_2) + O(T(r, f_1 - f_2)) \\ &\leqslant T(r, f_1) + T(r, f_2) + O(T(r, f_1) + T(r, f_2)) \end{aligned}$$

Ta thấy nếu $f_1 = a_j$ thì $f_2 = a_j$ nên $f_1 - f_2 = 0$. Do đó các điểm mà tại đó $f_1 = f_2 = a_j$ đều là cực điểm của hàm $\frac{1}{f_1 - f_2}$. Từ đó:

$$T\left(r, \frac{1}{f_1 - f_2}\right) \geq N\left(r, \frac{1}{f_1 - f_2}\right) \geq \sum_{j=1}^{5} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1 - a_j}\right) = \sum_{j=1}^{5} N\left(r, a_j\right).$$

Do đó

$$\begin{aligned} T\left(r, f_1\right) + T\left(r, f_2\right) &\geq T\left(r, \frac{1}{f_1 - f_2}\right) + O\left(T\left(r, f_1\right) + T\left(r, f_2\right)\right) \\ &\geq \sum_{j=1}^{5} N\left(r, a_j\right) + O\left(T\left(r, f_1\right) + T\left(r, f_2\right)\right) \end{aligned}$$

Kết hợp với (1.5) ta có:

$$\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{5} N\left(r, a_j\right) \geq \sum_{j=1}^{5} N\left(r, a_j\right) + S\left(r, f_1\right) + S\left(r, f_2\right)$$

hay

$$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{5} N\left(r, a_j\right) \leqslant S\left(r, f_1\right) + S\left(r, f_2\right)$$

Điều này không thể xảy ra. Như vậy $f_1 = f_2$. $\square$

Chú ý rằng, số 5 trong Định lý năm điểm là số nhỏ nhất có thể, tức là tồn tại những hàm phân hình phân biệt, khác hằng chung nhau $p \leqslant 4$ giá trị phân biệt. Chẳng hạn: hai hàm $f(z) = e^z$ và $g(z) = e^{-z}$ chung nhau 4 giá trị $0, 1, -1, \infty$.

Chương 2

Tính duy nhất của các hàm nguyên với đạo hàm chung nhau một giá trị

2.1 Một số khái niệm

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày thêm một số khái niệm về hàm đếm sử dụng trong việc chứng minh các định lý. Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ và $a \in \mathbb{C}$. Với một số nguyên dương k, kí hiệu $n_{k)}(r, \frac{1}{f-a})$ là số $0-$điểm kể cả bội, chỉ tính đến những $0-$điểm có bội nhỏ hơn hoặc bằng k, của hàm $f-a$ trong đĩa $\{|z| < r\}$, $n_{(k+1}(r, \frac{1}{f-a})$ là số $0-$điểm kể cả bội, chỉ tính đến những $0-$điểm có bội lớn hơn k, của hàm $f-a$ trong đĩa $\{|z| < r\}$, $\overline{n}_{k)}(r, \frac{1}{f-a})$ là số $0-$điểm không kể bội, chỉ tính đến những $0-$điểm có bội nhỏ hơn hoặc bằng k, của hàm $f-a$ trong đĩa $\{|z| < r\}$, $\overline{n}_{(k+1}(r, \frac{1}{f-a})$ là số $0-$điểm không kể bội, chỉ tính đến những $0-$điểm có bội lớn hơn k, của hàm $f-a$ trong đĩa $\{|z| < r\}$. Dễ thấy rằng

$$n(r, f) = n_{k)}(r, \frac{1}{f-a}) + n_{(k+1}(r, \frac{1}{f-a});$$
$$\overline{n}(r, f) = \overline{n}_{k)}(r, \frac{1}{f-a}) + \overline{n}_{(k+1}(r, \frac{1}{f-a}).$$

Kí hiệu

$$N_{k)}(r,\frac{1}{f-a})=\int\limits_0^r\frac{n_{k)}(t,\frac{1}{f-a})-n_{k)}(0,\frac{1}{f-a})}{t}dt+n_{k)}(0,\frac{1}{f-a})\log r;$$

$$N_{(k+1}(r,\frac{1}{f-a})=N(r,\frac{1}{f-a})-N_{k)}(r,\frac{1}{f-a});$$

$$\overline{N}_{k)}(r,\frac{1}{f-a})=\int\limits_0^r\frac{\overline{n}_{k)}(t,\frac{1}{f-a})-\overline{n}_{k)}(0,\frac{1}{f-a})}{t}dt+\overline{n}_{k)}(0,\frac{1}{f-a})\log r;$$

$$\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{f-a})=\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})-\overline{N}_{k)}(r,\frac{1}{f-a}),$$

trong đó

$$n_{k)}(0,\frac{1}{f-a})=\lim_{t\longrightarrow 0}n_{k)}(t,\frac{1}{f-a});$$
$$\overline{n}_{k)}(0,\frac{1}{f-a})=\lim_{t\longrightarrow 0}\overline{n}_{k)}(t,\frac{1}{f-a}).$$

Các hàm $N_{k)}(r,\frac{1}{f-a}),(\overline{N}_{k)}(r,\frac{1}{f-a}))$ được gọi là *hàm đếm kể cả bội (tương ứng không kể bội)* tại những $0-$điểm có bội nhỏ hơn hay bằng k. $N_{(k+1}(r,\frac{1}{f-a}),(\overline{N}_{(k+1}(r,\frac{1}{f-a}))$ được gọi là *hàm đếm kể cả bội (tương ứng không kể bội)* tại những $0-$điểm có bội lớn hơn k.

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra tính chất:

$$N_p(r,\frac{1}{f-a})=\overline{N}_{(1}(r,\frac{1}{f-a})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f-a})+\cdots+\overline{N}_{(p}(r,\frac{1}{f-a}).$$

Cho $p\geqslant 2$ là một số nguyên và hai hàm f,g là hai hàm thỏa mãn $\overline{E}_{p)}(1,f)=\overline{E}_{p)}(1,g)$. Ta kí hiệu $\overline{N}_{(p+1}(r,1;f|g\neq 1)$ là hàm đếm tại các $1-$điểm của f với bội ít nhất là $p+1$ và không là $1-$điểm của g; $\overline{N}_{(p+1}(r,1;g|f\neq 1)$ là hàm đếm tại các $1-$điểm của g với bội ít nhất là $p+1$ và không là $1-$điểm của f.

Ta gọi z_0 là một $1-$ chung của f và g với bội là r và q tương ứng. Ta kí hiệu $\overline{N}_L(r,\frac{1}{f-1})$ là hàm đếm không kể bội tại các $1-$điểm của f và

g trong đó $r > q$, $\overline{N}_E^{(2}(r, \frac{1}{f-1})$ là hàm đếm không kể bội tại các $1-$điểm của f và g trong đó $r = q \geqslant 2$. Tương tự ta cũng có các hàm $\overline{N}_E(r, \frac{1}{g-1})$ và $\overline{N}_L^{(2}(r, \frac{1}{g-1})$. Đặc biệt, ta kí hiệu $\overline{N}_{L1}(r, \frac{1}{f-1})$ là hàm đếm không kể bội tại các $1-$điểm của f và g trong đó $r > q = 1$, $\overline{N}_{L1}(r, \frac{1}{g-1})$ là hàm đếm không kể bội tại các $1-$điểm của f và g trong đó $q > r = 1$, $\overline{N}_E^{1)}(r, \frac{1}{f-1}) = \overline{N}_E^{1)}(r, \frac{1}{g-1})$ là hàm đếm không kể bội tại các $1-$điểm đơn của f và g.

Ta kí hiệu thêm $N_0(r, 1/f')$ là hàm đếm kể cả bội tại các không điểm của f' nhưng không là không điểm của $f(f-1)$, $\overline{N}_0(r, 1/f')$ là hàm đếm không kể bội tại các không điểm của f' nhưng không là không điểm của $f(f-1)$.

Cho f là một hàm phân hình khác hằng, $a \in \mathbb{C}$ và k là một số nguyên dương. Kí hiệu $\overline{E}_{k)}(a, f)$ là tập các không điểm của $f - a$ với bội lớn nhất là k, trong đó mỗi không điểm được tính một lần và $E_{k)}(a, f)$ là tập các không điểm của $f - a$ với bội không lớn hơn k, trong đó mỗi không điểm được tính theo số bội của nó. Tức là:

$$\overline{E}_{k)}(a, f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = a \text{ bội } m \leqslant k\};$$
$$E_{k)}(a, f) = \{(z, m) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N} : f(z) = a \text{ bội } m \leqslant k\}.$$

Với mỗi hằng số $a \in \mathbb{C}$, ta định nghĩa

$$\Theta(a, f) = 1 - \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{\overline{N}(r, \dfrac{1}{f-a})}{T(r, f)},$$

$$\delta(a, f) = 1 - \limsup_{r \longrightarrow \infty} \frac{N(r, \dfrac{1}{f-a})}{T(r, f)}.$$

Ta kí hiệu

$$\Theta(a; f, g) = \min\{\Theta(a, f), \Theta(a, g)\};$$
$$\delta(a; f, g) = \min\{\delta(a, f), \delta(a, g)\}.$$

2.2 Một số bổ đề

Để chứng minh các kết quả trong phần tiếp theo ta cần các bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.1. ([11],[4]) *Cho $f(z)$ là một hàm phân hình khác hằng và p, k là hai số nguyên dương, khi đó*

$$N_p(r, \frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant N_{p+k}(r, \frac{1}{f}) + k\overline{N}(r, f) + S(r, f).$$

Bổ đề 2.2.2. ([8]) *Cho $f(z)$ là một hàm phân hình khác hằng và k là một số nguyên dương. Khi đó*

$$N(r, \frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant T(r, f^{(k)}) - T(r, f) + N(r, \frac{1}{f}) + S(r, f), \tag{2.1}$$

$$N(r, \frac{1}{f^{(k)}}) \leqslant N(r, \frac{1}{f}) + k\overline{N}(r, f) + S(r, f). \tag{2.2}$$

Bổ đề 2.2.3. *Cho F và G là hai hàm phân hình khác hằng và $p \geq 2$ là một số nguyên. Nếu F và G thỏa mãn $\overline{E}_{p)}(1, F) = \overline{E}_{p)}(1, G)$ thì*

$$\begin{aligned} p\overline{N}_{(p+1}(r, 1; F|G \neq 1) + \overline{N}_L(r, \frac{1}{F-1}) + \overline{N}_0(r, \frac{1}{F'}) \\ \leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{F}) + \overline{N}(r, F) + S(r, F); \end{aligned}$$

$$\overline{N}_L(r, \frac{1}{F-1}) + \overline{N}_0(r, \frac{1}{F'}) \leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{F}) + \overline{N}(r, F) + S(r, F);$$

$$\overline{N}_L(r, \frac{1}{G-1}) + \overline{N}_0(r, \frac{1}{G'}) \leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{G}) + \overline{N}(r, G) + S(r, G).$$

Chứng minh. Vì F và G thỏa mãn $\overline{E}_{p)}(1, F) = \overline{E}_{p)}(1, G)$ nên ta có:

$$\begin{aligned} p\overline{N}_{(p+1}(r, 1; F|G \neq 1) + \overline{N}_L(r, \frac{1}{F-1}) \\ \leqslant N(r, \frac{1}{F-1}) - \overline{N}(r, \frac{1}{F-1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Từ công thức 2.2 trong Bổ đề 2.2.2 ta có:

$$\begin{aligned} N(r, \frac{1}{F-1}) - \overline{N}(r, \frac{1}{F-1}) + N(r, \frac{1}{F}) - \overline{N}(r, \frac{1}{F}) + \overline{N}_0(r, \frac{1}{F'}) \\ \leqslant N(r, \frac{1}{F'}) \leqslant N(r, \frac{1}{F}) + \overline{N}(r, F) + S(r, F). \end{aligned}$$

Suy ra

$$N(r,\frac{1}{F-1})-\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_0(r,\frac{1}{F'})$$
$$\leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,F)+S(r,F). \quad (2.4)$$

Kết hợp (2.3) và (2.4) ta có:

$$p\overline{N}_{(p+1}(r,1;F|G\neq 1)+\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_0(r,\frac{1}{F'})$$
$$\leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,F)+S(r,F).$$

Từ bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_0(r,\frac{1}{F'})\leqslant (\overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,F)+S(r,F)).$$

Tương tự ta có

$$\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_0(r,\frac{1}{G'})\leqslant (\overline{N}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}(r,G)+S(r,G)).$$

Bổ đề 2.2.3 được chứng minh. □

Bổ đề 2.2.4. *Cho F và G là hai hàm nguyên khác hằng và $p\geq 2$ là một số nguyên dương. Đặt*

$$H=\left(\frac{F''}{F'}-2\frac{F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-2\frac{G'}{G-1}\right).$$

Nếu F và G thỏa mãn $\overline{E}_{p)}(1,F)=\overline{E}_{p)}(1,G)$ và $H\not\equiv 0$ thì

$$T(r,F)\leqslant N_2(r,\frac{1}{F})+N_2(r,\frac{1}{G})+2\overline{N}(r,\frac{1}{F})$$
$$+\overline{N}(r,\frac{1}{G})+S(r,F)+S(r,G). \quad (2.5)$$

Chứng minh. Ta xem xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $p=2$. Vì $H\not\equiv 0$ dễ dàng suy ra

$$N_E^{1)}(r,\frac{1}{F-1})\leqslant N(r,\frac{1}{H})\leqslant T(r,H)+O(1)$$
$$\leqslant N(r,H)+S(r,F)+S(r,G). \quad (2.6)$$

Vì F và G thỏa mãn $\overline{E}_{2)}(1,F)=\overline{E}_{2)}(1,G)$ và F, G là hai hàm nguyên khác hằng nên ta có:

$$\begin{aligned}N(r,H)\leqslant \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{G})+\overline{N}_{L}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_{L}(r,\frac{1}{G-1})\\ +\overline{N}_{(3}(r,1;F|G\neq 1)+\overline{N}_{(3}(r,1;G|F\neq 1)\\ +\overline{N}_{0}(r,\frac{1}{F'})+\overline{N}_{0}(r,\frac{1}{G'}).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})=&N_E^{1)}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_E^{(2}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})\\ &+\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_{(3}(r,1;F|G\neq 1).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}\overline{N}_E^{(2}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})-\overline{N}_{L1}(r,\frac{1}{F-1})\\ +2\overline{N}_{(3}(r,1;G|F\neq 1)\leqslant N(r,\frac{1}{G-1})-\overline{N}(r,\frac{1}{G-1}).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Từ (2.8) và (2.9) suy ra

$$\begin{aligned}&\overline{N}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}(r,\frac{1}{G-1})\\ &\leqslant N_E^{1)}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_E^{(2}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})\\ &\quad+\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_{(3}(r,1;F|G\neq 1)+N(r,\frac{1}{G-1})\\ &\quad-\{\overline{N}_E^{(2}(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})+\overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1})\\ &\quad-\overline{N}_{L1}(r,\frac{1}{F-1})+2\overline{N}_{(3}(r,1;G|F\neq 1)\}\\ &\leqslant N_E^{1)}(r,\frac{1}{F-1})+\overline{N}_{(3}(r,1;F|G\neq 1)+\overline{N}_{L1}(r,\frac{1}{F-1})\\ &\quad-2\overline{N}_{(3}(r,1;G|F\neq 1)+T(r,G)+O(1).\end{aligned}$$

Kết hợp (2.6) và (2.7) ta có:

$$\begin{aligned}
&\overline{N}(r,\frac{1}{F-1}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G-1})\\
&\quad \leqslant \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{G}) + \overline{N}_L(r,\frac{1}{F-1}) + \overline{N}_L(r,\frac{1}{G-1})\\
&\quad + 2\overline{N}_{(3}(r,1;F|G\neq 1) + \overline{N}_{L1}(r,\frac{1}{F-1}) - \overline{N}_{(3}(r,1;G|F\neq 1)\\
&\quad + \overline{N}_0(r,\frac{1}{F'}) + \overline{N}_0(r,\frac{1}{G'}) + T(r,G) + S(r,F) + S(r,G). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Từ $\overline{E}_{2)}(1,F) = \overline{E}_{2)}(1,G)$ và áp dụng Bổ đề 2.2.3 cho trường hợp $p = 2$ vào (2.10) ta thu được

$$\begin{aligned}
&\overline{N}(r,\frac{1}{F-1}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G-1})\\
&\qquad \leqslant \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{G}) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{F})\\
&\qquad + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + T(r,G) + S(r,F) + S(r,G). \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Vì F và G là hai hàm nguyên nên theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$\begin{aligned}
T(r,F) + T(r,G) \leqslant& \overline{N}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}(r,\frac{1}{F-1}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G})\\
&+ \overline{N}(r,\frac{1}{G-1}) - N_0(r,\frac{1}{F'}) - N_0(r,\frac{1}{G'})\\
&+ S(r,F) + S(r,G). \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

Thay thế (2.11) vào (2.12) ta có:

$$\begin{aligned}
T(r,F) \leqslant& \overline{N}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{G})\\
&+ 2\overline{N}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + S(r,F) + S(r,G)\\
=& N_2(r,\frac{1}{F}) + N_2(r,\frac{1}{G}) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G})\\
&+ S(r,F) + S(r,G).
\end{aligned}$$

Điều này sẽ kéo theo chứng minh của Bổ đề 2.2.4 khi $p = 2$.

Trường hợp 2 : $p > 2$. Chứng minh tương tự trường hợp 1 ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.2.5. ([7]) *Cho f là một hàm phân hình khác hằng và n là một số nguyên dương. Giả sử $P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + ... + a_1 f + a_o$, trong đó a_i là các hàm phân hình thỏa mãn $T(r, a_i) = S(r, f)(i = 0, 1, \ldots, n)$ và $a_n \not\equiv 0$. Khi đó*

$$T(r, P(f)) = nT(r, f) + S(r, f).$$

Bổ đề 2.2.6. ([3]) *Cho f là một hàm phân hình. Khi đó với số nguyên k ta có:*

$$\begin{aligned}\frac{f^{(k)}}{f} = \left(\frac{f'}{f}\right)^k &+ \frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-2}\left(\frac{f'}{f}\right)' \\ &+ \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\left(\frac{f'}{f}\right)^{k-3}\left(\frac{f'}{f}\right)'' + P_{k-2}\left(\frac{f'}{f}\right),\end{aligned}$$

trong đó $P_{k-2}\left(\frac{f'}{f}\right)$ là một đa thức của $\frac{f'}{f}$ và đạo hàm của nó có hệ số không đổi và có bậc không lớn hơn $k - 2$.

Bổ đề 2.2.7. ([3],[10]) *Cho $f(z)$ là một hàm phân hình khác hằng và $a_i(z), i = 1, 2$ là hai hàm phân hình phân biệt thỏa mãn $T(r, a_i) = S(r, f), (i = 1, 2)$. Khi đó*

$$T(r, f) < \overline{N}(r, f) + \overline{N}(r, \frac{1}{f - a_1}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f - a_2}) + S(r, f).$$

Bổ đề 2.2.8. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng, n, k là hai số nguyên dương và a, b là các hằng số thỏa mãn $ab \neq 0$. Đặt*

$$F = [f^n(af + b)]^{(k)}, \quad G = [g^n(ag + b)]^{(k)}. \tag{2.13}$$

Nếu $n > k$ thì $FG \not\equiv 1$.

Chứng minh. Giả sử $FG \equiv 1$ tức là

$$[f^n(af + b)]^{(k)}[g^n(ag + b)]^{(k)} \equiv 1. \tag{2.14}$$

Vì $n > k$ và f, g là hai hàm nguyên khác hằng nên từ (2.14) suy ra

$$f \neq 0, \quad g \neq 0. \tag{2.15}$$

Sử dụng Bổ đề 2.2.6 cho f^{n+1} và f^n ta có

$$\begin{aligned}[f^n(af+b)]^{(k)} &= a[f^{n+1}]^{(k)} + b[f^n]^{(k)} = aPf^{n+1} + bQf^n \\ &= aPf^n(f + \frac{b}{a}\frac{Q}{P}),\end{aligned} \tag{2.16}$$

trong đó P, Q là hai hàm nguyên thỏa mãn

$$T(r,P) = S(r,f), \quad T(r,Q) = S(r,f), \quad P \not\equiv 0, \quad Q \not\equiv 0. \tag{2.17}$$

Từ (2.14) và (2.16), ta có

$$(f + \frac{b}{a}\frac{Q}{P}) \neq 0. \tag{2.18}$$

Theo Bổ đề 2.2.7, (2.15), (2.17) và (2.18) ta thu được

$$T(r,f) \leqslant \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f + \frac{b}{a}\frac{Q}{P}}\right) + S(r,f) = S(r,f).$$

Điều này không thể xảy ra. Bổ đề 2.2.8 được chứng minh. □

Bổ đề 2.2.9. ([4]) *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng, n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n > k$. Nếu $(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} \equiv 1$ thì*

$$f(z) = c_1 e^{cz}, \quad g(z) = c_2 e^{-cz},$$

trong đó c_1, c_2, c là ba hằng số thỏa mãn $(-1)^k (c_1 c_2)^n (nc)^{2k} = 1$.

Bổ đề 2.2.10. ([9],[?]) *Cho F và G là hai hàm phân hình khác hằng. Nếu*

$$H = [\frac{F''}{F'} - 2\frac{F'}{F-1}] - [\frac{G''}{G'} - 2\frac{G'}{G-1}] \equiv 0.$$

và

$$\limsup_{r \longrightarrow \infty, r \in I} \frac{\overline{N}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}(r,F) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + \overline{N}(r,G)}{T(R)} < 1,$$

trong đó $T(R) = \max\{T(r,F), T(r,G)\}$. Khi đó $F \equiv G$ hoặc $FG \equiv 1$.

2.3 Tính duy nhất của các hàm nguyên với đạo hàm chung nhau một giá trị

Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày một số kết quả về tính duy nhất của các hàm nguyên khi các hàm nguyên với đạo hàm của chúng chung nhau một giá trị. Năm 1997, Yang và Hua đã chứng minh:

Định lý 2.3.1. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và $n \geq 7$ là một số nguyên. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ chung nhau 1 CM. Khi đó hoặc $f \equiv dg$, với d là căn bậc $n+1$ của đơn vị hoặc $g(z) = c_1 e^{cz}$ và $f(z) = c_2 e^{-cz}$, trong đó c_1, c_2 và c là các hằng số thỏa mãn $(c_1c_2)^{n+1}c^2 = -1$.*

Năm 2000, Xu và Qui đã chứng minh một cải tiến của Định lý 2.3.1 như sau:

Định lý 2.3.2. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và $n \geq 12$ là một số nguyên. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ chung nhau 1 IM. Khi đó hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}, g(z) = c_2 e^{-cz}$, trong đó c_1, c_2, c là hằng số thỏa mãn $(c_1c_2)^{n+1}c^2 = -1$ hoặc $f(z) \equiv tg(z)$ với t là hằng số thỏa mãn $t^{n+1} = 1$.*

Năm 2002 Fang đã xem xét Định lý 2.3.1 trong trường hợp đạo hàm cấp k và thu được hai kết quả:

Định lý 2.3.3. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n > 2k + 4$. Nếu $(f^n(z))^{(k)}$ và $(g^n(z))^{(k)}$ chung nhau 1 CM, khi đó hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}$, $g(z) = c_2 e^{-cz}$, trong đó c_1, c_2, c là các hằng số thỏa mãn $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$ hoặc $f(z) \equiv tg(z)$ với t là hằng số thỏa mãn $t^n = 1$.*

Định lý 2.3.4. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n \geqslant 2k + 8$. Nếu $(f^n(z)(f(z)-1))^{(k)}$ và $(g^n(z)(g(z)-1))^{(k)}$ chung nhau 1 CM thì $f(z) \equiv g(z)$.*

Thời gian gần đây J. F. Chen tổng quát các định lý 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 và thu được:

Định lý 2.3.5. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n > 5k + 7$. Nếu $(f^n(z))^{(k)}$ và $(g^n(z))^{(k)}$ chung nhau 1 IM, khi đó hoặc $f(z) = c_1e^{cz}$, $g(z) = c_2e^{-cz}$, trong đó c_1, c_2, c là các hằng số thỏa mãn $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$ hoặc $f(z) \equiv tg(z)$ với t là hằng số thỏa mãn $t^n = 1$.*

Định lý 2.3.6. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n > 5k+13$. Nếu $(f^n(z)(f(z)-1))^{(k)}$ và $(g^n(z)(g(z)-1))^{(k)}$ chung nhau 1 IM thì $f(z) \equiv g(z)$.*

Năm 2011, L. Xiuqing và L. Weichuan đã chứng minh:

Định lý 2.3.7. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n > k + (4k+7)(1 - \Theta(0; f, g))$ và $p \geq 2$ là một số nguyên. Nếu $\overline{E}_{p)}(1, (f^n)^{(k)}) = \overline{E}_{p)}(1, (g^n)^{(k)})$ thì kết luận của Định lý 2.3.5 đúng.*

Chứng minh. Gọi F, G, H được xác định như trong Bổ đề 2.2.4, với hai số $a = 0, b = 1$, khi đó

$$F = (f^n)^{(k)}, G = (g^n)^{(k)} \text{ và } \overline{E}_{p)}(1, F) = \overline{E}_{p)}(1, G).$$

Giả sử $H \not\equiv 0$, từ (2.5) trong Bổ đề 2.2.4 ta có

$$\begin{aligned} T(r,F) \leqslant N_2(r,\frac{1}{F}) + N_2(r,\frac{1}{G}) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{F}) \\ + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) + S(r,F) + S(r,G). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Sử dụng công thức (2.1) trong Bổ đề 2.2.2 ta có

$$\begin{aligned} nT(r,f) &= T(r,f^n) \\ &\leqslant T(r,(f^n)^{(k)}) + N(r,\frac{1}{f^n}) - N(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}}) + S(r,f) \\ &= T(r,F) + nN(r,\frac{1}{f}) - N(r,\frac{1}{F}) + S(r,f). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Chú ý rằng

$$\overline{N}(r,\frac{1}{F}) = N_1(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}}),$$

$$\overline{N}(r, \frac{1}{G}) = N_1(r, \frac{1}{(g^n)^{(k)}}).$$

Sử dụng Bổ đề 2.2.1 ta có

$$\begin{aligned} 2\overline{N}(r, \frac{1}{F}) + \overline{N}(r, \frac{1}{G}) &\leqslant 2N_{1+k}(r, \frac{1}{f^n}) + N_{1+k}(r, \frac{1}{g^n}) + S(r, f) + S(r, g) \\ &\leqslant 2(1+k)\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + (1+k)\overline{N}(r, \frac{1}{g}) \\ &\quad + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Hiển nhiên ta có

$$S(r, F) = S(r, f), \quad S(r, G) = S(r, g).$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.19), (2.20) và (2.21) ta có

$$\begin{aligned} nT(r, f) \leqslant N_2(r, \frac{1}{F}) + N_2(r, \frac{1}{G}) + 2(1+k)\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + (1+k)\overline{N}(r, \frac{1}{g}) \\ + nN(r, \frac{1}{f}) - N(r, \frac{1}{F}) + S(r, f) + S(r, g). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Từ điều kiện của Định lý 2.3.7 dễ thấy rằng $n > k$. Bây giờ ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1: $n > k + 1$. Chú ý rằng, nếu z_0 là không điểm bội q của f thì z_0 là không điểm bội nhỏ nhất là 2 của $(f^n)^{(k)}$ vì

$$nq - k > (k+1)q - k \geqslant 1.$$

Vì vậy ta có

$$N_{(2}(r, \frac{1}{F}) - 2\overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{F}) \geqslant nN(r, \frac{1}{f}) - (k+2)\overline{N}(r, \frac{1}{f}).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} N_2(r, \frac{1}{F}) &= \overline{N}(r, \frac{1}{F}) + \overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{F}) \\ &= N(r, \frac{1}{F}) - \left(N_{(2}(r, \frac{1}{F}) - 2\overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{F})\right) \\ &\leqslant N(r, \frac{1}{F}) - nN(r, \frac{1}{f}) + (k+2)\overline{N}(r, \frac{1}{f}). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Tương tự ta có

$$N_2(r, \frac{1}{G}) \leqslant N(r, \frac{1}{G}) - nN(r, \frac{1}{g}) + (k+2)\overline{N}(r, \frac{1}{g}). \tag{2.24}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.22)-(2.24), ta có

$$\begin{aligned} nT(r,f) \leqslant (3k+4)\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + (2k+3)\overline{N}(r, \frac{1}{g}) + N(r, \frac{1}{G}) \\ - nN(r, \frac{1}{g}) + S(r,f) + S(r,g). \end{aligned}$$

Sử dụng (2.2) trong Bổ đề 2.2.2 ta thu được bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} nT(r,f) \leqslant (3k+4)\overline{N}(r, \frac{1}{f}) + (2k+3)\overline{N}(r, \frac{1}{g}) \\ + S(r,f) + S(r,g). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Trường hợp 2: $n = k+1$. Ta cũng chú ý rằng, nếu z_0 là không điểm bội $q \geqslant 2$ của f thì z_0 là không điểm bội nhỏ nhất là 3 của $(f^n)^{(k)}$ vì

$$nq - k = (k+1)q - k \geqslant 2(k+1) - k \geqslant 3.$$

Vì vậy ta có

$$N_{(3}(r, \frac{1}{F}) - 2\overline{N}_{(3}(r, \frac{1}{F}) \geqslant nN_{(2}(r, \frac{1}{f}) - (k+2)\overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{f}).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} N_2(r, \frac{1}{F}) &= N(r, \frac{1}{F}) - \left(N_{(3}(r, \frac{1}{F}) - 2\overline{N}_{(3}(r, \frac{1}{F})\right) \\ &\leqslant N(r, \frac{1}{F}) - nN_{(2}(r, \frac{1}{f}) + (k+2)\overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{f}). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Tương tự ta có

$$N_2(r, \frac{1}{G}) \leqslant N(r, \frac{1}{G}) - nN_{(2}(r, \frac{1}{g}) + (k+2)\overline{N}_{(2}(r, \frac{1}{g}). \tag{2.27}$$

Chú ý rằng $n = k + 1$, thế (2.26) và (2.27) vào (2.22) và áp dụng Bổ đề 2.2.2, ta thu được:

$$
\begin{aligned}
nT(r,f) &\leqslant n(N(r,\frac{1}{f}) - N_{(2}(r,\frac{1}{f})) + n(N(r,\frac{1}{g}) - N_{(2}(r,\frac{1}{g}))\\
&\quad + (k+2)(\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g})) + 2(k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f})\\
&\quad + (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + S(r,f) + S(r,g)\\
&= (1+k)(N_{1)}(r,\frac{1}{f}) + N_{1)}(r,\frac{1}{g}))\\
&\quad + \Big((k+1)(\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g})) + (\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g}))\Big)\\
&\quad + 2(k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + S(r,f) + S(r,g)\\
&= (1+k)(\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})) + \Big(\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})\\
&\quad - (N_{1)}(r,\frac{1}{f}) + N_{1)}(r,\frac{1}{g}))\Big) + 2(k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{f})\\
&\quad + (k+1)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + S(r,f) + S(r,g)\\
&\leqslant (3k+4)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + (2k+3)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + S(r,f) + S(r,g).
\end{aligned}
$$

Điều này kéo theo (2.25) đúng khi $n = k + 1$. Như vậy, với bất kì số nguyên $n > k$ ta có:

$$nT(r,f) \leqslant (3k+4)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + (2k+3)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + S(r,f) + S(r,g).$$

Đổi vai trò của f và g ta có:

$$nT(r,g) \leqslant (3k+4)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + (2k+3)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + S(r,f) + S(r,g).$$

Vì vậy với mọi $\varepsilon > 0$ bất kì ta có

$$\begin{aligned} n\big(T(r,f)+T(r,g)\big) &\leqslant (5k+7)(\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{g}))+S(r,f)+S(r,g)\\ &\leqslant (5k+7)(1-\Theta(0,f)+\varepsilon)T(r,f)\\ &\quad+(5k+7)(1-\Theta(0,g)+\varepsilon)T(r,g)\\ &\leqslant (5k+7)(1-\Theta(0;f,g)+\varepsilon)(T(r,f)+T(r,g)). \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết

$$n > k+(4k+7)(1-\Theta(0;f,g)).$$

Do đó $H \equiv 0$. Mặt khác, theo (2.1) trong Bổ đề 2.2.2, ta có:

$$\begin{aligned} T(r,F) &= T(r,(f^n)^{(k)})\\ &\geqslant T(r,f^n)-N(r,\frac{1}{f^n})+N(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}})+S(r,f)\\ &\geqslant nT(r,f)-k\overline{N}(r,\frac{1}{f})+S(r,f)\\ &\geqslant (n-k)T(r,f)+S(r,f). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Tương tự ta có

$$T(r,G) \geqslant (n-k)T(r,g)+S(r,g). \tag{2.29}$$

Từ (2.28) và (2.29) ta có:

$$\begin{aligned} \max\{T(r,F),T(r,G)\} &\geqslant \frac{1}{2}(T(r,F)+T(r,G)) \qquad (2.30)\\ &\geqslant \frac{1}{2}(n-k)(T(r,f)+T(r,g))+S(r,f)+S(r,g). \end{aligned}$$

Ta chú ý rằng với $\varepsilon > 0$ tùy ý

$$\begin{aligned} \overline{N}(r,\frac{1}{F})+\overline{N}(r,\frac{1}{G}) &= N_1(r,\frac{1}{(f^n)^{(k)}})+N_1(r,\frac{1}{(g^n)^{(k)}})\\ &\leqslant (k+1)(\overline{N}(r,\frac{1}{f})+\overline{N}(r,\frac{1}{g}))\\ &\leqslant (k+1)(1-\Theta(0;f,g)+\varepsilon)(T(r,f)+T(r,g)). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Từ điều kiện $n > k + (4k+7)(1 - \Theta(0; f, g))$ và (2.30), (2.31) và áp dụng Bổ đề 2.2.10 ta suy ra

$$F \equiv G \text{ hoặc } FG \equiv 1.$$

Nếu $F \equiv G$ tức là $(f^n)^{(k)} \equiv (g^n)^{(k)}$ thì

$$f^n = g^n + P, \tag{2.32}$$

trong đó P là đa thức bậc lớn nhất là $k - 1$. Điều này chỉ ra rằng cả f và g cũng là hàm nguyên siêu việt hoặc đa thức. Trước hết, ta xét trường hợp nếu f và g là các hàm nguyên siêu việt. Giả sử rằng $P \not\equiv 0$. Từ (2.32) và Bổ đề 2.2.7 ta có

$$\begin{aligned} nT(r, f) = T(r, f^n) &\leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{f^n}) + \overline{N}(r, f^n) + \overline{N}(r, \frac{1}{g^n}) + S(r, f) \\ &\leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + S(r, f). \end{aligned}$$

Tương tự ta có

$$nT(r, g) \leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + S(r, g).$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có

$$n(T(r, f) + T(r, g)) \leqslant 2(1 - \Theta(0; f, g) + \varepsilon)(T(r, f) + T(r, g)).$$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện $n > k + (4k+7)(1 - \Theta(0; f, g))$. Do đó $P \equiv 0$. Từ (2.32) suy ra $f^n = g^n$. Vì vậy dễ thấy $f(z) \equiv tg(z)$, trong đó t là hằng số thỏa mãn $t^n = 1$.

Bây giờ ta xét trường hợp f và g là các đa thức. Cho $1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}$ là các nghiệm của phương trình $z^n = 1$. Khi đó, từ (2.32), ta có

$$(f - g)(f - \omega g) \ldots (f - \omega^{n-1} g) = P.$$

Từ đó và chú ý rằng $n > k$ suy ra $P \equiv 0$. Vì vậy từ phương trình trên suy ra $f(z) \equiv tg(z)$, trong đó t là hăng số thỏa mãn $t^n = 1$.

Nếu $FG \equiv 1$, tức là $(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} \equiv 1$. Theo Bổ đề 2.2.9 ta có

$$f(z) = c_1e^{cz}, g(z) = c_2e^{-cz},$$

trong đó c_1, c_2, c là các hằng số thỏa mãn $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$. Định lý được chứng minh. $\square$

Từ Định lý 2.3.7 ta có:

Hệ quả 2.3.8. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n > k + (4k+7)(1-\Theta(0; f, g))$. Nếu $(f^n(z))^{(k)}$ và $(g^n(z))^{(k)}$ chung nhau 1 IM thì kết luận của Định lý 2.3.5 đúng.*

Định lý 2.3.9. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn*

$$n > k + (4k+7)(1-\Theta(0; f, g)) + 4(1-\delta(1; f; g))$$

và $p \geq 2$ là một số nguyên. Nếu

$$\overline{E}_{p)}(1, (f^n(f-1))^{(k)}) = \overline{E}_{p)}(1, (g^n(g-1))^{(k)})$$

thì $f(z) \equiv g(z)$.

Chứng minh. Gọi F, G, H được xác định như trong Bổ đề 2.2.4 và cho $a = 1, b = -1$. Khi đó

$$F = (f^n(f-1)^{(k)}), \quad G = (g^n(g-1)^{(k)})$$

và $\overline{E}_{p)}(1, F) = \overline{E}_{p)}(1, G)$. Giả sử $H \not\equiv 0$, theo Bổ đề 2.2.4 ta có

$$\begin{aligned} T(r,F) \leqslant{} & N_2(r,\frac{1}{F}) + N_2(r,\frac{1}{G}) + 2\overline{N}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) \\ & + S(r,F) + S(r,G). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Theo Bổ đề 2.2.5 và (2.1) trong Bổ đề 2.2.2 ta có

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,f) &= T(r,f^n(f-1)) + S(r,f)\\ &\leqslant T(r,(f^n(f-1))^{(k)}) + N(r,\frac{1}{f^n(f-1)})\\ &\quad - N(r,\frac{1}{(f^n(f-1))^{(k)}}) + S(r,f)\\ &= T(r,F) + nN(r,\frac{1}{f}) + N(r,\frac{1}{f-1}) - N(r,\frac{1}{F}) + S(r,f).\end{aligned} \tag{2.34}$$

Sử dụng Bổ đề 2.2.1 ta có:

$$\begin{aligned}2\overline{N}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) &\leqslant 2N_{1+k}(r,\frac{1}{f^n(f-1)}) + N_{k+1}(r,\frac{1}{g^n(g-1)})\\ &\quad + S(r,f) + S(r,g)\\ &\leqslant 2(1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + 2N(r,\frac{1}{f-1}) + (1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{g})\\ &\quad + N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,f) + S(r,g).\end{aligned} \tag{2.35}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.33)-(2.35), ta có:

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,f) &\leqslant N_2(r,\frac{1}{F}) + N_2(r,\frac{1}{G}) + 2(1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{f})\\ &\quad + (1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + 3N(r,\frac{1}{f-1}) + N(r,\frac{1}{g-1})\\ &\quad + nN(r,\frac{1}{f}) - N(r,\frac{1}{F}) + S(r,f).\end{aligned} \tag{2.36}$$

Dễ thấy từ điều kiện của định lý ta suy ra $n > k$. Bây giờ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $n > k+1$. Chứng minh tương tự như trong trường hợp 1 của Định lý 2.3.7 ta thu được

$$N_2(r,\frac{1}{F}) \leqslant N(r,\frac{1}{F}) - nN(r,\frac{1}{f}) + (k+2)\overline{N}(r,\frac{1}{f}), \tag{2.37}$$

$$N_2(r,\frac{1}{G}) \leqslant N(r,\frac{1}{G}) - nN(r,\frac{1}{g}) + (k+2)\overline{N}(r,\frac{1}{g}). \tag{2.38}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.36)-(2.38) và áp dụng (2.2) trong Bổ đề 2.2.2 ta thu được:

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,f) &\leqslant (3k+4)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + (2k+3)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + 3N(r,\frac{1}{f-1})\\ &\quad + 2N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,f) + S(r,g). \qquad (2.39)\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $n = k+1$. Lý luận tương tự như trong chứng minh trường hợp 2 của Định lý 2.3.7 ta có

$$\begin{aligned}N_2(r,\frac{1}{F}) &\leqslant N(r,\frac{1}{F}) - nN_{(2}(r,\frac{1}{f}) + (k+2)\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f})\\ N_2(r,\frac{1}{G}) &\leqslant N(r,\frac{1}{G}) - nN_{(2}(r,\frac{1}{g}) + (k+2)\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g}).\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.36) và áp dụng Bổ đề 2.2.2, ta cũng thu được:

$$\begin{aligned}(n+1)T(r,f) &\leqslant n(N(r,\frac{1}{f}) - N_{(2}(r,\frac{1}{f})) + n(N(r,\frac{1}{g})\\ &\quad - N_{(2}(r,\frac{1}{g})) + (k+2)(\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g}))\\ &\quad + 2(1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + (1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + 3N(r,\frac{1}{f-1})\\ &\quad + 2N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,f) + S(r,g)\\ &= (1+k)(N_{1)}(r,\frac{1}{f}) + N_{1)}(r,\frac{1}{g})) + (k+1)(\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f})\\ &\quad + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g})) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{g}) + 2(1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{f})\\ &\quad + (1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + 3N(r,\frac{1}{f-1})\\ &\quad + 2N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,f) + S(r,g)\\ &= (k+1)(\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})) + \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})\\ &\quad - (N_{1)}(r,\frac{1}{f}) + N_{1)}(r,\frac{1}{g})) + 2(1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{f})\end{aligned}$$

$$+ (1+k)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + 3N(r,\frac{1}{f-1})$$
$$+ 2N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,f) + S(r,g)$$
$$\leqslant (3k+4)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + (2k+3)\overline{N}(r,\frac{1}{g})$$
$$+ 3N(r,\frac{1}{f-1}) + 2N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,f) + S(r,g).$$

Điều này có nghĩa là (2.39) đúng khi $n = k+1$. Do đó với bất kì số nguyên $n > k$ ta có

$$(n+1)T(r,f) \leqslant (3k+4)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + (2k+3)\overline{N}(r,\frac{1}{g})$$
$$+ 3N(r,\frac{1}{f-1}) + 2N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,f) + S(r,g).$$

Đổi vai trò của của f và g ta có:

$$(n+1)T(r,g) \leqslant (3k+4)\overline{N}(r,\frac{1}{g}) + (2k+3)\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + 3N(r,\frac{1}{g-1})$$
$$+ 2N(r,\frac{1}{f-1}) + S(r,f) + S(r,g).$$

Vì vậy với bất kì số $\varepsilon > 0$ ta có:

$$(n+1)[T(r,f) + T(r,g)] \leqslant \big((5k+7)(1-\Theta(0;f,g)) + 5(1-\delta(1;f,g)) + \varepsilon\big)$$
$$\big(T(r,f) + T(r,g)\big).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết

$$n > k + (4k+7)(1-\Theta(0;f,g)) + 4(1-\delta(1;f;g)).$$

Do đó $H \equiv 0$.

Mặt khác theo (2.1) trong Bổ đề 2.2.2, ta có

$$T(r,F) = T(r,(f^n(f-1))^{(k)})$$
$$\geqslant T(r,f^n(f-1)) - N(r,\frac{1}{f^n(f-1)})$$
$$+ N(r,\frac{1}{(f^n(f-1))^{(k)}}) + S(r,f)$$
$$\geqslant (n+1)T(r,f) - k\overline{N}(r,\frac{1}{f}) - N(r,\frac{1}{f-1}) + S(r,f). \quad (2.40)$$

Tương tự ta có

$$T(r,G) \geqslant (n+1)T(r,g) - k\overline{N}(r,\frac{1}{g}) - N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,g). \quad (2.41)$$

Suy ra với mọi $\varepsilon > 0$ bất kì, từ (2.40) và (2.41), ta có

$$\begin{aligned} \max\{T(r,F),T(r,G)\} &\geqslant \frac{1}{2}(T(r,F)+T(r,G)) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\big((n+1)(T(r,f)+T(r,g)) - k(\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g}))\big) \\ &\quad - \frac{1}{2}(N(r,\frac{1}{f-1}) + N(r,\frac{1}{g-1})) + S(r,f) + S(r,g) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\big((n+1) - k(1-\Theta(0;f,g)) - (1-\delta(1;f,g)) + \varepsilon\big) \\ &\quad (T(r,f)+T(r,g)). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Chú ý rằng:

$$\begin{aligned} \overline{N}(r,\frac{1}{F}) + \overline{N}(r,\frac{1}{G}) &= N_1(r,\frac{1}{(f^n(f-1))^{(k)}}) + N_1(r,\frac{1}{(g^n(g-1))^{(k)}}) \\ &\leqslant N_{1+k}(r,\frac{1}{f^n(f-1)}) + N_{1+k}(r,\frac{1}{g^n(g-1)}) \\ &\quad + S(r,f) + S(r,g) \\ &\leqslant (k+1)(\overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \overline{N}(r,\frac{1}{g})) + N(r,\frac{1}{f-1}) \\ &\quad + N(r,\frac{1}{g-1}) + S(r,f) + S(r,g) \\ &\leqslant \big((k+1)(1-\Theta(0;f,g)) + (1-\delta(1;f,g)) + \varepsilon\big) \\ &\quad \big(T(r,f)+T(r,g)\big). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Vì $n > k + (4k+7)(1-\Theta(0;f,g)) + 4(1-\delta(1;f;g))$, từ (2.42) và (2.43) và áp dụng Bổ đề 2.2.10 ta có

$$F \equiv G \text{ hoặc } FG \equiv 1.$$

Do $n > k$ nên theo Bổ đề 2.2.8 ta có $F \equiv G$, tức là:

$$(f^n(f-1)^{(k)}) \equiv (g^n(g-1)^{(k)}). \quad (2.44)$$

Vì vậy

$$f^n(f-1) = g^n(g-1) + P, \tag{2.45}$$

trong đó P là đa thức bậc lớn nhất là $k-1$. Điều này kéo theo cả f, g hoặc cùng là hàm nguyên siêu việt hoặc cùng là đa thức cùng bậc. Bây giờ ta chứng minh $P \equiv 0$.

Trước tiên ta xét trường hợp f và g là hai hàm nguyên siêu việt. Giả sử rằng $P \not\equiv 0$, theo Bổ đề 2.2.7 và (2.45) ta có

$$\begin{aligned}
(n+1)T(r,g) &= T(r, g^n(g-1)) + O(1) \\
&\leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{g^n(g-1)}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f^n(f-1)}) + S(r,g) \\
&\leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g-1}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f-1}) + S(r,g) \\
&\leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + T(r,g) + T(r,f) + S(r,g).
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$nT(r,g) \leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + T(r,f) + S(r,g).$$

Tương tự ta có

$$nT(r,f) \leqslant \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, \frac{1}{g}) + T(r,g) + S(r,f).$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned}
(n-1)(T(r,f) + T(r,g)) &\leqslant 2(\overline{N}(r, \frac{1}{g}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f})) + S(r,f) + S(r,g) \\
&\leqslant 2\big((1 - \Theta(0; f, g)) + \varepsilon\big)\big(T(r,f) + T(r,g)\big),
\end{aligned}$$

trong đó ε là một số dương bé tùy ý, điều này mâu thuẫn với

$$n > k + (4k+7)(1 - \Theta(0; f, g)).$$

Do đó $P \equiv 0$.

Tiếp theo ta xét trường hợp f và g là hai đa thức. Chú ý rằng

$$\begin{aligned} n &> k + (4k+7)(1-\Theta(0;f,g)) + 4(1-\delta(1;f;g)) \\ &\geqslant k + 4[2-(\Theta(0,f)+\delta(1,f))] \geqslant k+4. \end{aligned}$$

Ta giả sử $\deg f = m = \deg g$. Nếu $P(z) \not\equiv 0$ ta có

$$\frac{f^n(f-1)}{P} = \frac{g^n(g-1)}{P} + 1.$$

Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$\begin{aligned} T(r, \frac{f^n(f-1)}{P}) &\leqslant \overline{N}(r, \frac{f^n(f-1)}{P}) + \overline{N}(r, \frac{P}{f^n(f-1)}) \\ &\quad + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{f^n(f-1)}{P} - 1}\right) + S(r,f) \\ &= \overline{N}(r, \frac{f^n(f-1)}{P}) + \overline{N}(r, \frac{P}{f^n(f-1)}) \\ &\quad + \overline{N}(r, \frac{P}{g^n(g-1)}) + S(r,f). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Gọi đa thức ước chung lớn nhất của $f^n(f-1)$ và $P(z)$ là $Q(z)$ và đặt $\deg Q(z) = t$, khi đó $0 \leqslant t \leqslant k-1$. Chú ý rằng f và g là các đa thức nên suy ra

$$\begin{aligned} [(n+1)m - t]\log r &= T(r, \frac{f^n(f-1)}{P}) + O(1) \\ &\leqslant (k-1-t)\log r + 2m\log r + 2m\log r + O(1) \\ &\leqslant (k-1)m\log r + 4m\log r - t\log r + O(1) \\ &\leqslant (3+k)m\log r - t\log r + O(1), \end{aligned}$$

mâu thuẫn với $n > k+4$. Do đó $P \equiv 0$, khẳng định được chứng minh. Từ (2.45) suy ra:

$$f^n(f-1) = g^n(g-1). \tag{2.47}$$

Đặt $h = \dfrac{f}{g}$, kéo theo $f = gh$. Suy ra

$$g(h^{n+1} - 1) = h^n - 1. \tag{2.48}$$

Giả sử h khác hằng, gọi z_0 là một không điểm của $h^{n+1}-1$, vì g là hàm nguyên nên từ (2.48) suy ra z_0 phải là không điểm của h^n-1. Do đó z_0 cũng là không điểm của $h-1$. Theo định lý cơ bản thứ hai ta có

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,h) &\leqslant \sum_{i=1}^{n+1}\overline{N}(r,\frac{1}{h-\alpha_i})+S(r,h)\\ &\leqslant N(r,\frac{1}{h-1})+S(r,h)\leqslant T(r,h)+S(r,h),\end{aligned}$$

trong đó $\alpha_i, i=1,2,\ldots,n+1$, là các nghiệm phân biệt của phương trình đại số $h^{n+1}-1=0$. Bất đẳng thức này mâu thuẫn với điều kiện $n>k+4$, do đó h là hằng số. Nếu $h\not\equiv 1$ ta có g là hằng số, mâu thuẫn. Vì vậy $h\equiv 1$ tức là $f(z)\equiv g(z)$. Định lý được chứng minh. □

Từ Định lý 2.3.9 ta có:

Hệ quả 2.3.10. *Cho $f(z)$ và $g(z)$ là hai hàm nguyên khác hằng và n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn*

$$n>k+(4k+7)(1-\Theta(0;f,g))+4(1-\delta(1;f;g)).$$

Nếu $(f^n(z)(f(z)-1))^{(k)}$ và $(g^n(z)(g(z)-1))^{(k)}$ chung nhau 1IM thì $f(z)\equiv g(z)$.

Nhận xét. Từ Hệ quả 2.3.8 chúng ta thấy nếu thay điều kiện $n>5k+13$ bởi điều kiện $n>5k+11$ trong Định lý 2.3.6 thì kết luận của định lý vẫn còn đúng. Do đó Định lý 2.3.7 là một mở rộng thực sự của Định lý 2.3.6.

Kết luận

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna cho các hàm phân hình và nghiên cứu các ứng dụng của lý thuyết đó trong vấn đề xác định duy nhất hàm phân hình. Cụ thể, luận văn đã trình bày một số nội dung sau đây:

1) Trình bày một số kết quả nghiên cứu về các hàm đếm, hàm xấp xỉ và hàm đặc trưng Nevanlinna của một hàm phân hình. Đặc biệt là hai định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai cho thấy quan hệ giữa các hàm này.

2) Giới thiệu một số điều kiện đại số, chứng minh hai định lý của L. Xiuquing và L. Weichuan được công bố [5] về xác định duy nhất một hàm nguyên.

Tài liệu tham khảo

[1] J. F. Chen, *Uniqueness of entire function that share one value*. Comput Math Appl, 2008, 56: 3000-3014.

[2] M. L. Fang, *Uniqueness and value-sharing of entire functions*. Comput Math Appl, 2002, 44: 823-831.

[3] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*. Oxford: Claredon Press, 1964.

[4] I. Lahiri và A. Sarkar, *Uniqueness of a meromorphic function and its derivative*. J Inequal Pure Appl Math, 2004, 5(1): Art 20.

[5] L. Xiuqing và L. Weichuan, *Uniqueness of entire functions sharing one value*. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31B(3): 1062-1076.

[6] Y. Xu và H. L. Qiu, *Entire functions sharing one value IM*. Indina J Pure Appl Math, 2000, 31: 849-855.

[7] C. C. Yang và H. X. Hua, *Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions*. Ann Acad Sci Fenn Math, 1997, 22(2): 395-406.

[8] H. X. Yi, *Uniqueness of a meromorphic function and a question of C.C Yang*. Complex Var Theory Appl, 1990, 14: 169-176.

[9] H. X. Yi, *Meromorphic functions sharing one or two values*. Complex Var Theory Appl, 1995, 28(1): 1-11.

[10] H. X. Yi và C. C. Yang, *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*. Beijing: Science Press, 1995.

[11] Q. C. Zang, *Meromorphic Functions that shares one small function with its derivative*. J Inequal Pure Appl Math, 2005, 6(4): Art 116.