ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ BÁ NAM

Tối ưu d.c và ứng dụng

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2010

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ BÁ NAM

Tối ưu d.c và ứng dụng

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số 60.46.36.

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TSKH LÊ DŨNG MƯU**

THÁI NGUYÊN - 2010

Mục lục

Mở đầu

Bài toán tối ưu d.c có nhiều tính chất đẹp đẽ và được sử dụng rộng rãi trong lý thuyết và ứng dụng thực tiễn, đặc biệt là trong giải tích lồi và tối ưu hóa. Chính vì vậy, bài toán này và các mở rộng của nó đang là chủ đề hấp dẫn với nhiều kết quả đáng chú ý và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Ngày nay, với sự phát triển nhanh chóng của nền công nghệ thông tin thì phạm vi và khả năng ứng dụng của bài toán này ngày càng được mở rộng hơn.

Luận văn này trình bày những kiến thức cơ bản về hàm d.c, phát biểu bài toán tối ưu d.c và trình bày một phương pháp giải địa phương cho lớp bài toán này. Ý tưởng của phương pháp là sử dụng bài toán đối ngẫu d.c được Toland đưa ra năm 1979 để từ đó tìm nghiệm địa phương cho bài toán tối ưu d.c. Đồng thời luận văn cũng trình bày bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c và ứng dụng nó trong mô hình cân bằng Cournot - Nash.

Luận văn gồm mục lục, ba chương, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Hàm d.c.

Trong chương này chúng tôi đề cập đến các khái niệm cơ bản về hàm lồi, hàm d.c và một số tính chất cơ bản của hàm d.c.

Chương 2: Bài toán tối ưu d.c.

Trong chương này chúng tôi trình bày mô hình bài toán tối ưu d.c, bài toán đối ngẫu d.c. Từ đó, trình bày phương pháp giải địa phương để tìm nghiệm và nêu một phương pháp hiệu chỉnh cho lớp bài toán này.

Chương 3: Bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c.

Trong chương này đầu tiên chúng tôi đưa ra bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c, tìm các điểm dừng của bài toán này theo phương pháp điểm gần kề. Từ đó ứng dụng tìm lời giải cho mô hình cân bằng Cournot - Nash.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình chu đáo của GS. TSKH. Lê Dũng Mưu. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn tới các giáo sư, tiến sĩ ở Viện Toán học Việt Nam, PGS.TS Nông Quốc Chinh, PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn, TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng các thầy cô giáo, Phòng ĐT-KH&QHQT, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học cùng gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

Tác giả

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

X^*	không gian liên hợp của X
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
$\forall y$	với mọi y
$\exists x$	tồn tại x
I	ánh xạ đơn vị
$A \cap B$	A giao với B
$A \cup B$	A hợp với B
A^T	ma trận chuyển vị của ma trận A
A^*	toán tử liên hợp của toán tử A
$\inf\limits_{x \in X} F(x)$	infimum của tập $\{F(x) : x \in X\}$

Chương 1

Hàm d.c

Chương này nhắc lại vắn tắt một số kiến thức về giải tích lồi. Từ đó xây dựng, trình bày định nghĩa của hàm d.c cũng như một số tính chất cơ bản của lớp hàm này. Các khái niệm và kết quả ở chương này được lấy từ các tài liệu [1], [2], [3], [7].

1.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1 Một số định nghĩa về hàm lồi

(i) Tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* nếu với mọi $x^1, x^2 \in C$ và với mọi số thực $\lambda \in [0, 1]$ ta có $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in C$.

(ii) Hàm f được gọi là *hàm lồi* xác định trên tập lồi $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nếu với bất kỳ $x^1, x^2 \in C$ và bất kỳ số thực $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f\big(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2\big) \leq \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2).$$

(iii) Ta gọi f là hàm *lồi chặt* trên tập lồi C nếu

$$f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) < \lambda f(x^1) + (1 - \lambda)f(x^2),$$

với bất kỳ $x^1, x^2 \in C, x^1 \neq x^2$ và bất kỳ số thực $\lambda \in (0, 1)$.

(iv) Miền xác định *hữu hiệu* của hàm f là $dom\, f = \{x \in C \mid f(x) < +\infty\}$.

(v) Hàm lồi f được gọi là khả vi *thiết yếu* trên C nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau

(a) $C = int(dom f) \neq \emptyset$;

(b) f là hàm khả vi trên C;

(c) $\lim_{k\to\infty} \| \bigtriangledown f(x^k)\| = +\infty$, với mọi $\{x^k\}$ hội tụ đến biên của C.

(vi) Cho $\rho > 0$ và C là một tập con lồi của $\mathbb{R}^n$. Hàm số

$$\theta : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

được gọi là $\rho-$ lồi nếu

$$\theta[\lambda x + (1-\lambda)x'] \leq \lambda\theta(x) + (1-\lambda)\theta(x') - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\rho\|x - x'\|^2,$$

với $\forall\lambda \in [0,1]$ và $\forall x, x' \in C$.

Ký hiệu

$$\rho(\theta, C) = \sup\{\rho \geq 0 : \theta - (\rho/2)\|.\|^2 \text{ là lồi trên } C\}.$$

Khi đó, θ được gọi là *lồi mạnh* trên C nếu $(\rho, C) > 0$.

(vii) Hàm lồi $f : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ có thể được mở rộng thành hàm lồi trên không gian $\mathbb{R}^n$ bằng cách đặt $f(x) = +\infty, \forall x \notin domf$. Vì vậy để đơn giản, ta thường xét f là hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.2 (i) Một hàm số xác định trên tập lồi $C \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là $d.c$ trên C nếu với mọi $x \in C, f$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$f(x) = g(x) - h(x), \qquad (1.1)$$

trong đó g, h là các hàm lồi trên C.

Phép biểu diễn (1.1) được gọi là *khai triển* của hàm f; g và h được gọi là các hàm *hợp thành* của f.

(ii) Một hàm số là d.c trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là hàm d.c.

(iii) Hàm số

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

được gọi là d.c *địa phương* nếu với mọi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tồn tại hình cầu

$$B(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x - x_0 \| \leq \epsilon\}, \epsilon > 0$$

sao cho f là d.c trên $B(x_0, \varepsilon)$.

Ví dụ 1.1 Cho hàm số

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Đặt

$$g(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2,$$
$$h(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \| x \| .$$

Ta có

$$\bigtriangledown g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & 6x_2. \end{pmatrix}$$

Từ đó

$$\bigtriangledown^2 g(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vậy $g(x)$ khả vi hai lần và $\bigtriangledown^2 g(x)$ là xác định dương với mọi x nên $g(x)$ là hàm lồi chặt. Rõ ràng $h(x) = \| x \|$ cũng là hàm lồi. Vậy, f là hàm d.c.

1.2. Một số tính chất cơ bản của hàm d.c

Định lí 1.1 *Cho $f_i, (i = 1, 2, ..., m)$ là các hàm d.c. Khi đó, những hàm sau cũng là d.c*

(i) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ với $\lambda_i (i = 1, 2, ..., m)$ là những số thực;

(ii) $\max\limits_{i=1,2,...,m} f_i(x)$ và $\min\limits_{i=1,2,...,m} f_i(x)$;

(iii) $| f(x) |$,

$f^+(x) := \max\{0, f(x)\}$,

$f^-(x) := \min\{0, f\}$;

(iv) $\Pi_{i=1}^{m} f_i(x)$.

Chứng minh

(i) Theo giả thiết f_i, $(i = 1, 2, ..., m)$ là các hàm d.c. Suy ra tồn tại các hàm lồi g_i và h_i $(i = 1, 2, ..., m)$ sao cho

$$f_i = g_i - h_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m).$$

Với $\lambda_i \in \mathbb{R}$; kí hiệu I_1 là tập các chỉ số i, $i = 1, 2, ..., m$ mà $\lambda_i > 0$ và I_2 là tập các chỉ số i, $i = 1, 2, ..., m$ mà $\lambda_i < 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(g_i(x) - h_i(x)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) \\
&= \Big(\sum_{i\in I_1} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i\in I_2} (-\lambda_i) h_i(x)\Big) - \Big(\sum_{i\in I_2} (-\lambda_i) g_i(x) + \sum_{i\in I_1} \lambda_i h_i(x)\Big).
\end{aligned}$$

Theo giả thiết g_i và h_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ là các hàm lồi nên

$$\Big(\sum_{i\in I_1} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i\in I_2} (-\lambda_i) h_i(x)\Big)$$

và

$$\Big(\sum_{i\in I_2} (-\lambda_i) g_i(x) + \sum_{i\in I_1} \lambda_i h_i(x)\Big)$$

cũng là các hàm lồi. Vậy, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ là hiệu của hai hàm lồi nên nó là hàm d.c.

(ii) Do f_i là hàm $d.c$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ nên tồn tại các hàm lồi $g_i(x)$, $h_i(x)$ với $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sao cho với mỗi i ta có $f_i = g_i - h_i$. Suy ra với mọi i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ta có

$$f_i = g_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} h_j - \sum_{j=1}^{m} h_j.$$

Do đó

$$\max_{(i=1,2,\ldots,m)} f_i = \max_{(i=1,2,\ldots,m)} \Big\{g_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} h_j\Big\} - \sum_{j=1}^{m} h_i. \tag{1.2}$$

Bởi vì giá trị lớn nhất của tổng hữu hạn của các hàm lồi cũng là hàm lồi nên $\max\limits_{(i=1,2,\ldots,m)} \{g_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} h_i\}$ và $\sum_{j=i}^{m} h_j$là các hàm lồi. Thay vào (1.2) ta có $\max\limits_{(i=1,2,\ldots,m)} f_i$ là hàm d.c.

Bằng cách chứng minh tương tự ta cũng có $\min\limits_{(i=1,2,\ldots,m)} f_i$ là hàm d.c.

(iii) Vì f là hàm d.c nên tồn tại các hàm lồi g và h sao cho $f = g - h$. Ta có:

$$| f | = 2\max\{g, h\} - (g + h).$$

Rõ ràng $2\max\{g, h\}$ và $(g + h)$ là các hàm lồi nên $| f |$ là hàm d.c.

Theo giả thiết

$$f^{+}(x) = \max\{0, f(x)\},$$
$$f^{-}(x) = \min\{0, f(x)\}.$$

Sử dụng (ii) ta có $f^{+}(x)$ và $f^{-}(x)$ là các hàm d.c.

(iv) Vì $f_i = f_i^{+} + f_i^{-}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ nên tồn tại các hàm lồi không âm g_i, h_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, sao cho với mỗi i ta có $f_i = g_i - h_i$. Khi đó, với $m = 2$ ta có

$$\begin{aligned} f_1.f_2 &= (g_1 - h_1)(g_2 - h_2) \\ &= \frac{1}{2}[(h_1 + h_2)^2 + (g_1 + g_2)^2] \\ &- \frac{1}{2}[(g_1 + h_2)^2 + (g_2 + h_1)^2]. \end{aligned}$$

Do bình phương của hàm lồi không âm là hàm lồi cho nên

$$\frac{1}{2}[(h_1 + h_2)^2 + (g_1 + g_2)^2]$$

và

$$\frac{1}{2}[(g_1 + h_2)^2 + (g_2 + h_1)^2]$$

là các hàm lồi. Vậy theo định nghĩa $f_1.f_2$ là hàm d.c. Bằng quy nạp ta có $\Pi_{(i=1)}^{m} f(x)$ là hàm d.c. $\square$

Định lí 1.2 *Mọi hàm d.c địa phương là d.c.*

Chứng minh

Phần chứng minh định lý này xem trong [7].

Hệ quả 1.2.1 *Mọi hàm $f(x)$ khả vi cấp hai liên tục (kí hiệu $f \in C^2$) là d.c trên một tập lồi compac bất kỳ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

Chứng minh

Xét hàm số $g(x) = f(x) + \rho \parallel x \parallel^2$ Ta xẽ chứng minh rằng tồn tại ρ đủ lớn sao cho $g(x)$ là hàm lồi. Thật vậy, để $g(x)$ là hàm lồi ta phải chọn ρ sao cho $\nabla^2 g(x) \succeq 0$ với mọi x. Để ý rằng

$$\langle u, \nabla^2 g(x)u\rangle = \langle u, \nabla^2 f(x)u\rangle + \rho \parallel u \parallel^2 .$$

Muốn cho $\nabla^2 g(x) \succeq 0$ tức là $\langle u, \nabla^2 g(x)u\rangle \geq 0$ với mọi u, hay $\langle u, \nabla^2 f(x)u\rangle + \rho \parallel u \parallel^2 \geq 0$ với mọi u mà $\parallel u \parallel = 1$ ta chỉ cần chọn ρ sao cho $\rho \geq -\langle u, \nabla^2 f(x)u\rangle$ với mọi u mà $\parallel u \parallel = 1$ và mọi $x \in \Omega$, nghĩa là

$$\rho \geq -\min\{\langle u, \nabla^2 f(x)u\rangle : x \in \Omega; \parallel u \parallel = 1\}.$$

Ta luôn chọn được ρ thỏa mãn điều này vì

$$\min\{\langle u, \nabla^2 f(x)u\rangle : x \in \Omega; \parallel u \parallel = 1\} > -\infty$$

(do Ω là tập compac). Vậy ta đã chỉ ra tồn tại ρ sao cho $g(x)$ là hàm lồi. Như vậy $f(x) = g(x) - \rho \parallel x \parallel^2$ là hiệu của hai hàm lồi và do vậy $f(x)$ là hàm d.c. □

Hệ quả 1.2.2 *Cho $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm d.c và $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi. Khi đó, hàm hợp thành $g \circ f$ cũng là d.c.*

Chứng minh

Cho $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và y_0 là ảnh của x_0 qua f, tức là $y_0 = f(x_0)$. Khi đó, hàm $g(y)$ có thể biểu diễn trong hình cầu nào đó $B(y_0, \epsilon_0)$ của y_0 như sup theo từng điểm của một họ các hàm affin nào đó

$$g(y) = \sup_{i \in I}(a_i y + b_i), \text{ với } y \in B(y_0, \epsilon_0).$$

Trong đó, $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i \in I$ và I là tập chỉ số sao cho

$$s = \sup_{i \in I} \max\{a_i, b_i\} < \infty.$$

Lấy

$$f(x) = g(x) - h(x),$$

trong đó g, h là các hàm lồi trong hình cầu $B(x_0, \epsilon_1)$ sao cho

$$f(B(x_0, \epsilon_1)) \subseteq B(y_0, \epsilon_0).$$

Khi đó với $x \in B(x_0, \epsilon_1)$, ta có

$$\begin{aligned} a_i f(x) + b_i &= b_i + a_i g(x) - a_i h(x) \\ &= [b_i + (s + a_i)g(x) + (s - a_i)h(x)] - s\big(g(x) + h(x)\big) \\ &= \tilde{g}_i(x) + \tilde{h}(x), \end{aligned}$$

với $\tilde{g}_i$ và $\tilde{h}$ là các hàm lồi và $\tilde{h}(x) = s\big(g(x) + h(x)\big)$ không phụ thuộc vào i. Suy ra

$$g(f(x)) = \sup_{i \in I}(\tilde{g}_i(x) - \tilde{h}(x)) = \sup_{i \in I}\tilde{g}_i(x) - \tilde{h}(x) = \tilde{g} - \tilde{h}.$$

Với $\tilde{g}$ là hàm lồi. Vậy hàm hợp thành $g \circ f$ là hàm d.c địa phương và vì thế nó là hàm d.c. $\square$

Mệnh đề 1.1 *Cho M là tập con đóng khác rỗng của $\mathbb{R}^n$. Khi đó, bình phương của hàm khoảng cách $d^2_{M(x)}$ là hàm d.c.*

Chứng minh

Hàm khoảng cách xác định như sau

$$\begin{aligned} d_M : &\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &x \longrightarrow \inf\{\| y - x \| : y \in M\} \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} d_M^2(x) &= \inf\{\| y - x \|^2 : y \in M\} \\ &= \| x \|^2 + \inf\{- \| x \|^2 + \| y - x \|^2 : y \in M\} \\ &= \| x \|^2 - \sup\{\| x \|^2 - \| y - x \|^2 : y \in M\} \\ &= \| x \|^2 - \sup\{2x^T y - \| y \|^2 : y \in M\}. \end{aligned}$$

Hàm $h(x) = \sup\{2x^T y - \| y \|^2 : y \in M\}$ là sup theo từng điểm của một

họ các hàm affin nên nó là hàm lồi. Rõ ràng $g(x) = \| x \|^2$ cũng là hàm lồi. Vậy $d^2_{M(x)}$ là hàm d.c. $\square$

Tiểu kết chương 1

Trong chương này trước tiên nhắc lại khái niệm hàm lồi và từ đó đưa ra khái niệm hàm d.c. Tiếp theo là trình bày một số tính chất của hàm d.c. Đây là cơ sở để tìm hiểu bài toán tối ưu d.c ở chương 2.

Chương 2

Bài toán tối ưu d.c

Trong chương này chúng ta trình bày bài toán tối ưu d.c cũng như bài toán đối ngẫu của nó. Từ đó đưa ra phương pháp giải địa phương để giải quyết bài toán này. Đồng thời trình bày phương pháp hiệu chỉnh cho các bài toán gốc và đối ngẫu.

2.1. Phát biểu bài toán

Cho $X = \mathbb{R}^n$ được trang bị tích $\langle\cdot,\cdot\rangle$ vô hướng. Khi đó không gian đối ngẫu Y của X được đồng nhất với X. Ký hiệu $\Gamma_0(X)$ là tập tất cả những hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên X.

Định nghĩa 2.1 Một bài toán tối ưu toàn cục được gọi là bài toán tối ưu d.c nếu nó có dạng sau

$$(P) \qquad \alpha = \inf\{f(x) := g(x) - h(x) : x \in X\},$$

trong đó g và h thuộc vào $\Gamma_0(X)$.

Định nghĩa 2.2 (i) Điểm x^* được gọi là cực tiểu *địa phương* của $g - h$ nếu $g(x^*) - h(x^*)$ là hữu hạn, nghĩa là

$$x^* \in dom\, g \cap dom\, h$$

và tồn tại một lân cận U của x^* sao cho

$$g(x^*) - h(x^*) \leq g(x) - h(x),\ \forall x \in U.$$

(ii) Điểm x^* được gọi cực tiểu *chặt* của $g - h$ nếu $g(x^*) - h(x^*)$ là hữu hạn và

$$g(x) - h(x) \geq g(x^*) - h(x^*),$$

với mọi $x \in \big(U \cap \mathrm{int}(dom\, h)\big)$.

(iii) Điểm x^* gọi là điểm *tới hạn* của $g - h$ nếu như

$$\partial g(x^*) \cap \partial h(x^*) \neq \phi.$$

2.2. Phương pháp giải địa phương

2.2.1. Bài toán d.c đối ngẫu

Định nghĩa 2.3 (i) Cho $g \in \Gamma_0(X)$. Khi đó hàm liên hợp của g được ký hiệu và định nghĩa như sau

$$g^*(y) = \sup \{\langle x, y\rangle - g(x) : x \in X\}.$$

(ii) Cho $x_0 \in dom\, g$ và $\epsilon > 0$. Khi đó ϵ - dưới vi phân của g tại x_0 được định nghĩa và kí hiệu như sau

$$\partial_\epsilon g(x_0) = \{y \in Y : g(x) \geq g(x_0) + \langle x - x_0, y\rangle - \epsilon,\ \forall x \in X\}.$$

Mệnh đề 2.1 *Cho bài toán d.c*

$$(P) \qquad \alpha = \inf \{f(x) := g(x) - h(x) : x \in X\},$$

trong đó $g, h \in \Gamma_0(X)$. *Khi đó*

$$(D) \qquad \alpha = \inf \{h^*(y) - g^*(y) : y \in Y\}.$$

Chứng minh

Xét bài toán tối ưu d.c

$$(P) \qquad \alpha = \inf \{f(x) = g(x) - h(x) : x \in X\},$$

trong đó $g, h \in \Gamma_0(X)$.

Từ định nghĩa của hàm liên hợp, ta có

$$\begin{aligned}\alpha &= \inf\{g(x) - h(x) : x \in X\}\\ &= \inf\{g(x) - \sup\{\langle x, y\rangle - h^*(y) : y \in Y\} : x \in X\}\\ &= \inf\{\beta(y) : y \in Y\},\end{aligned}$$

với

$$(P_y) \qquad \beta(y) = \inf\{g(x) - \big(\langle x, y\rangle - h^*(y)\big) : x \in X\}.$$

Ta có

$$\beta(y) = \begin{cases} h^*(y) - g^*(y) & \text{nếu } y \in dom\, h^* \\ +\infty & \text{trong các trường hợp khác.}\end{cases}$$

Ta phát biểu bài toán đối ngẫu

$$\alpha = \inf\{h^*(y) - g^*(y) : y \in dom\, h^*\}.$$

Theo cách xác định $\beta(y)$ ở trên ta có bài toán đối ngẫu của (P) là

$$(D) \qquad \alpha = \inf\{h^*(y) - g^*(y) : y \in Y\}. \qquad \square$$

Nhận xét 2.1 Do α là hữu hạn nên $dom\, g \subset dom\, h$ và $dom\, h^* \subset dom\, g^*$.

Định lí 2.1 *Cho $\mathcal{P}$ và $\mathcal{D}$ lần lượt là các tập nghiệm tương ứng của hai bài toán (P) và (D). Đặt*

$$\mathcal{P}_l = \{x^* \in X : \partial h(x^*) \subset \partial g(x^*)\}$$

$$\mathcal{D}_l = \{y^* \in Y : \partial g^*(y^*) \subset \partial h^*(y^*)\}.$$

Khi đó,

(i) $x \in \mathcal{P}$ nếu và chỉ nếu $\partial_\epsilon h(x) \subset \partial_\epsilon g(x)$, với $\forall \epsilon > 0$;

(ii) $y \in \mathcal{D}$ nếu và chỉ nếu $\partial_\epsilon g^*(y) \subset \partial_\epsilon h^*(y)$, với $\forall \epsilon > 0$;

(iii) $\cup\{\partial h(x) : x \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{D} \subset dom\, h^*$;

(iv) $\cup\{\partial g^*(y) : y \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{P} \subset dom\, g$.

Định lý này được chứng minh trong [6].

Định lí 2.2 *(i) Nếu x^* là cực tiểu địa phương của $g - h$ thì $x^* \in \mathcal{P}_l$.*
(ii) Cho x^* là điểm tới hạn của $g - h$ và $y^* \in \partial g(x^*) \cap \partial h(x^*)$.
Cho U là một lân cận của x^* thỏa mãn

$$U \cap dom\, g \subset dom\, \partial h.$$

Nếu như với mỗi $x \in U \cap dom\, g$ tồn tại $y \in \partial h(x)$ sao cho

$$h^*(y) - g^*(y) \geq h^*(y^*) - g^*(y^*)$$

thì x^* là điểm cực tiểu địa phương của $g - h$, nghĩa là

$$g(x) - h(x) \geq g(x^*) - h(x^*), \forall x \in U \cap dom\, g.$$

Chứng minh

(i) Giả sử x^* là cực tiểu địa phương của $g - h$. Ta chứng minh $x^* \in \mathcal{P}_l$. Thật vậy, do x^* là cực tiểu địa phương của $g - h$ nên tồn tại một lân cận U của x^* sao cho

$$g(x) - g(x^*) \geq h(x) - h(x^*), \text{ với } \forall x \in U \cap dom\, g.$$

Vì thế, với $y^* \in \partial h(x^*)$ ta có

$$g(x) - g(x^*) \geq \langle x - x^*, y^* \rangle$$

với mọi $x \in U \cap dom\ g$.
Do g là tập lồi, suy ra $y^* \in \partial g(x^*)$. Vậy $x^* \in \mathcal{P}_l$.
(ii) Theo giả thiết

$$y^* \in \partial g(x^*) \cap \partial h(x^*),$$

ta có

$$g(x^*) + g^*(y^*) = \langle x^*, y^* \rangle = h(x^*) + h^*(y^*).$$

Suy ra

$$g(x^*) - h(x^*) = h^*(y^*) - g^*(y^*). \tag{2.1}$$

Cũng theo giả thiết với x là điểm bất kỳ thuộc $U \cap dom\, g$ sẽ tồn tại $y \in \partial h(x)$ sao cho

$$h^*(y) - g^*(y) \geq h^*(y^*) - g^*(y^*). \tag{2.2}$$

Mặt khác, ta có

$$h(x) + h^*(y) = \langle x, y \rangle \leq g(x) + g^*(y).$$

Suy ra

$$g(x) - h(x) \geq h^*(y) - g^*(y). \tag{2.3}$$

Như vậy từ (2.1), (2.2) và (2.3) ta có

$$g(x) - h(x) \geq h^*(y) - g^*(y), \text{ với } \forall x \in U \cap dom\, g$$

nghĩa là x^* là cực tiểu địa phương của $g - h$. $\square$

Hệ quả 2.2.1 *Cho x^* là điểm nằm trong lân cận U sao cho*

$$\partial h(x) \cap \partial g(x^*) \neq \emptyset, \text{ với mọi } x \in U \cap dom\, g.$$

Khi đó x^* là cực tiểu địa phương của $g - h$, tức là

$$g(x) - h(x) \geq g(x^*) - h(x^*), \ \forall x \in U \cap dom\, g.$$

Chứng minh

Lấy $x \in U \cap dom\ g$ và gọi x^* là một điểm nằm trong lân cận U sao cho $\partial h(x) \cap \partial g(x^*) \neq \emptyset$. Khi đó, tồn tại $y \in \partial h(x) \cap \partial g(x^*)$.

Vì $y \in \partial h(x)$ nên ta có

$$h(x) + h^*(y) = \langle x, y \rangle \leq g(x) + g^*(y).$$

Suy ra

$$g(x) - h(x) \geq h^*(y) - g^*(y). \tag{2.4}$$

Vì $y \in \partial g(x^*)$ nên

$$g(x^*) + g^*(y) = \langle x^*, y \rangle \leq h(x^*) + h^*(y).$$

Suy ra

$$h^*(y) - g^*(y) \geq g(x^*) - h(x^*). \tag{2.5}$$

Mặt khác, nếu lấy $y^* \in \partial h(x^*) \cap \partial g(x^*)$ thì ta có

$$g(x^*) + g^*(y^*) = \langle x^*, y^* \rangle = h(x^*) + h^*(y^*).$$

Từ đó suy ra

$$g(x^*) - h(x^*) = h^*(y^*) - g^*(y^*).$$

Vậy giả thiết (ii) của định lý 2.2 được thỏa mãn. Do đó, theo kết quả định lý này ta có x^* là cực tiểu địa phương của $g - h$, nghĩa là

$$g(x) - h(x) \geq g(x^*) - h(x^*), \text{ với mọi } x \in U \cap dom\, g. \qquad \square$$

Hệ quả 2.2.2 *Nếu $x^* \in int(dom\, h)$ thỏa mãn điều kiện*

$$\partial h(x^*) \subset int\big(\partial g(x^*)\big)$$

thì x^* là cực tiểu địa phương chặt của $g - h$.

Chứng minh

Từ tính nửa liên tục trên của ∂h tại $x^* \in int(dom\, h)$ suy ra với mỗi tập mở $\mathcal{O}$ chứa $\partial h(x^*)$ đều tồn tại lân cận U của x^* sao cho $\partial h(x) \subset \mathcal{O}$, với mọi $x \in U$.

Đặt $\mathcal{O} = int\big(\partial g(x^*)\big)$, suy ra $\partial h(x) \cap \partial g(x^*) \neq \emptyset$. Vậy, điều kiện của hệ quả 2.2.1 được thỏa mãn. Do đó x^* là cực tiểu địa phương của $g - h$.
Đặt $V = U \cap int(dom\, h)$. Nếu $x \in V$ thì $\partial h(x)$ là compact. Do đó với mỗi $x \in V$ tồn tại $\epsilon(x) > 0$ sao cho

$$\partial h(x) + \epsilon(x) B \subset \mathcal{O},$$

với B là hình cầu đơn vị đóng trong không gian Euclide thông thường.

Lấy $x \in V \setminus \{x^*\}$ và $y \in \partial h(x)$, ta có

$$\begin{aligned} g(x) - g(x^*) &\geq \langle x - x^*, y + \frac{\epsilon(x)}{\|x - x^*\|}(x - x^*)\rangle \\ &= \epsilon(x)\|x - x^*\| + \langle x - x^*, y\rangle \\ &\geq \epsilon(x)\|x - x^*\| + h(x) - h(x^*). \end{aligned}$$

Suy ra

$$g(x) - h(x) \geq \epsilon(x)\|x - x^*\| + g(x^*) - h(x^*).$$

Vậy x^* là cực tiểu địa phương chặt của $g - h$. $\square$

Hệ quả 2.2.3 *Cho $x^* \in dom\, \partial h$ là điểm cực tiểu địa phương của $g - h$ và $y^* \in \partial h(x^*)$, x thuộc vào lân cận U sao cho*

$$g(x) - h(x) \geq g(x^*) - h(x^*), \text{ với mọi } x \in U \cap dom\, g.$$

Khi đó, nếu $y^* \in int(dom\, g^*)$ và $\partial g^*(y^*) \subset U$ thì y^* là cực tiểu địa phương của $h^* - g^*$.

Chứng minh

Xem chứng minh chi tiết trong [6].

2.2.2. Phương pháp giải địa phương

⋆ **Phương pháp tổng quát giải bài toán d.c**

Cho $x^* \in X$. Ta xét bài toán sau:

$$\big(S(x^*)\big) \qquad \inf\{h^*(y) - g^*(y) : y \in \partial h(x^*)\}. \tag{2.6}$$

Bài toán này tương đương với bài toán

$$\inf\{\langle x^*, y\rangle - g^*(y) : y \in \partial h(x^*)\}.$$

Tương tự, cho $y^* \in Y$. Ta xét bài toán đối ngẫu

$$\big(T(y^*)\big) \qquad \inf\{g(x) - h(x) : x \in \partial g^*(y^*)\}. \tag{2.7}$$

Bài toán (2.7) tương đương với

$$\inf\{\langle x, y^*\rangle - h(x) : x \in \partial g^*(y^*)\}.$$

Gọi $\mathcal{S}(x^*), \mathcal{T}(y^*)$ tương ứng lần lượt là tập nghiệm của $\big(S(x^*)\big)$ và $\big(T(y^*)\big)$. Phương pháp giải tổng quát có thể được xem như phương pháp xấp xỉ nghiệm cho bài toán nguyên thủy (P) và bài toán đối ngẫu (D). Theo phương pháp này, xuất phát từ một điểm $x^0 \in dom\, g$ đã cho, ta xây dựng hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ như sau

$$y^k \in \mathcal{S}(x^k); x^{k+1} \in \mathcal{T}(y^k).$$

Việc giải các bài toán này không phải bao giờ cũng dễ dàng. Vì thế, ta thường dùng phương pháp khác hiệu quả hơn sau đây:

$\star$ **Phương pháp giải địa phương**

Theo phương pháp này, Ta xây dựng hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ lần lượt là nghiệm của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu sao cho thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $(g-h)(x^k)$ và $(h^* - g^*)(y^k)$ là các dãy giảm

(ii) Mọi điểm giới hạn x^* (tương ứng y^*) của $\{x^k\}$ ($\{y^k\}$) là điểm tới hạn của $g - h$ (tương ứng $(h^* - g^*)$).

Để thỏa mãn các điều kiện trên, xuất phát từ $x^0 \in dom\, g$ ta xây dựng dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ như sau:

$$y^k \in \partial h(x^k); x^{k+1} \in \partial g^*(y^k).$$

Tại bước lặp thứ k, ta có:

$$\begin{aligned} x^k \in \partial g^*(y^{k-1}) \to y^k \in \partial h(x^k) \\ &= \text{argmin}\,\{h^*(y) - [g^*(y^{k-1}) \\ &+ \langle x^k, y - y^{k-1}\rangle] : y \in Y\}, \qquad (D_k) \\ y^k \in \partial h(x^k) \to x^{k+1} \in \partial g^*(y^k) \\ &= \text{argmin}\,\{g(x) - [h(x^k) \\ &+ \langle x - x^k, y^k\rangle] : x \in X\}. \qquad (P_k) \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.4 Phương pháp giải bài toán d.c được gọi là đúng nếu có thể xây dựng hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ từ một điểm bất kỳ $x^0 \in dom\, g$ sao cho

$$\{x^k\} \subset range\, \partial g^* = dom\, \partial g$$

$$\{y^k\} \subset range\, \partial h = dom\, \partial h^*.$$

Nhận xét 2.2 (i) (D_k) và (P_k) là các bài toán lồi.
(ii) Các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ trong thuật toán d.c được định nghĩa đúng nếu và chỉ nếu $dom\, \partial g \subset dom\, \partial h$ và $dom\, \partial h^* \subset dom\, \partial g^*$.
(iii) Một hàm d.c có rất nhiều cách khai triển khác nhau. Chẳng hạn, nếu $f = g - h$ thì ta cũng có thể viết

$$f = (g + \theta) - (h + \theta), \text{ với mọi } \theta \in \Gamma_0(X)$$

hữu hạn trên X. Vì thế, đối với mỗi bài toán tối ưu $d.c$ có nhiều lời giải khác nhau phụ thuộc vào việc phân tích hàm mục tiêu f. Việc tìm ra phân tích phù hợp cho hàm mục tiêu sẽ quyết định hiệu quả của thuật toán.

$\star$ **Định lý hội tụ**

Cho ρ_i và ρ_i^* $(i = 1, 2)$ là những số thực không âm sao cho

$$0 \le \rho_i < \rho(f_i),$$

trong đó $\rho_i = 0$ nếu $\rho(f_i) = 0$ và ρ_i có thể nhận giá trị $\rho(f_i)$;

$$0 \leq \rho_i^* < \rho\big(f_i^*\big)$$

trong đó, $\rho_i^* = 0$ nếu $\rho(f_i^*) = 0$ và ρ_i^* có thể nhận giá trị $\rho(f_i^*)$ nếu giá trị đó tồn tại.

Đặt

$$\begin{aligned} f_1 &= g; \\ f_2 &= h; \\ dx^k &:= x^{k+1} - x^k; \\ dy^k &:= y^{k+1} - y^k. \end{aligned}$$

Khi đó, ta có định lý sau

Định lí 2.3 *Giả sử rằng $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ được xác định bằng việc giải các bài toán (P_k) và (D_k). Khi đó, ta có*

(i)

$$\begin{aligned} (g-h)(x^{k+1}) &\leq (h^* - g^*)(y^k) - \max\{\frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\} \\ &\leq (g-h)(x^k) - \max\{\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \\ &\quad \frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^{k-1} \parallel^2 + \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \\ &\quad \frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^{k-1} \parallel^2 + \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\}. \end{aligned}$$

Đẳng thức $(g-h)(x^{k+1}) = (g-h)(x^k)$ là đúng nếu và chỉ nếu

$$x^k \in \partial g^*(y^k),\ y^k \in \partial h(x^{k+1})$$

và

$$(\rho_1 + \rho_2) dx^k = \rho_1^* dy^{k-1} = \rho_2^* dy^k = 0.$$

Trong trường hợp này, ta có

- $(g-h)(x^{k+1}) = (h^* - g^*)(y^k)$ *và* x^k, x^{k+1} *là những điểm tới hạn của* $g - h$

thỏa mãn

$$y^k \in \big(\partial g(x^k) \cap \partial h(x^k)\big)$$

và

$$y^k \in \big(\partial g(x^{k+1}) \cap \partial h(x^{k+1})\big),$$

• y^k *là điểm tới hạn của* $h^* - g^*$ *thỏa mãn*

$$[x^k, x^{k+1}] \subset \big((\partial g^*(y^k) \cap \partial h^*(y^k))\big),$$

• $x^{k+1} = x^k$ *nếu* $\rho(g) + \rho(h) > 0$,

$y^k = y^{k-1}$ *nếu* $\rho(g^*) > 0$,

$y^k = y^{k+1}$*nếu* $\rho(h^*) > 0$;

(ii) Tương tự, với bài toán đối ngẫu ta có

$$\begin{aligned}(h^* - g^*)(y^{k+1}) &\le (g-h)(x^{k+1}) - \max\{\frac{\rho_1}{2} \parallel dx^{k+1} \parallel^2, \frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\}\\ &\le (h^* - g^*)(y^k) - \max\{\frac{\rho_1}{2} \parallel dx^{k+1} \parallel^2 + \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2,\\ &\qquad \frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2 + \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \frac{\rho_1^* + \rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\}.\end{aligned}$$

Đẳng thức $(h^* - g^*)(y^{k+1}) = (h^* - g^*)(y^k)$ *là đúng nếu và chỉ nếu*

$$x^{k+1} \in \partial g^*(y^{k+1}), y^k \in \partial h(x^{k+1})$$

và

$$(\rho_1^* + \rho_2^*)dy^k = \rho_2 dx^k = \rho_1 dx^{k+1} = 0.$$

Trong trường hợp này, ta có

• $(h^* - g^*)(y^{k+1}) = (g-h)(x^{k+1})$ *và* y^k, y^{k+1} *là những điểm tới hạn của* $(h^* - g^*)$ *thỏa mãn*

$$x^{k+1} \in \big(\partial g^*(y^k) \cap \partial h^*(y^k)\big)$$

và

$$x^{k+1} \in \big(\partial g^*(y^{k+1}) \cap \partial h^*(y^{k+1})\big),$$

• x^{k+1} *là điểm tới hạn của* $g - h$ *thỏa mãn*

$$[y^k, y^{k+1}] \subset \big(\partial g(x^{k+1}) \cap \partial h(x^{k+1})\big),$$

•

$$y^{k+1} = y^k \text{ nếu } \rho(g^*) + \rho(h^*) > 0,$$
$$x^{k+1} = x^k \text{ nếu } \rho(h) > 0,$$
$$x^{k+1} = x^{k+2} \text{ nếu } \rho(g) > 0;$$

(iii) Nếu α *là một số hữu hạn thì các dãy giảm*

$$\{(g-h)(x^k)\},\ \{(h^* - g^*)(y^k)\}$$

hội tụ đến cùng giới hạn $\beta \geq \alpha$*, nghĩa là*

$$\lim_{k\to\infty} (g-h)(x^k) = \lim_{k\to\infty} (h^* - g^*)(y^k) = \beta,$$

trong đó $\beta \geq \alpha$*.*

Nếu

$$\rho(g) + \rho(h) > 0 \ \big(\text{tương ứng}\, \rho(g^*) + \rho(h^*) > 0\big)$$

thì

$$\lim_{k\to\infty} \{x^{k+1} - x^k\} = 0 \ \big(\text{tương ứng } \lim_{k\to\infty} \{y^{k+1} - y^k\} = 0\big).$$

Hơn nữa,

$$\lim_{k\to\infty} \{g(x^k) + g^*(y^k) - \langle x^k, y^k\rangle\}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \{h(x^{k+1}) + h^*(y^k) - \langle x^{k+1}, y^k\rangle\} = 0;$$

(iv) Nếu α *là hữu hạn và các dãy* $\{x^k\}$ *và* $\{y^k\}$ *là bị chặn thì với mỗi điểm giới hạn* x^* *của* $\{x^k\}$ $\big($ y^* *của* $\{y^k\}$ $\big)$ *sẽ tồn tại điểm tụ* y^* *của* $\{y^k\}$ $\big($ x^* *của* $\{x^k\}$ $\big)$ *thỏa mãn*

• $(x^*, y^*) \in [\partial g^*(y^*) \cap \partial h^*(y^*)] \times [\partial g(x^*) \cap \partial h(x^*)]$

và

$$(g-h)(x^*) = (h^* - g^*)(y^*) = \beta,$$

• $\lim_{k\to+\infty}\{g(x^k)+g^*(y^k)\} = \lim_{k\to+\infty}\langle x^k, y^k\rangle$.

Chứng minh

Để chứng minh định lý ta cần mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.2 *Giả sử rằng các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ được xây dựng theo thuật toán d.c ở trên. Khi đó, ta có*

(i)

$$\begin{aligned}(g-h)(x^{k+1}) &\le (h^*-g^*)(y^k) - \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2 \\ &\le (g-h)(x^k) - \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2 .\end{aligned}$$

Đẳng thức

$$(g-h)(x^{k+1}) = (g-h)(x^k)$$

đúng nếu và chỉ nếu

$$x^k \in \partial g^*(y^k),\ y^k \in \partial h(x^{k+1})$$

và

$$(\rho_1+\rho_2) \parallel dx^k \parallel = 0.$$

(ii) Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}(h^*-g^*)(y^{k+1}) &\le (g-h)(x^{k+1}) - \frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2 \\ &\le (h^*-g^*)(y^k) - \frac{\rho_1^*+\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2 .\end{aligned}$$

Đẳng thức

$$(h^*-g^*)(y^{k+1}) = (h^*-g^*)(y^k)$$

đúng nếu và chỉ nếu

$$x^{k+1} \in \partial g^*(y^{k+1}),\ y^k \in \partial h(x^{k+1})$$

và

$$(\rho_1^*+\rho_2^*) \parallel dy^k \parallel = 0.$$

Chứng minh

(i) Bởi vì $y^k \in \partial h(x^k)$ nên

$$h(x^{k+1}) \geq h(x^k) + \langle x^{k+1} - x^k, y^k \rangle + \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2 .$$

Từ đó, ta có

$$(g-h)(x^{k+1}) \leq g(x^{k+1}) - \langle x^{k+1} - x^k, y^k \rangle - h(x^k) - \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2 . \quad (2.8)$$

Cũng tương tự như vậy, vì $x^{k+1} \in \partial g^*(y^k)$ nên ta có

$$g(x^k) \geq g(x^{k+1}) + \langle x^k - x^{k+1}, y^k \rangle + \frac{\rho_1}{2} \parallel dx^k \parallel^2 .$$

Suy ra

$$g(x^{k+1}) - \langle x^{k+1} - x^k, y^k \rangle - h(x^k) \leq (g-h)(x^k) - \frac{\rho_1}{2} \parallel dx^k \parallel^2 . \quad (2.9)$$

Mặt khác

$$x^{k+1} \in \partial g^*(y^k) \Leftrightarrow \langle x^{k+1}, y^k \rangle = g(x^{k+1}) + g^*(y^k), \quad (2.10)$$

$$y^k \in \partial h(x^k) \Leftrightarrow \langle x^k, y^k \rangle = h(x^k) + h^*(y^k). \quad (2.11)$$

Do đó

$$g(x^{k+1}) - \langle x^{k+1} - x^k, y^k \rangle - h(x^k) = h^*(y^k) - g^*(y^k). \quad (2.12)$$

Như vậy, từ (2.9), (2.10) và (2.12), ta có

$$\begin{aligned} (g-h)(x^{k+1}) &\leq (h^* - g^*)(y^k) - \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2 \\ &\leq (g-h)(x^k) - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2 . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nếu $\rho_1 + \rho_2 > 0$:

Cho

$$(g-h)(x^{k+1}) = (g-h)(x^k).$$

Khi đó, theo (2.13) ta có

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \parallel dx \parallel^2 \geq 0$$

Suy ra

$$-\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2 \leq 0,$$

trong đó $\rho_1 + \rho_2 > 0$ cho nên $(\rho_1 + \rho_2) \parallel dx^k \parallel = 0$.

Đồng thời ta cũng có $x^k \in \partial g^*(y^k), y^k \in \partial h(x^{k+1})$.

Ngược lại, nếu cho

$$x^k \in \partial g^*(y^k),\ y^k \in \partial h(x^{k+1})$$

và

$$(\rho_1 + \rho_2) \parallel dx^k \parallel = 0$$

thì ta thấy

$$(g - h)(x^{k+1}) = (g - h)(x^k).$$

Ta thấy rằng tồn tại ρ_1, ρ_2 sao cho $\rho_1 + \rho_2 > 0$ nếu và chỉ nếu $\rho(h) + \rho(g) > 0$.

Trong trường hợp $\rho(h) = \rho(g) = 0$, ta có

$$(g - h)(x^{k+1}) = (g - h)(x^k)$$

$$\Leftrightarrow (g - h)(x^{k+1}) = (h^* - g^*)(y^k), \tag{2.14}$$

$$(h^* - g^*)(y^k) = (g - h)(x^k). \tag{2.15}$$

Từ (2.11), (2.14) suy ra

$$h(x^{k+1}) + h^*(y^k) = \langle x^{k+1}, y^k \rangle,$$

nghĩa là $y^k \in \partial h(x^{k+1})$.

Tương tự, từ (2.11) và (2.15) suy ra

$$g(x^k) + g^*(y^k) = \langle x^k, y^k \rangle,$$

nghĩa là $x^k \in \partial g^*(y^k)$. $\square$

(ii) chứng minh hoàn toàn tương tự như (i).

Từ mệnh đề này, ta có kết quả trực tiếp

Hệ quả 2.3.1 *(i)*

$$(g-h)(x^{k+1}) \leq (h^*-g^*)(y^k) - \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2$$
$$\leq (g-h)(x^k) - [\frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^{k-1} \parallel^2 + \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2];$$

(ii)

$$(g-h)(x^{k+1}) \leq (h^*-g^*)(y^k) - \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2$$
$$\leq (g-h)(x^k) - [\frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^{k-1} \parallel^2 + \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2].$$

Đẳng thức

$$(g-h)(x^{k+1}) = (g-h)(x^k)$$

đúng nếu và chỉ nếu

$$x^k \in \partial g^*(y^k),\ y^k \in \partial h(x^{k+1})$$

và

$$(\rho_1+\rho_2)dx^k = \rho_1^* dy^{k-1} = \rho_2^* dy^k = 0;$$

Tương tự, ta có

(iii)

$$(h^*-g^*)(y^{k+1}) \leq (g-h)(x^{k+1})\frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2$$
$$\leq (h^*-g^*)(y^k) - [\frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2 + \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2].$$

(iv)

$$(h^*-g^*)(y^{k+1}) \leq (g-h)(x^{k+1}) - \frac{\rho_1}{2} \parallel dx^{k+1} \parallel^2$$
$$\leq (h^*-g^*)(y^k) - [\frac{\rho_1}{2} \parallel dx^{k+1} \parallel^2 + \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2].$$

Đẳng thức

$$(h^*-g^*)(y^{k+1}) = (h^*-g^*)(y^k)$$

đúng nếu và chỉ nếu

$$x^{k+1} \in \partial g^*(y^{k+1}),\ y^k \in \partial h(x^{k+1})$$

và

$$(\rho_1^* + \rho_2^*)dy^k = \rho_2 dx^k = \rho_1 dx^{k+1} = 0.$$

Chứng minh định lý

Do tính chất (i) và (ii) của định lý được chứng minh hoàn toàn tương tự nhau cho nên ta chỉ cần chứng minh (i).

Theo hệ quả 2.3.1, ta có bất đẳng thức đầu tiên của (i)

$$(g-h)(x^{k+1}) \leq (h^* - g^*)(y^k) - \max\{\frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\}.$$

Thật vậy, theo (i), (ii) của hệ quả 2.3.1 ta có

$$(g-h)(x^{k+1}) \leq (h^* - g^*)(y^k) - \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2$$

$$(g-h)(x^{k+1}) \leq (h^* - g^*)(y^k) - \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2 .$$

Suy ra

$$(g-h)(x^{k+1}) \leq (h^* - g^*)(y^k) - \max\{\frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\}.$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\begin{aligned}
&(h^* - g^*)(y^k) - \max\{\frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\} \\
&\leq (g-h)(x^k) - \max\{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^{k-1} \parallel^2 \\
&+ \frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^{k-1} + \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\}.
\end{aligned}$$

* Nếu

$$\rho_2 \parallel dx^k \parallel^2 \leq \rho_2^* \parallel dy^k \parallel^2$$

thì từ (ii) của hệ quả 2.3.1 ta có

$$\begin{aligned}
(h^* - g^*)(y^k) - \max\{\frac{\rho_2}{2} \parallel dx^k \parallel^2, \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\}& \\
&= (h^* - g^*)(y^k) - \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2 \\
&\leq (g-h)(x^k) - \{\frac{\rho_1^*}{2} \parallel dy^{k-1} \parallel^2 + \frac{\rho_2^*}{2} \parallel dy^k \parallel^2\}.
\end{aligned}$$

Đồng thời theo tính chất (i) của hệ quả 2.3.1, ta có

$$(h^*-g^*)(y^k)-\frac{\rho_2^*}{2}\parallel dy^k\parallel^2\le(h^*-g^*)(y^k)-\frac{\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2$$
$$\le(g-h)(x^k)-[\frac{\rho_1^*}{2}\parallel dy^{k-1}\parallel^2+\frac{\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2].$$

Mặt khác, theo (i) của mệnh đề 2.2 ta có

$$(h^*-g^*)(y^k)-\frac{\rho_2^*}{2}\parallel dy^k\parallel^2\le(h^*-g^*)(y^k)-\frac{\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2$$
$$\le(g-h)(x^k)-\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2 .$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta có

$$(h^*-g^*)(y^k)-\max\{\frac{\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2,\frac{\rho_2^*}{2}\parallel dy^k\parallel^2\}$$
$$\le(g-h)(x^k)-\max\{\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2,$$
$$\frac{\rho_1^*}{2}\parallel dy^{k-1}\parallel^2+\frac{\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2,$$
$$\frac{\rho_1^*}{2}\parallel dy^{k-1}\parallel^2+\frac{\rho_2^*}{2}\parallel dy^k\parallel^2].$$

* Nếu ${\rho^*}_2\parallel dy^k\parallel^2\le\rho_2\parallel dx^k\parallel^2$, bằng cách lý luận tương tự ta kết luận

$$(h^*-g^*)(y^k)-\max\{\frac{\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2,\frac{\rho_2^*}{2}\parallel dy^k\parallel^2\}$$
$$\le(g-h)(x^k)-\max\{\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2,$$
$$\frac{\rho_1^*}{2}\parallel dy^{k-1}\parallel^2+\frac{\rho_2}{2}\parallel dx^k\parallel^2,$$
$$\frac{\rho_1^*}{2}\parallel dy^{k-1}\parallel^2+\frac{\rho_2^*}{2}\parallel dy^k\parallel^2\}.$$

(iii) Nếu α là hữu hạn ta có

$$\lim_{k\to\infty}(g-h)(x^k)=\lim_{k\to\infty}(h^*-g^*)(y^k)=\beta.$$

Và hiển nhiên nếu

$$\rho(g)+\rho(h)>0\big(\rho(g^*)+\rho(h^*)>0\big)$$

thì

$$\lim_{k\to\infty}\{x^{k+1}-x^k\}=0\big(\lim_{k\to\infty}\{y^{k+1}-y^k\}=0\big).$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\lim_{k\to\infty}\{g(x^k)+g^*(y^k))-\langle x^k,y^k\rangle\} =$$
$$\lim_{k\to\infty}\{h(x^{k+1})+h^*(y^k)-\langle x^{k+1},y^k\rangle\}=0.$$

Từ 3.12 và (i) ta có

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(g-h)(x^{k+1}) &= \lim_{k\to\infty}\{g(x^{k+1})-\langle x^{k+1}-x^k,y^k\rangle-h(x^k)\}\\ &= \lim_{k\to\infty}(g-h)(x^k).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{k\to\infty}\{g(x^{k+1})-\langle x^{k+1}-x^k,y^k\rangle-g(x^k)\}=0,$$

nghĩa là

$$\lim_{k\to\infty}\{g(x^k)+g^*(y^k)-\langle x^k,y^k\rangle\}=0$$

vì $x^{k+1}\in\partial g^*(y^k)$. Tương tự, ta có

$$\lim_{k\to\infty}\{h(x^{k+1})-\langle x^{k+1}-x^k,y^k\rangle-h(x^k)\}=0,$$

nghĩa là

$$\lim_{k\to\infty}\{h(x^{k+1})+h^*(y^k)-\langle x^{k+1},y^k\rangle\}=0$$

vì $y^k\in\partial h(y^k)$.

(iv) Giả sử rằng α hữu hạn và các dãy $\{x^k\},\{y^{k\}}$ là bị chặn.

Gọi x^* là giới hạn của $\{x^k\}$, nghĩa là

$$\lim_{k\to\infty}x^k=x^*.$$

Giả sử dãy $\{y^k\}$ hội tụ đến $y^*\in\partial h(x^*)$. Từ (iii) suy ra

$$\lim_{k\to\infty}\{g(x^k)+g^*(y^k)\}=\lim_{k\to\infty}\langle x^k,y^k\rangle=\langle x^*,y^*\rangle.$$

Đặt

$$\theta(x,y)=g(x)+g^*(y)$$

với $(x, y) \in X \times Y$. Ta có

$$\theta(x, y) \in \Gamma_0(X \times Y).$$

Từ tính nửa liên tục dưới của θ, suy ra

$$\theta(x^*, y^*) \leq \lim_{k \to \infty} inf\, \theta(x^k, y^k) = \lim_{k \to \infty} \theta\langle x^k, y^k\rangle = \langle x^*, y^*\rangle,$$

nghĩa là

$$\theta(x^*, y^*) = g(x^*) + g^*(y^*) = \langle x^*, y^*\rangle.$$

Nói cách khác ta có $y^* \in \partial g(x^*)$.

Theo Bổ đề 2.1 (sẽ trình bày sau định lý này) ta có

$$\lim_{k \to \infty} h(x^k) = h(x^*)$$

và

$$\lim_{k \to \infty} h^*(y^k) = h^*(y^*)$$

vì $y^k \in \partial h(x^k), x^k \to x^*$ và $y^k \to y^*$.

Kết hợp với (iii), ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to \infty} (g - h)(x^k) &= \lim_{k \to \infty} g(x^k) - \lim_{k \to \infty} h(x^k) \\
&= \lim_{k \to \infty} g(x^k) - h(x^*) = \beta, \\
\lim_{k \to \infty} (h^* - g^*)(y^k) &= \lim_{k \to \infty} h^*(y^k) - \lim_{k \to \infty} g^*(y^k) \\
&= h^*(y^*) - \lim_{k \to \infty} g^*(y^k) = \beta.
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\lim_{k \to \infty} g(x^k) = g(x^*)$$
$$\lim_{k \to \infty} g^*(y^k) = g^*(y^*).$$

Vì tồn tại các giới hạn

$$\lim_{k \to \infty} g(x^k), \ \lim_{k \to \infty} g^*(y^k)$$

nên từ (iii) ta có

$$g(x^*) + g^*(y^*) = \lim_{k\to\infty}\{g(x^k) + g^*(y^k)\}$$
$$= \lim_{k\to\infty} g(x^k) + \lim_{k\to\infty} g^*(y^k).$$

Hơn nữa, do tính nửa liên tục dưới của g và g^* nên

$$\lim_{k\to\infty} g(x^k) = \lim_{k\to\infty} \inf\, g(x^k) \geq g(x^*),$$

$$\lim_{k\to\infty} g^*(y^k) = \lim_{k\to\infty} \inf\, g^*(y^k) \geq g^*(y^*).$$

Vậy định lý được chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.1 *Cho $h \in \Gamma_0(X)$ và $\{x^k\}$ là một dãy các phần tử của X sao cho*

(i) $x^k \to x^*$;

(ii) Tồn tại một dãy bị chặn $\{y^k\}$ với $y^k \in \partial h(x^k)$;

(iii) $\partial h(x^*)$ là khác rỗng;

Khi đó $\lim_{k\to\infty} h(x^k) = h(x^*)$.

Chứng minh

Lấy $y^* \in \partial h(x^*)$. Khi đó, ta có

$$h(x^k) \geq h(x^*) + \langle x^k - x^*, y^* \rangle, \text{ với mọi k.}$$

Bởi vì $y^k \in \partial h(x^k)$ theo giả thiết (ii) cho nên

$$h(x^*) \geq h(x^k) + \langle x^* - x^k, y^k \rangle, \text{ với mọi k.}$$

Suy ra

$$h(x^k) \leq h(x^*) + \langle x^k - x^*, y^k \rangle, \text{ với mọi k.}$$

Theo giả thiết (i) $x^k \to x^*$ nên

$$\lim_{k\to\infty} \langle x^k - x^*, y^* \rangle = 0.$$

Hơn nữa,

$$\lim_{k\to\infty} \langle x^k - x^*, y^k \rangle = 0$$

vì dãy $\{y^k\}$ bị chặn theo (ii). Do vậy

$$\lim_{k\to\infty} h(x^k) = h(x^*). \qquad \square$$

Nhận xét 2.3 (i) Trong phần (ii) của định lý 2.3 sự hội tụ của các dãy $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ được đảm bảo nếu thỏa mãn các điều kiện sau

- $\{x^k\}$ là bị chặn;
- Tập các điểm giới hạn của $\{x^k\}$ là hữu hạn;
- $\lim_{k\to\infty} \| x^{k+1} - x^k \| = 0$

(ii) Thông thường hiệu quả của thuật toán d.c phụ thuộc nhiều vào tính lồi mạnh của các phân tích d.c của hàm mục tiêu trong bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Để làm cho phân tích của hàm mục tiêu có được tính chất này, người ta thường dùng khai triển sau

$$f = g - h = (g + \frac{\lambda}{2} \| \cdot \|^2) - (h + \frac{\lambda}{2} \| \cdot \|^2).$$

(iii) Phương pháp tổng quát giải bài toán d.c ở trên cho ta x^* sao cho $\partial h(x^*) \subset \partial g(x^*)$. Nhưng trong thực tế, ngoại trừ trường hợp phương pháp giải tổng quát dễ dàng tìm ra nghiệm, người ta thường dùng phương pháp giải địa phương. Tuy nhiên, trong phương pháp này nếu như thuật toán kết thúc tại x^* mà $\partial h(x^*)$ không bị chứa trong $\partial g(x^*)$ thì ta có thể hạn chế giá trị hàm mục tiêu và chọn lại điểm ban đầu mới $x^0 = x^*$ với $y^0 \in \partial h(x^0)$ sao cho $y^0 \notin \partial g(x^0)$. Thật vậy, vì

$$g(x^1) + g^*(y^0) - \langle x^1, y^0 \rangle \leq h(x^1) - h(x^0) + \langle x^0, y^0 \rangle.$$

và

$$\langle x^0, y^0 \rangle < g(x^0) + g^*(y^0).$$

Do $y^0 \notin \partial g(x^0)$ nên ta có

$$g(x^1) + g^*(y^0) < h(x^1) - h(x^0) + g(x^0) + g^*(y^0).$$

Suy ra

$$g(x^1) - h(x^1) < g(x^0) - h(x^0).$$

2.2.3. Kỹ thuật hiệu chỉnh trong bài toán d.c

Xét bài toán d.c (P) và bài toán đối ngẫu (D) của nó với α là hữu hạn. Trong trường hợp này $dom\, g \subset dom\, h$ và $dom\, h^* \subset dom\, g^*$.

Trong phần này, ta trình bày kỹ thuật hiệu chỉnh cho bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Đầu tiên ta nhắc lại một số kiến thức về giải tích lồi, vì vậy các định lý này ta không chứng minh

Định nghĩa 2.5 Cho $\varphi, \psi \in \Gamma_0(X)$, *cận dưới chập* của φ và ψ được định nghĩa và ký hiệu như sau

$$\varphi \nabla \psi(x) = \inf \{\varphi(x_1) + \psi(x_2) : x_1 + x_2 = x\}.$$

Người ta nói $\varphi \nabla \psi$ là chính xác tại $x = x_1 + x_2$ nếu

$$\varphi \nabla \psi(x) = \varphi(x_1) + \psi(x_2).$$

$\varphi \nabla \psi$ được gọi là chính xác nếu nó chính xác tại mọi $x \in X$.

Định lí 2.4

(i) $\varphi \nabla \psi$ *là lồi và* $dom\, \varphi \nabla \psi = dom\, \varphi + dom\, \psi$;

(ii) $(\varphi \nabla \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;

(iii) Cho

$$ri(dom\, \varphi) \cap ri(dom\, \psi) \neq \emptyset.$$

Khi đó $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* \nabla \psi^*$ *và* $\varphi^* \nabla \psi^*$ *là chính xác;*

(iv) $\partial \varphi(x_1) \cap \partial \psi(x_2) \subset \partial(\varphi \nabla \psi)(x_1 + x_2)$.

Hơn nữa, nếu

$$\partial \varphi(x_1) \cap \partial \psi(x_2) \neq \emptyset$$

thì ta có $\varphi \nabla \psi$ *là chính xác tại* $x = x_1 + x_2$. *Ngược lại, nếu* $\varphi \nabla \psi$ *là chính xác tại* $x = x_1 + x_2$ *thì*

$$\partial(\varphi \nabla \psi)(x_1 + x_2) = \partial \varphi(x_1) \cap \partial \psi(x_2).$$

Định lí 2.5 *Cho $\varphi \in \Gamma_0(X)$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) Với mỗi $x \in dom\,\varphi$, $\partial\varphi(x)$ chứa nhiều nhất một phần tử;

(ii) φ là khả vi thiết yếu;

(iii) $\varphi \in \Gamma_0(X)$ khả vi thiết yếu nếu và chỉ nếu φ^* là lồi chặt thiết yếu;

(iv) Cho $\psi, \psi \in \Gamma_0(X)$ sao cho φ là khả vi thiết yếu và

$$ri(dom\,\varphi^*) \cap ri(dom\,\psi^*) \neq \emptyset.$$

Khi đó $\varphi \nabla \psi$ là khả vi thiết yếu.

⋆ **Hiệu chỉnh cho bài toán đối ngẫu của bài toán tối ưu d.c**

Cho $\theta \in \Gamma_0(X)$ sao cho

(i) $dom\,\theta \supset dom\,g$,

(ii) $ri(dom\,\theta) \cap ri(dom\,g) \neq \emptyset$ và $ri(dom\,\theta) \cap ri(dom\,h) \neq \emptyset$.

Hiển nhiên, $g + \theta$ và $h + \theta$ của những hàm hợp thành $d.c$ của f. Do đó, bài toán sau đây là tương đương với (P):

$$(P_+) \qquad \lambda\alpha = \inf\{(\lambda g + \theta)(x) - (\lambda h + \theta)(x) : x \in X\},$$

trong đó λ là một số dương. Khi đó ta có bài toán đối ngẫu của (P_+) là

$$\begin{aligned}(D_+) \qquad \lambda\alpha &= \inf\{(\lambda g + \theta)^*(y) - (\lambda h + \theta)^*(y) : y \in Y\}\\ &= \inf\{(\lambda h)^* \nabla \theta^*(y) - (\lambda g)^* \nabla \theta^*(y) : y \in Y\}.\end{aligned}$$

Mệnh đề 2.3 *Cho $\theta, g \in \Gamma_0(X)$. Khi đó*

(i) Nếu θ là hàm lồi mạnh thì các hàm $\lambda g + \theta$ và $\lambda h + \theta$ cũng là lồi mạnh với mọi $\lambda > 0$;

(ii) Nếu θ là khả vi thiết yếu thì các hàm hợp thành trong bài toán (D_+) là khả vi thiết yếu.

⋆ **Hiệu chỉnh cho bài toán tối ưu d.c**

Để hiệu chỉnh cho bài toán gốc, ta xét bài toán $d.c$ sau

$$(P_\nabla) \qquad \lambda\alpha = \inf\{(\lambda g)\nabla\theta(x) - (\lambda h)\nabla\theta(x) : x \in X\},$$

trong đó λ là một số dương và $\theta \in \Gamma_0(X)$ thỏa mãn

(i) $ri(\lambda dom\, g^*) \cap ri(dom\, \theta^*) \neq \emptyset$,

$ri(\lambda dom\, h^*) \cap ri(dom\, \theta^*) \neq \emptyset$;

(ii) $dom\, \theta^* \supset dom\, (\lambda h)^* = \lambda dom\, h^*$.

Theo định lý 2.4 ta có

$$(\lambda g)^*(y) = \lambda g^*(\lambda^{-1} y).$$

Suy ra

$$dom\, \big((\lambda g)^*\big) = \lambda(dom\, g^*).$$

Mặt khác, từ (i) ta có $\lambda g\nabla\theta$ và $\lambda h\nabla\theta$ đều thuộc $\Gamma_0(X)$.

Do vậy, ta có bài toán đối ngẫu của bài toán (P_∇)

$$(D_\nabla) \qquad \lambda\alpha = \inf\{(\lambda h\nabla\theta)^*(y) - (\lambda g\nabla\theta)^*(y) : y \in Y\},$$
$$= \inf\{\big((\lambda h)^* + \theta^*\big)(y) - \big((\lambda g)^* + \theta^*\big)(y) : y \in Y\}.$$

Theo (ii) ta có D_∇ tương đương với D.

Như vậy, bằng cách chọn θ hợp lý ta thu được các hàm d.c hợp thành trong (P_∇) là khả vi thiết yếu và các hàm d.c hợp thành của (D_∇) là lồi mạnh.

Tiểu kết chương 2

Trong chương này, chúng tôi trình bày bài toán d.c và phương pháp giải địa phương tìm nghiệm cho bài toán này. Đồng thời trình bày một kĩ thuật hiệu chỉnh cho bài toán d.c.

Chương 3

Bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c

Trong chương này chúng tôi đưa ra bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c và phương pháp tìm điểm dừng cho bài toán này. Đây là một trường hợp mở rộng của bài toán tối ưu d.c. Từ đó áp dụng vào mô hình cân bằng Counot - Nash.

3.1. Bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c

Cho $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ là một tập con lồi đóng, F là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^n$ vào C và φ là hàm d.c xác định trên $\mathbb{R}^n$. Để đơn giản, ta giả thiết rằng φ hữu hạn trên $\mathbb{R}^n$

Định nghĩa 3.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp được phát biểu như sau:

Tìm $x^* \in C$ sao cho

$$F(x^*)^T(y - x^*) + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0,\ \forall\, y \in C, \tag{3.1}$$

trong đó C được gọi là miền giới hạn, F là ánh xạ giá, φ là hàm giá.

Điểm $x^* \in C$ được gọi là nghiệm địa phương của bài toán (3.1) nếu

$$F(x^*)^T(y - x^*) + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0, \quad \forall\, y \in C \cap U, \tag{3.2}$$

trong đó U là một lân cận mở nào đó của x^*.

Nhận xét 3.1 Nếu φ là hàm lồi thì nghiệm địa phương của (3.1) cũng là nghiệm toàn cục của bài toán này.

Trong bài toán (3.1), ta kí hiệu:

$$\mathcal{N}_C := \{(x, U) : x \in C, U \text{ là lân cận của } x\}$$

và định nghĩa các ánh xạ $S : \mathcal{N}_C \longrightarrow 2^C$ và $m : \mathcal{N}_C \longrightarrow \mathbb{R}$ như sau

$$S(x, U) := \text{argmin}\big\{F(x)^T(y - x) + \varphi(y) \ : \ y \in C \cap U\big\}, \tag{3.3}$$

$$m(x, U) := \min\big\{F(x)^T(y - x) + \varphi(y) - \varphi(x) \ : \ y \in C \cap U\big\}. \tag{3.4}$$

Khi đó, ta có mệnh đề sau

Mệnh đề 3.1 *Giả sử rằng $S(x, U) \neq \emptyset$ với mọi $(x, U) \in \mathcal{N}_C$. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương*

i) x^* là nghiệm địa phương của (3.1)*;*

ii) $x^* \in C$, và $x^* \in S(x^*, U)$;

iii) $x^* \in C$, và $m(x^*, U) = 0$.

Chứng minh

$(ii \Rightarrow i)$.

Cho $x^* \in C$ và $x^* \in S(x^*, U)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= F(x^*)^T(x^* - x^*) + \varphi(x^*) - \varphi(x^*) \\ &\leq F(x^*)^T(y - x^*) + \varphi(y) - \varphi(x^*), \ \forall y \in C \cap U. \end{aligned}$$

Suy ra x^* là nghiệm địa phương của (3.1).

$(i \Rightarrow ii)$.

Cho x^* là nghiệm địa phương của (3.1). Hiển nhiên, ta có $x^* \in C$. Ta cần chứng minh $x^* \in S(x^*, U)$. Thật vậy, do

$$F(x^*)^T(y - x^*) + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0, \quad \forall y \in C \cap U \tag{3.5}$$

nên suy ra $x^* \in S(x^*, U)$. Vậy (i) tương đương với (ii).

Tiếp theo ta chứng minh (i) tương đương với (iii).

Ta có $m(x, U) \leq 0$ với mọi $x \in C \cap U$. Do vậy, $x^* \in C \cap U$ và $m(x^*, U) = 0$ nếu và chỉ nếu

$$F(x^*)^T(y - x^*) + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0, \ \forall y \in C \cap U.$$

Vậy ta có $(i \Leftrightarrow iii)$. $\square$

Nhận xét 3.2 (i) Trong mệnh đề trên , nếu U chứa C thì x^* là nghiệm toàn cục của (3.1).

(ii) Trong bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c có thể không có nghiệm mặc dù các hàm giá liên tục và miền giới hạn C bị chặn.

Kí hiệu Γ_C là tập các hàm lồi chính thường có dưới vi phân nửa liên tục dưới trên C. Cho $\varphi = g - h$ là hàm $d.c$ với $g, h \in \Gamma_C$. Ta có thể giả thiết g và h là lồi mạnh trên C. Khi đó, ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 3.2 Điểm $x \in C$ được gọi là *điểm dừng* của (3.1) nếu

$$0 \in F(x) + \partial g(x) - \partial h(x) + N_C(x), \tag{3.6}$$

trong đó

$$N_C(x) := \{w \ : \ w^T(y - x) \leq 0, \ \forall y \in C\}$$

là nón pháp tuyến của C tại $x \in C$, $\partial g(x)$ và $\partial h(x)$ lần lượt là dưới vi phân của g và h tại x.

Nhận xét 3.3 (i) Với mọi $c > 0$, phát biểu (3.6) tương đương với

$$0 \in c\{F(x) + \partial g(x) - \partial h(x)\} + N_C(x). \tag{3.7}$$

(ii) Đặt

$$g_1(x) = g(x) + \delta_C(x),$$

trong đó $\partial \delta_C(x)$ là dưới vi phân của hàm chỉ δ_C của C tại x. Khi đó, ta có x là điểm dừng nếu và chỉ nếu

$$0 \in c\big(F(x) + \partial g(x) - \partial h(x)\big) + \partial \delta_C(x), \tag{3.8}$$

với $c > 0$ là hằng số hiệu chỉnh.

Mệnh đề 3.2 *Điều kiện cần và đủ để x là điểm dừng của* (3.1) *là*

$$x \in \Big(I + c\partial g_1\Big)^{-1}\Big(x - cF(x) + c\partial h(x)\Big) \tag{3.9}$$

trong đó $c > 0$ là tham số hiệu chỉnh, I ánh xạ đồng nhất.

Chứng minh

Vì g_1 là chính thường, lồi đóng nên $(I + \partial g_1)^{-1}$ đơn trị và xác định khắp nơi. Suy ra x thỏa mãn (3.9) nếu và chỉ nếu

$$x - cF(x) + cv(x) \in (I + c\partial g_1)(x)$$

với $v(x) \in \partial h(x)$. Vì $N_C(x)$ là nón pháp tuyến của C tại x và

$$\partial g_1(x) = \partial g(x) + \partial \delta_C(x) = \partial g(x) + N_C(x)$$

nên suy ra

$$x - cF(x) + cv(x) \in (I + c\partial g_1)(x)$$

tương đương với

$$0 \in F(x) + \partial g(x) - \partial h(x) + N_C(x).$$

Vậy mệnh đề được chứng minh. $\square$

Thuật toán

Bước 1: Chọn tùy ý $x^0 \in C$ và đặt $k := 0$;

Bước 2: Tại $k = 0, 1, \ldots$ với x^k đã cho, x^{k+1} được xác định như sau

$$x^{k+1} = \big(I + c_k\partial g_1\big)^{-1}\big(x^k - c_kF(x^k) + c_kv(x^k)\big), \tag{3.10}$$

trong đó $v(x^k) \in \partial\, h(x^k)$.

Nhận xét 3.4 Nếu ta kí hiệu $y^k := x^k - c_kF(x^k) + c_kv(x^k)$ thì việc tìm x^{k+1} được thay thế bằng việc tìm nghiệm của bài toán lồi mạnh

$$\min\Big\{g(x) + \frac{1}{2c_k}\parallel x - y^k \parallel^2 : x \in C\Big\} \tag{3.11}$$

Định nghĩa 3.3 Cho ánh xạ $\phi : C \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$

(i) ϕ được gọi là *đơn điệu* trên C nếu

$$(u-v)^T(x-y) \geq 0,$$

với mọi $x, y \in C$ và mọi $u \in \phi(x)$, $v \in \phi(y)$;

(ii) ϕ được gọi là đơn điệu *cực đại* nếu đồ thị của nó không thực sự chứa trong đồ thị của một ánh xạ đơn điệu khác ;

(iii) ϕ được gọi là đơn điệu *mạnh* trên C với hệ số $\tau > 0$ nếu

$$(u-v)^T(x-y) \geq \tau \parallel x-y \parallel^2$$

với mọi $x, y \in C$ và mọi $u \in \phi(x)$, $v \in \phi(y)$;

(iv) ϕ được gọi là *tự bức* trên C với hệ số $\sigma > 0$ (σ - tự bức) nếu

$$(u-v)^T(x-y) \geq \sigma \parallel u-v \parallel^2,$$

với mọi $x, y \in C$ và mọi $u \in \phi(x)$, $v \in \phi(y)$.

Nhận xét 3.5 Nếu ϕ là đơn trị và σ - tự bức thì nó là $1/\sigma$ - Lipschitz.

Định lí 3.1 *Giả sử tập S^* các điểm dừng của* (3.1) *là khác rỗng, F là σ - tự bức, g lồi mạnh trên C với hệ số $\tau > 0$ và h là $L-$ Lipschitz khả vi trên C. Khi đó với mỗi $x^* \in S^*$, ta có*

$$\alpha_k \parallel x^k - x^* \parallel^2 - \beta_k \parallel x^{k+1} - x^* \parallel^2 \geq c_k(2\sigma - c_k) \parallel F(x^k) - F(x^*) \parallel^2, \tag{3.12}$$

trong đó $\alpha_k = 1 + c_k L t, \beta_k = \left(1 + 2c_k\tau - c_k\frac{L}{t}\right)$ *và* $t > 0$.

Chứng minh

Theo giả thiết, C là tập lồi đóng khác rỗng; g là lồi, đóng, chính thường trên C nên ta có $\left(I + c_k\partial\, g_1\right)^{-1}$ là đơn trị và xác định khắp nơi với mọi $c_k > 0$. Do vậy, dãy $\{x^k\}$ được xây dựng bởi (3.10) được xác định. Theo (3.10) ta có

$$x^{k+1} = x^k - c_k F(x^k) + c_k v^k - c_k z^{k+1} \tag{3.13}$$

trong đó $v^k = \nabla h(x^k)$ và

$$z^{k+1} \in \partial g_1(x^{k+1}) = \partial g(x^{k+1}) + N_C(x^{k+1}).$$

Ta kí hiệu $F(x^k)$ là F^k và $F(x^*)$ là F^*. Theo định nghĩa, nếu x^* điểm dừng của (3.1) thì

$$0 = z^* + F(x^*) - v^*$$

trong đó $z^* \in \partial\, g_1(x^*)$ và $v^* = \nabla h(x^*)$.

Do tính tự bức của F trên C, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq (F^k - F^*)^T(x^k - x^*) - \sigma \parallel F^k - F^* \parallel^2 \\ &= (F^k - F^*)^T(x^k - x^* - c_kF^k + c_kF^*) - \triangle_k, \end{aligned}$$

trong đó

$$\triangle_k = (\sigma - c_k) \parallel F^k - F^* \parallel^2 .$$

Vì $F^* = v^* - z^*$ và

$$x^{k+1} = x^k - c_kF^k + c_kv^k - c_kz^{k+1}$$

ta thu được

$$\begin{aligned} 0 &\leq (F^k - F^*)^T(x^k - c_kF^k + c_kv^k - c_kz^{k+1} - x^*) \\ &\quad - c_k(F^k - F^*)^T(v^k - v^* - z^{k+1} + z^*) - \Delta_k \\ &\quad = (F^k - F^*)^T(x^{k+1} - x^*) - c_k(F^k - F^*)^T(v^k - v^* - z^{k+1} + z^*) - \Delta_k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Mặt khác, vì g là lồi mạnh với hệ số $\tau > 0$, nên ∂g là đơn điệu mạnh với hệ số τ. Suy ra

$$\partial g_1 := \partial g + N_C$$

là đơn điệu mạnh với hệ số τ. Như vậy, từ $z^{k+1} \in \partial g_1(x^{k+1})$ ta có

$$(x^{k+1} - x^*)^T(z^{k+1} - z^*) - \tau \parallel x^{k+1} - x^* \parallel^2 \geq 0. \tag{3.15}$$

Từ (3.13),(3.14), (3.15) và chú ý $z^* + F(x^*) = v^*$ ta có

$$\begin{aligned}
0 &\leq (F^k - F^* + z^{k+1} - z^*)^T(x^{k+1} - x^*) \\
&- c_k(F^k - F^*)^T(v^k - v^* - z^{k+1} + z^*) - \tau \parallel x^{k+1} - x^* \parallel^2 - \Delta_k \\
&= (x^{k+1} - x^*)^T\Big(v^k + \frac{(x^k - x^*) - (x^{k+1} - x^*)}{c_k} - v^*\Big) \\
&- c_k(F^k - F^*)^T(v^k - v^* - z^{k+1} + z^*) - \tau \parallel x^{k+1} - x^* \parallel^2 - \Delta_k.
\end{aligned}$$

Ta kí hiệu $\hat{x}^k := x^k - x^*$, $\hat{x}^{k+1} := x^{k+1} - x^*$, $\hat{v}^k := v^k - v^*$, $\hat{z}^{k+1} := z^{k+1} - z^*$ và $\hat{F}^k := F^k - F^*$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
2c_k(\hat{x}^{k+1})^T\hat{v}^k &- 2(\hat{x}^{k+1})^T(\hat{x}^{k+1} - \hat{x}^k) \\
&- 2c_k^2(\hat{F}^k)^T(\hat{v}^k - \hat{z}^{k+1}) \\
&- 2c_k\tau \parallel \hat{x}^{k+1} \parallel^2 - 2c_k\triangle_k \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Từ (3.13) ta có

$$\parallel \hat{x}^{k+1} - (\hat{x}^k) \parallel^2 = c_k^2 \parallel (\hat{F}^k) \parallel^2 + c_k^2 \parallel \hat{z}^{k+1} - \hat{v}^k \parallel^2 - 2c_k^2(\hat{F}^k)^T(\hat{v}^k - \hat{z}^{k+1}).$$

Sử dụng đẳng thức

$$2(\hat{x}^{k+1})^T(\hat{x}^{k+1} - \hat{x}^k) = \parallel \hat{x}^{k+1} - \hat{x}^k \parallel^2 + \parallel \hat{x}^{k+1} \parallel^2 - \parallel \hat{x}^k \parallel^2$$

và kết hợp với (3.16)suy ra

$$\begin{aligned}
&2c_k(\hat{x}^{k+1})^T\hat{v}^k - (1 + 2c_k\tau) \parallel \hat{x}^{k+1} \parallel^2 + \parallel \hat{x}^k \parallel^2 - c_k^2 \parallel \hat{F}^k \parallel^2 \\
&- c_k^2 \parallel \hat{v}^k - \hat{z}^{k+1\parallel^2} - 2c_k\Delta_k \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Vì ∇h là L-Lipschitz liên tục, ta có $\parallel \hat{v}^k \parallel \leq L \parallel \hat{x}^k \parallel$. Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$2(\hat{x}^{k+1})^T\hat{v}^k \leq 2 \parallel \hat{x}^{k+1} \parallel\parallel \hat{v}^k \parallel \leq 2L \parallel \hat{x}^k \parallel\parallel \hat{x}^{k+1} \parallel$$

$$\leq 2L\Big(t \parallel \hat{x}^k \parallel^2 + \frac{\parallel \hat{x}^{k+1} \parallel^2}{t}\Big), \forall t > 0.$$

Thay thế $2(\hat{x}^{k+1})^T\hat{v}^k$ bằng $2L(t \parallel \hat{x}^k \parallel^2 + \frac{\|\hat{x}^{k+1}\|^2}{t})$ vào (3.17) và sử dụng định nghĩa Δ_k, ta có

$$\alpha_k \parallel \hat{x}^k \parallel^2 - \beta_k \parallel \hat{x}^{k+1} \parallel^2 \geq c_k(2\sigma - c_k) \parallel \hat{F}^k \parallel^2 + c_k^2 \parallel \hat{v}^k - \hat{z}^{k+1} \parallel^2, \tag{3.18}$$

trong đó $\alpha_k = 1 + c_k L t,\ \beta_k = (1 + 2c_k\tau - c_k\frac{L}{t})$ và $t > 0$. Vậy định lý được chứng minh. □

Hệ quả 3.1.1 *Sử dụng giả thiết của định lý 3.1, ta giả sử thêm rằng $\tau \geq L$. Khi đó dãy $\{x^k\}$ được xây dựng bởi (3.10) hội tụ về một điểm dừng của bài toán* (3.1). *Hơn nữa, nếu $\tau > L$ hoặc F là $\mu-$ đơn điệu mạnh thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ tuyến tính về điểm dừng của bài toán* (3.1).

Chứng minh

Giả sử rằng $\tau \geq L$. Đặt m và M là hai số thực sao cho

$$0 < m \leq c_k \leq M < 2\sigma.$$

Nếu ta chọn $t = 1$ từ (3.18) ta suy ra

$$\parallel x^k - x^* \parallel^2 - \parallel x^{k+1} - x^* \parallel^2 \geq \frac{m(2\sigma - M)}{1 + ML} \parallel F(x^k) - F(x^*) \parallel^2 \geq 0.$$

Suy ra dãy $\{x^k\}$ bị chặn và dãy $\{\parallel x^k - x^* \parallel^2\}$ là hội tụ. Hơn nữa, từ bất đẳng thức trên, suy ra

$$\lim_{k\to\infty} F(x^k) = F(x^*).$$

Theo (3.13), ta có

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1} - x^k}{c_k} = \lim_{k\to\infty} (v^k - z^{k+1} - F^k) = \lim_{k\to\infty} (v^k - z^{k+1}) - F^*.$$

Do $-F^* = z^* - v^*$ nên

$$\lim_{k\to\infty} (v^k - v^* - z^{k+1} + z^*) = 0.$$

Đặt x^∞ là điểm giới hạn của dãy bị chặn $\{x^k\}$ và $\{x^k : k \in \mathcal{K}\}$ là dãy con hội tụ đến x^∞. Vì F là σ - tự bức nên nó liên tục. Vậy $\lim_{k\to\infty} F(x^k) = F(x^*)$. Suy ra $F(x^\infty) = F(x^*)$. Từ giả thiết ∇h là L-Lipschitz, ta có

$$\| v^k - v^* \| \leq L \| x^k - x^* \| .$$

Vậy $\{v^k\}$ cũng bị chặn.

Giả sử rằng dãy con $\{v^k : k \in \mathcal{K}\}$ hội tụ đến v^∞. Sử dụng tính liên tục của ∇h, ta có $v^\infty = \nabla h(x^\infty)$. Ta sẽ chỉ ra rằng

$$v^\infty - F(x^\infty) \in \partial g_1(x^\infty).$$

Lấy $z \in \partial g_1(x)$. Khi đó, từ tính đơn điệu mạnh của ∂g_1 ta suy ra

$$\begin{aligned}
&0 \leq \tau \| x^k - x \|^2 \leq (z^k - z)^T (x^k - x)\\
&\quad = (z^k - z)^T (x^k - x^\infty) + (z^k - z)^T (x^\infty - x)\\
&\quad = (z^k - z)^T (x^k - x^\infty) + (z^k - v^{k-1} - z)^T (x^\infty - x) + (v^{k-1})^T (x^\infty - x).
\end{aligned}$$

Vì

$$\lim_{k\to\infty} (v^k - v^* - z^{k+1} + z^*) = 0,$$

suy ra

$$z^{k+1} - v^k \to z^* - v^* = -F(x^*).$$

Lấy giới hạn vế trái bất đẳng thức, ta thu được

$$(v^\infty - F(x^*) - x)^T (x^\infty - x) \geq 0.$$

Đồng thời từ tính đơn điệu cực đại của ∂g_1, ta có

$$v^\infty - F(x^*) \in \partial g_1(x^\infty).$$

Vì $F(x^\infty) = F(x^*)$, nên ta có

$$v^\infty - F(x^\infty) \in \partial g_1(x^\infty).$$

Do $v^\infty = \nabla h(x^\infty)$ ta có

$$0 \in \partial g_1(x^\infty) + F(x^\infty) - \nabla h(x^\infty),$$

nghĩa là x^∞ là điểm dừng của (3.1). Thay thế x^* trong (3.12) bởi x^∞ và chú ý rằng $\{\| x^k - x^\infty \|\}$ là hội tụ, suy ra $\{x^k\}$ hội tụ về x^∞ vì nó chứa dãy con hội tụ về x^∞.

Từ (3.12) suy ra

$$\alpha_k \| x^k - x^* \|^2 \geq \beta_k \| x^{k+1} - x^* \|^2 .$$

Nếu $L < \tau$, thì $0 < r := \sqrt{\frac{\alpha_k}{\beta_k}} < 1$ với mọi $k \geq 0$. Suy ra

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leq r \| x^k - x^* \| .$$

Như vậy, dãy $\{x^k\}$ hội tụ tuyến tính về x^*.

Nếu F đơn điệu mạnh với hệ số $\mu > 0$, thì

$$\begin{aligned} \| F(x^k) - F(x^*) \| \| x^k - x^* \| &\geq \big(F(x^k) - F(x^*)\big)^T (x^k - x^*) \\ &\geq \mu \| x^k - x^* \|^2 . \end{aligned}$$

Ngược lại, nếu

$$\| F(x^k) - F(x^*) \|^2 \geq \mu^2 \| x^k - x^* \|^2$$

thì thay thế bất đẳng thức này vào (3.12), ta có

$$[\alpha_k - \mu^2 c_k(2\sigma - c_k)] \| x^k - x^* \|^2 \geq \beta_k \| x^{k+1} - x^* \|^2 .$$

Sử dụng giả thiết $0 < m \leq c_k \leq M < 2\sigma$ và lấy $t = 1$, ta thu được bất đẳng thức

$$[1 + c_k L - \mu^2 c_k(2\sigma - c_k)] \| x^k - x^* \|^2 \geq (1 + 2c_k\tau - c_k L) \| x^{k+1} - x^* \|^2 .$$

Vì

$$\tau + \mu^2(\sigma - \frac{m}{2}) > L$$

$$1 + c_k L - \mu^2 c_k(2\sigma - c_k) < 1 + 2c_k\tau - c_k L$$

suy ra dãy $\{x^k\}$ hội tụ tuyến tính đến x^*. $\square$

3.2. Bài toán cân bằng Cournot - Nash

Trong phần này, chúng ta xét một mô hình kinh tế quen thuộc là mô hình cân bằng Cournot - Nash. Ta sẽ mô tả mô hình này trong trường hợp có hàm cước phí lõm dưới dạng một bất đẳng thức biến phân hỗn hợp với hàm gốc là hàm d.c. Mô hình này được phát biểu như sau:

Giả sử n công ty cùng sản xuất ra một loại hàng hóa. Giá mặt hàng của công ty thứ i kí hiệu là (p_i) phụ thuộc vào số lượng hàng hóa của n công ty sản xuất ra $\sigma := \sum_{i=1}^{n} x_i$. Đặt $h_i(x_i)$ là chi phí để công ty thứ i sản xuất ra x_i sản phẩm. Giả sử rằng hàm lợi ích của công ty thứ i có dạng

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = x_i p_i\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) - h_i(x_i) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.19}$$

Đặt $C_i \subset \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, n)$ là tập chiến lược của công ty thứ i. Mỗi công ty đều chọn một phương án sản xuất với mong muốn lợi ích của mình lớn nhất. Nhưng như vậy lợi ích của các công ty có thể mâu thuẫn với nhau. Trong trường hợp này, khái niệm cân bằng Nash tỏ ra rất phù hợp.

Định nghĩa 3.4 Điểm $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in C := C_1 \times \cdots \times C_n$ được gọi là *điểm cân bằng Nash* nếu

$$f_i(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \cdots, x_n^*) \le f_i(x_1^*, \ldots, x_n^*), \tag{3.20}$$

với mọi $y_i \in C_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Y nghĩa thực tế của điểm cân bằng Nash cho mô hình này là tại điểm cân bằng, nếu một công ty nào ra khỏi điểm cân bằng của mình, trong khi các công ty khác vẫn ở lại điểm cân bằng thì công ty ra chệch điểm cân bằng sẽ bị thua thiệt về lợi ích.

Nhận xét 3.6 Khi $h_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ là các hàm affin, thì bằng cách đặt

$$\Psi(x, y) := -\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \tag{3.21}$$

và

$$\Phi(x,y) := \Psi(x,y) - \Psi(x,x), \tag{3.22}$$

ta có thể phát biểu bài toán tìm điểm cân bằng Nash cho lớp bài toán này như sau

$$\text{Tìm } x^* \in C \;:\quad \text{sao cho } \Phi(x^*,y) \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{EP}$$

Mệnh đề 3.3 *Nếu $h_i(i = 1, \ldots, n)$ là các hàm affin thì bài toán (EP) có dạng bài toán quy hoạch toàn phương lồi mạnh.*

Chứng minh

Giả sử các hàm giá và hàm chi phí của mỗi công ty là hàm affin có dạng

$$p_i(\sigma) \equiv p(\sigma) = \alpha_0 - \beta\sigma, \quad \alpha_0 \geq 0, \quad \beta > 0, \quad \text{với } \sigma = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$h_i(x_i) = \mu_i x_i + \xi_i, \quad \mu_i \geq 0, \quad \xi_i \geq 0, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Từ (3.19), (3.20), (3.21) and (3.22), ta có

$$\Phi(x,y) = (\tilde{A}x + \mu - \alpha)^T(y - x) + y^T A y - x^T A x,$$

trong đó

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \; ; \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & 0 & \beta & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

và

$$\alpha^T = (\alpha_0, \ldots, \alpha_0), \quad \mu^T = (\mu_1, \ldots, \mu_n).$$

Khi đó bài toán tìm điểm cân bằng Nash có thể phát biểu như một bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp:

Tìm $x \in C$ sao cho

$$(\tilde{A}x + \mu - \alpha)^T(y - x) + y^T A y - x^T A x \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{3.23}$$

Bằng cách đặt $Q = 2A + \tilde{A}$. Ta có Q là ma trận đối xứng và xác định dương. Khi đó (3.23) tương đương với bài toán

$$\min_{x \in U} \{\frac{1}{2} x^T Q x + (\mu - \alpha)^T x\}. \qquad (QP)$$

Đây là bài toán quy hoạch toàn phương lồi mạnh. Do tính lồi mạnh nên suy ra bài toán này có duy nhất nghiệm. Nghĩa là, bài toán cân bằng sản xuất có duy nhất điểm cân bằng Nash. $\square$

Mệnh đề 3.4 *Cho $h_i(\cdot)$ $(i = 1, \ldots, n)$ là các hàm lõm và hàm giá của mỗi công ty là affin. Khi đó bài toán tìm điểm cân bằng Cournot - Nash có dạng bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c.*

Chứng minh

Giả sử hàm giá của mỗi công ty có dạng

$$p_i(\sigma) := p_i\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big) = \alpha_i - \beta_i \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad \alpha_i \geq 0, \ \beta_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, n).$$

Ta kí hiệu

$$\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

$$B := \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}, \ \tilde{B} := \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_1 & \cdots & \beta_1 \\ \beta_2 & 0 & \beta_2 & \cdots & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

và

$$h(x) := \sum_{i=1}^{n} h_i(x_i)$$

với h_i $(i = 1, \ldots, n)$ là các hàm lõm. Ta có B ma trận đối xứng xác định dương. Vậy bài toán (EP) có dạng

$$\text{Tìm } x^* \in C : f(x^*, y) := F(x^*)^T (y - x^*) + \varphi(y) - \varphi(x^*) \geq 0, \ \forall y \in C,$$

trong đó

$$F(x) := \tilde{B}x - \alpha, \quad \varphi(x) := x^T Bx + h(x).$$

Do B là ma trận đối xứng xác định dương và h là hàm lõm nên bài toán này là một bất đẳng thức biến phân hỗn hợp $d.c.$ □

Tiểu kết chương 3

Trong chương này, chúng tôi trình bày bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c và mô hình cân bằng Cournot - Nash trong hai trường hợp hàm giá là affin và hàm lõm.

Kết luận

Bài toán tối ưu d.c có nhiều ứng dụng trong thực tiễn và dành được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong thời gian gần đây. Luận văn này trình bày một phương pháp giải địa phương để giải quyết bài toán này. Những nội dung chính của luận văn bao gồm:

• Định nghĩa và một số tính chất cơ bản của hàm d.c

• Nêu bài toán đối ngẫu, từ đó trình bày phương pháp địa phương giải và hiệu chỉnh bài toán d.c

• Trình bày phương pháp tìm điểm dừng cho bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp d.c và áp dụng vào mô hình cân bằng Counot - Nash.

Với những ứng dụng quan trọng trong thực tế, đối tượng nghiên cứu của đề tài và các vấn đề liên quan hiện đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm, đi sâu nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thị Bạch Kim (2008), *Giáo trình các phương pháp tối ưu, lý thuyết và thuật toán*, Nhà xuất bản Bách Khoa - Hà Nội.

[2] PGS. TS Đỗ Văn Lưu - PGS. TS Phan Huy Khải (2000), *Giải tích lồi*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - Hà Nội.

[3] Lê Dũng Mưu (1998), *Nhập môn các phương pháp tối ưu,* Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.

[4] Le Dung Muu, V.H. Nguyen, N.V. Quy), *On Nash Cournot Oligopolistic market equilibrium models with concave cost functions*. Y. Global Optimization.

[5] Le Dung Muu and Tran Dinh Quoc (2009), *One step from DC optimization to DC mixed variational inequalities*. Optimization 59 (2010) 63 - 76.

[6] Pham Dinh Tao and Le Thi Hoai An, *Convex analysis approach to d.c. programming theory, algorithms and applications*. ACTA Mathematica Vietnamica 22 (1997) 289 - 355.

[7] Hoàng Tụy (2003), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Pres.