

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

Phạm Đức Thoan

VỀ QUAN HỆ SỐ KHUYẾT VÀ SỰ PHỤ THUỘC
THUỘC ĐẠI SỐ CỦA ÁNH XẠ PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: HÌNH HỌC VÀ TÔPÔ

Mã: 62.46.10.01

LUẬN ÁN TIẾN SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH ĐỖ ĐỨC THÁI

Hà Nội, 01-2011

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan những kết quả được trình bày trong luận án là mới. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Lời cảm ơn

Luận án được hoàn thành dưới sự quan tâm và hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Đỗ Đức Thái. Nhân dịp này, tôi xin được gửi tới Thầy lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất. Tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến GS.TSKH Hà Huy Khoái, PGS.TSKH Trần Văn Tấn và TS Sĩ Đức Quang, những người đã bỏ công sức đọc bản thảo và cho tôi nhiều ý kiến chỉnh sửa quý báu để tôi có thể hoàn thành tốt hơn bản luận án này.

Tôi xin được bày tỏ lòng cảm ơn đến Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Phòng Sau đại học và Ban Giám hiệu của Trường ĐHSP Hà Nội đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi có thể hoàn thành luận án của mình.

Cuối cùng, tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô trong Khoa Toán-Tin thuộc Trường ĐHSP Hà Nội, Khoa Công nghệ Thông Tin thuộc Trường ĐH Xây Dựng, Trường THPT Hải Hậu A, các thành viên của Seminar Hình học phức thuộc Khoa Toán - Tin Trường ĐHSP Hà Nội, cùng các bạn đồng nghiệp về sự động viên khích lệ cũng như những trao đổi hữu ích trong suốt quá trình học tập và công tác.

Nghiên cứu sinh: Phạm Đức Thoan

Mục lục

Danh mục các kí hiệu	5
Mở đầu	7
Chương 1. Về lớp hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại	14
1.1 Định nghĩa và ký hiệu	15
1.2 Một số kết quả ban đầu	17
1.3 Về lớp hàm có tổng số khuyết cực đại	27
Chương 2. Ánh xạ phân hình có tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động	34
2.1 Một số khái niệm cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna .	35
2.2 Các kết quả ban đầu	39
2.3 Ánh xạ phân hình với tổng số khuyết cực đại	46
Chương 3. Sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình và ứng dụng	52
3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ	56
3.2 Sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình	59
3.3 Định lý duy nhất với bội bị chặn đối với ánh xạ phân hình	71
Kết luận và kiến nghị	75

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án	77
Tài liệu tham khảo	78

Danh mục các kí hiệu

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$: không gian xạ ảnh phức n -chiều.
- $B_m(r)$: hình cầu mở bán kính r trong $\mathbb{C}^m$.
- $S_m(r)$: mặt cầu bán kính r trong $\mathbb{C}^m$.
- $d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = \frac{i}{4\pi}(\partial - \bar{\partial})$: các toán tử vi phân.
- $\omega_m(z) = dd^c \log \|z\|^2$, $\sigma_m(z) = d^c \log \|z\|^2 \wedge \omega_m^{m-1}(z)$ và $\nu_m(z) = dd^c \|z\|^2$: các dạng vi phân.
- $\mathcal{M}_m$: trường các hàm phân hình trên $\mathbb{C}^m$.
- $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^q) \subset \mathcal{M}_n$: trường con nhỏ nhất chứa $\mathbb{C}$ và tất cả các $\frac{a_{jk}}{a_{jl}}$ với $a_{jl} \neq 0$.
- $O(1)$: hàm bị chặn đối với r .
- $O(r)$: vô cùng lớn cùng bậc với r khi $r \rightarrow +\infty$.
- $o(r)$: vô cùng bé bậc cao hơn r khi $r \rightarrow +\infty$.
- $\log^+ r = \max\{\log r, 0\}$.
- $T_f(r)$: hàm đặc trưng của ánh xạ $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
- $\mu_{f_1 \wedge f_2 \cdots \wedge f_k}$: divisor không điểm của ánh xạ $f_1 \wedge f_2 \cdots \wedge f_k$.
- $N(r, D)$: hàm đếm của divisor D .
- $n_f(r, a)$, $N_f(r, a)$: hàm đếm của divisor f^*a với $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ và $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

- $m_f(r, a)$: hàm xấp xỉ của hàm $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ứng với $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
- $\delta(a, f), \delta^{[k]}(a, f)$: số khuyết và số khuyết chặn bởi k của f tại a .
- ρ_f, γ_f : bậc và bậc dưới của hàm f .
- $D_f(z) = \sum_{j=1}^m z_j f_{z_j}(z)$: đạo hàm toàn thể của hàm f .
- $m_{f,H}(r), m_{f,a}(r)$: lần lượt là hàm xấp xỉ của f ứng với siêu phẳng H và ứng với ánh xạ phân hình a .
- $W(f)$: Wronski của hàm f .
- $\bigwedge^k \mathbb{C}^m$: tích ngoài bậc k của $\mathbb{C}^m$.
- $"|| P''$: có nghĩa là mệnh đề P đúng với mọi $r \in [0, +\infty)$ nằm ngoài một tập con Borel E của $[0, +\infty)$ thoả mãn $\int_E dr < +\infty$.

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Vào cuối những năm 20 của thế kỷ trước R. Nevanlinna đã xây dựng lý thuyết phân bố giá trị của các hàm phân hình một biến. Trong những thập niên tiếp theo nhiều nhà toán học lớn trên thế giới như H. Cartan, W. Stoll, P. A. Griffiths, L. Carlson, P. Vojta, J. Noguchi... đã quan tâm nghiên cứu và phát triển lý thuyết Nevanlinna cho những lớp đối tượng tổng quát hơn. Cho đến nay, lý thuyết Nevanlinna đã trở thành một trong những lý thuyết quan trọng của toán học với nhiều định lý đẹp đẽ và sâu sắc đã được chứng minh. Kết quả nổi bật nhất của nó là bất đẳng thức về số khuyết và các định lý duy nhất. Bởi sự hấp dẫn mang tính hình học của lý thuyết này, chúng tôi lựa chọn đề tài **"Về quan hệ số khuyết và sự phụ thuộc đại số của ánh xạ phân hình"**. Cụ thể, chúng tôi tập trung nghiên cứu và đã đưa ra được các kết quả về số khuyết cho các hàm phân hình vào $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ và các ánh xạ phân hình vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, đồng thời chúng tôi cũng nghiên cứu sự phụ thuộc đại số và ứng dụng các kết quả này vào việc nghiên cứu vấn đề duy nhất với bội bị chặn đối với các ánh xạ phân hình nhiều biến phức.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

Mục đích của luận án là nghiên cứu ánh xạ phân hình có tổng số khuyết cực đại và sự phụ thuộc đại số của ánh xạ phân hình nhiều biến. Trong luận án, tư tưởng chính là xét xem lớp hàm phân hình khi tổng số khuyết đối với nó là cực đại.

Đối tượng nghiên cứu là các ánh xạ phân hình có tổng số khuyết

cực đại và các ánh xạ phân hình nhiều biến phụ thuộc đại số.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp nghiên cứu và kỹ thuật truyền thống của Giải tích phức nhiều biến, lý thuyết Nevanlinna. Đồng thời, chúng tôi cũng sáng tạo ra những kỹ thuật mới nhằm giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án. Thứ nhất là khi nghiên cứu về tổng số khuyết cực đại của các hàm phân hình, chúng tôi đã nghĩ ra cách "nhiều" chúng bằng những hàm "nhỏ". Thứ hai là khi nghiên cứu về vấn đề duy nhất của các ánh xạ phân hình thì các tác giả thường chứng minh trực tiếp và thông qua định lý cơ bản thứ hai. Ở đây, chúng tôi tiếp cận vấn đề bằng lý thuyết về "sự phụ thuộc đại số" của các ánh xạ phân hình nhiều biến do W. Stoll đề xuất.

4. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Trong số những định lý mà R. Nevanlinna đã chứng minh, định lý về quan hệ số khuyết giữ một vai trò đặc biệt. Cụ thể, định lý được phát biểu như sau:

Định lý A [9] *Nếu f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ thì*

$$\sum_{a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \delta(a, f) \leq 2.$$

Định lý A cũng được chứng minh cho lớp hàm phân hình nhiều biến phức. Chẳng hạn, định lý Cartan-Nochka nói rằng nếu $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\{H_j\}_{j=0}^{q-1}$ là các siêu phẳng ở vị trí N -tổng quát dưới trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thì $\sum_{i=0}^{q-1} \delta^{[n]}(H_i, f) \leq 2N - n + 1$. Có một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Ta có thể nói gì về lớp hàm f mà tổng số khuyết đối với nó là cực đại? Nói cách khác, ta có thể nói gì về dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức số khuyết? Vấn đề trên đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong thời gian vừa qua. Chẳng hạn, năm 2003 N. Toda đã chứng minh định

lý sau:

Định lý B ([21, Theorems 5.1, 6.1] và [24, Theorems 3.1, 4.1]) *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính và $\{H_j\}_{j=1}^q$ là các siêu phẳng ở vị trí N -tổng quát dưới trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ở đó $1 \leq n < N$ và $2N - n + 1 < q \leq +\infty$. Giả sử $\delta(H_j, f) > 0$ ($1 \leq j \leq q$) và $\sum_{j=1}^q \delta^{[n]}(H_j, f) = 2N - n + 1$. Khi đó, một trong hai phát biểu sau đây là đúng:*

- (I) *Có ít nhất $\left\lfloor \frac{2N - n + 1}{n + 1} \right\rfloor + 1$ siêu phẳng H_j trong số q siêu phẳng trên mà tại đó f có giá trị số khuyết bằng 1, tức là $\delta(H_j, f) = 1$,*
- (II) *$\{H_j\}_{j=1}^q$ có phân bố Borel.*

Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, trong hai chương đầu của luận án chúng tôi nghiên cứu về lớp ánh xạ phân hình có tổng số khuyết là cực đại. Cụ thể, trong chương 1 chúng tôi đã chỉ ra một số tính chất liên quan đến những hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại, đồng thời cũng chỉ ra rằng lớp hàm phân hình đó là rất nhỏ. Cụ thể, chúng tôi đã chứng minh 2 định lý sau:

Định lý 1.3.1 *Giả sử $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình với bậc hữu hạn. Với mỗi $n \geq 1$, ta đặt $g_n(z) = f(z^n)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ và $h_n(z) = f^n(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Khi đó, $\lambda := \rho_f \in \mathbb{Z}^+$ và λ bằng bậc dưới của f nếu có một trong hai điều kiện sau:*

- (i) *Tồn tại $n_0 \geq 2$ sao cho $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, g_{n_0}) = 2$.*
- (ii) *Tồn tại một dãy $\{n_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset \mathbb{Z}^+$ sao cho $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, h_{n_i}) = 2$ với mọi $i \geq 1$.*

Định lý 1.3.2 *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình có bậc hữu hạn thỏa mãn*

$$\lambda := \rho_f \notin \mathbb{Z} \quad \text{và} \quad \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) = 2.$$

Ký hiệu $\mathcal{A}$ là tập tất cả các hàm phân hình khác hằng $h : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sao cho $T_h(r) = o(T_f(r))$ và $T_{D_h}(r) = o(T_{D_f}(r))$. Khi đó, với mỗi $h \in \mathcal{A}$, ta có

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f + h) \leq 2 - 2k(\lambda) < 2,$$

ở đó $k(\lambda)$ là một hằng dương chỉ phụ thuộc vào λ .

Chương 2 của luận án đã mở rộng kết quả của N. Toda cho lớp ánh xạ phân hình nhiều biến có tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động. Cụ thể, chúng tôi đã chứng minh định lý sau:

Định lý 2.3.1 *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình khác hằng, $\{a_i : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\}_{i=0}^{q-1}$ là các ánh xạ phân hình nhỏ đối với f ở vị trí N -tổng quát dưới sao cho f là không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_i\}_{i=0}^{q-1})$, ở đó $1 \leq n < N$ và $2N - n + 1 < q < +\infty$. Giả sử f có giá trị số khuyết khác không tại a_i với mỗi $0 \leq i \leq q-1$ và $\sum_{j=0}^{q-1} \delta(a_j, f) = 2N - n + 1$. Khi đó, một trong hai khẳng định sau là đúng:*

- (I) *Có ít nhất $\left\lfloor \frac{2N - n + 1}{n + 1} \right\rfloor + 1$ mục tiêu di động a_j tại đó f có giá trị số khuyết bằng 1, tức là $\delta(a_j, f) = 1$,*
- (II) *n là lẻ và họ $\{a_j\}_{j=0}^{q-1}$ có phân bố Borel.*

Năm 1926 R. Nevanlinna đã chứng minh rằng nếu f và g là hai hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ sao cho tập các nghịch ảnh $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(a_i)$ tại 5 điểm phân biệt $a_1, \dots, a_5$ thì f và g trùng nhau.

Trong khung cảnh của việc xem xét định lý 5 điểm của R. Nevanlinna đối với hàm phân hình nhiều biến phức vào không gian xạ ảnh phức, năm 1975 H. Fujimoto đã chứng minh được định lý quan trọng sau đây:

Định lý C [6] *Giả sử H_i ($1 \leq i \leq 3N + 2$) là $3N + 2$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, f và g là hai ánh xạ phân hình khác hằng từ $\mathbb{C}^n$ vào $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ sao cho $f(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i, g(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i$ đồng thời $v_{(f, H_i)} = v_{(g, H_i)}$ với $1 \leq i \leq 3N + 2$. Khi đó, nếu f hoặc g là không suy biến tuyến tính thì $f \equiv g$.*

Trong những thập niên vừa qua đã có nhiều công trình tiếp tục phát triển kết quả trên của H. Fujimoto và đã hình thành nên một hướng nghiên cứu trong lý thuyết Nevanlinna đó là nghiên cứu vấn đề duy nhất (hay còn gọi là các định lý duy nhất). Đặc biệt, các định lý duy nhất đã được nghiên cứu liên tục trong những năm gần đây và đã thu được những kết quả sâu sắc (xem trong [2], [3], [4], [8], [17], [19], [27], [28]). Trong số những phương pháp tiếp cận đến vấn đề duy nhất có một phương pháp do W. Stoll đề xuất, đó là nghiên cứu vấn đề duy nhất thông qua nghiên cứu sự phụ thuộc đại số của họ ánh xạ phân hình. Phát triển những ý tưởng nói trên của W. Stoll, năm 2001 trong [17] M. Ru đã chỉ ra định lý duy nhất cho đường cong chính hình vào không gian xạ ảnh phức với mục tiêu di động. Cụ thể, M. Ru đã chứng minh được định lý sau:

Định lý D [17] *Giả sử f và g là hai hàm phân hình khác hằng. Nếu tồn tại 7 hàm phân hình $a_1, a_2, \dots, a_7$ đôi một phân biệt sao cho $T_{a_j}(r) = o(\max\{T_f(r), T_g(r)\})$ ($0 \leq j \leq 7$) và $f(z) = a_j(z) \Leftrightarrow g(z) = a_j(z)$ thì $f \equiv g$.*

Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, trong chương III của luận án chúng tôi đã chỉ ra một số định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình nhiều biến vào không gian xạ ảnh phức thông qua nghiên cứu sự phụ thuộc đại số của họ ánh xạ này. Những kết quả mà chúng tôi đạt được là những mở rộng đáng kể cho các định lý của M. Ru trong [17]. Cụ thể, chúng tôi đã chứng minh được các định lý về sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình sau:

Định lý 3.2.4 Giả sử $f_1, \dots, f_k : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các ánh xạ phân hình khác hằng, $g_i : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($0 \leq i \leq q-1$) là các mục tiêu di động ở vị trí tổng quát thỏa mãn $T_{g_i}(r) = o(\max_{1 \leq j \leq k} T_{f_j}(r))$ ($0 \leq i \leq q-1$) và $(f_i, g_j) \not\equiv 0$ ($1 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq q-1$). Gọi κ là số nguyên dương hoặc $\kappa = +\infty$ và $\bar{\kappa} = \min\{\kappa, n\}$. Giả thiết rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

- (i) $\min\{\kappa, v_{(f_1, g_j)}\} = \dots = \min\{\kappa, v_{(f_k, g_j)}\}$ với $0 \leq j \leq q-1$,
- (ii) $\dim\{z | (f_1, g_i)(z) = (f_1, g_j)(z) = 0\} \leq n-2$ với $0 \leq i < j \leq q-1$,
- (iii) tồn tại số nguyên l ($2 \leq l \leq k$) sao cho với mỗi dãy tăng $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$ thì $f_{j_1}(z) \wedge \dots \wedge f_{j_l}(z) = 0$ với mỗi điểm $z \in \cup_{i=0}^{q-1} (f_1, g_i)^{-1}\{0\}$.

Khi đó,

- (i) Nếu $q > \frac{n(2n+1)k - (\bar{\kappa}-1)(k-1)}{k-l+1}$ thì $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$, tức là $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \equiv 0$ trên $\mathbb{C}^m$.
- (ii) Nếu $f_i, 1 \leq i \leq k$ là không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{g_j\}_{j=0}^{q-1})$ và $q > \frac{n(n+2)k - (\bar{\kappa}-1)(k-1)}{k-l+1}$ thì $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$.

- (iii) Nếu $f_i, 1 \leq i \leq k$ là không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$ và $g_i, 0 \leq i \leq q-1$ là các ánh xạ hằng, đồng thời

$$(q-n-1)((k-1)(\bar{\kappa}-1) + q(k-l+1)) \leq qnk$$

thì $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$.

Định lý 3.3.1 Giả sử $f_1, f_2 : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các ánh xạ phân hình khác hằng, $g_j : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các mục tiêu di động ở vị trí tổng quát và $T_{g_j}(r) = o(\max_{1 \leq i \leq 2} \{T_{f_i}(r)\})$ ($1 \leq j \leq q$), đồng thời $(f_i, g_j) \not\equiv 0$ ($1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq q$). Gọi κ là số nguyên dương hoặc $\kappa = +\infty$ và $\bar{\kappa} = \min\{\kappa, n\}$. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:

- (i) $\min\{\kappa, v_{(f_1, g_j)}(z)\} = \min\{\kappa, v_{(f_2, g_j)}(z)\}$ với mọi $z \in \mathbb{C}^m, 1 \leq j \leq q$,

(ii) $\dim\{(f_1, g_i)^{-1}\{0\} \cap (f_1, g_j)^{-1}(z)\} \leq n-2$ với mọi $1 \leq i < j \leq q$,

(iii) $f_1(z) = f_2(z)$ với mọi $z \in \cup_{j=1}^q (f_1, g_j)^{-1}\{0\}$.

Khi đó, nếu $q > 2n(2n+1) - 2(\overline{\alpha} - 1)$ thì $f_1 \equiv f_2$.

5. Cấu trúc luận án

Bố cục của luận án ngoài phần mở đầu và kết luận bao gồm ba chương.

Chương I: "**Về lớp hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại**".

Chương II: "**Ánh xạ phân hình có tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động**".

Chương III: "**Sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình và ứng dụng**".

Chương 1

Về lớp hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại

Trong chương này, chúng tôi đã chỉ ra một số tính chất liên quan đến những hàm phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ có tổng số khuyết cực đại và chỉ ra rằng lớp các hàm phân hình với tổng số khuyết cực đại là rất "mỏng" theo nghĩa nếu "nhiều" các hàm phân hình với tổng số khuyết cực đại bởi các hàm phân hình "nhỏ" thì chúng không còn là các hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại nữa. Chương này được viết dựa trên bài báo [4].

Định lý Nevanlinna cổ điển về quan hệ số khuyết đã chỉ ra rằng: Nếu $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng thì $\sum_{a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \delta(a, f) \leq 2$. Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Có thể nói gì về lớp các hàm phân hình f có $\sum_{a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \delta(a, f) = 2$?

Vấn đề trên đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học như N. Toda [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], J. Lu và Y. Yasheng [11]...

Như đã trình bày trong phần Mở đầu, mục đích của chương này là tiếp tục nghiên cứu vấn đề trên cho hàm phân hình với mục tiêu cố định. Cụ thể, chúng tôi sẽ chỉ ra một số tính chất liên quan đến những hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại. Sau đó chỉ ra rằng lớp các hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại là rất "mỏng" theo nghĩa nếu "nhiều" chúng bởi các hàm phân hình "nhỏ" thì chúng không còn

là các hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại nữa. Hơn nữa, ta có thể đo được độ lệch của tổng số khuyết trước và sau khi nhiễu bằng một hằng số cụ thể. Trước hết, ta nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ bản đối với các hàm phân hình trong lý thuyết Nevanlinna.

1.1 Định nghĩa và ký hiệu

Giả sử F là hàm chỉnh hình không đồng nhất bằng không trên miền Ω trong $\mathbb{C}^m$. Với mỗi bộ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ các số nguyên không âm, ta đặt $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ và $\mathcal{D}^\alpha F = \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial^{\alpha_1} z_1 \dots \partial^{\alpha_m} z_m}$. Xét ánh xạ $v_F : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ cho bởi

$$v_F(z) := \max \{n : \mathcal{D}^\alpha F(z) = 0 \text{ với mọi } \alpha \in \mathbb{Z}_+^m \text{ thoả mãn } |\alpha| < n\}.$$

Định nghĩa 1.1.1.

Một *divisor* trên miền Ω trong $\mathbb{C}^m$ là một ánh xạ $v : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ thoả mãn: với mỗi $a \in \Omega$, tồn tại các hàm chỉnh hình F và G trên một lân cận mở liên thông $U \subset \Omega$ của a sao cho $v(z) = v_F(z) - v_G(z)$ với mọi $z \in U$ nằm ngoài một tập con giải tích có chiều $\leq m - 2$. Hai divisor được coi là đồng nhất nếu chúng trùng nhau trên một tập giải tích có chiều nhỏ hơn hoặc bằng $m - 2$. Với mỗi divisor v trên Ω , ta đặt $|v| := \overline{\{z : v(z) \neq 0\}}$. Khi đó, $|v|$ là một tập con giải tích chiều thuần tuý $(m - 1)$ của Ω hoặc là tập rỗng.

Xét hàm phân hình không đồng nhất bằng không φ trên miền Ω trong $\mathbb{C}^m$. Với mỗi $a \in \Omega$, ta chọn các hàm chỉnh hình F và G trên một lân cận mở liên thông $U \subset \Omega$ của a sao cho $\varphi = \frac{F}{G}$ trên U và $\dim(F^{-1}(0) \cap G^{-1}(0)) \leq n - 2$. Các divisor $v_\varphi, v_\varphi^{+\infty}$ được xác định bởi $v_\varphi(z) := v_F(z), v_\varphi^{+\infty}(z) := v_G(z)$ với mọi $z \in U$. Dễ thấy các định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn F và G . Do vậy, ta xác định được các divisor trên toàn bộ Ω .

Bây giờ, ta xét hàm phân hình $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Với mỗi $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mà $f^{-1}(a) \neq \mathbb{C}^m$, ta ký hiệu:

- v_f^a là divisor của hàm $f - a$ nếu $a \in \mathbb{C}$ và của hàm $\frac{1}{f}$ nếu $a = \infty$,
- $|v_f^a| = \overline{\{z : v_f^a(z) \neq 0\}}$,
- $v_f^a(r) = \overline{B}_m(r) \cap |v_f^a|$.

Khi đó, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.1.2.

Các hàm sau đây được gọi là *hàm đếm* của f ứng với giá trị a :

$$n_f(r, a) = r^{2-2m} \int_{v_f^a(r)} \nu_m^{m-1}(z), \quad N_f(r, a) = \int_1^r \frac{n_f(t, a)}{t} dt.$$

Hàm xấp xỉ của hàm f ứng với giá trị a được định nghĩa bởi:

$$m_f(r, a) = \begin{cases} \int_{S_m(r)} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a|} \sigma_m(z), & a \neq \infty \\ \int_{S_m(r)} \log^+ |f(z)| \sigma_m(z), & a = \infty. \end{cases}$$

Hàm đặc trưng của f được định nghĩa bởi:

$$T_f(r) = m_f(r, \infty) + N_f(r, \infty).$$

Định lí cơ bản thứ nhất cho hàm phân hình của Nevanlinna (xem trong [9]) khẳng định rằng: Nếu f là hàm phân hình khác hằng thì với mọi $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ta có

$$T_f(r) = m_f(r, a) + N_f(r, a) + O(1).$$

Định nghĩa 1.1.3.

Cho $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng. Với mỗi $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ta gọi đại lượng

$$\delta(a, f) = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_f(r, a)}{T_f(r)} = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(r, a)}{T_f(r)}$$

là số khuyết của f tại a . Rõ ràng $0 \leq \delta(a, f) \leq 1$.

Bây giờ, ta định nghĩa bậc, bậc dưới và đạo hàm của hàm phân hình.

Định nghĩa 1.1.4.

Cho $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng. Ta gọi đại lượng

$$\rho_f = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r}$$

là bậc của f và đại lượng

$$\gamma_f = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r}$$

là bậc dưới của f .

Với mỗi $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, ta ký hiệu

$$D_f(z) = \sum_{j=1}^m z_j f_{z_j}(z),$$

ở đó f_{z_j} là đạo hàm riêng của hàm f theo biến z_j .

1.2 Một số kết quả ban đầu

Trước hết, ta có Định lý Nevanlinna cổ điển về quan hệ số khuyết trong lý thuyết phân bố giá trị:

Định lý 1.2.1 (xem trong [9]). *Nếu $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng thì $\sum_{a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \delta(a, f) \leq 2$.*

Bổ đề 1.2.2. ([32, Bổ đề 6]) *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng. Khi đó, với mỗi $1 \leq j \leq m$, ta có*

$$m_{\frac{f_{z_j}}{f}}(r, \infty) = \int_{S_m(r)} \log^+ \left| \frac{f_{z_j}}{f}(z) \right| \sigma_m(z) = O(\log(rT_f(r)))$$

với mọi $r > 1$ ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn. Hơn nữa, nếu $\rho_f < +\infty$ thì $m_{\frac{fz_j}{f}} = O(\log r)$.

Bổ đề 1.2.3. Giả sử $f, g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là hai hàm phân hình khác hằng có bậc hữu hạn. Giả thiết rằng $\rho_f = \lambda, \rho_g = \lambda'$ và $\lambda > \lambda'$. Khi đó, ta có hai khẳng định sau:

$$(i) \quad \rho_{f+g} = \lambda.$$

$$(ii) \quad \rho_{f \cdot g} = \lambda.$$

Chứng minh. (i) Ta cố định $\epsilon > 0$. Do $\rho_f = \lambda$ nên theo định nghĩa bậc của f , ta có $\frac{\log T_f(r)}{\log r} < \lambda + \epsilon$ với r đủ lớn. Điều này tương đương với $\log T_f(r) < (\lambda + \epsilon)\log r$ với r đủ lớn. Vì vậy, $T_f(r) < r^{\lambda+\epsilon}$ với r đủ lớn. Tương tự, ta có $T_g(r) < r^{\lambda'+\epsilon}$ với r đủ lớn. Điều đó suy ra

$$T_{f+g}(r) \leq T_f(r) + T_g(r) + O(1) < r^{\lambda+\epsilon} + r^{\lambda'+\epsilon} + O(1).$$

Ta suy ra $\frac{\log T_{f+g}(r)}{\log r} < \lambda + 2\epsilon$ với r đủ lớn. Do đó, $\rho_{f+g} \leq \lambda + 2\epsilon$ với mỗi $\epsilon > 0$, nghĩa là

$$\rho_{f+g} \leq \lambda. \quad (1.1)$$

Lấy $0 < \epsilon < \frac{1}{2}(\lambda - \lambda')$. Do $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r} = \lambda$ nên tồn tại một dãy $\{r_n\}$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log T_f(r_n)}{\log r_n} = \lambda.$$

Điều này suy ra rằng, tồn tại n_o sao cho $\frac{\log T_f(r_n)}{\log r_n} > \lambda - \epsilon, \forall n > n_o$ và do vậy,

$$T_f(r_n) > r_n^{\lambda-\epsilon}, \forall n > n_o.$$

Mặt khác, ta có

$$T_f(r) - T_g(r) + O(1) < T_{f+g}(r).$$

Vì thế $T_f(r_n) - T_g(r_n) < T_{f+g}(r) + O(1)$, nghĩa là $r_n^{\lambda-\varepsilon} - r_n^{\lambda'+\varepsilon} < T_{f+g}(r) + O(1)$. Từ đó suy ra

$$\frac{\log T_{f+g}(r_n)}{\log r_n} \geq \lambda - \varepsilon, \quad \forall n > n_o.$$

Lúc này, ta được

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log T_{f+g}(r_n)}{\log r_n} \geq \lambda - \varepsilon.$$

Do vậy, $\rho_{f+g} \geq \lambda - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, nghĩa là

$$\rho_{f+g} \geq \lambda. \quad (1.2)$$

Kết hợp (1.1) và (1.2), ta được khẳng định thứ nhất.

(ii) Bằng lập luận tương tự, ta cũng có $\rho_{f.g} = \lambda$. Vì vậy, Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 1.2.4. *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng có bậc hữu hạn. Thế thì $T_{D_f}(r) \leq 2T_f(r) + O(\log(rT_f(r)))$ và do đó $\rho_{D_f} \leq \rho_f$.*

Chứng minh. +) Ta sẽ chỉ ra rằng

$$m_{D_f}(r, \infty) \leq m_f(r, \infty) + O(\log(rT_f(r))). \quad (1.3)$$

Thật vậy, theo tính chất của $\log^+$, ta có

$$\log^+ |D_f| = \log^+ \left| \frac{Df}{f} \right| \cdot |f| \leq \log^+ \left| \frac{Df}{f} \right| + \log^+ |f|.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được:

$$m_{D_f}(r, \infty) \leq m_{\frac{Df}{f}}(r, \infty) + m_f(r, \infty).$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{Df}{f} = \frac{\sum_{j=1}^m z_j f_{z_j}}{f} = \sum_{j=1}^m z_j \cdot \frac{f_{z_j}}{f}.$$

Do đó, theo Bổ đề 1.2.2, ta có

$$\begin{aligned} m_{\frac{D_f}{f}}(r, \infty) &\leq \sum_{j=1}^m \left(m_{z_j}(r, \infty) + m_{\frac{fz_j}{f}}(r, \infty) \right) + O(1) \\ &\leq O(\log(rT_f(r))). \end{aligned}$$

Vậy, ta có (1.3).

+) Ta cũng sẽ chỉ ra rằng

$$N_{D_f}(r, \infty) \leq 2N_f(r, \infty). \quad (1.4)$$

Thật vậy, do $f = \frac{g}{h}$ với g và h là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung trên $\mathbb{C}^m$ nên $D_f = \frac{hD_g - gD_h}{h^2}$. Điều này suy ra

$$N_{D_f}(r, \infty) \leq N_{h^2}(r, 0) = 2N_h(r, 0) \leq 2N_f(r, \infty).$$

Từ (1.3) và (1.4), ta có

$$\begin{aligned} T_{D_f}(r) &= m_{D_f}(r, \infty) + N_{D_f}(r, \infty) \\ &\leq m_f(r, \infty) + 2N_f(r, \infty) + O(\log(rT_f(r))) \\ &\leq 2T_f(r) + O(\log(rT_f(r))). \end{aligned}$$

Lấy log hai vế và sử dụng bất đẳng thức

$$\log \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \log a_i + \log n \text{ với } a_i > 1 (i = 1, 2, \dots, n),$$

ta được

$$\begin{aligned} \log T_{D_f}(r) &\leq \log(2T_f(r)) + \log(O(\log(rT_f(r)))) + \log 2 \\ &\leq \log T_f(r) + \log(O(\log(rT_f(r)))) + 2\log 2. \end{aligned}$$

Vì f có bậc hữu hạn nên ta suy ra được

$$\begin{aligned} \rho_{D_f} &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_{D_f}(r)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_f(r)}{\log r} \\ &\quad + \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log(O(\log(rT_f(r))))}{\log r} + \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{2\log 2}{\log r} = \rho_f. \end{aligned}$$

Vì vậy, Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 1.2.5. Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng có bậc hữu hạn. Ta đặt $g = f^n$, ở đó $n \in \mathbb{Z}^+$ và $h = f + a$ với $a \in \mathbb{C}$. Thế thì $\rho_g = \rho_f$, $\rho_h = \rho_f$ và $\rho_{\frac{1}{f}} = \rho_f$.

Chứng minh. Theo định nghĩa hàm đếm, ta dễ dàng thấy rằng

$$N_g(r, \infty) = N_{f^n}(r, \infty) = n \cdot N_f(r, \infty).$$

Theo định nghĩa hàm xấp xỉ, ta có

$$\begin{aligned} m_g(r, \infty) &= \int_{S_m(r)} \log^+ |f^n(z)| \sigma_m(z) \\ &= n \cdot \int_{S_m(r)} \log^+ |f(z)| \sigma_m(z) = n \cdot m_f(r, \infty). \end{aligned}$$

Do đó, $T_g(r) = N_g(r, \infty) + m_g(r, \infty) = n \cdot T_f(r)$. Suy ra

$$\rho_g = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_g(r)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log n T_f(r)}{\log r} = \rho_f.$$

Theo định nghĩa hàm xấp xỉ, ta có

$$m_{\frac{1}{f}}(r, 0) = \int_{S_m(r)} \log^+ |f(z)| \sigma_m(z) = m_f(r, \infty).$$

Mặt khác $N_{\frac{1}{f}}(r, 0) = N_f(r, \infty)$ nên theo định lý cơ bản thứ nhất, ta có

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{f}}(r) &= m_{\frac{1}{f}}(r, 0) + N_{\frac{1}{f}}(r, 0) + O(1) \\ &= m_f(r, \infty) + N_f(r, \infty) + O(1) = T_f(r) + O(1). \end{aligned}$$

Vậy,

$$\rho_{\frac{1}{f}} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_{\frac{1}{f}}(r)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T_f(r) + O(1)}{\log r} = \rho_f.$$

Lập luận tương tự, ta có $\rho_h = \rho_f$. Vì vậy, Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 1.2.6. Các ánh xạ sau đây không làm thay đổi tổng số khuyết:

$$\alpha : f \mapsto \frac{1}{f} \quad \text{và} \quad \beta_a : f \mapsto f + a, \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

Chứng minh. Với mỗi $z \in \overline{\mathbb{C}}$, ta dễ dàng thấy $N_f(r, z) = N_{\frac{1}{f}}(r, \frac{1}{z})$, ở đây ta coi $\frac{1}{z}$ là ∞ nếu $z = 0$ và là 0 nếu $z = \infty$. Mặt khác, do

$$T_f(r) = T_{\frac{1}{f}}(r) + O(1)$$

nên

$$\delta(z, f) = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(r, z)}{T_f(r)} = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{\frac{1}{f}}(r, \frac{1}{z})}{T_{\frac{1}{f}}(r) + O(1)} = \delta(\frac{1}{z}, \frac{1}{f}).$$

Vậy,

$$\sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(z, f) = \sum_{z \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(\frac{1}{z}, \frac{1}{f}).$$

Do đó, tổng số khuyết là không đổi qua phép nghịch đảo. Lập luận tương tự, ta cũng có tổng số khuyết là không đổi qua phép tịnh tiến. $\square$

Bổ đề 1.2.7. Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng có bậc hữu hạn. Khi đó, một trong các khẳng định sau đây là đúng:

$$(i) \quad \rho_{D_f} = \rho_f.$$

$$(ii) \quad \rho_{D_{\frac{1}{f}}} = \rho_{\frac{1}{f}}.$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.2.4, ta có $\rho_{D_f} \leq \rho_f$. Ta có hai trường hợp: Nếu $\rho_{D_f} = \rho_f$ thì khẳng định được chứng minh, tức ta có (i).

Nếu $\rho_{D_f} < \rho_f$ thì ta đặt $f_1 = \frac{1}{f}$. Khi đó, $D_{f_1} = \frac{-D_f}{f^2}$. Mặt khác, theo Bổ đề 1.2.5, ta có $\rho_{f^2} = \rho_f$. Do đó, $\rho_{\frac{1}{f^2}} = \rho_{f^2} = \rho_f$. Do $\rho_{-D_f} = \rho_{D_f} < \rho_f = \rho_{f^2}$ nên theo Bổ đề 1.2.3, ta có

$$\rho_{\frac{-D_f}{f^2}} = \rho_{-D_f \cdot \frac{1}{f^2}} = \rho_{f^2} = \rho_f = \rho_{\frac{1}{f}}.$$

Vậy, $\rho_{D_{f_1}} = \rho_{f_1}$, tức ta có (ii). Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 1.2.8 (xem trong [9]). *Giả sử $a_1, \dots, a_q$ là q điểm phân biệt trong $\mathbb{C}$. Định nghĩa*

$$F(z) = \sum_{j=1}^q \frac{1}{z - a_j} \quad \text{và} \quad \delta = \frac{1}{3} \min_{j < k} |a_j - a_k|.$$

Khi đó,

$$\log^+ |F(z)| \geq \sum_{j=1}^q \log^+ \frac{1}{|z - a_j|} - q \log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 3.$$

Bổ đề 1.2.9 (xem trong [11]). *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng và $a_1, \dots, a_q$ là q điểm phân biệt trong $\mathbb{C}$. Khi đó,*

$$\sum_{j=1}^q m_f(r, a_j) \leq m_{D_f}(r, 0).$$

Bổ đề 1.2.10. *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng sao cho $\delta(\infty, f) = 0$. Khi đó, ta có*

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) = \sum_{a \in \mathbb{C}} \delta(a, f) \leq 2\delta(0, D_f).$$

Chứng minh. Lấy q điểm phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_q \in \mathbb{C}$. Theo Bổ đề 1.2.9, ta có

$$\sum_{j=1}^q m_f(r, a_j) \leq m_{D_f}(r, 0).$$

Theo Bổ đề 1.2.4, ta có $T_{D_f}(r) \leq 2T_f(r) + O(\log(rT_f(r)))$. Điều này suy ra

$$\sum_{j=1}^q \frac{m_f(r, a_j)}{T_f(r) + O(\log(rT_f(r)))} \leq 2 \frac{m_{D_f}(r, 0)}{T_{D_f}(r)}.$$

Do đó, chuyển qua giới hạn, ta được

$$\sum_{j=1}^q \delta(a_j, f) \leq 2\delta(0, D_f).$$

Vì số các điểm mà tại đó f có số khuyết khác không là không quá đếm được nên $\sum_{a \in \mathbb{C}} \delta(a_j, f) \leq 2\delta(0, D_f)$. Vì thế, theo giả thiết $\delta(\infty, f) = 0$ cho nên, ta có

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a_j, f) \leq 2\delta(0, D_f).$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bằng lập luận tương tự như trong Bổ đề 1.2.3, ta có bổ đề sau đây:

Bổ đề 1.2.11. *Giả sử $f, g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là hai hàm phân hình khác hằng có bậc hữu hạn thỏa mãn $\rho_f = \lambda$ và $T_g(r) = o(T_f(r))$. Khi đó, ta có*

$$(i) \quad \rho_{f+g} = \lambda.$$

$$(ii) \quad \rho_{f.g} = \lambda.$$

Bổ đề 1.2.12. *Giả sử $f, h : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là hai hàm phân hình khác hằng thỏa mãn $\delta(\infty, f) = 0$ và $T_h(r) = o(T_f(r))$. Đặt $g = f + h$. Thế thì $\delta(\infty, g) = 0$.*

Chứng minh. Do $\log^+ |g| = \log^+ |f + h| \leq \log^+ |f| + \log^+ |h| + \log 2$ nên

$$\begin{aligned} m_g(r, \infty) &= \int_{S_m(r)} \log^+ |g(z)| \sigma_m(z) \\ &\leq \int_{S_m(r)} \log^+ |f(z)| \sigma_m(z) + \int_{S_m(r)} \log^+ |h(z)| \sigma_m(z) \\ &\quad + \int_{S_m(r)} \log 2 \sigma_m(z) = m_f(r, \infty) + m_h(r, \infty) + \log 2. \end{aligned}$$

Theo định lý cơ bản thứ nhất và theo giả thiết $T_h(r) = o(T_f(r))$, ta có

$$m_g(r, \infty) = m_f(r, \infty) + o(T_f(r)).$$

Bởi vậy,

$$T_g(r) = T_f(r) + o(T_f(r)).$$

Do đó

$$\begin{aligned}\delta(\infty, g) &= \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_g(r, \infty)}{T_g(r)} = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_f(r, \infty) + o(T_f(r))}{T_f(r) + o(T_f(r))} \\ &= \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_f(r, \infty)}{T_f(r)} = \delta(\infty, f) = 0.\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề sau đây của J. Noguchi đóng vai trò rất quan trọng trong kết quả tiếp theo:

Bổ đề 1.2.13 (xem trong [14]). *Giả sử $g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng sao cho $\rho_g = \lambda < +\infty$. Khi đó,*

(i) *Với mỗi $a_1, a_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ta có*

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_g(r, a_1) + N_g(r, a_2)}{T_g(r)} \geq k(\lambda),$$

ở đó $k(\lambda) = \frac{2\Gamma^4(3/4)|\sin\lambda\pi|}{\pi^2\lambda + \Gamma^4(3/4)|\sin\lambda\pi|}$ với hàm Gamma cho bởi $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

(ii) *Nếu có $a_1, a_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sao cho $\delta(a_1, g) = \delta(a_2, g) = 1$ thì $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ và λ bằng bậc dưới của g .*

Bổ đề 1.2.14. *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng. Ta đặt $g = f^n$, ở đó $n \in \mathbb{Z}^+$. Khi đó, $T_{D_g}(r) \leq \frac{n+1}{n}T_g(r) + O(\log(rT_f(r)))$.*

Chứng minh. Bằng lập luận như trong Bổ đề 1.2.4, ta có

$$m_{D_g}(r, \infty) \leq m_g(r, \infty) + O(\log(rT_g(r))).$$

Ta chỉ ra rằng

$$N_{D_g}(r, \infty) \leq \frac{n+1}{n}N_g(r, \infty).$$

Thật vậy, giả sử rằng $f = \frac{f_0}{f_1}$ với f_0, f_1 là các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}^m$ không có không điểm chung. Thế thì

$$g = \frac{f_0^n}{f_1^n} \text{ và } D_g = n \cdot \frac{f_0^{n-1}(f_1 D_{f_0} - f_0 D_{f_1})}{f_1^{n+1}}.$$

Do đó, mỗi một cực điểm của D_g là một không điểm của f_1 và cũng là một cực điểm của g . Điều này suy ra rằng, nếu f_1 có bội không điểm là k thì g có bội cực điểm là nk còn D_g có bội cực điểm $\leq (n+1)k$ do $f_1 D_{f_0} - f_0 D_{f_1}$ có thể có không điểm. Vậy,

$$\frac{\text{bội của cực điểm của } D_g}{\text{bội của cực điểm của } g} \leq \frac{n+1}{n}.$$

Do đó, ta có $N_{D_g}(r, \infty) \leq \frac{n+1}{n} N_g(r, \infty)$. Ta suy ra

$$\begin{aligned} T_{D_g}(r) &= m_{D_g}(r, \infty) + N_{D_g}(r, \infty) \\ &\leq m_g(r, \infty) + O(\log(rT_g(r))) + \frac{n+1}{n} N_g(r, \infty) \\ &\leq \frac{n+1}{n} m_g(r, \infty) + \frac{n+1}{n} N_g(r, \infty) + O(\log(rT_g(r))) \\ &= \frac{n+1}{n} T_g(r) + O(\log(rT_g(r))). \end{aligned}$$

Bỏ đề được chứng minh. □

Bổ đề 1.2.15. *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng có bậc hữu hạn. Thế thì tồn tại một hàm phân hình $f_1 : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ có bậc hữu hạn sao cho*

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f_1) = \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f), \quad \rho_{f_1} = \rho_{D_{f_1}} \text{ và } \delta(\infty, f_1) = 0.$$

Chứng minh. Xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $\delta(\infty, f) = 0$.

Nếu $\rho_f = \rho_{D_f}$ thì chọn f_1 là f . Khẳng định được chứng minh.

Nếu $\rho_f \neq \rho_{D_f}$ thì ta chọn $a \in \mathbb{C}$ sao cho $\delta(a, f) = 0$. Do hầu hết các

điểm trong $\mathbb{C}$ có giá trị số khuyết bằng không nên theo Bổ đề 1.2.5, ta có $\rho_{f-a} = \rho_f$. Mặt khác, do $D_{f-a} = D_f$ nên $\rho_{f-a} \neq \rho_{D(f-a)}$. Theo Bổ đề 1.2.7, ta có

$$\rho_{\frac{1}{f-a}} = \rho_{D\frac{1}{f-a}}.$$

Đặt $f_1 = \frac{1}{f-a}$. Thế thì $\rho_{f_1} = \rho_{D_{f_1}}$ và $\delta(\infty, f_1) = \delta(a, f) = 0$. Vậy, f_1 là hàm thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 2: $\delta(\infty, f) \neq 0$.

Chọn $a \in \mathbb{C}$ sao cho $\delta(a, f) = 0$. Thay thế f bằng $h = \frac{1}{f-a}$, ta có $\delta(\infty, h) = \delta(a, f) = 0$. Theo bổ đề 1.2.6, ta thấy h có tổng số khuyết bằng tổng số khuyết của f . Ta lại áp dụng Trường hợp 1 cho hàm h . Vì vậy, Bổ đề 1.2.15 được chứng minh. $\square$

1.3 Về lớp hàm có tổng số khuyết cực đại

Trước hết, ta chứng minh định lý sau:

Định lý 1.3.1. *Giả sử $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng có bậc hữu hạn. Với mỗi $n \geq 1$, ta đặt $g_n(z) = f(z^n)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ và $h_n(z) = f^n(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Khi đó, $\lambda := \rho_f \in \mathbb{Z}^+$ và λ bằng bậc dưới của f nếu có một trong hai điều kiện sau:*

- (i) *Tồn tại $n_0 \geq 2$ sao cho $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, g_{n_0}) = 2$.*
- (ii) *Tồn tại một dãy $\{n_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset \mathbb{Z}^+$ sao cho $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, h_{n_i}) = 2$ với mọi $i \geq 1$.*

Chứng minh. (i) Chỉ cần chứng minh cho trường hợp $n = 2$. Thật vậy, theo định nghĩa hàm xấp xỉ, với mỗi $a \in \overline{\mathbb{C}}$, ta có

$$m_g(r, a) = \begin{cases} \int_{|z|=r} \log^+ |g(z)| d^c \log |z|^2 & \text{nếu } a = \infty \\ \int_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|g(z)-a|} d^c \log |z|^2 & \text{nếu } a \neq \infty. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} m_g(r, a) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \log^+ |f(z^2)| d^c \log |z^2|^2 & \text{nếu } a = \infty \\ \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z^2) - a|} d^c \log |z^2|^2 & \text{nếu } a \neq \infty \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} m_f(r^2, a). \end{aligned}$$

Mặt khác, do bội không điểm z của hàm $g(z) - a$ bằng hai lần bội không điểm z của hàm $f(z^2) - a$ nên $v_g^a(z) = 2v_f^a(z^2)$ với $a \in \mathbb{C}$. Điều đó cũng đúng khi $a = \infty$. Do đó, $n_g(r, a) = 2n_f(r^2, a)$. Suy ra

$$\begin{aligned} N_g(r, a) &= \int_1^r \frac{n_g(t, a)}{t} dt = \int_1^r \frac{2n_f(t^2, a)}{t} dt = \int_1^r \frac{n_f(t^2, a)}{t^2} dt^2 \\ &= \int_1^{r^2} \frac{n_f(t, a)}{t} dt = N_f(r^2, a). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \delta(a, g) &= \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_g(r, a)}{T_g(r)} = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_g(r, a)}{m_g(r, a) + N_g(r, a) + O(1)} \\ &= \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{N_g(r, a)}{m_g(r, a)}} = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 2 \frac{N_f(r^2, a)}{m_f(r^2, a)}} \\ &= \frac{1}{1 + 2 \left(\frac{1}{\delta(a, f)} - 1 \right)} = \frac{\delta(a, f)}{2 - \delta(a, f)} = \frac{\delta(a, f)}{1 + (1 - \delta(a, f))} \leq \delta(a, f). \end{aligned}$$

Dấu bằng ” = ” xảy ra nếu và chỉ nếu $\delta(a, f) = 0$ hoặc $\delta(a, f) = 1$.

Vậy,

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, g) \leq \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) \leq 2.$$

Theo giả thiết $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, g) = 2$ nên ta có

$$2 = \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, g) = \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) \leq 2.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi tất cả các dấu bằng ở trên xảy ra. Có nghĩa là

$$\begin{cases} \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) = 2 \\ \forall a : \text{thì } \delta(a, f) = 0 \quad \text{hoặc} \quad \delta(a, f) = 1 \end{cases}$$

Do tổng số khuyết bị chặn trên bởi 2 nên tồn tại a_1, a_2 phân biệt sao cho $\delta(a_1, f) = \delta(a_2, f) = 1$. Vậy, theo Bổ đề 1.2.13 khẳng định (i) được chứng minh.

(ii) Theo Bổ đề 1.2.9, với mỗi họ tùy ý $\{a_j\}_{j=1}^q \subset \mathbb{C}$, ta có

$$\sum_{j=1}^q m_{h_n}(r, a_j) \leq m_{D_{h_n}}(r, 0).$$

Từ Bổ đề 1.2.14 ta suy ra $T_{D_{h_n}}(r) \leq \frac{n+1}{n} T_{h_n}(r) + O(\log(rT_f(r)))$. Do đó

$$\sum_{j=1}^q \frac{m_{h_n}(r, a_j)}{T_{h_n}(r)} \leq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{m_{D_{h_n}}(r, 0)}{T_{D_{h_n}}(r)} + \frac{m_{D_{h_n}}(r, 0) \cdot O(\log(rT_f(r)))}{T_{h_n}(r) \cdot T_{D_{h_n}}(r)}.$$

Do giả thiết bậc của f là hữu hạn nên theo Bổ đề 1.2.5 bậc của h_n cũng hữu hạn. Mặt khác, do $T_f(r)$ là hàm tăng đối với biến $\log r$ nên chuyển qua giới hạn bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \delta(a_j, h_n) &\leq \frac{n+1}{n} \cdot \delta(0, D_{h_n}) \leq \frac{n+1}{n} \\ \Rightarrow \sum_{a \in \mathbb{C}} \delta(a, h_n) &\leq \frac{n+1}{n} \\ \Rightarrow \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, h_n) &\leq \frac{n+1}{n} + \delta(\infty, h_n). \end{aligned}$$

Vậy, nếu với mọi n mà $\delta(\infty, h_n) < 1$ thì tồn tại n_0 đủ lớn sao cho

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, h_n) \leq \frac{n+1}{n} + \delta(\infty, h_n) < 2, \quad \forall n \geq n_0.$$

Mâu thuẫn với giả thiết $\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, h_n) = 2$. Do đó, tồn tại n sao cho $\delta(\infty, h_n) = 1$. Theo chứng minh Bổ đề 1.2.5, ta có ngay

$$\delta(\infty, f) = \delta(\infty, h_n) = 1.$$

Bây giờ, ta thay f bằng $\frac{1}{f}$ và h_n bằng $\frac{1}{h_n}$. Rõ ràng các hàm này vẫn thỏa mãn giả thiết của định lý. Lặp lại lập luận trên, ta có $\delta(\infty, \frac{1}{f}) = 1$, nghĩa là $\delta(0, f) = 1$. Do đó,

$$\delta(\infty, f) = \delta(0, f) = 1.$$

Vậy, theo Bổ đề 1.2.13 khẳng định (ii) của định lý được chứng minh. $\square$

Định lý 1.3.2. *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ là một hàm phân hình khác hằng có bậc hữu hạn thỏa mãn*

$$\lambda := \rho_f \notin \mathbb{Z} \quad \text{và} \quad \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) = 2.$$

Ký hiệu $\mathcal{A}$ là tập tất cả các hàm phân hình khác hằng $h : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sao cho $T_h(r) = o(T_f(r))$ và $T_{D_h}(r) = o(T_{D_f}(r))$. Khi đó, với mỗi $h \in \mathcal{A}$, ta có

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f + h) \leq 2 - 2k(\lambda) < 2,$$

ở đó $k(\lambda)$ là một hằng dương chỉ phụ thuộc vào λ .

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.2.15 và Bổ đề 1.2.5, ta chỉ cần xét hàm phân hình $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^1$ thỏa mãn

$$\delta(\infty, f) = 0 \quad \text{và} \quad \rho_f = \rho_{D_f}.$$

Do $\delta(\infty, f) = 0$ và theo Bổ đề 1.2.10 nên ta có

$$2 = \sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, f) \leq 2\delta(0, D_f) = 2 - 2 \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_f}(r, 0)}{T_{D_f}(r)}.$$

Do đó,

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_f}(r, 0)}{T_{D_f}(r)} = 0. \quad (1.5)$$

Giả sử rằng $h \in \mathcal{A}$. Đặt $g = f + h$. Thế thì $D_g = D_f + D_h$. Theo Bổ đề 1.2.11 và Bổ đề 1.2.12, ta có

$$\rho_g = \rho_f = \rho_{D_f} = \rho_{D_g} = \lambda \text{ và } \delta(\infty, g) = 0.$$

Một lần nữa theo Bổ đề 1.2.10, ta suy ra rằng

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, g) \leq 2\delta(0, D_g) = 2 - 2 \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_g}(r, 0)}{T_{D_g}(r)}. \quad (1.6)$$

Bây giờ, ta đi đánh giá đại lượng

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_g}(r, 0)}{T_{D_g}(r)}.$$

Do mỗi cực điểm của D_h là một không điểm của $\frac{1}{D_h}$ và do giả thiết $T_{D_h}(r) = o(T_{D_f}(r))$ nên theo tính chất của hàm đếm, ta có

$$\begin{aligned} N_{D_g}(r, 0) &= N_{D_f+D_h}(r, 0) \geq N_{\frac{D_f}{D_h}}(r, -1) - N_{D_h}(r, \infty) \\ &\geq N_{\frac{D_f}{D_h}}(r, -1) - o(T_{D_f}(r)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Mặt khác, do $T_{D_h}(r) = o(T_{D_f}(r))$ nên lập luận như trong Bổ đề 1.2.12, ta có

$$T_{D_g}(r) = T_{D_f}(r) + o(T_{D_f}(r))$$

và

$$T_{\frac{D_f}{D_h}}(r) = T_{D_f}(r) + o(T_{D_f}(r)).$$

Suy ra $T_{D_g}(r) = T_{\frac{D_f}{D_h}}(r) + o(T_{D_f}(r))$. Đặt $f_1 = \frac{D_f}{D_h}$. Kết hợp với (1.7), ta được

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_g}(r, 0)}{T_{D_g}(r)} &\geq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{f_1}(r, -1) + o(T_{D_f}(r))}{T_{f_1}(r) + o(T_{D_f}(r))} \\ &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{f_1}(r, -1)}{T_{f_1}(r)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned} N_{f_1}(r, 0) &\leq N_{D_f}(r, 0) + N_{D_h}(r, \infty) \\ &\leq N_{D_f}(r, 0) + o(T_{D_f}(r)). \\ T_{f_1}(r) &= T_{D_f}(r) + o(T_{D_f}(r)). \end{aligned}$$

Do đó, kết hợp với (1.5), ta có

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{f_1}(r, 0)}{T_{f_1}(r)} &\leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_f}(r, 0) + o(T_{D_f}(r))}{T_{D_f}(r) + o(T_{D_f}(r))} \\ &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_f}(r, 0)}{T_{D_f}(r)} = 0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{f_1}(r, 0)}{T_{f_1}(r)} = 0.$$

Theo Bổ đề 1.2.11, ta có $\rho_{f_1} = \rho_{D_f} = \lambda$. Vì vậy, theo Bổ đề 1.2.13, ta có

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{f_1}(r, -1)}{T_{f_1}(r)} &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{f_1}(r, -1)}{T_{f_1}(r)} + \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{f_1}(r, 0)}{T_{f_1}(r)} \\ &\geq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{f_1}(r, -1) + N_{f_1}(r, 0)}{T_{f_1}(r)} \geq k(\lambda). \end{aligned}$$

Kết hợp với (1.8), ta có

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_g}(r, 0)}{T_{D_g}(r)} \geq k(\lambda).$$

Do $\lambda \notin \mathbb{Z}$ nên

$$k(\lambda) = \frac{2\Gamma^4(3/4)|\sin \lambda \pi|}{\pi^2 \lambda + \Gamma^4(3/4)|\sin \lambda \pi|} > 0.$$

Từ (1.6), ta có

$$\sum_{a \in \overline{\mathbb{C}}} \delta(a, g) \leq 2 - 2 \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{D_g}(r, 0)}{T_{D_g}(r)} \leq 2 - 2k(\lambda) < 2.$$

Do đó, Định lý được chứng minh. □

Chú ý 1.3.3. Lớp hàm phân hình xét trong hai định lý trên là tồn tại vì *R. Nevanlinna* ([12, trang 83]) đã chỉ ra những hàm phân hình f trên $\mathbb{C}$ có bậc hữu hạn sao cho

$$\lambda := \rho_f \notin \mathbb{Z} \quad \text{và} \quad \sum_a \delta(a, f) = 2.$$

Chương 2

Ánh xạ phân hình có tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động

Chương này dành cho việc nghiên cứu các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động và được viết dựa trên bài báo [3].

Trong khoảng 20 năm trở lại đây, việc nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna đối với mục tiêu di động đã được nhiều nhà toán học quan tâm. Đây là sự mở rộng tự nhiên khi ta thay thế các siêu phẳng (hoặc siêu mặt) cố định trong không gian xạ ảnh phức bằng các siêu phẳng (hoặc siêu mặt) di động với hệ số là các hàm nhỏ. Một trong những kết quả quan trọng nhất theo hướng nghiên cứu này là định lý Cartan-Nochka đối với mục tiêu di động được chứng minh bởi M. Ru và W. Stoll trong [18].

Định lý. *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình khác hằng và giả thiết rằng $\{a_i\}_{i=0}^{q-1}$ là các ánh xạ phân hình "nhỏ" đối với f từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí N -tổng quát dưới sao cho f là không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_i\}_{i=0}^{q-1})$. Khi đó $\sum_{j=0}^{q-1} \delta(a_j, f) \leq 2N - n + 1$.*

Như thế lại có một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Ta có thể nói gì về hàm f mà tổng số khuyết đối với nó là cực đại? Nói cách khác, ta có thể mở rộng kết quả của N. Toda cho ánh xạ phân hình nhiều biến có tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động được hay không?

Mục đích chính của chương này là trả lời cho câu hỏi trên. Trước hết ta nhắc lại một số khái niệm trong lý thuyết Nevanlinna nhiều chiều.

2.1 Một số khái niệm cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna

Định nghĩa 2.1.1.

Với mỗi divisor v trên $\mathbb{C}^m$, ta định nghĩa các *hàm đếm* của v là

$$n(t, v) = \begin{cases} \int_{|v| \cap B_m(t)} v(z) \nu_m^{m-1} & \text{nếu } m \geq 2 \\ \sum_{|z| \leq t} v(z) & \text{nếu } m = 1 \end{cases}$$

và

$$N(r, v) = \int_1^r \frac{n(t, v)}{t^{2m-1}} dt \quad (1 < r < +\infty).$$

Cho $\varphi : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ là một hàm phân hình. Ta định nghĩa

$$N_\varphi(r) = N(r, v_\varphi).$$

Cho $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ phân hình. Với mỗi tọa độ thuần nhất cố định $(w_0 : \cdots : w_n)$ của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta lấy một biểu diễn rút gọn $f = (f_0 : \cdots : f_n)$ của f , tức mỗi f_i là một hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}^m$ và $f(z) = (f_0(z) : \cdots : f_n(z))$ ngoài một tập giải tích

$$I(f) = \{f_0 = \cdots = f_n = 0\}$$

có đối chiều lớn hơn hoặc bằng 2. Ta đặt

$$\|f\| = (|f_0|^2 + \cdots + |f_n|^2)^{1/2}.$$

Định nghĩa 2.1.2.

Hàm đặc trưng của f được định nghĩa là:

$$T_f(r) = \int_{S_m(r)} \log \|f\| \sigma_m - \int_{S_m(1)} \log \|f\| \sigma_m.$$

Định nghĩa 2.1.3.

Cho f và a là hai hàm phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ta nói rằng a là "nhỏ" đối với f nếu $T_a(r) = o(T_f(r))$ khi $r \rightarrow +\infty$.

Cho $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình với biểu diễn rút gọn $f = (f_0 : \cdots : f_n)$ và $a : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình với biểu diễn rút gọn $a = (a_0 : \cdots : a_n)$. Ta đặt $(f, a) = \sum_{i=0}^n a_i f_i$, nghĩa là $(f, a)(z) = \sum_{i=0}^n a_i(z) f_i(z)$. Khi đó, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.1.4.

Ta gọi $m_{f,a}(r)$ là *hàm xấp xỉ* của f ứng với a và được xác định như sau:

$$m_{f,a}(r) = \int_{S_m(r)} \log \frac{\|f\| \cdot \|a\|}{|(f, a)|} \sigma_m - \int_{S_m(1)} \log \frac{\|f\| \cdot \|a\|}{|(f, a)|} \sigma_m.$$

Định lý cơ bản thứ nhất đối mục tiêu di động (xem trong [30]) khẳng định rằng: Nếu $f, a : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các ánh xạ phân hình thỏa mãn $(f, a) \not\equiv 0$ thì

$$T_f(r) + T_a(r) = m_{f,a}(r) + N_{(f,a)}(r) + O(1) \quad (r > 1).$$

Khi đó, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.1.5.

Ta định nghĩa *số khuyết* của f tại a tương ứng là

$$\delta(a, f) = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_{(f,a)}(r)}{T_f(r)} = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_{(f,a)}(r)}{T_f(r)}.$$

Xét họ q ánh xạ phân hình $\{a_j\}_{j=0}^{q-1}$ từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với các biểu diễn rút gọn tương ứng là $a_j = (a_{j0} : \cdots : a_{jn})$ ($0 \leq j \leq q-1$). Ký hiệu $\mathcal{M}_m$ là trường các hàm phân hình trên $\mathbb{C}^m$ và $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=0}^{q-1}) \subset \mathcal{M}_m$ là trường con nhỏ nhất chứa $\mathbb{C}$ và tất cả các $\frac{a_{jk}}{a_{jl}}$ với $a_{jl} \not\equiv 0$.

Định nghĩa 2.1.6.

Cho f là ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với biểu diễn rút gọn $f = (f_0 : \cdots : f_n)$. Ta nói rằng f là *không suy biến tuyến tính* trên $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=0}^{q-1})$ nếu $f_0, \dots, f_n$ là độc lập tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=0}^{q-1})$.

Định nghĩa 2.1.7.

Ta nói họ $\{a_j\}_{j=0}^{q-1}$ là ở vị trí N -tổng quát dưới nếu với mỗi tập con $R \subset Q$ với $|R| = N + 1$ thì

$$\text{rank } \mathcal{M}_m (a_{jk})_{j \in R, 0 \leq k \leq n} = n + 1.$$

Khi chúng ở vị trí n -tổng quát dưới ta gọi đơn giản là chúng ở vị trí tổng quát.

Định nghĩa 2.1.8.

Cho $f_0, \dots, f_n$ là các hàm phân hình trên $\mathbb{C}^m$ thỏa mãn

$$f = (f_0, \dots, f_n)$$

không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Khi đó, tồn tại bộ số nhỏ nhất $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ theo thứ tự từ điển với $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}) \in \mathbb{Z}_+^m$ sao cho

$$W(f_0, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_0 & \cdots & f_n \\ D^{\alpha_1} f_0 & \cdots & D^{\alpha_1} f_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D^{\alpha_n} f_0 & \cdots & D^{\alpha_n} f_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\Delta(f_0, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{D^{\alpha_1} f_0}{f_0} & \cdots & \frac{D^{\alpha_1} f_n}{f_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{D^{\alpha_n} f_0}{f_0} & \cdots & \frac{D^{\alpha_n} f_n}{f_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ta ký hiệu các định thức trên bởi

$$W(f) = W(f_0, \dots, f_n) \text{ và } \Delta(f) = \Delta(f_0, \dots, f_n),$$

đồng thời lần lượt gọi chúng là *Wronski* và *Wronski logarit* của f .

Với hàm phân hình g trên $\mathbb{C}^m$ và $A \in GL(n+1, \mathbb{C})$, ta dễ dàng có tính chất sau đây:

$$\begin{aligned} W(gf_0, \dots, gf_n) &= g^{n+1} W(f_0, \dots, f_n), \\ W((f_0, \dots, f_n)A) &= W(f_0, \dots, f_n) \times (\det A), \\ \Delta(gf_0, \dots, gf_n) &= \Delta(f_0, \dots, f_n), \\ \Delta(1, \frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0}) &= \Delta(f_0, \dots, f_n). \end{aligned}$$

Định nghĩa 2.1.9.

Cho ϕ là hàm không âm tùy ý trên $\mathbb{C}^m$. Ta nói rằng hàm ϕ là một $S(r, f)$ -hàm nếu

$$\int_{S_m(r)} \log^+ \phi \sigma_m = o(T_f(r)).$$

Cho $N > n$ và q là số nguyên thỏa mãn $2N - n + 1 < q < +\infty$. Đặt $Q = \{0, 1, \dots, q-1\}$. Giả sử $\{a_j : j \in Q\}$ là họ các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí N -tổng quát dưới. Giả sử $G(j_1, \dots, j_k)(z)$ là định thức Gram của họ $(a_{j_1}, \dots, a_{j_k})$, ở đó $0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq q-1$ và $2 \leq k \leq n+1$. Ta đặt

$$I = \{(j_1, \dots, j_k) \mid G(j_1, \dots, j_k) \neq 0\}$$

và

$$S = \{z \mid \text{tồn tại } (j_1, \dots, j_k) \in I \text{ sao cho } G(j_1, \dots, j_k)(z) = 0\}.$$

Khi đó, S là tập con giải tích có đối chiều lớn hơn hoặc bằng 1 của $\mathbb{C}^m$ và nó có thể bỏ qua được khi lấy tích phân một hàm trên mặt cầu

$S_m(r)$. Với $\emptyset \neq P \subset Q$ và $z \in \mathbb{C}^m$, giả sử $V(z, P)$ là không gian tuyến tính sinh bởi $\{a_j(z) \mid j \in P\}$. Ta đặt

$$d(z, P) = \dim V(z, P).$$

Khi đó, $d(z, P)$ là hằng đối với $z \in \mathbb{C}^m - S$. Vì vậy, với $z \in \mathbb{C}^m - S$, ta đặt

$$d(P) = d(z, P).$$

Nếu $P \subset Q$ và $N + 1 \leq |P|$ thì hiển nhiên $d(P) = n + 1$ do tính chất của tổng quát dưới. Từ đó, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.1.10.

Cho $\{a_j\}_{j \in Q}$ là họ các ánh xạ phân hình "nhỏ" đối với f từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí N -tổng quát dưới. Họ $\{a_j\}_{j \in Q}$ gọi là có *phân bố Borel* nếu $n = 2l - 1$ là lẻ và tồn tại $P_1, P_2, \dots, P_p$ như là các tập con của Q thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) $|P_v| = N - l + 1$ và $d(P_v) = l$ với mỗi $1 \leq v \leq p$,
- (ii) $Q = \cup_{v=1}^p P_v$ là hợp rời.

Chú ý 2.1.11. Ta sử dụng ký hiệu " $\parallel P''$ " để nói rằng mệnh đề P đúng với mọi $r \in [0, +\infty)$ nằm ngoài một tập con Borel E của $[0, +\infty)$ thỏa mãn

$$\int_E dr < +\infty.$$

Sau đây, ta nhắc lại một số kết quả và đưa ra một bổ đề về quan hệ số khuyết đối với mục tiêu di động.

2.2 Các kết quả ban đầu

Trước hết, ta nhắc lại hai bổ đề về trọng Nochka cho mục tiêu di động (xem trong [15] hoặc [16]). Cách chứng minh chúng được lặp lại hoàn toàn các khẳng định tương ứng cho siêu phẳng cố định.

Bổ đề 2.2.1. ([15, Bổ đề 3.3]) Giả sử $\{a_i\}_{i \in Q}$ là họ q các mục tiêu di động trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí N -tổng quát dưới và giả thiết $q > 2N - n + 1$. Khi đó, có các hằng số hữu tỉ dương $\omega_j, j \in Q$ thỏa mãn:

$$(i) \ 0 < \omega_j \leq 1, \ \forall j \in Q.$$

$$(ii) \ \sum_{j=1}^q \omega_j = \tilde{\omega}(q - 2N + n - 1) + n + 1 \text{ với } \tilde{\omega} = \max_{j \in Q} \omega_j.$$

$$(iii) \ \frac{n+1}{2N-n+1} \leq \tilde{\omega} \leq \frac{n}{N}.$$

$$(iv) \ \text{Với } R \subset Q \text{ thỏa mãn } 0 < |R| \leq N+1 \text{ thì}$$

$$\sum_{j \in R} \omega_j \leq \text{rank}\{a_i\}_{i \in R}.$$

Ta gọi ω_j ở trên là các *trọng Nochka* và $\tilde{\omega}$ là *hằng số Nochka*. Để thuận tiện ta sẽ ký hiệu $\theta = \tilde{\omega}^{-1}$.

Bổ đề 2.2.2. ([15, Bổ đề 3.4]) Giả sử $q > 2N - n + 1$, $\{a_i\}_{i \in Q}$ là họ q mục tiêu di động trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí N -tổng quát dưới và $\{\omega_j\}_{j \in Q}$ là các *trọng Nochka* của nó. Gọi $E_j \geq 1, j \in Q$ là các số cho trước tùy ý. Khi đó, với mỗi tập con $R \subset Q$ thỏa mãn $0 < |R| \leq N+1$ có tập con $R^o \subset R$ thỏa mãn $|R^o| = \text{rank}\{a_i\}_{i \in R}$ và $\prod_{i \in R} E_i^{\omega_i} \leq \prod_{i \in R^o} E_i$.

Chú ý 2.2.3. Bổ đề 2.2.2 vẫn đúng khi $\{\omega_j\}_{j \in Q}$ chỉ thỏa mãn các điều kiện (i) và (iv) của Bổ đề 2.2.1.

Với mỗi $1 \in \Phi \subset \mathcal{M}_m$ và $|\Phi| < +\infty$, ta ký hiệu $\mathcal{L}(\Phi)$ là $\mathbb{C}$ -không gian vectơ sinh bởi Φ . Với mỗi số nguyên dương k đặt $\Phi_k = \{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_k | \varphi_j \in \Phi \text{ với } j = 1, \dots, k\}$. Khi đó, $1 \in \Phi_k$ và Φ_k là hữu hạn.

Bổ đề 2.2.4. Giả sử ϵ là số thực thỏa mãn $0 < \epsilon < 1$ và $1 \in \Phi \subset \mathcal{M}_m$ và $q = |\Phi| < +\infty$. Cho $P(\epsilon) = \binom{P_\epsilon + q + 1}{q + 1}$, ở đó P_ϵ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $\binom{P_\epsilon + q + 1}{q + 1} \leq (1 + \epsilon)^{P_\epsilon}$. Khi đó, tồn tại số nguyên $P'_\epsilon \leq P_\epsilon$ thỏa mãn $\frac{\dim \mathcal{L}(\Phi_{P'_\epsilon + 1})}{\dim \mathcal{L}(\Phi_{P'_\epsilon})} \leq (1 + \epsilon)$ và $\dim \mathcal{L}(\Phi_{P'_\epsilon + 1}) \leq P(\epsilon)$.

Chứng minh. Giả sử $\frac{\dim \mathcal{L}(\Phi_{p+1})}{\dim \mathcal{L}(\Phi_p)} > (1 + \epsilon)$ với mọi $1 \leq p \leq P_\epsilon$. Khi đó,

$$\dim \mathcal{L}(\Phi_{P_\epsilon+1}) \geq \prod_{i=1}^{P_\epsilon} \frac{\dim \mathcal{L}(\Phi_{i+1})}{\dim \mathcal{L}(\Phi_i)} > (1 + \epsilon)^{P_\epsilon}.$$

Do đó,

$$\binom{P_\epsilon+q+1}{q+1} > (1 + \epsilon)^{P_\epsilon}.$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó, tồn tại số nguyên dương $P'_\epsilon \leq P_\epsilon$ thỏa mãn

$$\frac{\dim \mathcal{L}(\Phi_{P'_\epsilon+1})}{\dim \mathcal{L}(\Phi_{P'_\epsilon})} \leq 1 + \epsilon.$$

Hơn nữa, ta có $\dim \mathcal{L}(\Phi_{P'_\epsilon+1}) \leq \dim \mathcal{L}(\Phi_{P_\epsilon+1}) \leq \binom{P_\epsilon+q+1}{q+1} \leq (1 + \epsilon)^{P_\epsilon}$.
Bổ đề được chứng minh. $\square$

Chú ý 2.2.5. Với mỗi số thực x , ký hiệu $[x]$ là phần nguyên của x , tức là $[x]$ là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn hoặc bằng x . Giả sử $P_\epsilon^* = \left\lfloor \frac{(q+1)^2}{\log^2(1+\epsilon)} \right\rfloor$. Khi đó, $\binom{P_\epsilon^*+q+1}{q+1} \leq (1 + \epsilon)^{P_\epsilon^*}$ và do đó,

$$P(\epsilon) \leq [(1 + \epsilon)^{P_\epsilon^*}] \leq [(1 + \epsilon)^{\frac{(q+1)^2}{\log^2(1+\epsilon)}}].$$

Thật vậy, dễ dàng thấy rằng $P_\epsilon^*+1 \geq \frac{(q+1)^2}{\log^2(1+\epsilon)}$ và do đó, $(P_\epsilon^*+1)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{(q+1)}{\log(1+\epsilon)}$. Từ đó, suy ra $(q+1)(P_\epsilon^*+1)^{-\frac{1}{2}} \leq \log(1+\epsilon)$. Vì $P_\epsilon^* > 1$ nên ta có $\log P_\epsilon^* \leq (P_\epsilon^* - 1)^{\frac{1}{2}} \leq P_\epsilon^*(P_\epsilon^* + 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\log P_\epsilon^*}{P_\epsilon^*} \leq (P_\epsilon^* + 1)^{-\frac{1}{2}}$, do đó, $(q+1) \frac{\log P_\epsilon^*}{P_\epsilon^*} \leq \log(1+\epsilon)$. Điều này kéo theo $(P_\epsilon^*)^{q+1} \leq (1 + \epsilon)^{P_\epsilon^*}$. Vậy, ta có $\binom{P_\epsilon^*+q+1}{q+1} \leq (1 + \epsilon)^{P_\epsilon^*}$.

Bổ đề 2.2.6 (xem trong [15]). *Giả sử f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}^m$. Khi đó,*

$$\left\| m \left(r, \frac{\mathcal{D}^\alpha(f)}{f} \right) \right\| = O(\log^+ T_f(r)), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Bổ đề trên được gọi là *Bổ đề đạo hàm logarit*. Sau đây, chúng tôi sẽ chứng minh một bổ đề đóng vai trò then chốt trong việc chứng minh định lý về tổng số khuyết cực đại cho ánh xạ phân hình đối với mục tiêu di động.

Bổ đề 2.2.7. *Giả sử f là ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với biểu diễn rút gọn $f = (f_0 : \dots : f_n)$. Giả sử $N > n$ và q là số nguyên tùy ý thỏa mãn $2N - n + 1 < q < +\infty$. Đặt $Q = \{0, 1, \dots, q-1\}$. Giả sử $\{a_j : j \in Q\}$ là họ q ánh xạ phân hình "nhỏ" (đối với f) từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí N -tổng quát dưới. Giả sử rằng f là không suy biến trên $\mathcal{R}(\{a_i\}_{i=0}^{q-1})$ và $\omega : Q \rightarrow (0, 1]$ là hàm nào đó thỏa mãn điều kiện (iv) trong Bổ đề 2.2.1. Khi đó, ta có*

$$\sum_{j=0}^{q-1} \omega(j) \cdot \delta(a_j, f) \leq n + 1.$$

Chứng minh. Giả sử a_i có biểu diễn rút gọn $a_i = (a_{i0} : \dots : a_{in})$ ($0 \leq i \leq q-1$). Bằng cách đổi hệ tọa độ thuần nhất của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nếu cần thiết, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử a_{i0} không đồng nhất bằng không với mọi i . Với mỗi $0 \leq i \leq n$, ta đặt

$$g_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{i0}}, \quad \tilde{a}_i = (g_{i0}, \dots, g_{in}), \quad F_i = (a_i, f), \quad \tilde{F}_i = (\tilde{a}_i, f)$$

và

$$E_j = \frac{\|\tilde{a}_j\| \|f\|}{|\tilde{F}_j|} = \frac{\|a_j\| \|f\|}{|F_j|}.$$

Rõ ràng $E_j \geq 1$.

Với mỗi số nguyên không âm s , ta gọi $V(s)$ là $\mathbb{C}$ -không gian vectơ sinh bởi

$$\left\{ \prod_{k=0}^n \prod_{j=0}^{q-1} g_{jk}^{s(j,k)} \mid \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{q-1} s(j,k) \leq s, s(j,k) \text{ là các số nguyên không âm} \right\}.$$

Đặt $d(s) = \dim V(s)$. Khi đó, $V(s)$ là không gian con của $V(s+1)$ và

theo Bổ đề 2.2.4, ta có

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{d(s+1)}{d(s)} = 1.$$

Giả sử $\{b_1, \dots, b_{d(s)}, b_{d(s)+1}, \dots, b_{d(s+1)}\}$ là cơ sở của $V(s+1)$ thỏa mãn họ $\{b_1, \dots, b_{d(s)}\}$ là một cơ sở của $V(s)$. Vì f là không suy biến trên $\mathcal{R}(\{a_i\}_{i=0}^{q-1})$ nên dễ dàng thấy rằng họ $\{b_t f_k\}_{1 \leq t \leq d(s+1), 0 \leq k \leq n+1}$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Ta đặt

$$W = W(b_1 f_0, b_2 f_0, \dots, b_{d(s+1)} f_n).$$

Khi đó, theo Bổ đề đạo hàm logarit tức Bổ đề 2.2.6 và định lý cơ bản thứ nhất, ta có $N_{\frac{1}{W}}(r) = S(r, f)$.

Giả sử z là một điểm của $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ thỏa mãn z không là không điểm hoặc cực điểm của các hàm $\{\tilde{F}_j\}_{j=0}^{q-1}$ và $\{g_{jn}\}_{j=0}^{q-1}$. Ta sắp xếp lại $\{\tilde{F}_j(z)\}_{j=0}^{q-1}$ như sau:

$$|\tilde{F}_{j_0}(z)| \leq |\tilde{F}_{j_1}(z)| \leq \dots \leq |\tilde{F}_{j_N}(z)| \leq \dots \leq |\tilde{F}_{j_{q-1}}(z)|.$$

Vì $\{a_j\}_{j=0}^{q-1}$ là các hàm "nhỏ" so với f nên ta luôn chọn được những $S(r, f)$ -hàm sao cho

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_{j_k}(z)| &\leq S(z, f) \|f(z)\| \quad \text{với } (0 \leq k \leq q-1) \text{ và} \\ \|f(z)\| &\leq S(z, f) |\tilde{F}_{j_k}(z)| \quad \text{với } (N \leq k \leq q-1). \end{aligned}$$

Mặt khác, tại mỗi điểm z , ta có

$$\left(\prod_{j=0}^{q-1} E_j^{\omega(j)} \right)^{d(s)} \leq S(z, f) \left(\prod_{\nu=0}^N E_{j_\nu}^{\omega(j_\nu)} \right)^{d(s)}.$$

Ta đặt

$$K = S(z, f) \left(\prod_{\nu=0}^N E_{j_\nu}^{\omega(j_\nu)} \right)^{d(s)}.$$

Theo Bổ đề 2.2.2, ta suy ra

$$K \leq S(z, f) \left(\prod_{i=0}^n \frac{\|f\|}{|\tilde{H}_i|} \right)^{d(s)}, \quad (2.1)$$

ở đó $\{\tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_n\} \subset \{\tilde{F}_{j_0}(z), \dots, \tilde{F}_{j_N}(z)\}$ tùy ý và họ $\{\tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_n\}$ là độc lập tuyến tính trên $\mathcal{R}\left(\{a_j\}_{j=0}^{q-1}\right)$. Ta chọn

$$\tilde{H}_\mu = (\tilde{a}_{j_\mu}, f), \quad 0 \leq \mu \leq n \text{ và đặt } K' = \left(\frac{\|f\|^{n+1}}{|\tilde{H}_0 \cdots \tilde{H}_n|} \right)^{d(s)}.$$

Do $\{\tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_n\}$ là độc lập tuyến tính trên $\mathcal{R}\left(\{a_j\}_{j=0}^{q-1}\right)$ nên họ $\{b_1\tilde{H}_0, b_2\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n\}$ là độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Thật vậy, xét $c_1b_1\tilde{H}_0 + c_2b_2\tilde{H}_0 + \dots + c_{d(s)}b_{d(s)}\tilde{H}_n = 0$ với $c_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, d(s)$. Suy ra $c_jb_j \equiv 0$, do đó $c_j = 0, j = 1, 2, \dots, d(s)$. Vì $\tilde{F}_j = (\tilde{a}_j, f) = \sum_{i=0}^n g_{ji}f_i$ nên $(n+1)d(s)$ hàm trên có thể được biểu diễn như là một tổ hợp tuyến tính với các hệ số hằng của $\{b_tf_k | 1 \leq t \leq d(s+1), 0 \leq k \leq n\}$. Điều này có nghĩa là

$$(b_1\tilde{H}_0, b_2\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n) = (b_1f_0, b_2f_0, \dots, b_{d(s+1)}f_n)D_1,$$

trong đó D_1 là một $(n+1)d(s+1) \times (n+1)d(s)$ -ma trận mà các phần tử là hằng và có hạng bằng $(n+1)d(s)$.

Giả sử D_2 là một $(n+1)d(s+1) \times (n+1)(d(s+1) - d(s))$ -ma trận với các phần tử hằng sao cho ma trận $D = (D_1D_2)$ là khả nghịch. Đặt

$$L = (n+1)(d(s+1) - d(s))$$

và

$$(K_1, \dots, K_L) = (b_1f_0, b_2f_0, \dots, b_{d(s+1)}f_n)D_2.$$

Khi đó,

$$(b_1\tilde{H}_0, b_2\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L) = (b_1f_0, b_2f_0, \dots, b_{d(s+1)}f_n)D.$$

Do đó, $W(b_1\tilde{H}_0, b_2\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L) = (\det D)W$ với $\det D \neq 0$, trong đó

$$W = W(b_1f_0, b_2f_0, \dots, b_{d(s+1)}f_n).$$

Vì $|\tilde{H}_k(z)| \leq S(z, f)\|f(z)\|$, $K_j(z) \leq S(z, f)\|f(z)\|$ nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{k=0}^n |\tilde{H}_k|^{d(s)}} &= \frac{|W(b_1\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L)|}{|W| |\det D|} \cdot \frac{1}{\prod_{k=0}^n |\tilde{H}_k|^{d(s)}} \\ &= \frac{1}{|\det D| |W|} \cdot \frac{|W(b_1\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L)|}{\prod_{k=0}^n |\tilde{H}_k|^{d(s)}} \\ &\leq S(z, f) \frac{\|f(z)\|^L}{|W|} \cdot \frac{|W(b_1\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L)|}{|b_1\tilde{H}_0 \cdots b_{d(s)}\tilde{H}_n \cdot K_1 \cdots K_L|}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} K' &= \left(\frac{\|f\|^{n+1}}{|\tilde{H}_0 \cdots \tilde{H}_n|} \right)^{d(s)} \\ &\leq S(z, f) \cdot \frac{\|f(z)\|^{(n+1)d(s+1)}}{|W|} \cdot \frac{|W(b_1\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L)|}{|b_1\tilde{H}_0 \cdots b_{d(s)}\tilde{H}_n \cdot K_1 \cdots K_L|}. \end{aligned}$$

Theo (2.1) thì $K \leq S(z, f) \cdot K'$. Từ đó, suy ra

$$K \leq S(z, f) \cdot \frac{\|f(z)\|^{(n+1)d(s+1)}}{|W|} \cdot \frac{|W(b_1\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L)|}{|b_1\tilde{H}_0 \cdots b_{d(s)}\tilde{H}_n \cdot K_1 \cdots K_L|}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=0}^{q-1} E_j^{\omega(j)} \right)^{d(s)} &\leq K \leq S(z, f) \cdot K' \\ &\leq S(z, f) \cdot \frac{\|f(z)\|^{(n+1)d(s+1)}}{|W|} \cdot \frac{|W(b_1\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L)|}{|b_1\tilde{H}_0 \cdots b_{d(s)}\tilde{H}_n \cdot K_1 \cdots K_L|}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng với việc lấy họ

$$\{\tilde{H}_0, \dots, \tilde{H}_n\} \subset \{\tilde{F}_{j_0}(z), \dots, \tilde{F}_{j_N}(z)\}$$

tùy ý và độc lập tuyến tính trên $\mathcal{R}\left(\{a_j\}_{j=0}^{q-1}\right)$. Do vậy, lấy "log⁺" hai vế ta nhận được bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} d(s) \sum_{j=0}^{q-1} \omega(j) \log^+ \frac{\|a_j(z)\| \cdot \|f(z)\|}{|F_j(z)|} &\leq \log^+ \frac{\|f(z)\|^{(n+1)d(s+1)}}{|W|} + \log^+ S(z, f) \\ &+ \sum_{H_0, \dots, H_n} \log^+ \frac{|W(b_1\tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)}\tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L)|}{|b_1\tilde{H}_0 \cdots b_{d(s)}\tilde{H}_n \cdot K_1 \cdots K_L|}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

trong đó tổng $\sum_{H_0, \dots, H_n}$ được lấy theo tất cả các hệ độc lập tuyến tính trên $\mathcal{R}\left(\{a_j\}_{j=0}^{q-1}\right)$ các tập con $\{H_0, \dots, H_n\}$ của họ $\{F_0, \dots, F_{q-1}\}$. Dễ dàng thấy rằng bất đẳng thức trên độc lập với việc chọn $z \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ sao cho z không là không điểm hay cực điểm của các hàm $\{\tilde{F}_j\}_{j=0}^{q-1}$ và $\{g_{jn}\}_{j=0}^{q-1}$. Mặt khác, theo Bổ đề đạo hàm logarit, ta có

$$\int_{S_m(r)} \log^+ \frac{|W(b_1 \tilde{H}_0, \dots, b_{d(s)} \tilde{H}_n, K_1, \dots, K_L)|}{|b_1 \tilde{H}_0 \cdots b_{d(s)} \tilde{H}_n \cdot K_1 \cdots K_L|} \sigma_m = S(r, f),$$

trong đó $S(r, f) = o(T_f(r))$. Lấy tích phân hai vế bất đẳng thức (2.2) trên mặt cầu $S_m(r)$ ứng với σ_m , ta nhận được

$$\begin{aligned} d(s) \sum_{j=0}^{q-1} \omega(j) m_{a_j, f}(r) &\leq \int_{S_m(r)} \log^+ \frac{\|f(z)\|^{(n+1)d(s+1)}}{|W|} \sigma_m + S(r, f) \\ &\leq (n+1)d(s+1)T_f(r) - N_{\frac{1}{W}}(r) + S(r, f). \end{aligned}$$

Do đó

$$d(s) \sum_{j=0}^{q-1} \omega(j) m_{a_j, f}(r) \leq (n+1)d(s+1)T_f(r) + S(r, f).$$

Chia hai vế bất đẳng thức trên cho $T_f(r)$ và cho $r \rightarrow +\infty$, ta được $d(s) \sum_{j=0}^{q-1} \omega(j) \delta_{(a_j, f)} \leq (n+1)d(s+1)$. Do $\liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{d(s+1)}{d(s)} = 1$ và cho $s \rightarrow +\infty$ nên ta có

$$\sum_{j=0}^{q-1} \omega(j) \delta_{(a_j, f)} \leq n+1.$$

Bổ đề được chứng minh. □

2.3 Ánh xạ phân hình với tổng số khuyết cực đại

Trong mục này, ta sẽ dùng các bổ đề trên để chứng minh định lý về số khuyết của các ánh xạ phân hình với tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động.

Định lý 2.3.1. Giả sử $f : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình khác hằng, $\{a_i : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\}_{i=0}^{q-1}$ là các ánh xạ phân hình "nhỏ" đối với f ở vị trí N -tổng quát dưới sao cho f là không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_i\}_{i=0}^{q-1})$, ở đó $1 \leq n < N$ và $2N - n + 1 < q < +\infty$. Giả thiết rằng f có giá trị số khuyết khác không tại a_i với mỗi $0 \leq i \leq q-1$ và

$$\sum_{j=0}^{q-1} \delta(a_j, f) = 2N - n + 1.$$

Khi đó, một trong hai phát biểu sau là đúng:

- (I) Có ít nhất $\left\lfloor \frac{2N - n + 1}{n + 1} \right\rfloor + 1$ mục tiêu di động a_j tại đó f có giá trị số khuyết bằng 1, tức là $\delta(a_j, f) = 1$,
- (II) n là lẻ và họ $\{a_j\}_{j=0}^{q-1}$ có phân bố Borel.

Chứng minh. Giả sử $\vartheta = \{P \subset Q \mid |P| \leq N + 1\}$. Ta đặt

$$\lambda = \min_{P \in \vartheta} \frac{d(P)}{|P|} \quad \text{và} \quad \omega(j) = \lambda \quad \text{với} \quad j = 0 \dots q-1.$$

Vì $\{\omega(j) = \lambda, 0 \leq j \leq q-1\}$ thỏa mãn các điều kiện (i) và (iv) của Bổ đề 2.2.1 nên chúng thỏa mãn điều kiện của Bổ đề 2.2.7. Theo Bổ đề 2.2.7, ta có

$$\lambda \sum_{j=0}^{q-1} \delta(a_j, f) \leq n + 1.$$

Theo giả thiết

$$\sum_{j=0}^{q-1} \delta(a_j, f) = 2N - n + 1$$

nên

$$\lambda \leq \frac{n + 1}{2N - n + 1}.$$

Bây giờ, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp A1:

$$\lambda < \frac{n+1}{2N-n+1}.$$

Lặp lại lập luận như trong [20, Remark 1 và Theorem 2], khẳng định (I) được chứng minh.

Trường hợp A2:

$$\lambda = \frac{n+1}{2N-n+1}.$$

Giả sử ϑ_1 là tập các phần tử $P \in \vartheta$ thỏa mãn $\frac{d(P)}{|P|} = \lambda$.

Ta chứng minh mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.3.2. *Nếu $P_1, P_2 \in \vartheta_1$ thì $P_1 \cup P_2 \in \vartheta_1$ ngoại trừ trường hợp*

(i) *n là lẻ và*

(ii) *$d(P_1) = d(P_2) = \frac{n+1}{2}$ và $V(P_1) \cap V(P_2) = \{0\}$.*

Chứng minh. Giả sử $P_1 \cup P_2 \notin \vartheta_1$. Khi đó, $|P| - d(P) \leq N - n$ với bất kỳ $P \in \vartheta$ (*). Thực vậy, nếu ta thêm $N + 1 - |P|$ vectơ vào tập hợp $\{a_i : i \in P\}$ thì số chiều của tập hợp sẽ là $n + 1$ do tính N -tổng quát dưới. Vì số chiều thêm vào nhiều nhất là $N + 1 - |P|$ nên ta có $d(P) + N + 1 - |P| \geq n + 1$. Từ đó, ta có (*). Mặt khác, vì

$$\frac{d(P_1)}{|P_1|} = \frac{d(P_2)}{|P_2|} = \lambda = \frac{n+1}{2N-n+1}$$

nên

$$d(P_1) + d(P_2) = \lambda \cdot (|P_1| + |P_2|) \leq \lambda \cdot (d(P_1) + d(P_2) + 2(N - n)).$$

Điều này kéo theo

$$d(P_1) + d(P_2) \leq n + 1. \quad (2.3)$$

Do

$$d(P_1 \cup P_2) + d(P_1 \cap P_2) \leq d(P_1) + d(P_2) \quad (2.4)$$

nên $d(P_1 \cup P_2) \leq n + 1$.

Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp B₁: $d(P_1 \cup P_2) \leq n$.

Khi đó, $|(P_1 \cup P_2)| \leq N$ và do đó nó thuộc ϑ . Theo định nghĩa của λ , ta có $\lambda \cdot (|(P_1 \cap P_2)|) \leq d(P_1 \cap P_2)$ (thậm chí ngay cả khi $P_1 \cap P_2 = \emptyset$). Kết hợp khẳng định này với $\lambda \cdot (|P_1| + |P_2|) = d(P_1) + d(P_2)$ và với $d(P_1 \cup P_2) + d(P_1 \cap P_2) \leq d(P_1) + d(P_2)$, ta có $\lambda \cdot |(P_1 \cup P_2)| \geq d(P_1 \cup P_2)$. Suy ra $\lambda \cdot |(P_1 \cup P_2)| = d(P_1 \cup P_2)$. Do đó, $P_1 \cup P_2$ nằm trong ϑ_1 .

Trường hợp B₂: $d(P_1 \cup P_2) = n + 1$.

Khi đó, các bất đẳng thức (2.3) và (2.4) xảy ra dấu bằng. Vì vậy, ta có $P_1 \cap P_2 = \emptyset$. Bây giờ, ta chứng tỏ rằng $d(P_1) = d(P_2)$. Thật vậy, giả sử ngược lại. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng $d(P_1) > d(P_2)$. Khi đó, $d(P_1) > \frac{n+1}{2}$. Chọn tập hợp chứa tất cả các vectơ trong P_1 và $d(P_2) - 1$ vectơ trong P_2 . Khi đó $\mathbb{C}$ -không gian vectơ sinh bởi tập này có chiều nhiều nhất là $d(P_1) + d(P_2) - 1 \leq n$. Lực lượng của tập này là

$$\begin{aligned} |P_1| + d(P_2) - 1 &= \frac{1}{\lambda} \cdot d(P_1) + (n + 1 - d(P_1) - 1) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \cdot d(P_1) + n \\ &> \left(\frac{2N - 2n}{n + 1} \right) \cdot \left(\frac{n + 1}{2} \right) + n = N. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với tính N -tổng quát dưới. Vì vậy, ta có $d(P_1) = d(P_2) = \frac{n+1}{2}$ và n phải là lẻ. Vì $V(P_1) + V(P_2) = V(P_1 \cup P_2)$ nên

$$d(V(P_1) \cap V(P_2)) = d(V(P_1)) + d(V(P_2)) - d(V(P_1) + V(P_2)) = 0.$$

Do đó, Mệnh đề 2.3.2 được chứng minh. $\square$

Ta cũng cần mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.3.3. Ta có $\bigcup\{P : P \in \vartheta_1\} = Q$.

Chứng minh. Đặt $\bigcup_{P \in \vartheta_1} P = Q_1$. Nếu $Q_1 \neq Q$ thì tồn tại

$$\lambda_1 = \min_{\{P \in \vartheta, P - Q_1 \neq \emptyset\}} \frac{d(P)}{|P|}.$$

Hơn nữa, $\lambda_1 > \lambda$. Ta đặt

$$\omega(j) = \begin{cases} \lambda & \text{nếu } j \in Q_1, \\ \lambda_1 & \text{nếu } j \notin Q_1. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng các hàm trọng được xây dựng trên thỏa mãn điều kiện (i) và (iv) trong Bổ đề 2.2.1. Theo Bổ đề 2.2.7, ta có

$$\sum_{j=0}^{q-1} \omega(j) \cdot \delta(a_j, f) \leq n + 1 = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{q-1} \delta(a_j, f).$$

Do đó $0 < (\lambda_1 - \lambda) \cdot \sum_{j \in Q - Q_1} \delta(a_j, f) \leq 0$. Điều này là mâu thuẫn. Vì vậy, ta phải có $Q = Q_1$ và Mệnh đề 2.3.3 được chứng minh. $\square$

Để kết thúc chứng minh Định lý 2.3.1, ta chỉ cần xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: n là chẵn.

Theo Mệnh đề 2.3.2 hợp của 2 phần tử trong ϑ_1 nằm trong ϑ_1 . Do đó, hợp của tất cả các phần tử của ϑ_1 cũng nằm trong ϑ_1 . Theo Mệnh đề 2.3.3, ta suy ra $Q \in \vartheta_1$. Vậy, $q \leq N + 1$. Điều này là mâu thuẫn. Do đó, Trường hợp A2 không thể xảy ra nếu n là chẵn. Vì vậy, khẳng định (I) của Định lý 2.3.1 luôn đúng nếu n là chẵn.

Trường hợp 2: n là lẻ.

Giả sử $n = 2l - 1$. Ta phải chứng minh rằng hệ đã cho có phân bố Borel. Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chứng tỏ rằng với mỗi $P \in \vartheta_1$ thì $|P| = N - l + 1$ và $d(P) = l$ (**). Thật vậy, giả sử có

$P_0 \in \vartheta_1$ sao cho P_0 không thỏa mãn khẳng định trên.

Nếu khả năng (ii) trong Mệnh đề 2.3.2 không thể xảy ra thì hợp của hai phần tử trong ϑ_1 nằm trong ϑ_1 . Lập luận tương tự như trong Trường hợp 1, ta nhận được mâu thuẫn.

Giả sử khả năng (ii) trong Mệnh đề 2.3.2 đúng với các phần tử $A, B \in \vartheta_1$. Khi đó, ta có $A \cup P_0 \in \vartheta_1$ và $B \cup P_0 \in \vartheta_1$. Vì $(A \cup P_0) \cap (B \cup P_0) \neq \emptyset$ nên ta có $(A \cup P_0) \cup (B \cup P_0) \in \vartheta_1$. Do đó, $N + 1 \geq |(A \cup P_0) \cup (B \cup P_0)| \geq 2N - 2m + 2 > N + 1$. Điều này là mâu thuẫn. Vì vậy, khẳng định (**) được chứng minh. $\square$

Chương 3

Sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình và ứng dụng

Mục đích của phần này là dành cho việc nghiên cứu sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với mục tiêu di động ở vị trí tổng quát và ứng dụng vào việc nghiên cứu vấn đề duy nhất. Chương này được viết dựa trên hai bài báo [1] và [2].

Lý thuyết về sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình nhiều biến phức vào các không gian xạ ảnh phức với mục tiêu cố định được nghiên cứu bởi W. Stoll [31] vào năm 1989. Sau đó Min Ru [17] đã tổng quát các kết quả của W. Stoll lên cho trường hợp đường cong chẻ hình vào không gian xạ ảnh phức với mục tiêu di động và ứng dụng chúng để chỉ ra một số định lý duy nhất đối với đường cong chẻ hình vào không gian xạ ảnh phức với mục tiêu di động. Đây cũng là các kết quả đầu tiên về vấn đề duy nhất đối với mục tiêu di động. Ta sẽ trình bày rõ hơn các kết quả nói trên của M. Ru [17].

Giả sử $f_t : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($1 \leq t \leq k$) là họ ánh xạ phân hình với biểu diễn rút gọn $f_t := (f_{t0} : \cdots : f_{tn})$. Giả sử $g_j : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($0 \leq j \leq q-1$) là các mục tiêu di động ở vị trí tổng quát với biểu diễn rút gọn $g_j := (g_{j0} : \cdots : g_{jn})$. Giả thiết rằng với mỗi $1 \leq t \leq k$, $0 \leq j \leq q-1$ ta có $(f_t, g_j) := \sum_{i=0}^n f_{ti} g_{ji} \neq 0$ và $(f_1, g_j)^{-1}\{0\} = \cdots = (f_k, g_j)^{-1}\{0\}$. Đặt $A_j = (f_1, g_j)^{-1}\{0\}$ ($0 \leq j \leq q-1$). Giả sử rằng mỗi tập giải tích A_j có biểu diễn bất khả quy là

$A_j = \cup_{i=1}^{t_j} A_{ji}$ ($1 \leq t_j \leq +\infty$). Với mỗi $1 \leq i \leq t_j, 1 \leq l \leq t_k, 0 \leq j, k \leq q-1$, ta đặt $A = \cup_{A_{ji} \neq A_{kl}} \{A_{ji} \cap A_{kl}\}$. Ký hiệu $T[n+1, q]$ là tập các đơn ánh từ $\{1, \dots, n+1\}$ vào $\{0, \dots, q-1\}$. Với mỗi $z \in \mathbb{C}^m \setminus \{\cup_{\beta \in T[n+1, q]} \{z | g_{\beta(1)}(z) \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}(z) = 0\} \cup A \cup \cup_{i=1}^k I(f_i)\}$, ta định nghĩa $\rho(z) = \sharp\{j | z \in A_j\}$. Khi đó, $\rho(z) \leq n$. Thật vậy, giả sử rằng $z \in A_j$ với mỗi $0 \leq j \leq n$. Thế thì $\sum_{i=0}^n f_{1i}(z) \cdot g_{ji}(z) = 0$ với mỗi $0 \leq j \leq n$. Vì $g_{\beta(1)}(z) \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}(z) \neq 0$ nên $f_{1i}(z) = 0$ với mỗi $0 \leq i \leq n$. Tức là $z \in I(f_1)$. Điều này là không thể.

Với $r > 0$ tùy ý, ta định nghĩa $\rho(r) = \sup\{\rho(z) | |z| \leq r\}$, trong đó supremum được lấy theo tất cả

$$z \in \mathbb{C}^m \setminus \{\cup_{\beta \in T[n+1, q]} \{z | g_{\beta(1)}(z) \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}(z) = 0\} \cup A \cup \cup_{i=1}^k I(f_i)\}.$$

Thế thì $\rho(r)$ là hàm tăng. Giả sử

$$d := \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r).$$

Dễ thấy $d \leq n$. Nếu $\dim\{A_i \cap A_j\} \leq n-2$ với mỗi $i \neq j$ thì $d = 1$.

Định lý A ([17, Định lý 1]). *Giả sử $f_1, \dots, f_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các đường cong chỉnh hình khác hằng, $g_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($0 \leq i \leq q-1$) là các mục tiêu di động ở vị trí tổng quát sao cho $T_{g_i}(r) = o(\max_{1 \leq j \leq k} T_{f_j}(r))$ ($0 \leq i \leq q-1$) và $(f_i, g_j) \neq 0$ ($1 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq q-1$), đồng thời $A_j := (f_1, g_j)^{-1}\{0\} = \dots = (f_k, g_j)^{-1}\{0\}$ ($0 \leq j \leq q-1$). Ký hiệu $\mathcal{A} = \cup_{j=0}^{q-1} A_j$. Giả thiết rằng l ($2 \leq l \leq k$) là số nguyên sao cho với mỗi dãy tăng $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$ thì $f_{j_1}(z) \wedge \dots \wedge f_{j_l}(z) = 0$ tại mỗi điểm $z \in \mathcal{A}$. Khi đó, nếu $q > \frac{dn^2(2n+1)k}{k-l+1}$ thì $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$, tức là $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \equiv 0$ trên $\mathbb{C}$.*

Định lý B ([17, Định lý 2]). *Với giả thiết như trong Định lý trên, ta giả thiết thêm rằng f_i ($1 \leq i \leq k$) không suy biến tuyến tính. Khi đó,*

$f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$, tức là $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \equiv 0$ trên $\mathbb{C}$ nếu $q > \frac{dn(n+2)k}{k-l+1}$.

Sử dụng các định lý cơ bản thứ hai của Đỗ Đức Thái và Sĩ Đức Quang [27], [28], trong phần đầu của Chương 3 chúng tôi đã mở rộng các kết quả trên của M. Ru bằng cách giảm đi đáng kể số các mục tiêu di động.

Như đã trình bày trong phần Mở đầu, các định lý duy nhất với bội bị chặn đối cho các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào không gian xạ ảnh phức $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với mục tiêu là các siêu phẳng cố định (hay di động) trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ đã được nghiên cứu liên tục trong những năm gần đây bởi nhiều nhà toán học (xem G. Dethloff và Trần Văn Tấn [3], [4]; Đỗ Đức Thái và Sĩ Đức Quang [27], [28]; Phạm Hoàng Hà, Sĩ Đức Quang và Đỗ Đức Thái [10]...). Trong trường hợp mục tiêu di động một trong những kết quả tốt nhất cho đến nay đó là kết quả của Đỗ Đức Thái và Sĩ Đức Quang.

Định lý C ([27]) *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình, $\varkappa$ là số nguyên dương và $\{a_j\}_{j=1}^q$ là các ánh xạ phân hình nhỏ (đối với f) từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho*

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^m : (f, a_i)(z) = (f, a_j)(z) = 0\} \leq n - 2 \quad (1 \leq i < j \leq q).$$

Giả sử f không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^q)$. Ta ký hiệu $\mathcal{F}(f, \{a_j\}_{j=1}^q, \varkappa)$ là tập hợp gồm tất cả các ánh xạ phân hình $g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^q)$ thỏa mãn các điều kiện:

$$(i) \min (v_{(f, a_j)}, \varkappa) = \min (v_{(g, a_j)}, \varkappa) \quad (1 \leq j \leq q),$$

$$(ii) f(z) = g(z) \text{ trên } \bigcup_{j=1}^q \{z \in \mathbb{C}^m : (f, a_j)(z) = 0\}.$$

Khi đó, ta có

$$(i) \text{ Nếu } q = 2n^2 + 4n \text{ và } n \geq 2 \text{ thì } \sharp \mathcal{F}(f, \{a_j\}_{j=1}^q, 1) = 1, \text{ ở đó } \sharp S$$

là ký hiệu lực lượng của tập hợp S .

(ii) Nếu $q = \frac{(3n+1)(n+2)}{2}$ và $n \geq 2$ thì $\sharp \mathcal{F}(f, \{a_j\}_{j=1}^q, 2) \leq 2$.

Định lý trên đòi hỏi một giả thiết chặt về tính không suy biến của các ánh xạ phân hình trên $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^q)$. Một vấn đề nảy sinh tự nhiên là nghiên cứu các định lý duy nhất mà không cần giả thiết này. Sử dụng lập luận của Đỗ Đức Thái và Sĩ Đức Quang trong [27], các tác giả Z. Chen, Y. Li và Q. Yan [2] đã chứng minh được định lý duy nhất sau mà không cần giả thiết đó.

Định lý D ([2]) *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình khác hằng và $\varkappa$ là số nguyên dương. Xét $\{a_j\}_{j=1}^q$ là tập các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nhỏ (đối với f) ở vị trí tổng quát sao cho $(f, a_j) \not\equiv 0$ ($1 \leq j \leq q$) và*

$$\dim\{z \in \mathbb{C}^m : (f, a_i)(z) = (f, a_j)(z) = 0\} \leq n - 2 \quad (1 \leq i < j \leq q).$$

Ký hiệu $\mathcal{G}(f, \{a_j\}_{j=1}^q, \varkappa)$ là tập hợp các ánh xạ phân hình $g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn các điều kiện:

$$(i) \min (v_{(f, a_j)}, \varkappa) = \min (v_{(g, a_j)}, \varkappa) \quad (1 \leq j \leq q),$$

$$(ii) f(z) = g(z) \text{ trên } \bigcup_{j=1}^q \{z \in \mathbb{C}^m : (f, a_j)(z) = 0\}.$$

Khi đó, nếu $q = 4n^2 + 2n$ và $n \geq 2$ thì $\sharp \mathcal{G}(f, \{a_j\}_{j=1}^q, 1) = 1$.

Xem xét vấn đề trên dưới góc độ khác đi, chúng tôi muốn tìm kiếm những định lý duy nhất trong trường hợp $q < 4n^2 + 2n$ dựa trên cách tiếp cận của lý thuyết về "tính suy biến đại số" của các ánh xạ phân hình. Cũng cần phải nói rằng còn có những hạn chế trong các kết quả của chúng tôi, đó là đòi hỏi bội cắt cắt phải lớn hơn 1. Tuy vậy, theo quan điểm của chúng tôi, các kỹ thuật chứng minh trong [27] và [2] không thể áp dụng được trong những tình huống như vậy.

Sau đây, ta nhắc lại một số khái niệm và các kết quả cần thiết cho chứng minh các định lý suy biến đại số.

3.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Trước hết, ta nhắc lại định lý cơ bản thứ hai cho siêu phẳng cố định.

Định lý 3.1.1 (Định lý cơ bản thứ hai đối với mục tiêu cố định [30]).

Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính và $H_1, \dots, H_q$ là q siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó,

$$\| (q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{i=1}^q N_{(f, H_i)}^{[n]}(r) + o(T_f(r)).$$

Đỗ Đức Thái và Sĩ Đức Quang đã chứng minh các định lý cơ bản thứ hai sau đây cho mục tiêu di động:

Định lý 3.1.2. ([27]) *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình.*

Giả thiết rằng $\{a_1, \dots, a_q\}$ là họ q ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho f không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{a_j\}_{j=1}^q)$.

Khi đó,

$$\| \frac{q}{n+2} \cdot T_f(r) \leq \sum_{i=1}^q N_{(f, a_i)}^{[n]}(r) + O\left(\max_{0 \leq i \leq q-1} T_{a_i}(r)\right) + o(T_f(r)).$$

Định lý 3.1.3. ([29]) *Giả sử $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ phân hình.*

Giả thiết rằng $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_q\}$ ($q \geq 2n+1$) là họ q ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát sao cho $(f, a_i) \not\equiv 0$ ($1 \leq i \leq q$).

Khi đó

$$\| \frac{q}{2n+1} \cdot T_f(r) \leq \sum_{i=1}^q N_{(f, a_i)}^{[n]}(r) + O\left(\max_{1 \leq i \leq q} T_{a_i}(r)\right) + O(\log^+ T_f(r)).$$

Bây giờ, ta sẽ nhắc lại lý thuyết suy biến đại số của W. Stoll. Trước hết, ta ký hiệu $\bigwedge^k \mathbb{C}^{n+1}$ là tích ngoài k lần của $\mathbb{C}^{n+1}$ và $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \in \bigwedge^k \mathbb{C}^{n+1}$ là tích ngoài của k vectơ $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{C}^{n+1}$. Nếu $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ là cơ sở của $\mathbb{C}^{n+1}$ thì $\{e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_k}\}_{0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n}$ là cơ sở của $\bigwedge^k \mathbb{C}^{n+1}$. Dễ thấy với k vectơ

$$v_i = a_{i0}e_0 + a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n \quad (1 \leq i \leq k)$$

thì

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} \det(a_{ij_l})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq l \leq k}} e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}.$$

Ta có định nghĩa sau trong đại số ngoài liên quan đến khái niệm phụ thuộc đại số.

Định nghĩa 3.1.4.

Cho V là không gian vectơ phức có số chiều $n + 1 \geq 1$. Họ vectơ $\{v_1, \dots, v_k\}$ ($k \geq 1$) được gọi là *ở vị trí tổng quát* nếu với mỗi bộ số nguyên $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq k$ thỏa mãn $p \leq n$ thì $v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_p} \neq 0$. Họ k vectơ $\{v_1, \dots, v_k\}$ được gọi là *ở vị trí đặc biệt* nếu chúng không ở vị trí tổng quát. Giả sử $1 \leq p \leq k$. Khi đó, $\{v_1, \dots, v_k\}$ được gọi là *ở vị trí p -đặc biệt* nếu với mỗi bộ số nguyên $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq k$ thì các vectơ $v_{j_1}, \dots, v_{j_p}$ ở vị trí đặc biệt.

Chú ý 3.1.5. *Khái niệm vị trí tổng quát cho k vectơ cũng áp dụng cho k ánh xạ phân hình vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bằng cách lấy biểu diễn thu gọn và coi chúng là hàm vectơ vào $\mathbb{C}^{n+1}$. Khi đó, khái niệm vị trí tổng quát này trùng với khái niệm vị trí tổng quát đã định nghĩa trong chương 2.*

Giả sử $f_i : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($1 \leq i \leq k$) là các ánh xạ phân hình ở vị trí tổng quát. Khi đó, theo W. Stoll [31] tồn tại một ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\bigwedge^k \mathbb{C}^{n+1}$ mà ta ký hiệu là $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$ sao cho với các biểu diễn thu gọn tương ứng $f_i = (f_{i0} : f_{i1} : \cdots : f_{in})$ ($1 \leq i \leq k$) thì $(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k)(z) = f_1(z) \wedge f_2(z) \wedge \cdots \wedge f_k(z)$ với mỗi $z \in \mathbb{C}^m$ ngoài các tập giải tích có đối chiều lớn hơn hoặc bằng 2. Ở đây, ta đã coi $f_i(z)$ là một vectơ trong $\mathbb{C}^{n+1}$. Khi đó, định nghĩa sau đây là thỏa đáng, tức là không phụ thuộc vào việc chọn các biểu diễn thu gọn.

Ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 3.1.6.

Divisor của ánh xạ $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$ là một hàm được ký hiệu là $\mu_{f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k}$ và được cho bởi

$$\mu_{f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k} = \min\{v_{\det(a_{ij}); 1 \leq i \leq k, 0 \leq l \leq k-1}, 0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n\}.$$

Gọi $N(r, \mu_{f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k})$ là hàm đếm ứng với divisor này. Hàm xấp xỉ của ánh xạ $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$ được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} m(r, f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k) &= \int_{S_m(r)} \log \frac{\|f_1(z)\| \cdot \|f_2(z)\| \cdots \|f_k(z)\|}{\|f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k\|} \sigma_m \\ &\quad - \int_{S_m(1)} \log \frac{\|f_1(z)\| \cdot \|f_2(z)\| \cdots \|f_k(z)\|}{\|f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k\|} \sigma_m. \end{aligned}$$

Định lý 3.1.7 (Định lý cơ bản thứ nhất đối với vị trí tổng quát [31]).

Giả sử $f_i : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($1 \leq i \leq k$) là các ánh xạ phân hình ở vị trí tổng quát. Giả thiết rằng $1 \leq k \leq n+1$. Khi đó

$$N(r, \mu_{f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k}) + m(r, f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k) \leq \sum_{1 \leq i \leq k} T_{f_i}(r) + O(1).$$

Định nghĩa 3.1.8.

Giả sử A là tập con giải tích có chiều thuần túy là $(m-1)$ của đa tạp phức liên thông m chiều M . Ta định nghĩa *divisor* của A bởi

$$v_A(z) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } z \in A, \\ 0 & \text{nếu } z \in M \setminus A. \end{cases}$$

Định lý 3.1.9 (Định lý cơ bản thứ hai đối với vị trí tổng quát [31]).

Giả sử M là đa tạp phức liên thông có chiều m , A là tập con giải tích của M có chiều thuần túy là $(m-1)$, V là không gian véctơ phức có chiều $n+1 > 1$, p và k là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq p \leq k \leq n+1$. Giả sử $f_j : M \rightarrow P(V)$ ($1 \leq j \leq k$) là các ánh xạ phân hình ở vị trí tổng quát sao cho $f_1, \dots, f_k$ ở vị trí p -đặc biệt trên A . Khi đó, ta có

$$\mu_{f_1 \wedge \cdots \wedge f_k} \geq (k-p+1)v_A.$$

3.2 Sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình

Với cùng giả thiết về sự không suy biến của các mục tiêu di động nhỏ ở vị trí tổng quát, mục đích của phần này là chứng minh ba định lý về sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Định lý 3.2.1. *Giả sử $f_1, \dots, f_k : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các ánh xạ phân hình khác hằng, $g_i : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($0 \leq i \leq q-1$) là các mục tiêu di động ở vị trí tổng quát thỏa mãn $T_{g_i}(r) = o(\max_{1 \leq j \leq k} T_{f_j}(r))$ ($0 \leq i \leq q-1$), $(f_i, g_j) \neq 0$ ($1 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq q-1$) và $A_j := (f_1, g_j)^{-1}\{0\} = \dots = (f_k, g_j)^{-1}\{0\}$ ($0 \leq j \leq q-1$). Ký hiệu $\mathcal{A} = \cup_{j=0}^{q-1} A_j$. Giả thiết rằng l ($2 \leq l \leq k$) là số nguyên sao cho với bất kỳ dãy tăng $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$ thì $f_{j_1}(z) \wedge \dots \wedge f_{j_l}(z) = 0$ với mỗi điểm $z \in \mathcal{A}$. Khi đó, $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$, tức là $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \equiv 0$ trên $\mathbb{C}^m$ nếu $q > \frac{dn(2n+1)k}{k-l+1}$.*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh Định lý trong trường hợp $k \leq n+1$. Giả sử rằng $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \not\equiv 0$. Trước hết, ta chứng minh mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2.2. *Với mỗi $1 \leq t \leq k$, ta có*

$$\sum_{j=0}^{q-1} \min\{n, v_{(f_t, g_j)}(z)\} \leq \frac{dn}{k-l+1} \mu_{f_1 \wedge \dots \wedge f_k}(z) + qn \sum_{\beta} \mu_{g_{\beta(1)} \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}}(z)$$

với mỗi $z \notin A \cup \cup_{i=1}^k I(f_i)$, ở đó tổng lấy theo tất cả các đơn ánh $\beta : \{1, 2, \dots, n+1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Chứng minh. Với mỗi điểm chính quy

$$z_0 \in \mathcal{A} \setminus (A \cup \cup_{i=1}^k I(f_i) \cup \cup_{\beta \in T[n+1, q]} \{z | g_{\beta(1)}(z) \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}(z) = 0\}),$$

lấy S là tập con giải tích bất khả quy của $\mathcal{A}$ chứa z_0 . Vì $z_0 \notin A$ và $A = \cup_{A_{ij} \neq A_{kl}} \{A_{ji} \cap A_{kl}\}$, trong đó A_{ji} là các thành phần bất khả quy

của $A_j = (f_1, g_j)^{-1}\{0\}$ nên ta có S là tập con giải tích có chiều thuần túy là $(m-1)$. Do đó, S chỉ chứa trong nhiều nhất d tập hợp trong A_j . Vì vậy, $v_{(f_t, g_j)}(z_0) \neq 0$ tại nhiều nhất d chỉ số. Suy ra

$$\sum_{j=0}^{q-1} \min\{n, v_{(f_t, g_j)}(z_0)\} \leq dn.$$

Với mỗi dãy tăng $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$, ta có

$$f_{j_1}(z) \wedge \dots \wedge f_{j_l}(z) = 0, \forall z \in S.$$

Điều này kéo theo họ $\{f_1, \dots, f_k\}$ ở vị trí l -đặc biệt trên S . Theo Định lý cơ bản thứ hai đối với vị trí tổng quát ([31, Định lý 2.1]), ta có

$$\mu_{f_1 \wedge \dots \wedge f_k}(z) \geq (k - (l-1))v_S.$$

Theo tính chất của divisor, ta có

$$\mu_{f_1 \wedge \dots \wedge f_k}(z_0) \geq k - l + 1.$$

Do đó

$$\sum_{j=0}^{q-1} \min\{n, v_{(f_t, g_j)}(z_0)\} \leq dn \leq \frac{dn}{k-l+1} \mu_{f_1 \wedge \dots \wedge f_k}(z_0).$$

Nếu $z_0 \in \cup_{\beta \in T[n+1, q]} \{z | g_{\beta(1)}(z) \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}(z) = 0\}$ thì ta nhận được

$$\sum_{j=0}^{q-1} \min\{n, v_{(f_t, g_j)}(z_0)\} \leq qn \leq qn \sum_{\beta \in T[n+1, q]} \mu_{g_{\beta(1)} \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}}(z_0).$$

Từ các trường hợp trên và các tính chất của divisor, với mỗi $z \notin A \cup \cup_{i=1}^k I(f_i)$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{q-1} \min\{n, v_{(f_t, g_j)}(z)\} &\leq \frac{dn}{k-l+1} \mu_{f_1 \wedge \dots \wedge f_k}(z) \\ &\quad + qn \sum_{\beta \in T[n+1, q]} \mu_{g_{\beta(1)} \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}}(z). \end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Các khẳng định trên và Định lý cơ bản thứ nhất đối với vị trí tổng quát ([31, Trang 326]) kéo theo

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{q-1} N_{(f_t, g_j)}^{[n]}(r) &\leq \frac{dn}{k-l+1} N(r, \mu_{f_1 \wedge \dots \wedge f_k}) + qn \sum_{\beta \in T[n+1, q]} N(r, \mu_{g_{\beta(1)} \wedge \dots \wedge g_{\beta(n+1)}}) \\
&\leq \frac{dn}{k-l+1} \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + qn \sum_{\beta \in T[n+1, q]} \sum_{i=1}^{n+1} T_{g_{\beta(i)}}(r) \\
&= \frac{dn}{k-l+1} \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}).
\end{aligned}$$

Từ đó, lấy tổng lại, ta có

$$\sum_{t=1}^k \sum_{j=0}^{q-1} N_{(f_t, g_j)}^{[n]}(r) \leq \frac{dnk}{k-l+1} \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}) \quad (3.1)$$

Dùng Định lý cơ bản thứ hai đối với các mục tiêu di động ([29, Hệ quả 1]), ta suy ra

$$\left\| \sum_{t=1}^k \frac{q}{2n+1} T_{f_t}(r) \right\| \leq \frac{dnk}{k-l+1} \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}).$$

Cho $r \rightarrow +\infty$, ta nhận được $q \leq \frac{dn(2n+1)k}{k-l+1}$. Điều này là mâu thuẫn. Từ đó, họ $\{f_1, \dots, f_k\}$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$, tức là $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \equiv 0$. Định lý 3.2.1 được chứng minh. $\square$

Định lý 3.2.3. *Với giả thiết như trong Định lý 3.2.1, ta giả thiết thêm rằng f_i ($1 \leq i \leq k$) là không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{g_j\}_{j=0}^{q-1})$. Khi đó, $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$, tức là $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \equiv 0$ trên $\mathbb{C}^m$ nếu $q > \frac{dn(n+2)k}{k-l+1}$.*

Chứng minh. Từ (3.1), ta có

$$\sum_{t=1}^k \sum_{j=0}^{q-1} N_{(f_t, g_j)}^{[n]}(r) \leq \frac{dnk}{k-l+1} \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}).$$

Sử dụng Định lý cơ bản thứ hai đối với các mục tiêu di động ([27, Định lý 3.1]), ta suy ra

$$\left\| \sum_{t=1}^k \frac{q}{n+2} T_{f_t}(r) \leq \frac{dnk}{k-l+1} \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}) \right\|.$$

Cho $r \rightarrow +\infty$, ta nhận được $q \leq \frac{dn(n+2)k}{k-l+1}$. Điều này là mâu thuẫn. Do đó, họ $\{f_1, \dots, f_k\}$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$, tức là $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \equiv 0$. Định lý 3.2.3 được chứng minh. $\square$

Định lý 3.2.4. *Giả sử $f_1, \dots, f_k : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các ánh xạ phân hình khác hằng, $g_i : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ($0 \leq i \leq q-1$) là các mục tiêu di động ở vị trí tổng quát thỏa mãn $T_{g_i}(r) = o(\max_{1 \leq j \leq k} T_{f_j}(r))$ ($0 \leq i \leq q-1$) và $(f_i, g_j) \not\equiv 0$ ($1 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq q-1$). Gọi $\varkappa$ là số nguyên dương hoặc $\varkappa = +\infty$ và $\overline{\varkappa} = \min\{\varkappa, n\}$. Giả thiết rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:*

- (i) $\min\{\varkappa, v_{(f_1, g_j)}\} = \dots = \min\{\varkappa, v_{(f_k, g_j)}\}$ với $0 \leq j \leq q-1$,
- (ii) $\dim\{z | (f_1, g_i)(z) = (f_1, g_j)(z) = 0\} \leq n-2$ với $0 \leq i < j \leq q-1$,
- (iii) tồn tại số nguyên l ($2 \leq l \leq k$) sao cho với mỗi dãy tăng $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$ thì $f_{j_1}(z) \wedge \dots \wedge f_{j_l}(z) = 0$ với mỗi điểm $z \in \cup_{i=0}^{q-1} (f_1, g_i)^{-1}\{0\}$.

Khi đó

(i) Nếu $q > \frac{n(2n+1)k - (\overline{\varkappa}-1)(k-1)}{k-l+1}$ thì $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$, tức là $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \equiv 0$ trên $\mathbb{C}^m$.

(ii) Nếu f_i ($1 \leq i \leq k$) là không suy biến tuyến tính trên $\mathcal{R}(\{g_j\}_{j=0}^{q-1})$ và $q > \frac{n(n+2)k - (\overline{\varkappa}-1)(k-1)}{k-l+1}$ thì $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$.

(iii) Nếu f_i ($1 \leq i \leq k$) là không suy biến tuyến tính trên $\mathbb{C}$ và g_i ($0 \leq i \leq q-1$) là các ánh xạ hằng, đồng thời

$(q - n - 1)((k - 1)(\overline{\alpha} - 1) + q(k - l + 1)) \leq qnk$
thì $f_1, \dots, f_k$ là phụ thuộc đại số trên $\mathbb{C}$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh Định lý 3.2.4 trong trường hợp $k \leq n + 1$. Giả sử $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \neq 0$.

Trước hết, ta chứng minh các mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2.5. Với bất kỳ $k - 1$ mục tiêu di động $g_{j_1}, \dots, g_{j_{k-1}} \in \{g_j\}_{j=1}^q$, tồn tại $g_{j_0} \notin \{g_{j_1}, \dots, g_{j_{k-1}}\}$ sao cho

$$\det \begin{pmatrix} (f_1, g_{j_1}) & \cdots & (f_k, g_{j_1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_1, g_{j_{k-1}}) & \cdots & (f_k, g_{j_{k-1}}) \\ (f_1, g_{j_0}) & \cdots & (f_k, g_{j_0}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Chứng minh. Giả sử ngược lại. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $g_{j_1} = g_1, \dots, g_{j_{k-1}} = g_{k-1}$. Khi đó

$$\text{rank} \begin{pmatrix} (f_1, g_1)(z) & \cdots & (f_k, g_1)(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_1, g_{n+1})(z) & \cdots & (f_k, g_{n+1})(z) \end{pmatrix} \leq k - 1$$

với mỗi $z \in \mathbb{C}^m$. Do $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \neq 0$ nên tồn tại $z_0 \in \mathbb{C}^m$ thỏa mãn $f_1(z_0) \wedge \dots \wedge f_k(z_0) \neq 0$ và $z_0 \notin \{g_1 \wedge \dots \wedge g_{n+1}\}^{-1}(0)$. Mặt khác, ta có

$$\begin{pmatrix} (f_1, g_1)(z_0) & \cdots & (f_k, g_1)(z_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_1, g_{n+1})(z_0) & \cdots & (f_k, g_{n+1})(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{10}(z_0) & \cdots & g_{1n}(z_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n+10}(z_0) & \cdots & g_{n+1n}(z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{10}(z_0) & \cdots & f_{k0}(z_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1n}(z_0) & \cdots & f_{kn}(z_0) \end{pmatrix}.$$

Vì họ $\{g_j\}_{j=1}^q$ ở vị trí tổng quát nên ta có ma trận

$$\begin{pmatrix} f_{10}(z_0) & \cdots & f_{k0}(z_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1n}(z_0) & \cdots & f_{kn}(z_0) \end{pmatrix}$$

có hạng nhỏ hơn hoặc bằng $k - 1$. Điều này là mâu thuẫn. Mệnh đề 3.2.5 được chứng minh. $\square$

Bây giờ, ta xét $k - 1$ mục tiêu di động $g_1, \dots, g_{k-1}$. Khi đó, theo Mệnh đề 3.2.5 tồn tại g_{j_0} với $j_0 > k - 1$ thỏa mãn

$$\det \begin{pmatrix} (f_1, g_1) & \cdots & (f_k, g_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_1, g_{k-1}) & \cdots & (f_k, g_{k-1}) \\ (f_1, g_{j_0}) & \cdots & (f_k, g_{j_0}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $j_0 = k$. Ta đặt

$$\mathcal{A} := \cup_{j=1}^k (f_1, g_j)^{-1}\{0\}, A = \cup_{1 \leq i < j \leq k} ((f_1, g_i)^{-1}\{0\} \cap (f_1, g_j)^{-1}\{0\}).$$

Ta chứng minh mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2.6. Với mỗi $1 \leq t \leq k$, ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k (\min\{\mathfrak{x}, v_{(f_t, g_i)}(z)\} + (k - l) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z)\}) \\ & \quad + \sum_{i=k+1}^q (k - l + 1) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z)\} \\ & \leq \mu_{\tilde{f}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{f}_k}(z) + (k(\mathfrak{x} + k - l) + (q - k)(k - l + 1)) \mu_{g_1 \wedge \dots \wedge g_k}(z) \quad (3.2) \end{aligned}$$

với mỗi $z \in \mathbb{C}^m \setminus (A \cup \cup_{i=1}^k I(f_i))$, trong đó

$$\tilde{f}_i := ((f_i, g_1) : \cdots : (f_i, g_k)) \quad (1 \leq i \leq k).$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (N_{(f_i, g_i)}^{[\varkappa]}(r) + (k-l)N_{(f_i, g_i)}^{[1]}(r)) + \sum_{i=k+1}^q (k-l+1)N_{(f_i, g_i)}^{[1]}(r) \\ \leq \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Chứng minh. Theo tính chất của divisor, ta chỉ cần xét 3 trường hợp đối với các điểm chính quy của $\mathcal{A}$.

Trường hợp 1. Giả sử $z_0 \in \mathcal{A} \setminus (A \cup \cup_{i=1}^k I(f_i) \cup \{z | g_1 \wedge \dots \wedge g_k(z) = 0\})$ là điểm chính quy của $\mathcal{A}$ sao cho z_0 chỉ là không điểm của một trong các hàm phân hình $\{(f_t, g_j)\}_{j=1}^k$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử z_0 là không điểm của (f_t, g_1) . Giả sử S là tập con giải tích bất khả quy của $\mathcal{A}$ chứa z_0 . Khi đó, chiều thuần túy của S là $m-1$. Giả sử rằng U là một lân cận mở của z_0 trong $\mathbb{C}^m$ thỏa mãn $U \cap \{\mathcal{A} \setminus S\} = \emptyset$. Chọn hàm chỉnh hình h trên $\mathbb{C}^m$ sao cho $v_h = \min\{\varkappa, v_{(f_t, g_1)}\}$ nếu $z \in S$ và $v_h = 0$ nếu $z \notin S$. Khi đó, $(f_i, g_1) = a_i h$ ($1 \leq i \leq k$), trong đó a_i là các hàm chỉnh hình. Vì ma trận

$$\begin{pmatrix} (f_1, g_2)(z) & \cdots & (f_k, g_2)(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_1, g_k)(z) & \cdots & (f_k, g_k)(z) \end{pmatrix}$$

có hạng nhỏ hơn hoặc bằng $k-1$ với mỗi $z \in \mathbb{C}^m$ nên suy ra tồn tại các hàm chỉnh hình $b_1, \dots, b_k$ sao cho có ít nhất $b_i \not\equiv 0$ và

$$\sum_{i=1}^k b_i \cdot (f_i, g_j) = 0 \quad (2 \leq j \leq k).$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết tập các không điểm chung của $\{b_i\}_{i=1}^k$ là tập con giải tích có đối chiều ≥ 2 . Khi đó, tồn

tại một chỉ số i_1 ($1 \leq i_1 \leq k$) sao cho $S \not\subset b_{i_1}^{-1}\{0\}$. Ta có thể giả thiết rằng $i_1 = k$. Thế thì, với mỗi $z \in (U \cap S) \setminus b_k^{-1}\{0\}$, ta có

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(z) \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_k(z) &= \tilde{f}_1(z) \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_{k-1}(z) \wedge \left(\tilde{f}_k(z) + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_i}{b_k} \tilde{f}_i(z) \right) \\ &= \tilde{f}_1(z) \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_{k-1}(z) \wedge (V(z)h(z)) \\ &= h(z) \cdot (\tilde{f}_1(z) \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_{k-1}(z) \wedge V(z)),\end{aligned}$$

trong đó $V(z) := (a_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_i}{b_k} a_i, 0, \dots, 0)$. Theo giả thiết, với bất kỳ dãy tăng $1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq k-1$, ta có $f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_l} \equiv 0$ trên S . Khi đó

$$\text{rank}(f_{j_1}(z), \dots, f_{j_l}(z)) = \text{rank} \begin{pmatrix} f_{j_1 0}(z) & \cdots & f_{j_l 0}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{j_1 n}(z) & \cdots & f_{j_l n}(z) \end{pmatrix} \leq l-1,$$

với mọi $z \in S$. Mặt khác

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} (f_{j_1}, g_1)(z) & \cdots & (f_{j_l}, g_1)(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_{j_1}, g_k)(z) & \cdots & (f_{j_l}, g_k)(z) \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} g_{10}(z) & \cdots & g_{1n}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{k0}(z) & \cdots & g_{kn}(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{j_1 0}(z) & \cdots & f_{j_l 0}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{j_1 n}(z) & \cdots & f_{j_l n}(z) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}\text{rank}(\tilde{f}_{j_1}(z), \dots, \tilde{f}_{j_l}(z)) &= \\ \text{rank} \begin{pmatrix} (f_{j_1}, g_1)(z) & \cdots & (f_{j_l}, g_1)(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (f_{j_1}, g_k)(z) & \cdots & (f_{j_l}, g_k)(z) \end{pmatrix} &\leq l-1,\end{aligned}$$

với mọi $z \in S$. Do đó, $\tilde{f}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_{j_l} \equiv 0$ trên S . Điều này kéo theo họ $\{\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_{k-1}\}$ là ở vị trí l -đặc biệt trên S và họ $\{\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_{k-1}, V\}$ là ở vị trí $(l+1)$ -đặc biệt trên S . Sử dụng Định lý cơ bản thứ hai đối với vị trí tổng quát ([31, Định lý 2.1]), ta có

$$\mu_{\tilde{f}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_{k-1} \wedge V}(z) \geq (k-l)v_S, \forall z \in S.$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{f}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_k}(z) &\geq v_h(z) + (k-l)v_S \\ &= \min\{\varkappa, v_{(f_t, g_1)}(z)\} + (k-l)v_S, \forall z \in (U \cup S) \setminus b_{i_1}^{-1}\{0\}. \end{aligned}$$

Theo tính chất của các divisor, ta có

$$\mu_{\tilde{f}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_k}(z_0) \geq \min\{\varkappa, v_{(f_t, g_1)}(z_0)\} + k - l.$$

Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k (\min\{\varkappa, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\} + (k-l) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\}) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^q (k-l+1) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\} \\ &= \min\{\varkappa, v_{(f_t, g_1)}(z_0)\} + k - l \\ &\leq \mu_{\tilde{f}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_k}(z_0) + (k(\varkappa + k - l) + (q - k)(k - l + 1))\mu_{g_1 \wedge \cdots \wedge g_k}(z_0). \end{aligned}$$

Trường hợp 2. Giả sử $z_0 \in \mathcal{A} \setminus (A \cup \cup_{i=1}^k I(f_i) \cup \{z | g_1 \wedge \cdots \wedge g_k(z) = 0\})$ là một điểm chính quy của $\mathcal{A}$ sao cho z_0 chỉ là không điểm của $(f_t, g_i), i > k$. Theo giả thiết, ta có họ $\{\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_k\}$ là ở vị trí l -đặc biệt trên một tập con giải tích bất khả quy có đối chiều 1 của $\mathcal{A}$ mà chứa z_0 . Sử dụng một lần nữa Định lý cơ bản thứ hai đối với vị trí tổng quát ([31, Định lý 2.1]), ta có

$$\mu_{\tilde{f}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_k}(z_0) \geq k - l + 1.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^k (\min\{\varkappa, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\} + (k-l) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\}) \\
& \quad + \sum_{i=k+1}^q (k-l+1) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\} \\
& = (k-l+1) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\} = k-l+1 \\
& \leq \mu_{\tilde{f}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{f}_k}(z_0) + (k(\varkappa + k-l) + (q-k)(k-l+1)) \mu_{g_1 \wedge \dots \wedge g_k}(z_0).
\end{aligned}$$

Trường hợp 3. Giả sử $z_0 \in (g_1 \wedge \dots \wedge g_k)^{-1}\{0\}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^k (\min\{\varkappa, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\} + (k-l) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\}) \\
& \quad + \sum_{i=k+1}^q (k-l+1) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z_0)\} \\
& \leq k(\varkappa + (k-l)) + (q-k)(k-l+1) \\
& \leq \mu_{\tilde{f}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{f}_k}(z_0) + (k(\varkappa + k-l) + (q-k)(k-l+1)) \mu_{g_1 \wedge \dots \wedge g_k}(z_0).
\end{aligned}$$

Từ các trường hợp trên và các tính chất của divisor, với mỗi $z \notin A \cup_{i=1}^k I(f_i)$, ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^k (\min\{\varkappa, v_{(f_t, g_i)}(z)\} + (k-l) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z)\}) \\
& \quad + \sum_{i=k+1}^q (k-l+1) \min\{1, v_{(f_t, g_i)}(z)\} \\
& \leq \mu_{\tilde{f}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{f}_k}(z) + (k(\varkappa + k-l) + (q-k)(k-l+1)) \mu_{g_1 \wedge \dots \wedge g_k}(z).
\end{aligned}$$

Khẳng định thứ nhất của Mệnh đề 3.2.6 được chứng minh.

Theo giả thiết và định nghĩa hàm đặc trưng, với mỗi $1 \leq j \leq k$, ta có

$$T_{\tilde{f}_j}(r) \leq T_{f_j}(r) + o(\max_{1 \leq j \leq k} \{T_{f_i}(r)\}).$$

Theo Định lý cơ bản thứ nhất đối với vị trí tổng quát ([31]), ta suy ra

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^k (N_{(f_t, g_i)}^{[\mathfrak{x}]}(r) + (k-l)N_{(f_t, g_i)}^{[1]}(r)) + \sum_{i=k+1}^q (k-l+1)N_{(f_t, g_i)}^{[1]}(r) \\
& \leq N(r, \mu_{\tilde{f}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{f}_k}) + (k(\mathfrak{x} + k-l) + (q-k)(k-l+1))N(r, \mu_{g_1 \wedge \dots \wedge g_k}) \\
& \leq \sum_{i=1}^k T_{\tilde{f}_i}(r) + (k(\mathfrak{x} + k-l) + (q-k)(k-l+1)) \sum_{i=1}^k T_{g_i}(r) + O(1) \\
& \leq \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}).
\end{aligned}$$

Khẳng định thứ hai của Mệnh đề 3.2.6 được chứng minh. Mệnh đề đã được chứng minh hoàn toàn. $\square$

Với bất kỳ dãy tăng $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq q$, ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{k-1} (N_{(f_t, g_{i_j})}^{[\mathfrak{x}]}(r) + (k-l)N_{(f_t, g_{i_j})}^{[1]}(r)) + \sum_{i \in I} (k-l+1)N_{(f_t, g_i)}^{[1]}(r) \\
& \leq \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}),
\end{aligned}$$

trong đó $I = \{1, 2, \dots, q\} \setminus \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$. Từ đó, bằng cách lấy tổng trên tất cả các dãy $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq q$, ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^q ((k-1)N_{(f_t, g_i)}^{[\mathfrak{x}]}(r) + ((k-1)(k-l) + (q-k+1)(k-l+1))N_{(f_t, g_i)}^{[1]}(r)) \\
& \leq q \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}).
\end{aligned}$$

Vì $\mathfrak{x}N_f^{[n]}(r) \leq nN_f^{[\mathfrak{x}]}(r)$, $\forall \mathfrak{x}$ nên ta có

$$\sum_{i=1}^q ((k-1)\mathfrak{x}N_{(f_t, g_i)}^{[n]}(r) + ((k-1)(k-l) + (q-k+1)(k-l+1))N_{(f_t, g_i)}^{[n]}(r))$$

$$\leq qn \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}).$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^q ((k-1)\overline{x} + (k-1)(k-l) + (q-k+1)(k-l+1)) N_{(f_i, g_i)}^{[n]}(r) \\ & \leq qn \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}). \end{aligned}$$

Do đó, bằng cách lấy tổng trên tất cả các t , ($1 \leq t \leq k$), ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^q \sum_{t=1}^k ((k-1)\overline{x} + (k-1)(k-l) + (q-k+1)(k-l+1)) N_{(f_t, g_i)}^{[n]}(r) \\ & \leq qnk \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} T_{f_i}(r)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bây giờ, ta chứng minh các khẳng định của Định lý 3.2.4.

(i) Bằng cách áp dụng Định lý 3.1.3 ([29, Hệ quả 1]) vào vế trái của (3.4), ta suy ra

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{q}{2n+1} \sum_{i=1}^k ((k-1)\overline{x} + (k-1)(k-l) + (q-k+1)(k-l+1)) T_{f_i}(r) \right. \\ & \left. \leq qnk \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq k} \{T_{f_i}(r)\}). \right. \end{aligned}$$

Cho $r \longrightarrow +\infty$, ta có

$$\begin{aligned} q & \leq k-1 + \frac{(2n+1)nk - (k-1)\overline{x} - (k-1)(k-l)}{k-l+1} \\ & = \frac{(2n+1)nk - (k-1)(\overline{x}-1)}{k-l+1}. \end{aligned}$$

Điều này là mâu thuẫn. Vì vậy, ta có $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k \equiv 0$.

(ii) Bằng cách áp dụng Định lý 3.1.2 ([29, Định lý 3.1]) vào vế trái của (3.4), ta suy ra

$$\begin{aligned} \left\| \frac{q}{n+2} \sum_{i=1}^k ((k-1)\overline{x} + (k-1)(k-l) + (q-k+1)(k-l+1)) T_{f_i}(r) \right\| \\ \leq qnk \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq j \leq k} \{T_{f_j}(r)\}). \end{aligned}$$

Cho $r \rightarrow +\infty$, ta có

$$\begin{aligned} q &\leq k-1 + \frac{(n+2)nk - (k-1)\overline{x} - (k-1)(k-l)}{k-l+1} \\ &= \frac{(n+2)nk - (k-1)(\overline{x}-1)}{k-l+1}. \end{aligned}$$

Điều này là mâu thuẫn. Từ đó, ta có $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k \equiv 0$.

(iii) Bằng cách áp dụng Định lý 3.1.1 ([30, Trang 304]) vào vế trái của (3.4), ta suy ra

$$\begin{aligned} \left\| (q-n-1) \sum_{i=1}^k ((k-1)\overline{x} + (k-1)(k-l) + (q-k+1)(k-l+1)) T_{f_i}(r) \right\| \\ \leq qnk \sum_{i=1}^k T_{f_i}(r) + o(\max_{1 \leq j \leq k} \{T_{f_j}(r)\}). \end{aligned}$$

Cho $r \rightarrow +\infty$, ta có

$$(q-n-1)((k-1)(\overline{x}-1) + q(k-l+1)) \leq qnk.$$

Điều này là mâu thuẫn. Vì vậy, ta có $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k \equiv 0$. Định lý được chứng minh. $\square$

3.3 Định lý duy nhất với bội bị chặn đối với ánh xạ phân hình

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu vấn đề duy nhất với bội bị chặn đối với các ánh xạ phân hình nhiều biến phức vào không gian xạ ảnh phức thông qua tính "suy biến đại số" của các ánh xạ đó.

Định lý 3.3.1. Giả sử $f_1, f_2 : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các ánh xạ phân hình khác hằng, $g_j : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các mục tiêu di động ở vị trí tổng quát và $T_{g_j}(r) = o(\max_{1 \leq i \leq 2} \{T_{f_i}(r)\})$ ($1 \leq j \leq q$), đồng thời $(f_i, g_j) \not\equiv 0$ ($1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq q$). Gọi $\varkappa$ là số nguyên dương hoặc $\varkappa = +\infty$ và $\bar{\varkappa} = \min\{\varkappa, n\}$. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:

- (i) $\min\{\varkappa, v_{(f_1, g_j)}(z)\} = \min\{\varkappa, v_{(f_2, g_j)}\}$ với mọi $z \in \mathbb{C}^m, 1 \leq j \leq q$,
- (ii) $\dim\{(f_1, g_i)^{-1}\{0\} \cap (f_1, g_j)^{-1}(z)\} \leq n-2$ với mọi $1 \leq i < j \leq q$,
- (iii) $f_1(z) = f_2(z)$ với mọi $z \in \cup_{j=1}^q (f_1, g_j)^{-1}\{0\}$.

Khi đó, nếu $q > 2n(2n+1) - 2(\bar{\varkappa} - 1)$ thì $f_1 \equiv f_2$.

Chứng minh. Giả sử $f_1 \not\equiv f_2$. Bằng cách đổi chỉ số nếu cần, ta có thể giả thiết

$$\underbrace{\frac{(f_1, g_1)}{(f_2, g_1)} \equiv \frac{(f_1, g_2)}{(f_2, g_2)} \equiv \dots \equiv \frac{(f_1, g_{k_1})}{(f_2, g_{k_1})}}_{\text{nhóm 1}} \not\equiv \underbrace{\frac{(f_1, g_{k_1+1})}{(f_2, g_{k_1+1})} \equiv \dots \equiv \frac{(f_1, g_{k_2})}{(f_2, g_{k_2})}}_{\text{nhóm 2}}$$

$$\not\equiv \underbrace{\frac{(f_1, g_{k_2+1})}{(f_2, g_{k_2+1})} \equiv \dots \equiv \frac{(f_1, g_{k_3})}{(f_2, g_{k_3})}}_{\text{nhóm 3}} \not\equiv \dots \not\equiv \underbrace{\frac{(f_1, g_{k_{s-1}+1})}{(f_2, g_{k_{s-1}+1})} \equiv \dots \equiv \frac{(f_1, g_{k_s})}{(f_2, g_{k_s})}}_{\text{nhóm } s},$$

ở đó $k_s = q$. Với mỗi $1 \leq i \leq q$, ta đặt

$$j = \begin{cases} i + n & \text{nếu } i + n \leq q, \\ i + n - q & \text{nếu } i + n > q, \end{cases}$$

và

$$P_i = \frac{(f_1, g_i)}{(f_1, g_j)} - \frac{(f_2, g_i)}{(f_2, g_j)}.$$

Vì $f_1 \not\equiv f_2$ nên số các phân tử của mỗi nhóm nhiều nhất là n . Thật vậy, giả sử ngược lại. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử số phân tử của nhóm 1 lớn hơn $n+1$. Với mỗi $z \in \mathbb{C}^m$, ma trận sau có

hạng 1

$$\begin{pmatrix} (f_1, g_1)(z) & (f_2, g_1)(z) \\ \vdots & \vdots \\ (f_1, g_{n+1})(z) & (f_2, g_{n+1})(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{10}(z) & \cdots & g_{1n}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n+10}(z) & \cdots & g_{n+1n}(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{10}(z) & f_{20}(z) \\ \vdots & \vdots \\ f_{1n}(z) & f_{2n}(z) \end{pmatrix}.$$

Vì họ $\{g_j\}_{j=1}^p$ ở vị trí tổng quát nên ma trận

$$\begin{pmatrix} f_{10}(z) & \cdots & f_{1n}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{20}(z) & \cdots & f_{2n}(z) \end{pmatrix}$$

có hạng là 1. Do đó, $f_1 \equiv f_2$. Điều này là mâu thuẫn. Vì vậy, $\frac{(f_1, g_i)}{(f_2, g_i)}$ và $\frac{(f_1, g_j)}{(f_2, g_j)}$ thuộc các nhóm phân biệt. Suy ra $\frac{(f_1, g_i)}{(f_2, g_i)} \neq \frac{(f_1, g_j)}{(f_2, g_j)}$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết

$$P_i = \frac{(f_1, g_i)}{(f_1, g_j)} - \frac{(f_2, g_i)}{(f_2, g_j)} \neq 0 \quad (1 \leq i \leq q).$$

Với $k = l = 2$, từ bất đẳng thức (3.2), ta có

$$\sum_{j=i, n+i} N_{(f_t, g_j)}^{[\mathcal{N}]}(r) + \sum_{j \neq i, n+i} N_{(f_t, g_j)}^{[1]}(r) \leq \sum_{j=1,2} T_{f_j}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq 2} \{T_{f_i}(r)\})$$

với $1 \leq t \leq 2$. Từ đó, lấy tổng theo i , ta có

$$\sum_{i=1}^q (2N_{(f_t, g_i)}^{[\mathcal{N}]}(r) + (q-2)N_{(f_t, g_i)}^{[1]}(r)) \leq q \sum_{j=1,2} T_{f_j}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq 2} \{T_{f_i}(r)\}).$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^q (2\overline{\mathcal{N}} + q - 2)N_{(f_t, g_i)}^{[n]}(r) \leq qn \sum_{j=1,2} T_{f_j}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq 2} \{T_{f_i}(r)\}).$$

Lấy tổng một lần nữa theo t , ta có

$$\sum_{t=1,2} \sum_{i=1}^q (2\overline{\kappa} + q - 2) N_{(f_t, g_i)}^{[n]}(r) \leq 2qn \sum_{j=1,2} T_{f_j}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq 2} \{T_{f_i}(r)\}) \quad (3.5)$$

Áp dụng Định lý 3.1.3 ([29, Hệ quả 1]) vào vế trái của (3.5), ta nhận được

$$\sum_{i=1,2} \frac{q}{2n+1} (2\overline{\kappa} + q - 2) T_{f_i}(r) \leq 2qn \sum_{j=1,2} T_{f_j}(r) + o(\max_{1 \leq i \leq 2} \{T_{f_i}(r)\}).$$

Cho $r \rightarrow +\infty$, ta có

$$q \leq 2n(2n+1) - 2(\overline{\kappa} - 1).$$

Điều này là mâu thuẫn. Do đó, ta có $f_1 \equiv f_2$. Định lý được chứng minh. $\square$

Kết luận và kiến nghị

Kết luận

Các kết quả chính của luận án:

- Đã chỉ ra một số tính chất liên quan đến những hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại và đã chỉ ra rằng lớp hàm phân hình với tổng số khuyết cực đại là rất "mỏng" theo nghĩa nếu "nhiều" các hàm phân hình với tổng số khuyết cực đại bởi các hàm phân hình "nhỏ" thì chúng không còn là các hàm phân hình có tổng số khuyết cực đại nữa.
- Đã chứng minh định lý về số khuyết của các ánh xạ phân hình nhiều biến phức với tổng số khuyết cực đại đối với mục tiêu di động.
- Đã chứng minh ba định lý về sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với mục tiêu di động ở vị trí tổng quát.
- Đã chứng minh định lý duy nhất với bội bị chặn đối với ánh xạ phân hình nhiều biến phức với số mục tiêu $q < 4n^2 + 2n$ trong tình huống không có giả thiết về tính không suy biến tuyến tính của ánh xạ phân hình $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

Trong chương 1, chúng tôi mới chỉ nghiên cứu được quan hệ số khuyết cho hàm phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mà chưa nhận được các kết quả như các Định lý 1.3.1 và Định lý 1.3.2 cho các ánh xạ phân

hình từ $\mathbb{C}^m$ vào không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với $n \geq 2$. Một cách tự nhiên, cần phải đưa ra được các định lý tương tự như các định lý đó cho trường hợp ánh xạ phân hình từ $\mathbb{C}^m$ vào không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với $n \geq 2$.

Trong chương 2, Định lý 3.2.1 về tổng số khuyết cực đại của các ánh xạ phân hình cho mục tiêu di động chưa chặn được bội.

Liệu có thể cải tiến cách chứng minh các định lý trong chương 3 để giảm được số mục tiêu di động hay không?

Với những câu hỏi và phân tích trên, hướng nghiên cứu tiếp theo của chúng tôi như sau:

- Nghiên cứu lớp ánh xạ phân hình vào không gian xạ ảnh phức chiều cao với tổng số khuyết cực đại cho các mục tiêu cố định và mục tiêu di động có tính đến việc chặn bội.
- Cải tiến chứng minh định lý cơ bản thứ hai và cách đếm bội để giảm được số các mục tiêu di động gây ra tính suy biến cho các ánh xạ phân hình.
- Tiếp tục làm về vấn đề duy nhất khi có sự tiến bộ về định lý cơ bản thứ hai và các định lý về tính suy biến đại số.

Do thời gian hạn hẹp nên chúng tôi chưa thể có được kết quả cho các vấn đề đã đặt ra. Chúng tôi hi vọng rằng vấn đề trên sẽ sớm được giải quyết trong thời gian tới.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

- [1] Pham Duc Thoan, Pham Viet Duc and Si Duc Quang, (2010) *A unicity theorem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables*, Submitted to Bull. Math. de la Soc. des Sciences Math. de Roumanie.
- [2] Duc Thoan Pham and Viet Duc Pham, (2010) *Algebraic dependences of meromorphic mappings in several complex variables*, Ukrainian Math. J. **62**, No. 7, p. 923-936.
- [3] Duc Thoan Pham and Viet Duc Pham, *On meromorphic mappings in several complex variables with maximal deficiency sum for moving targets*, Đã có nhận xét tốt của phản biện và đã gửi bản sửa chữa tới Acta Math. Vietnamica.
- [4] Pham Duc Thoan and Le Thanh Tung, (2011) *On meromorphic functions with maximal defect sum*, Ann. Polon. Math. **100**, No. 2, p. 115-125.

Tài liệu tham khảo

- [1] Y. Aihara, *Finiteness theorem for meromorphic mappings*, Osaka J. Math. **35** (1998), 593-616.
- [2] Z. Chen and Y. Li and Q. Yan, *Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings for moving targets*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. **27** (2007), 625–634.
- [3] G. Dethloff and Tran Van Tan, *Uniqueness problem for meromorphic mappings with truncated multiplicities and few targets*, Ann. de la Fac. des Sci. de Toulouse **15**(2006), 217-242.
- [4] G. Dethloff and Tran Van Tan, *Uniqueness problem for meromorphic mappings with truncated multiplicities and moving targets*, Nagoya J. Math. **181**(2006), 75-101.
- [5] A. Edrei and W. H. J. Fuchs, *On the growth of meromorphic functions with deficient values*, Trans. Amer. Math. Soc. **93**(1959), 292-328.
- [6] H. Fujimoto, *The uniqueness problem meromorphic maps into the complex projective space multiplicities in value distribution theory*, Nagoya Math. J. **58**(1975), 1-23.
- [7] H. Fujimoto, *Value Distribution Theory of the Gauss Map of Minimal Surfaces in $\mathbb{R}^m$* , Aspects of Math. **E21**, 1993.
- [8] H. Fujimoto, *Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory*, Nagoya Math. J. **152**(1998), 131-152.

- [9] W. K. Hayman, *Meromorphic Functions*, Oxford at the Clarendon Press, 1964.
- [10] Pham Hoang Ha and Si Duc Quang and Do Duc Thai, *Unicity theorems with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables sharing small identical sets for moving targets*, Intern. J. Math. **21**(2010), 1095-1120.
- [11] J. Lu and Y. Yasheng, *The sum of deficiencies of entire function on $\mathbb{C}^m$* , China Ann. Math. **24B**(2003), 221-226.
- [12] R. Nevanlinna, *Ueber eine Klasse meromorphe Funktionen*, 7 eme Congr. Math. Scand. Oslo **7**(1930), 81-83.
- [13] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [14] J. Noguchi, *A relation between order and defects of meromorphic mappings of $\mathbb{C}^m$ into $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$* , Nagoya Math. J. **59**(1975), 97-106.
- [15] J. Noguchi, *A note on entire pseudo-holomorphic curves and the proof of the Cartan-Nochka's theorem*, Kodai Math. J. **28**(2005), 336-346.
- [16] M. Ru, *On the general form of the second main theorem*, Trans Amer. Math. Soc. **349**(1997), no. 12, 5093-5105.
- [17] M. Ru, *A uniqueness theorem with moving targets without counting multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **129**(2001), 2701-2707.
- [18] M. Ru and W. Stoll, *The Cartan conjecture for moving targets*, Proc. Sympos. Pure Math. **52**(1991), 477-508.
- [19] N. Steinmetz, *A uniqueness theorem for three meromorphic functions*, Annales Acad. Sci. Fenn. **13**(1988), 93-110.

- [20] N. Toda, *On the deficiency of holomorphic curves with maximal deficiency sum*, Kodai Math. J. **24**(2001), 134-146.
- [21] N. Toda, *A survey of extremal holomorphic curves for the truncated defect relation*, Bull. Nagoya Inst. Techn. **55**(2003), 1-18.
- [22] N. Toda, *On holomorphic curves extremal for the defect relation*, Bull. Nagoya Inst. Techn. **55**(2003), 121-129.
- [23] N. Toda, *On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation and some applications*, Proc. Japan Acad. Ser. A **81**(2005), 99-104.
- [24] N. Toda, *On holomorphic curves extremal for the truncated defect relation*, Proc. Japan Acad. Ser. A **82**(2006), 18-23.
- [25] N. Toda, *On holomorphic curves extremal for the μ_n -defect relation*, Kodai Math. J. **30**(2007), 111-130.
- [26] N. Toda, *On the truncated defect relation for holomorphic curves*, Kodai Math. J. **32**(2009), 352-389.
- [27] Do Duc Thai and Si Duc Quang, *Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables for moving targets*, Intern. J. Math. **16**(2005), 903-942.
- [28] Do Duc Thai and Si Duc Quang, *Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables*, Inter. J. Math. **17**(2006), 1223-1257.
- [29] Do Duc Thai and Si Duc Quang, *Second main theorem with truncated counting function in several complex variables for moving targets*, Forum Mathematicum **20**(2008), 145-179.

- [30] W. Stoll, *Value Distribution on Parabolic Spaces*, Lecture Notes in Math. **600**(1977), Springer-Verlag.
- [31] W. Stoll, *On the propagation of dependences*, Pacific J. Math. **139**(1989), 311-337.
- [32] Z. Ye, *A sharp form of Nevanlinna second theorem of several complex variables*, Math. Z. **222**(1996), 81-95.