Luận văn Thạc sĩ Toán học

Vận dụng số phức

vào

Chứng minh một số kết quả hình học

Nguyễn Xuân Sang
ĐHKH Thái Nguyên

Ngày 01 tháng 04 năm 2013

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Mục lục

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Lời nói đầu

Việc vận dụng một vài kết quả đạt được trong Toán cao cấp để nghiên cứu Toán sơ cấp đã và đang được nhiều người quan tâm đến. Họ đã dễ dàng giải quyết bài toán đặt ra và phát hiện, mở rộng được nhiều bài toán mới. Đặc biệt, khi xét bài toán trên trường $\mathbb{Q}$ hoặc trên trường $\mathbb{R}$ thì đó là bài toán quá khó; nhưng mang bài toán đó trên $\mathbb{C}$ thì mức độ khó của chúng sẽ giảm đi rất nhiều. Nếu ai quan tâm đến Hình học sơ cấp, chúng ta sẽ gặp nhiều bài toán về tam giác được giải quyết bằng hình vẽ rất phức tạp. Ta rất khó mở rộng hay xây dựng những kết quả tương tự hoặc mới cho đa giác tùy ý. Vấn đề đặt ra ở đây:

Tìm một phương pháp có thể giải quyết nhanh gọn hơn một vài bài toán đã có và xây dựng được những bài toán tương tự hoặc mới cho đa giác.

Một vài vấn đề cũng tương đối thời sự trong Hình học sơ cấp đã và đang được nhiều người quan tâm đến:

(1) **Mở rộng Đồng nhất thức và Bất đẳng thức Ptolemy.**

(2) **Mở rộng Bất đẳng thức Hayashi.**

(3) **Mở rộng Bất đẳng thức Erdos-Mordell.**

(4) **Xây dựng đồng nhất thức và Bất đẳng thức mới.**

Ngoài ra, có nhiều Thầy Cô giáo đang quan tâm đến việc dạy Chương: Số phức và ứng dụng cho học sinh lớp 12: Giải thích như thế nào về số i với $i^2 = -1$ khi mà họ chỉ làm quen với trường $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}$.

Với những lý do kể trên, luận văn tập trung nghiên cứu:

Trường $\mathbb{C}$ và vận dụng số phức trong Hình học sơ cấp.

Luận văn được chia làm hai chương.

Chương 1 tập trung trình bày về trường các số phức $\mathbb{C}$ và chứng minh tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$, có nghĩa: Mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Mục 1.1 được dành để trình bày về số phức và nhúng $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$. Mục 1.2 tập trung xét tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$. Với việc trình bày lại hai cách chứng minh đã có, Định lý 1.2.4 chỉ ra: $\mathbb{C}$ là một trường đóng đại số. Một vài công thức nội suy đa thức, sử dụng ở chương 2, được đưa ra trong Mục 1.3.

Chương 2 tập trung trình bày về một vài ứng dụng số phức vào Hình học sơ cấp. Mục 2.1 được dành để trình bày về việc sử dụng số phức vào mở rộng đồng nhất thức và Bất đẳng thức Ptolemy trong Mệnh đề 2.1.2 và Mệnh đề 2.1.3; Bất đẳng thức Hayashi ở mệnh đề 2.1.7 và Bất đẳng thức Erdos-Mordell ở Mệnh đề 2.1.27. Trong mục này chúng tôi đã xây dựng được một vài Bất đẳng thức và đồng nhất thức mới ở Mệnh đề 2.1.9 và Mệnh đề 2.1.18, 2.1.19. Mục 2.2 tập trung xét phép quay qua số phức và mở rộng một vài bài toán Hình học sơ cấp, chẳng hạn: Ví dụ 2.2.2, Ví dụ 2.2.4. Mục 2.3 được dành để trình bày việc phát hiện nhiều hệ thức mới và tính một số tổng và tích trong lượng giác.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS.TS. Đàm Văn Nhỉ - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của em trong suốt quá trình làm luận văn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn các Thầy (Cô) giảng dạy và phòng đào tạo thuộc Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K5A đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục-Đào tạo Tỉnh Bắc Ninh, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp trường THPT Hàn Thuyên- TP Bắc Ninh - Tỉnh Bắc Ninh đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân còn hạn chế nên trong quá trình nghiên cứu chắc sẽ không tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của quý Thầy Cô. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 04 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Xuân Sang

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Về ký hiệu:

$\mathbb{N}$ được ký hiệu cho tập các số tự nhiên.

$\mathbb{N}^*$ được ký hiệu cho tập các số tự nhiên dương.

$\mathbb{Z}$ được ký hiệu cho vành các số nguyên.

$\mathbb{Q}$ được ký hiệu cho trường các số hữu tỷ.

$\mathbb{R}$ được ký hiệu cho trường các số thực.

$\mathbb{C}$ được ký hiệu cho trường các số phức.

K được ký hiệu cho một trong ba trường $\mathbb{Q}$ hoặc $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chương 1

Một vài khái niệm cơ bản

Chương này tập trung nghiên cứu vành đa thức và một số bài toán liên quan. Đây là phần trọng tâm của Đại số. Khi xét đa thức, ta thường quan tâm đến nghiệm, tính bất khả quy và biểu diễn thành tích các nhân tử của nó. Ta bắt đầu bằng việc nhắc lại một vài khái niệm.

1.1 Số phức và nhúng $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{C}$

Xét Tích Descartes $T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$ và đưa ra định nghĩa:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (c, d) \text{ khi và chỉ khi } a = c, b = d\\ (a, b) &+ (c, d) = (a + c, b + d)\\ (a, b) &. (c, d) = (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Để đơn giản, viết $(a, b).(c, d)$ qua $(a, b)(c, d)$. Từ định nghĩa phép nhân:

(i) Với $i = (0, 1) \in T$ có $i^2 = i.i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$

(ii) $(a, b)(1, 0) = (a, b) = (1, 0)(a, b)$

(iii) $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1), \ \forall\ (a, b) \in T.$

Ký hiệu $\mathbb{C}$ là tập T cùng các phép toán đã nêu ra ở trên. Ta có kết quả sau:

Bổ đề 1.1.1. *Ánh xạ* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto (a, 0)$, *là một đơn ánh và nó thỏa mãn* $\phi(a+a') = \phi(a)+\phi(a'), \phi(aa') = \phi(a)\phi(a')$ *với mọi* $a, a' \in \mathbb{R}$.

Đồng nhất $(a, 0) \in \mathbb{C}$ với $a \in \mathbb{R}$. Khi đó có thể viết $(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$ với $i^2 = (-1, 0) = -1$.
Như vậy $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ và trong $\mathbb{C}$ có kết quả dưới đây:

$$\begin{aligned}
&a + bi = c + di \text{ khi và chỉ khi } a = c, b = d\\
&a + bi + c + di = a + c + (b + d)i\\
&(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i.
\end{aligned}$$

Mỗi phần tử $z = a + bi \in \mathbb{C}$ được gọi là một *số phức* với *phần thực* a, ký hiệu $\operatorname{Re} z$, và *phần ảo* b, ký hiệu $\operatorname{Im} z$; còn i được gọi là *đơn vị ảo*. Số phức $a - bi$ được gọi là *số phức liên hợp* của $z = a + bi$ và được ký hiệu qua $\overline{z} = \overline{a + bi}$. Dễ dàng kiểm tra $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ và gọi $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ là *môđun* của z. *Số đối* của $z' = c + di$ là $-z' = -c - di$ và hiệu $z - z' = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$.
Xét mặt phẳng tọa độ (Oxy). Mỗi số phức $z = a + bi$ ta cho tương ứng với điểm $M(a; b)$. Tương ứng này là một song ánh

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z = a + bi \mapsto M(a; b).$$

Khi đồng nhất $\mathbb{C}$ với (Oxy) qua việc đồng nhất z với M, thì mặt phẳng tọa độ với biểu diễn số phức như thế được gọi là *mặt phẳng phức* hay *mặt phẳng Gauss* để ghi công C. F. Gauss-người đầu tiên đưa ra biểu diễn.

Mệnh đề 1.1.2. *Tập $\mathbb{C}$ là một trường chứa trường $\mathbb{R}$ như một trường con.*

Chứng minh: Dễ dàng kiểm tra $\mathbb{C}$ là một vành giao hoán với đơn vị 1. Giả sử $z = a + bi \neq 0$. Khi đó $a^2 + b^2 > 0$. Giả sử $z' = x + yi \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $zz' = 1$ hay $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0. \end{cases}$ Giải hệ được $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}, y = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$. Vậy $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$ là nghịch đảo của z. Tóm lại $\mathbb{C}$ là một trường. Tương ứng $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$, là một tự đẳng cấu liên hợp. Đồng nhất $a \in \mathbb{R}$ với $a + 0i \in \mathbb{C}$ và có thể coi $\mathbb{R}$ là một trường con của $\mathbb{C}$ hay $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. $\square$

Chú ý rằng, nghịch đảo của $z \neq 0$ là $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ và $\dfrac{z'}{z} = z' z^{-1} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Định nghĩa 1.1.3. Cho số phức $z \neq 0$. Giả sử M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Số đo (*rađian*) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox và tia cuối OM được gọi là một *Argument* của z và được ký hiệu qua $\mathrm{Arg}(z)$. Góc $\alpha = \angle xOM, -\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$, được gọi là *argument* của z và được ký hiệu bởi $\arg z$. Argument của số phức 0 là không định nghĩa.

Chú ý rằng, nếu α là một argument của z thì mọi argument của z đều có dạng $\alpha + k.2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Với $z \neq 0$, ký hiệu $\alpha + k.2\pi$ là Argument của z. Ký hiệu $r = \sqrt{z\bar{z}}$. Khi đó số phức $z = a + bi$ có $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$. Vậy khi $z \neq 0$ thì có thể biểu diễn $z = r\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big)$ và biểu diễn này được gọi là *dạng lượng giác* của z.

Mệnh đề 1.1.4. *Với số phức z_1, z_2 cùng biểu diễn $z_1 = r_1\big(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\big)$, $z_2 = r_2\big(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\big)$, $r_1, r_2 \geqslant 0$, ta luôn có*

(i) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $|\dfrac{z_1}{z_2}| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *và* $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

(ii) $z_1z_2 = r_1r_2\big[\cos\big(\alpha_1 + \alpha_2\big) + i\sin\big(\alpha_1 + \alpha_2\big)\big]$

(iii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big[\cos\big(\alpha_1 - \alpha_2\big) + i\sin\big(\alpha_1 - \alpha_2\big)\big]$ *khi* $r > 0$.

Chứng minh: Hiển nhiên. □

Ví dụ 1.1.5. *Với $a + bi = \big(x + iy\big)^n$ có $a^2 + b^2 = \big(x^2 + y^2\big)^n$.*

Bài giải: Từ $a + bi = \big(x + iy\big)^n$ suy ra $a - bi = \big(x - iy\big)^n$. Như vậy $a^2 + b^2 = \big(x^2 + y^2\big)^n$. □

Mệnh đề 1.1.6. **[Moivre]** *Nếu $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ thì với mỗi số nguyên dương n có $z^n = r^n\big[\cos\big(n\alpha\big) + i\sin\big(n\alpha\big)\big]$.*

Chứng minh: Kết quả được chứng minh qua quy nạp theo n. □

Hệ quả 1.1.7. *Căn bậc n của một số phức $z = r\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big) \neq 0$ là n giá trị khác nhau $z_k = r^{1/n}\Big(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big)$ với $k = 1, 2, \ldots, n$.*

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

1.2 Tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$

1.2.1 $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng, mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó chính là nội dung Định lý cơ bản của đại số. Người đầu tiên chứng minh định lý này là nhà toán học C. Gauss (1777-1855).

Định nghĩa 1.2.1. Trường K được gọi là một *trường đóng đại số* nếu mọi đa thức bậc dương thuôc $K[x]$ đều có nghiệm trong K.

Như vậy, trong $K[x]$ mọi đa thức bậc dương đều phân tích được thành tích các nhân tử tuyến tính khi K là một trường đóng đại số.

Bổ đề 1.2.2. *Mỗi đa thức bậc lẻ thuộc $\mathbb{R}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thực thuộc $\mathbb{R}$.*

Chứng minh: Giả sử $f(x) = a_0x^{2s+1}+a_1x^{2s}+\cdots+a_{2s}x+a_{2s+1} \in \mathbb{R}[x]$ với $a_0 \neq 0$. Dễ dàng thấy rằng $a_0f(x)$ sẽ tiến ra $+\infty$ khi $x \to +\infty$ và $a_0f(x)$ sẽ tiến ra $-\infty$ khi $x \to -\infty$. Từ đây suy ra sự tồn tại của các số thực $\alpha > 0$ và $\beta < 0$ thỏa mãn $a_0f(\alpha) > 0, a_0f(\beta) < 0$. Do vậy $a_0^2f(\alpha)f(\beta) < 0$ hay $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Vì đa thức $f(x)$ là hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\alpha)f(\beta) < 0$ nên, theo Định lý Weierstrass, đa thức $f(x)$ có ít nhất một nghiệm thực thuộc (α, β). $\square$

Bổ đề 1.2.3. *Mỗi đa thức bậc hai thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có hai nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.*

Chứng minh: Trước tiên ta chỉ ra, với mỗi số phức z đều có hai số phức z_1, z_2 để $z_1^2 = z, z_2^2 = z$. Thật vậy, giả sử $z = a + bi \neq 0$ và giả sử $z_1 = x + yi$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ để $z_1^2 = z$ hay $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$

Ta chỉ cần xét trường hợp $b \neq 0$ vì trường hợp $b = 0$ được xét tương tự. Vì $b \neq 0$ nên $x \neq 0$. Khi đó

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{2x} \\ 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \neq 0 \\ y = \dfrac{b}{2x}. \end{cases}$$

Ta có $z_1 = x_1 + \dfrac{bi}{2x_1}$ và $z_2 = x_2 + \dfrac{bi}{2x_2}$ thỏa mãn $z_1^2 = z_2^2 = z$.

Theo lập luận ở trên, có hai số phức z_1 và z_2 để $z_1^2 = z_2^2 = b^2 - 4ac$. Khi đó nghiệm của phương trình $\dfrac{-b+z_1}{2}$ và $\dfrac{-b+z_2}{2}$. □

Định lý 1.2.4. [d'Alembert-Gauss, Định lý cơ bản của đại số] *Mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.*

Chứng minh 1: Cho đa thức tùy ý $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ ta ký hiệu đa thức $\overline{f}(x) = x^n + \overline{a_1}x^{n-1} + \cdots + \overline{a_n}$. Khi đó $g(x) = f(x)\overline{f}(x) \in \mathbb{R}[x]$. Nếu $g(\alpha) = 0$ thì $f(\alpha) = 0$ hoặc $\overline{f}(\alpha) = 0$. Từ trường hợp $\overline{f}(\alpha) = 0$ ta suy ra $0 = \overline{\overline{f}(\alpha)} = f(\overline{\alpha})$. Tóm lại, $g(x)$ có nghiệm thì $f(x)$ có nghiệm. Chính vì kết quả này mà ta chỉ cần chứng minh định lý cho đa thức với hệ số thực.
Ta biết rằng cho mỗi đa thức $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[x]$ có trường mở rộng K của $\mathbb{R}$ để trong $K[x]$ ta có sự phân tích thành tích các nhân tử tuyến tính

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

Phân tích bậc $n = 2^d\ell$ với ℓ là số nguyên dương lẻ. Ta chứng minh có ít nhất một $\alpha_i \in \mathbb{C}$ bằng phương pháp quy nạp theo số nguyên không âm d. Nếu $d = 0$ thì $f(x)$ là đa thức bậc lẻ. Nó có ít nhất một nghiệm trong $\mathbb{C}$ theo Bổ đề 1.2.2. Nếu $d > 0$, ta giả thiết những đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ có bậc m với sự phân tích $m = 2^e p$, p lẻ và $e < d$, có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$. Với một số thực c ta xét các phần tử

$$\beta_{ij} = \alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j)$$

với tất cả các cặp chỉ số $i, j = 1, \ldots, n, i < j$. Số các cặp (i, j) như vậy bằng $\dfrac{n(n-1)}{2} = 2^{d-1}\ell(2^d\ell - 1) = 2^{d-1}q$ với số q lẻ. Đa thức bậc $2^{d-1}q$ sau đây:

$$g(x) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x - \beta_{ij})$$

có tính chất: Mỗi sự hoán vị các α_h có hoán vị của các β_{ij}. Vì các hệ số của $g(x)$ là những hàm đối xứng của các β_{ij} nên ta suy ra các hệ số này là những hàm đối xứng của các α_i. Theo định lý về các hàm đối xứng, các hệ số của $g(x)$ là những đa thức của các hàm đối xứng cơ bản của các α_i và vì c là số thực nên các hệ số của $g(x)$ là những số thực. Theo giả thiết quy nạp, $g(x)$ có ít nhất một nghiệm trong $\mathbb{C}$, điều này có

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

nghĩa: Tồn tại $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$. Có tất cả $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cặp i, j với $i < j$. Ta chọn $\dfrac{n(n-1)}{2} + 1$ giá trị thực khác nhau cho c. Khi đó ta có các đa thức (x) tương ứng và mỗi đa thức ấy có ít nất một nghiệm phức. Vì chỉ có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cặp i, j với $i < j$, nhưng có $\dfrac{n(n-1)}{2} + 1$ đa thức $g(x)$ tương ứng có nghiệm phức, nên có cặp (i, j) được tính 2 lần. Do vậy, có hai số thực c_1 và c_2 khác nhau để $a = \alpha_i\alpha_j + c_1(\alpha_i + \alpha_j), b = \alpha_i\alpha_j + c_2(\alpha_i + \alpha_j)$ đều thuộc $\mathbb{C}$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_j = \dfrac{a-b}{c_1 - c_2}, \\ \alpha_i\alpha_j = \dfrac{bc_1 - ac_2}{c_1 - c_2}. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm phức theo Bổ đề 1.2.3. Tóm lại, ta đã chỉ ra $f(x)$ có nghiệm $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$. $\square$

Chứng minh 2: Thế $x = r(\cos t + i \sin t)$ vào đa thức $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ ta có thể biểu diễn $f(x) = u + iv$ với $u = r^n \cos nt + \cdots, v = r^n \sin nt + \cdots$, trong đó các số hạng còn lại của u và v chứa lũy thừa của r với số mũ nhỏ hơn n. Khi đó $f(x)\overline{f}(x) = u^2 + v^2$. Ta chỉ ra sự tồn tại của r và t để $u^2 + v^2 = 0$.

Xét hàm số $z = \arctan \dfrac{u}{v}$. Khi đó $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{v\dfrac{\partial u}{\partial r} - u\dfrac{\partial v}{\partial r}}{u^2 + v^2}, \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{v\dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial v}{\partial t}}{u^2 + v^2}$ và suy ra $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial t} = \dfrac{p(r,t)}{(u^2 + v^2)^2}$, ở đó $p(r,t)$ là hàm liên tục. Xét hai tích phân sau

$$I_1 = \int_0^R \mathrm{dr} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial t} \,\mathrm{dt} \text{ và } I_2 = \int_0^{2\pi} dt \int_0^R \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial t} \,\mathrm{dr}\,.$$

Giả sử $u^2 + v^2 \neq 0$ với mọi r, t. Vì hàm $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial t} = \dfrac{p(r,t)}{(u^2 + v^2)^2}$ là liên tục trên hình chữ nhật $[0; R] \times [0; 2\pi]$ nên $I_1 = I_2$. Mặt khác, xét tích phân I_1. Ta có $\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial t} \,\mathrm{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\Big|_0^{2\pi} = 0$, vì $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ là hàm tuần hoàn của t với chu kỳ 2π. Do vậy $I_1 = 0$. Xét tích phân I_2. Ta có $\int_0^R \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial t} \,\mathrm{dr} = \dfrac{\partial z}{\partial t}\Big|_0^R$. Vì $u^2 + v^2 = r^{2n} + \cdots$ và $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -nr^n \sin nt + \cdots, \dfrac{\partial v}{\partial r} = nr^n \cos nt + \cdots$

nên $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{v\dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial v}{\partial t}}{u^2+v^2} = \dfrac{-nr^{2n}+\cdots}{r^{2n}+\cdots}$. Từ đây suy ra $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\partial z}{\partial t} = -n$ và $\lim\limits_{R\to\infty} I_2 = -2n\pi$. Như vậy, với R đủ lớn có $I_1 \neq I_2$: mâu thuẫn. Từ mâu thuẫn này suy ra sự tồn tại của r và t để $u = v = 0$ hay $f(x)$ có nghiệm thuộc $\mathbb{C}$. $\square$

Từ Định lý 1.2.4 suy ra kết quả sau đây về đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$:

Hệ quả 1.2.5. *Mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ với bậc $n > 0$ đều có n nghiệm trong $\mathbb{C}$ và các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$ là các đa thức bậc nhất.*

Bổ đề 1.2.6. *Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$. $f(x)$ là đa thức bất khả qui khi và chỉ khi hoặc $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$.*

Chứng minh: Hiển nhiên, nếu $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$ thì $f(x)$ là bất khả qui. Ta chứng minh điều ngược lại. Giả thiết $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ là bất khả quy với $\deg f(x) \geqslant 1$. Trường hợp $\deg f(x) = 1$ thì $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$. Xét trường hợp $\deg f(x) = 2$. Khi đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ và ta có $f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$: mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $b^2 - 4ac < 0$. Xét trường hợp $\deg f(x) > 2$. Vì $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số nên $f(x) = 0$ có nghiệm $\alpha \in \mathbb{C}$ theo Định lý 1.2.4 và như vậy nó còn có nghiệm $\overline{\alpha}$. Khi đó $f(x)$ có nhân tử $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) \in \mathbb{R}[x]$ hay $f(x)$ là khả quy : mâu thuẫn giả thiết. Tóm lại, nếu $f(x)$ là đa thức bất khả qui thì hoặc $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$. $\square$

Sử dụng các kết quả đã đạt được ở trên để chỉ ra dạng phân tích một đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ thành tích các nhân tử bất khả quy.

Định lý 1.2.7. *Mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành dạng*

$$f(x) = a(x - a_1)^{n_1} \ldots (x - a_s)^{n_s} (x^2 + b_1 x + c_1)^{d_1} \ldots (x^2 + b_r x + c_r)^{d_r}$$

với các $b_i^2 - 4c_i < 0$ cho $i = 1, \ldots, r$ khi $r \geqslant 1$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chứng minh: Vì vành $\mathbb{R}[x]$ là vành nhân tử hóa nên $f(x)$ có thể phân tích được một cách duy nhất thành tích các nhân tử bất khả quy trong $\mathbb{R}[x]$. Vì các đa thức bất khả qui trong $\mathbb{R}[x]$ chỉ có dạng hoặc $ax+b$ với $a \neq 0$ hoặc ax^2+bx+c với $a \neq 0, b^2-4ac<0$ theo Bổ đề 1.2.6 nên mỗi đa thức $f(x)$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành dạng

$$f(x) = a(x-a_1)^{n_1} \dots (x-a_s)^{n_s}(x^2+b_1x+c_1)^{d_1} \dots (x^2+b_rx+c_r)^{d_r}$$

với các $b_i^2 - 4c_i < 0$ cho $i = 1, \dots, r$ khi $r \geqslant 1$. □

Đôi khi để tìm mối liên hệ giữa các nghiệm hay một tính chất nào đó của nghiệm đa thức ta thường xét bài toán trên $\mathbb{C}$ và sử dụng kết quả sau đây:

Định lý 1.2.8. [Viét] *Giả sử $x_1, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n sau đây: $f(x) = x^n - \delta_1 x^{n-1} + \delta_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \delta_n$. Khi đó có các hệ thức*

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \delta_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ \dots \\ \delta_n = x_1x_2 \dots x_n. \end{cases}$$

Chứng minh: Từ $f(x) = x^n - \delta_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^n \delta_n = (x-x_1)\dots(x-x_n)$, vì $x_1, \dots, x_n$ là n nghiệm của $f(x)$, suy ra ngay $\delta_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots, \delta_n = x_1x_2\dots x_n$. □

Định lý 1.2.9. *Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là một đa thức đối xứng khác 0. Khi đó tồn tại một và chỉ một đa thức $s(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = s(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.*

1.2.2 Căn của đơn vị

Định nghĩa 1.2.10. Phần tử khả nghịch của một vành giao hoán R với đơn vị 1 được gọi là *phần tử khả nghịch* hoặc *phần tử đơn vị* của R. Trong nhiều trường hợp, các phần tử đơn vị này còn được gọi là *ước của đơn vị* để phân biệt chúng với đơn vị 1.

Chú ý rằng, các phần tử đơn vị lập thành một nhóm với phép nhân. Ví dụ: các phần tử khả nghịch thuộc vành thương $\mathbb{Z}_n$ lập thành nhóm nhân $U(n)$ với cấp $\varphi(n)$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Định nghĩa 1.2.11. Với số nguyên $n > 1$, một căn bậc n của đơn vị 1 trong $\mathbb{C}$ là số phức α thỏa mãn $\alpha^n - 1 = 0$.

Dễ dàng thấy rằng, số phức $\alpha = \cos\dfrac{k2\pi}{n} + i\sin\dfrac{k2\pi}{n}$ với số nguyên $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Tập các căn bậc n của đơn vị 1 trong $\mathbb{C}$ lập thành một nhóm xiclic U_n và nhóm này đẳng cấu với nhóm cộng $\mathbb{Z}_n$ bởi đẳng cấu $\cos\dfrac{k2\pi}{n} + i\sin\dfrac{k2\pi}{n} \mapsto \overline{k}$. Phần tử sinh của nhóm xiclic U_n được gọi là *căn nguyên thủy* bậc n của đơn vị 1.

Bổ đề 1.2.12. *Đặt* $\epsilon_k = \cos\dfrac{k2\pi}{n} + i\sin\dfrac{k2\pi}{n}$ *với* $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. *Ta có* $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \epsilon_k^r = \begin{cases} n \text{ khi } n \mid r \\ 0 \text{ khi } n \not| \, r. \end{cases}$

Chứng minh: Nếu r chia hết cho n và $r = sn$ thì $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \epsilon_k^r = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \epsilon_k^{sn} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 = n$. Nếu $n \not| \, r$ thì $\gamma = \cos\dfrac{r\pi}{n} + i\sin\dfrac{r\pi}{n} \neq \pm 1$. Ta nhận được tổng $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \epsilon_k^r = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(\cos\dfrac{r\pi}{n} + i\sin\dfrac{r\pi}{n}\big)^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \gamma^{2k} = \dfrac{\gamma^{2n} - 1}{\gamma^2 - 1} = 0.$ □

Mệnh đề 1.2.13. *Giả sử đa thức* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ *bậc* m *và* $\epsilon = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$. *Khi đó ta có biểu diễn*

$$a_0 + a_nx^n + a_{2n}x^{2n} + \cdots = \frac{f(x) + f(\epsilon x) + f(\epsilon^2 x) + \cdots + f(\epsilon^{n-1}x)}{n}.$$

Chứng minh: Đặt $F(x) = f(x) + f(\epsilon x) + f(\epsilon^2 x) + \cdots + f(\epsilon^{n-1}x)$. Khi đó $F(x) = na_0 + a_1x\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon^k + a_2x^2\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon^{2k} + \cdots + a_mx^m\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon^{mk}$. Do $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon^{rk} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\epsilon_k^r = \begin{cases} n \text{ khi } n \mid r \\ 0 \text{ khi } n \not| \, r \end{cases}$ nên $F(x) = na_0 + na_nx^n + na_{2n}x^{2n} + \cdots$ và ta nhận được điều phải chứng minh. □

Hệ quả 1.2.14. *Với số nguyên* n, *số nguyên tố lẻ* $p < n$ *và* $\epsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ *ta có đồng nhất thức* $F(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{p}x^p + \binom{n}{2p}x^{2p} + \cdots$

$$F(x) = \frac{(1+x)^n + (1+\epsilon x)^n + (1+\epsilon^2 x)^n + \cdots + (1+\epsilon^{p-1}x)^n}{p}.$$

Chứng minh: Theo Mệnh đề 1.2.13, với $f(x) = (1+x)^n$ ta nhận được $F(x) = \dfrac{(1+x)^n + (1+\epsilon x)^n + (1+\epsilon^2 x)^n + \cdots + (1+\epsilon^{p-1}x)^n}{p}$. □

Ví dụ 1.2.15. *Với số nguyên n, số nguyên tố lẻ $p < n$ và $\epsilon = \cos\dfrac{2\pi}{p} + i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ ta có đồng nhất thức* $\binom{n}{0} + \binom{n}{p} + \binom{n}{2p} + \cdots$

$$= \frac{2^n + (1+\epsilon)^n + (1+\epsilon^2)^n + \cdots + (1+\epsilon^{p-1})^n}{p}.$$

Bài giải: Theo Hệ quả 1.2.15, với $x = 1$ ta nhận được

$$T = \frac{(1+x)^n + (1+\epsilon x)^n + (1+\epsilon^2 x)^n + \cdots + (1+\epsilon^{p-1}x)^n}{p}.$$

□

Ví dụ 1.2.16. *Tính tổng* $T = \sum\limits_{k=0}^{3n-1}(-1)^k\binom{6n}{2k+1}3^k$ *và* $S = \sum\limits_{k=0}^{3n}(-1)^k\binom{6n}{2k}3^k$ *với số nguyên dương n.*

Bài giải: Đây là bài toán tính tổng các số nguyên. Xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Biểu diễn tổng $S + i\sqrt{3}T$. Từ những đồng nhất thức dưới đây:

$$\big(1+i\sqrt{3}\big)^{6n} = 2^{6n}\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big)^{6n} = 2^{6n}\Big(\cos\frac{n2\pi}{3} + i\sin\frac{n2\pi}{3}\Big) = 2^{6n}$$

suy ra $2^{6n} = \big(1+i\sqrt{3}\big)^{6n} = \sum\limits_{k=0}^{3n}(-1)^k\binom{6n}{2k}3^k + i\sum\limits_{k=0}^{3n-1}(-1)^k\binom{6n}{2k+1}3^k$. Do vậy $S = 2^{6n}$ và $T = 0$. □

Ví dụ 1.2.17. *Với các số nguyên dương n, k và i thỏa mãn $0 \leqslant i \leqslant k-1$, đặt* $S_{n,k,i} = \sum\limits_{j\equiv i (\operatorname{mod} k)} \mathrm{C}_n^j$ *và* $T_{n,k,i} = \sum\limits_{j\equiv i (\operatorname{mod} k)} j\,\mathrm{C}_n^j$.

(i) *Tồn tại hay không các số nguyên dương $n, k > 2$ để tất cả các số $S_{n,k,0}, S_{n,k,1}, \ldots, S_{n,k,k-1}$ bằng nhau.*

(ii) *Tồn tại hay không các số nguyên dương $n, k > 2$ để $T_{n,k,0} = T_{n,k,1} = \ldots = T_{n,k,k-1}$.*

Bài giải: Xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Gọi α là một căn bậc k của đơn vị với $\alpha \neq \pm 1$ và $\alpha^k = 1$. Khi đó $(1+\alpha)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j \alpha^j$ hay

$$\begin{aligned}(1+\alpha)^n &= \sum_{j \equiv 0 (\bmod k)} \mathrm{C}_n^j + \sum_{j \equiv 1 (\bmod k)} \alpha \mathrm{C}_n^j + \cdots + \sum_{j \equiv k-1 (\bmod k)} \alpha^{k-1} \mathrm{C}_n^j \\ &= S_{n,k,0} + \alpha S_{n,k,1} + \cdots + \alpha^{k-1} S_{n,k,k-1}.\end{aligned}$$

Nếu tồn tại hai số nguyên $n, k > 2$ để $S_{n,k,0} = S_{n,k,1} = \cdots = S_{n,k,k-1} = a$ thì $(1+\alpha)^n = a(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{k-1}) = 0$. Vậy $\alpha = -1$: vô lý. Tóm lại, không có các số nguyên dương $n, k > 2$ để $S_{n,k,0} = S_{n,k,1} = \cdots = S_{n,k,k-1}$.

Chú ý rằng khi $n = k = 2$ có $S_{2,2,0} = \mathrm{C}_2^0 + \mathrm{C}_2^2 = 2$ và $S_{2,2,1} = \mathrm{C}_2^1 = 2$. Vậy $S_{2,2,0} = S_{2,2,1}$. Tóm lại, ta đã có (i)

(ii) Từ $n(1+x)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 x + \cdots + n\mathrm{C}_n^n x^{n-1}$ suy ra đồng nhất thức

$$n(1+\alpha)^{n-1} = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 \alpha + \cdots + n\mathrm{C}_n^n \alpha^{n-1}.$$

Với ký hiệu $T = n(1+\alpha)^{n-1}$ ta sẽ có ngay kết quả dưới đây:

$$\begin{aligned}T &= \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 \alpha + \cdots + n\mathrm{C}_n^n \alpha^{n-1} \\ &= \sum_{j \equiv 0 (\bmod k)} j\,\mathrm{C}_n^j + \sum_{j \equiv 1 (\bmod k)} \alpha j\,\mathrm{C}_n^j + \cdots + \sum_{j \equiv k-1 (\bmod k)} \alpha^{k-1} j\,\mathrm{C}_n^j \\ &= T_{n,k,0} + \alpha T_{n,k,1} + \cdots + \alpha^{k-1} T_{n,k,k-1}.\end{aligned}$$

Nếu tồn tại hai số nguyên $n, k > 2$ để $T_{n,k,0} = T_{n,k,1} = \cdots = T_{n,k,k-1} = a$ thì $n(1+\alpha)^{n-1} = a(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{k-1}) = 0$. Vậy $\alpha = -1$: vô lý. Tóm lại, không có $n, k > 2$ để $T_{n,k,0} = T_{n,k,1} = \cdots = T_{n,k,k-1}$. $\square$

Ví dụ 1.2.18. *Với số nguyên tố p có dạng $4n+1$ ta xét dư của số $\prod\limits_{k=1}^{p} (k^2+1)$ chia cho p.*

Bài giải: Xét số này trong vành $\mathbb{Z}_p[i]$ và đồng nhất k với ảnh của nó, ta có biểu diễn thành tích

$$\prod_{k=1}^{p} (k^2+1) = \prod_{k=1}^{p} (k+i)(k-i) = \prod_{k=1}^{p} (k+i) \prod_{k=1}^{p} (k-i) = f(i)f(-i),$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

trong đó $f(x) = \prod_{k=1}^{p}(x+k)$. Vì $f(x) \equiv x^p - x$ trên $\mathbb{Z}_p[i]$ nên ta nhận được

$$\prod_{k=1}^{p}(k^2+1) = f(i)f(-i) = (i^p - i)((-i)^p + i) = i(-i)[i^{p-1}-1][(-i)^{p-1}-1].$$

Do đó $\prod_{k=1}^{p}(k^2+1) = 0$ hay $\prod_{k=1}^{p}(k^2+1) \equiv 0 (\bmod p)$. □

Ví dụ 1.2.19. [IMO 1978 Shortlisted Problems Fra 3] *Chứng minh rằng, với bất kỳ các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $xy - z^2 = 1$ luôn có các số nguyên không âm a, b, c, d để $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ và $z = ac + bd$.*

Bài giải: Sử dụng kết quả về tính duy nhất của biểu diễn thành tích các nhân tử bất khả quy trong $\mathbb{Z}[i]$ nên với bốn số $m, n, p, q \in \mathbb{Z}[i]$ thỏa mãn $mn = pq$ thì có các số $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i]$ để $m = ab, n = cd, p = ac, q = bd$. Vì vành $\mathbb{Z}[i]$ là vành nhân tử hóa nên từ $xy = z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$ và từ đây có $x = ab, y = cd, z + i = ac, z - i = bd$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i]$. Biểu diễn $a = a_1 + ia_2, d = d_1 + id_2$. Với $b = \overline{a}$ và $c = \overline{d}$ ta có $x = a_1^2 + a_2^2, y = d_1^2 + d_2^2$ và $z = a_1d_1 + a_2d_2$. □

Ví dụ 1.2.20. *Giả sử hai dãy số nguyên (a_n) và (b_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 8, a_2 = 58 \\ a_{n+2} = 8a_{n+1} - 3a_n + 3a_{n-1}, n \geqslant 2; \\ b_0 = 3, b_1 = 5, b_2 = 45 \\ b_{n+2} = 5b_{n+1} + 10b_n + 7b_{n-1}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Ta có $\binom{2011}{1}b_{2010} + \cdots + \binom{2011}{2010}b_1 = \binom{2011}{1}a_{2010} - \binom{2011}{2}a_{2009} + \cdots - \binom{2011}{2010}a_1$.

Bài giải: Đây là bài toán về dãy các số nguyên. Nhưng ta lại xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Xét phương trình $f(x) = x^3 - 8x^2 + 3x - 3 = 0$. Gọi ba nghiệm của nó trong $\mathbb{C}$ là x_1, x_2, x_3. Dễ dàng kiểm tra $x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = a_0$, $x_1 + x_2 + x_3 = a_1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_2$, tổng quát $a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \geqslant 0$. Tương tự $b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n, n \geqslant 0$, trong đó y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của $g(y) = y^3 - 5y^2 - 10y - 7 = 0$. Kiểm tra trực tiếp: $f(y+1) = g(y)$ và $g(x-1) = f(x)$. Vậy ta nhận được các hệ thức sau đây:

$$\begin{aligned} a_n &= x_1^n + x_2^n + x_3^n = (y_1+1)^n + (y_2+1)^n + (y_3+1)^n \\ b_n &= y_1^n + y_2^n + y_3^n = (x_1-1)^n + (x_2-1)^n + (x_3-1)^n, n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Do vậy $\begin{cases} a_n = \mathrm{C}_n^0\, b_n + \mathrm{C}_n^1\, b_{n-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}\, b_1 + \mathrm{C}_n^n\, b_0 \\ b_n = \mathrm{C}_n^0\, a_n - \mathrm{C}_n^1\, a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\, \mathrm{C}_n^{n-1}\, a_1 + (-1)^n\, \mathrm{C}_n^n\, a_0 \end{cases}$
và có $\binom{2011}{1} b_{2010} + \cdots + \binom{2011}{2010} b_1 = \binom{2011}{1} a_{2010} - \binom{2011}{2} a_{2009} + \cdots - \binom{2011}{2010} a_1$. □

Ví dụ 1.2.21. *Giả sử hai dãy số nguyên (a_n) và (b_n) xác định như sau:*

$$\begin{cases} a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = -6 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 5a_n + a_{n-1}, n \geqslant 2; \\ b_0 = 3, b_1 = -4, b_2 = -2 \\ b_{n+2} = -4b_{n+1} - 9b_n - 9b_{n-1}, n \geqslant 2. \end{cases}$$

Khi đó ta có các kết quả sau đây:

(i) $a_n = \mathrm{C}_n^0\, b_n + 2\, \mathrm{C}_n^1\, b_{n-1} + \cdots + 2^{n-1}\, \mathrm{C}_n^{n-1}\, b_1 + 2^n\, \mathrm{C}_n^n\, b_0$
$b_n = \mathrm{C}_n^0\, a_n - 2\, \mathrm{C}_n^1\, a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} 2^{n-1}\, \mathrm{C}_n^{n-1}\, a_1 + (-1)^n 2^n\, \mathrm{C}_n^n\, a_0.$

(ii) *Tìm số dư của phép chia a_p cho p khi p là số nguyên tố.*

Bài giải: (i) Đây là bài toán về dãy các số nguyên. Nhưng ta lại xét bài toán trên $\mathbb{C}$. Xét phương trình $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$. Gọi ba nghiệm của nó trong $\mathbb{C}$ là x_1, x_2, x_3. Dễ dàng kiểm tra $x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = a_0$, $x_1 + x_2 + x_3 = a_1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_2$, tổng quát

$$a_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \geqslant 0.$$

Tương tự $b_n = y_1^n + y_2^n + y_3^n, n \geqslant 0$, trong đó y_1, y_2, y_3 là ba nghiệm của $g(y) = y^3 + 4y^2 + 9y + 9 = 0$. Kiểm tra trực tiếp: $f(y+2) = g(y)$ và $g(x-2) = f(x)$. Vậy ta nhận được các hệ thức sau đây và suy ra (i):

$$\begin{aligned} a_n &= x_1^n + x_2^n + x_3^n = (y_1 + 2)^n + (y_2 + 2)^n + (y_3 + 2)^n \\ b_n &= y_1^n + y_2^n + y_3^n = (x_1 - 2)^n + (x_2 - 2)^n + (x_3 - 2)^n, n \geqslant 0. \end{aligned}$$

(ii) Từ $a_p = x_1^p + x_2^p + x_3^p = (x_1 + x_2 + x_3)^p - \sum\limits_{0 \leqslant i,j,k < p}^{i+j+k=p} \binom{p}{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k$. Với bộ ba i, j, k cố định, nhưng hoán vị cho nhau, trong a_p có tổng con

$$\frac{p!}{i!j!k!}(x_1^i x_2^j x_3^k + x_1^i x_2^k x_3^j + x_1^j x_2^i x_3^k + x_1^j x_2^k x_3^i + x_1^k x_2^j x_3^i + x_1^k x_2^i x_3^j)$$

là đa thức đối xứng của x_1, x_2, x_3. Tổng này được viết thành đa thức với hệ số nguyên của $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 5$ và $x_1x_2x_3 = 1$. Vậy $\sum\limits_{\substack{i+j+k=p \\ 0\leqslant i,j,k<p}} \binom{p}{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k$ là số nguyên chia hết cho p. Do đó $a_p \equiv 2^p (\bmod\, p)$. Nếu $p = 2$ thì $a_2 = -6$ chia hết cho 2 và dư bằng 0. Nếu $p > 2$ thì $a_p \equiv 2^p \equiv 2 (\bmod\, p)$. Vậy dư bằng 2. $\square$

Vì $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số nên đa thức bất khả quy một ẩn trên $\mathbb{C}$ chỉ là những đa thức bậc 1 theo Hệ quả 1.2.5. Chính vì lý do này mà ta chỉ xét đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ và trên $\mathbb{R}$.

Giả sử hai đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Đa thức $f(x)$ được gọi là *chia hết cho* đa thức $g(x)$ nếu có đa thức $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ để $f(x) = g(x)h(x)$.

Bổ đề 1.2.22. *Cho đa thức* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x], a_0 \neq 0$. *Nếu số hữu tỷ* $\dfrac{p}{q}$ *với* $(p, q) = 1$ *là nghiệm của phương trình* $f(x) = 0$ *thì*

(i) p *là một ước của* a_n *và* q *là một ước của* a_0.

(ii) $p - mq$ *là một ước của* $f(m)$ *cho mọi số nguyên* m.

Chứng minh: (i) Giả sử số hữu tỷ $\dfrac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ là nghiệm của $f(x) = 0$. Khi đó

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \cdots + a_nq^n = 0.$$

Vì $(p, q) = 1$ nên p là một ước của a_n và q là một ước của a_0.
(ii) Khai triển $f(x)$ theo các luỹ thừa của $x - m$ ta được

$$f(x) = a_0(x - m)^n + b_1(x - m)^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(x - m) + f(m) \in \mathbb{Z}[x].$$

Cho $x = \dfrac{p}{q}$ và quy đồng $a_0(p - mq)^n + b_1(p - mq)^{n-1}q + \cdots + b_{n-1}(p - mq)q^{n-1} + f(m)q^n = 0$. Vì $(p, q) = 1$ nên $p - mq$ là một ước của $f(m)$ cho mọi số nguyên m. $\square$

Hệ quả 1.2.23. *Nghiệm hữu tỷ của đa thức* $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ *phải là số nguyên.*

Chứng minh: Suy ra từ bổ đề trên. $\square$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Ví dụ 1.2.24. *Số* $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{6-3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ *là số hữu tỉ hay vô tỉ?*

Bài giải: Vì $\alpha^4 - 16\alpha^2 + 32 = 0$ nên đa thức $f(x) = x^4 - 16x^2 + 32 \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn $f(\alpha) = 0$. Không ước nào của 32 là nghiệm của $f(x)$. Như vậy, α là một số vô tỉ. $\square$

Ví dụ 1.2.25. *Cho số tự nhiên* $n > 1$ *và số nguyên tố* p. *Chứng minh rằng đa thức* $x^n - p$ *là bất khả quy trong* $\mathbb{Q}[x]$. *Từ đó suy ra* $\sqrt[n]{p}$ *là một số vô tỉ.*

Bài giải: Đa thức $x^n - p$ là bất khả quy theo tiêu chuẩn Eisenstein. Đa thức này không có nghiệm hữu tỷ. Vậy $\sqrt[n]{p}$ là một số vô tỉ. $\square$

Một số bài toán tiếp theo dưới đây được xét trong $\mathbb{Z}[x]$, nhưng mang chúng đặt trong $\mathbb{C}[x]$ để giải dễ dàng hơn.

Ví dụ 1.2.26. [USA 1976] *Bốn đa thức* $f(x), g(x), h(x)$ *và* $k(x)$ *thuộc* $\mathbb{Z}[x]$ *thỏa mãn đồng nhất thức* $f(x^5) + xg(x^5) + x^2h(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)k(x)$. *Khi đó* $f(x), g(x), h(x)$ *chia hết cho* $x - 1$ *và ước chung lớn nhất* $\Big(f(2013), g(2013), h(2013)\Big) \geqslant 2012$.

Bài giải: Gọi z là một căn nguyên thủy bậc 5 của đơn vị trong $\mathbb{C}$. Khi đó $z \neq 1$ và $z^5 = 1$. Vậy $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} f(1) + zg(1) + z^2h(1) = 0 \\ f(1) + z^2g(1) + z^4h(1) = 0 \\ f(1) + z^3g(1) + z^6h(1) = 0. \end{cases}$$

Vì định thức $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z^4 \\ 1 & z^3 & z^6 \end{vmatrix} \neq 0$ nên $f(1) = g(1) = h(1) = 0$ và ta có $f(x), g(x), h(x)$ chia hết cho $x - 1$. Với $x = 2013$ ta có các số thỏa mãn $f(2013), g(2013), h(2013)$ đều chia hết cho 2012. Như vậy, ước chung lớn nhất thỏa mãn $\big(f(2013), g(2013), h(2013)\big) \geqslant 2012$. $\square$

Ví dụ 1.2.27. [IMO 1973] *Chứng minh với mọi số nguyên dương* n *có*

$$2^n \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Bài giải: Xét đa thức $x^{2n+1} - 1$ trên $\mathbb{C}$ với $2n+1$ nghiệm và ta biểu diễn

$$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1} = \prod_{k=1}^{n}(x^2 - 2x\cos\frac{k2\pi}{2n+1} + 1).$$

Cho $x \to 1$ được hệ thức $2n+1 = \prod\limits_{k=1}^{n}(2-2\cos\frac{k2\pi}{2n+1}) = \prod\limits_{k=1}^{n} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}$.

Do đó $2^n \prod\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$. □

Ví dụ 1.2.28. *Với số nguyên $n \geqslant 2$, đa thức $f = 1 + 4\sum\limits_{j=1}^{2n} x^j$ có thể biểu diễn thành $f = g^2$ với $g \in \mathbb{Z}[x]$?*

Bài giải: Tích $(x-1)(f-1) = 4x(x^{2n}-1)$. Vậy ta nhận được biểu diễn $(x-1)f(x) = 4x^{2n+1} - 3x - 1 := h(x)$. Giả sử có $f(x) = g^2(x)$ hay $h(x) = (x-1)g^2(x)$. Đạo hàm hai vế $h'(x) = g^2(x) + 2(x-1)g(x)g'(x)$. Gọi $\alpha \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của $g(x)$. Khi đó $h(\alpha) = 0$ và $h'(\alpha) = 0$ vì $g(\alpha) = 0$. Ta có ngay

$$\begin{cases} 4\alpha^{2n+1} = 3\alpha + 1 \\ 8n\alpha^{2n+1} = -1. \end{cases}$$

Cộng hai hệ thức $(8n+4)\alpha^{2n+1} = 3\alpha$. Do đó $(-1)(8n+4) = 3\alpha 8n$. Vậy $\alpha = -\dfrac{2n+1}{6n}$ và từ đây suy ra $(8n+4)\Big(-\dfrac{2n+1}{6n}\Big)^{2n} = 3$ hay

$$4\Big(2n+1\Big)^{2n+1} = 3.6^{2n}.n^{2n}.$$

Vì $n \geqslant 2$ nên vế phải chia hết cho 16, vế trái không chia hết cho 16. Từ mâu thuẫn này, $f(x) = g^2(x)$ với $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ là không thể xảy ra. □

Ví dụ 1.2.29. *Có thể phân tích đa thức $x^{2011} - 2011$ ra thành tích hai đa thức với bậc $\geqslant 1$ và các hệ số nguyên không?*

Bài giải: Giả sử phân tích được $x^{2011} - 2011 = f(x)g(x)$ với $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg f, \deg g \geqslant 1$. Gọi $\deg f(x) = k < 2011$. Xét $f(x)$ trên $\mathbb{C}$ và gọi k nghiệm của $f(x)$ là $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Theo Định lý Viét, ta có $\alpha_1 \ldots \alpha_k \in \mathbb{Z}$. Vì α_j cũng là nghiệm của $x^{2011} - 2011$ nên α_j có dạng

$\sqrt[2011]{2011}(\cos\gamma + i\sin\gamma)$.Vậy $|\alpha_1 \dots \alpha_k| = \left(\sqrt[2011]{2011}\right)^k$ với $k < 2011$. Do $\left(\sqrt[2011]{2011}\right)^k$ không là số nguyên ,còn $|\alpha_1 \dots \alpha_k|$ là số nguyên nên ta gặp mâu thuẫn. Vậy không thể phân tích đa thức $x^{2011} - 2011$ ra thành tích hai đa thức với bậc $\geqslant 1$ và các hệ số nguyên. □

Ví dụ 1.2.30. *Với số tự nhiên $n > 1$, đa thức $p(x) = x^n + 18x^{n-1} + 2011$ không thể phân tích được thành tích hai đa thức với bậc $\geqslant 1$ và các hệ số nguyên.*

Bài giải: Giả sử phân tích được $x^n + 18x^{n-1} + 2011 = f(x)g(x)$ với $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg f, \deg g \geqslant 1$. Gọi $1 < \deg f(x) = k < n$. Vì $f(0)g(0) = p(0) = 2011$ là số nguyên tố nên $f(0) = \pm 1$ hoặc $f(0) = \pm 2011$. Vì vai trò $f(x)$ và $g(x)$ bình đẳng nên ta chỉ cần xét trường hợp $f(0) = \pm 1$. Xét $f(x)$ trên $\mathbb{C}$ và gọi k nghiệm của $f(x)$ là $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Theo Định lý Viét, ta có $|\alpha_1 \dots \alpha_k| = 1$. Vì α_j cũng là nghiệm của $p(x)$ nên $\alpha_j^{n-1}(\alpha_j + 18) = -2011$ với mọi $j = 1, \dots, k$. Nhân tất cả các hệ thức này với nhau và sử dụng $|\alpha_1 \dots \alpha_k| = 1$ ta nhận được $|(\alpha_1 + 18) \dots (\alpha_k + 18)| = 2011^k > 2011$. Từ $f(-18)g(-18) = p(-18) = 2011$ suy ra $f(-18)g(-18) = 2011$. Do $f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$ nên xuất hiện mâu thuẫn:

$$2011 \geqslant |f(-18)| = |(\alpha_1 + 18) \dots (\alpha_k + 18)| = 2011^k > 2011.$$

Vậy không thể phân tích đa thức $x^n + 18x^{n-1} + 2011$ ra thành tích hai đa thức với bậc $\geqslant 1$ và các hệ số nguyên. □

Chú ý 1.2.31. *Sau này vận dụng Tiêu chuẩn Eisenstein hoặc Tiêu chuẩn Osada cách giải sẽ đơn giản đi rất nhiều.*

Ví dụ 1.2.32. *Xác định số các tập con của tập $\{1, 2, \dots, 2010\}$ sao cho tổng các phần tử của nó chia hết cho 5.*

Bài giải: Xét đa thức $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{2010})$. Có một song ánh giữa mỗi tập con $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ của tập $\{1, 2, \dots, 2010\}$ với một đơn thức $x^{r_1}x^{r_2}\dots x^{r_m} = x^{r_1+r_2+\dots+r_m}$. Do vậy ta chỉ cần tìm tổng S của các hệ số của tất cả các đơn thức dạng x^{5k} thuộc $f(x)$ với số nguyên dương k. Gọi u là một căn nguên thủy bậc 5 của đơn vị, chẳng hạn chọn $u = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$. Vì $u^5 = 1$ nên $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$. Do đó $S = \dfrac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} f(u^j)$. Vì $u, u^2, u^3, u^4, u^5 = 1$ là nghiệm của $g(x) = x^5 - 1$ nên

$$g(x) = x^5 - 1 = (x-u)(x-u^2)(x-u^3)(x-u^4)(x-u^5).$$

Với $x = -1$ được $2 = -g(-1) = (1+u)(1+u^2)(1+u^3)(1+u^4)(1+u^5)$. Vì $u^5 = 1$ nên $f(u) = 2^{402}$. Tương tự $f(u^j) = 2^{402}$ với $j = 2, 3, 4$; còn $f(u^5) = f(1) = 2^{2010}$. Vậy $S = \dfrac{1}{5}\Big[4.2^{402} + 2^{2010}\Big] = \dfrac{1}{5}\Big[2^{404} + 2^{2010}\Big]$. □

1.3 Công thức nội suy đa thức

Dưới đây là một số đồng nhất thức trong vành đa thức.

Định lý 1.3.1. *Giả sử K là một trường có nhiều vô hạn phần tử. Cho f và g là hai đa thức trong $K[x_1, \ldots, x_n]$. Nếu $f(a) = g(a)$ với mọi $a \in K^n$ thì $f = g$.*

Chứng minh: Đặt $h = f - g$. Ta có $h(a) = 0$ với mọi $(a) \in K^n$. Ta phải chỉ ra rằng $h = 0$. Giả sử $h \neq 0$. Trước tiên, ta thấy $\deg h > 0$ vì h không thể là một hằng số khác không. Nếu $n = 1$ thì h chỉ có hữu hạn nghiệm. Điều này mâu thuẫn với h triệt tiêu trên K. Nếu $n > 1$ ta viết h dưới dạng

$$h = h_0 + h_1x_n + \cdots + h_dx_n^d$$

với $h_0, \ldots, h_d \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, $h_d \neq 0$. Bằng quy nạp theo n ta có thể giả thiết h_d không triệt tiêu tại mọi điểm của K^{n-1}. Chọn $a_1, ..., a_{n-1} \in K$ sao cho $h_d(a_1, ..., a_{n-1}) \neq 0$. Khi đó phương trình $h(a_1, ..., a_{n-1}, x_n) = 0$ chỉ có hữu hạn nghiệm là một điều mâu thuẫn. □

Định lý 1.3.2. [Taylor] *Cho $p(x)$ là đa thức bậc n và $a \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có*

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Chứng minh: Giả sử $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$. Bằng cách lần lượt lấy đạo hàm hai vế và so sánh các hệ số ta có công thức cần chứng minh. □

Hệ quả 1.3.3. *Cho $p(x), q(x)$ là hai đa thức bậc n và $a \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có $p(x) = q(x)$ khi và chỉ khi $p^{(k)}(a) = q^{(k)}(a)$ với $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Chứng minh: Theo Định lý 1.3.2 ta có $p(x) = p(a) + \dfrac{p'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ và $q(x) = q(a) + \dfrac{q'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{q''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{q^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Vậy $p(x) = q(x)$ khi và chỉ khi $p^{(k)}(a) = q^{(k)}(a)$ với $k = 0, 1, \ldots, n$. □

Hệ quả 1.3.4. *Ta có $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p^{(k)}(0)x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k p^{(k)}(x)x^{k+1}}{(k+1)!}$, trong đó $p(x)$ là đa thức bậc n.*

Chứng minh: Đặt $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{p^{(k)}(0)x^{k+1}}{(k+1)!}, Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k p^{(k)}(x)x^{k+1}}{(k+1)!}$. Đây là hai đa thức bậc $n+1$ thỏa mãn $P(0) = 0 = Q(0)$. Dễ dàng kiểm tra $P^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0)$ với $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$. Theo Hệ quả 1.3.3 có $P(x) = Q(x)$. □

Định lý 1.3.5. **[Lagrange]** *Cho $f(x)$ là đa thức bậc n và $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là $n+1$ số phân biệt. Đặt $g(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Khi đó ta có biểu diễn*

(i) $\quad f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) \prod\limits_{k\neq i, k=0}^{n} \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}.$

(ii) $\quad p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{p(x_i)}{g'(x_i)} \dfrac{g(x)}{x - x_i}$ *với mọi đa thức $p(x)$ bậc $\leqslant n$.*

Chứng minh: (i) Đặt $h(x) = f(x) - \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) \prod\limits_{k\neq i, k=0}^{n} \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}$. Ta có $\deg h \leqslant n$ và $h(x_0) = h(x_1) = \cdots = h(x_n) = 0$. Đa thức $h(x)$ có $\deg h \leqslant n$ và có quá n nghiệm là $x_0, x_1, ..., x_n$. Do đó $h(x)$ phải là đa thức 0. Vậy $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(x_i) \prod\limits_{k\neq i, k=0}^{n} \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k}$.

(ii) Vì $\prod\limits_{k\neq i, k=0}^{n} \dfrac{x - x_k}{x_i - x_k} = \dfrac{1}{g'(x_i)} \dfrac{g(x)}{x - x_i}$ nên từ (i) ta suy ra hệ thức sau đây:$f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{f(x_i)}{g'(x_i)} . \dfrac{g(x)}{x - x_i}$. □

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Định lý 1.3.6. [Newton] *Cho $p(x)$ là đa thức bậc n và $n+1$ số phân biệt $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Khi đó tồn tại các số $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ để*

$$p(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-\alpha_0) + \lambda_2(x-\alpha_0)(x-\alpha_1) + \cdots + \lambda_n(x-\alpha_0)\dots(x-\alpha_{n-1}).$$

Chứng minh: Cho $x = \alpha_0$ ta được $\lambda_0 = p(\alpha_0)$ và ký hiệu

$$\begin{aligned} p(\alpha_0, x) &= \frac{p(x) - p(\alpha_0)}{x - \alpha_0} \\ &= \lambda_1 + \lambda_2(x-\alpha_1) + \cdots + \lambda_n(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Hiển nhiên $\lambda_1 = p(\alpha_0, \alpha_1)$. Đặt

$$p(\alpha_0, \dots, \alpha_i, x) = \frac{p(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, x) - p(\alpha_0, \dots, \alpha_i)}{x - \alpha_i}.$$

Khi đó $\lambda_{i+1} = p(\alpha_0, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1})$ cho mọi i. □

Hệ quả 1.3.7. *Cho $p(x)$ là đa thức bậc n và nhận giá trị là những số hữu tỉ tại $n+1$ số phân biệt $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$. Khi đó $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$.*

Chứng minh: Biểu diễn $p(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-\alpha_0) + \lambda_2(x-\alpha_0)(x-\alpha_1) + \cdots + \lambda_n(x-\alpha_0)\dots(x-\alpha_{n-})$ theo Định lý 1.3.6. Vì $\lambda_0 = p(\alpha_0) \in \mathbb{Q}$ nên $\lambda_0 \in \mathbb{Q}$. Bằng quy nạp ta suy ra $\lambda_i = p(\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \in \mathbb{Q}$ cho mọi i. Vậy $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$. □

Ví dụ 1.3.8. *Các số nguyên sắp theo thứ tự tăng dần $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Chứng minh trong số các giá trị của đa thức $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ thuộc $\mathbb{R}[x]$ tại $x_0, \dots, x_n$ có ít nhất một i để $|p(x_i)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.*

Bài giải: Trước tiên ta nhận xét: Với $n+1$ số thực hay phức phân biệt $x_0, ..., x_n$ và đặt $g(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$, mỗi đa thức $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ bậc n có $a_0 = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{p(x_i)}{g'(x_i)}$. Thật vậy, theo công thức nội suy Lagrange ta có $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{p(x_i)}{g'(x_i)} \dfrac{g(x)}{x - x_i}$. So sánh các hệ số của x^n ta suy ra $a_0 = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{p(x_i)}{g'(x_i)}$. Đặt $f(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Khi đó $1 = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{p(x_i)}{f'(x_i)}$. Đặt $\alpha = \max\{|p(x_0)|, \dots, |p(x_n)|\}$. Vì $|f(x_i)| \geq i!(n-i)!$ nên ta có

$$1 = |\sum_{i=0}^{n} \frac{p(x_i)}{f'(x_i)}| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{|p(x_i)|}{|f'(x_i)|} \leqslant \alpha \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} \leqslant \alpha \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!}.$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Vậy $1 \leqslant \alpha \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{\alpha 2^n}{n!}$ hay $\alpha \geqslant \frac{n!}{2^n}$. $\square$

Ví dụ 1.3.9. *Ký hiệu* $\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ *với* $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. *Xác định đa thức* $f(x)$ *bậc* $n-1$ *thỏa mãn* $f(\alpha_k) = k+1$ *với* $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Bài giải: Từ $g(x) = x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\big(x - \alpha_k\big)$ suy ra $g'(\alpha_k) = n\alpha_k^{n-1}$ và như thế $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(\alpha_k)}{g'(\alpha_k)} \frac{x^n - 1}{x - \alpha_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(k+1\big)\alpha_k \prod_{j=0, j\neq k}^{n-1}\big(x - \alpha_j\big)$ theo Định lý 1.3.5. Biến đổi được $f(x) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\big(1 - i\cot\frac{k\pi}{n}\big)x^k$. $\square$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Chương 2

Ứng dụng số phức vào nghiên cứu Hình học sơ cấp

2.1 Một vài đồng nhất thức và Bất đẳng thức trong Hình học sơ cấp

2.1.1 Đồng nhất thức và Bất đẳng thức Ptolemy cho đa giác

Mục này bàn về cách tổng quát hóa một vài kết quả cho đa giác mà vẫn giữ được *"hình bóng ban đầu"* của nó. Việc phát biểu bài toán mở rộng thể hiện sự am hiểu sâu sắc, tinh tế bài toán đã biết. Chúng ta có thể đi theo hai cách:

1. Tăng số đỉnh thành bài toán cho đa giác tùy ý.

2. Xây dựng bài toán mới sao cho bài toán ban đầu là trường hợp đặc biệt của nó.

Bây giờ chúng ta tổng quát hóa Đồng nhất thức và Bất đẳng thức Ptolemy, Bất đẳng thức Hayashi sau đây:

(i) Nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn thì có đồng nhất thức

$$AB.CD + AD.BC = AC.DB.$$

(ii) Với 4 điểm A, B, C, D ta luôn có $AB.CD + AD.BC \geqslant AC.DB$.

(iii) Với ΔABC cạnh a, b, c và điểm M tùy ý luôn có bất đẳng thức

$$aMB.MC + bMC.MA + cMA.MB \geqslant abc.$$

Với biểu diễn kết quả như trên ta khó có thể mở rộng hoặc ta phải vừa mở rộng vừa *chỉnh hình* bài toán đã biết. Phát biểu lại ba bài toán:

(a) Nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn thì có đồng nhất thức
$$\frac{AB}{DA.DB}+\frac{BC}{DB.DC}=\frac{CA}{DC.DA}.$$

(b) Với 4 điểm A, B, C, D ta luôn có $\dfrac{AB}{DA.DB}+\dfrac{BC}{DB.DC}\geqslant\dfrac{CA}{DC.DA}$.

(c) Với ΔABC cạnh a, b, c và điểm M tùy ý luôn có bất đẳng thức
$$\frac{1}{AB.AC.MA}+\frac{1}{BC.BA.MB}+\frac{1}{CA.CB.MC}\geqslant\frac{1}{MA.MB.MC}.$$

Nếu ai quen với số đo đại số và ký hiệu hình thức thì coi $XY = y - x$, có
$$\begin{aligned}
\frac{AB}{DA.DB}+\frac{BC}{DB.DC} &= \frac{b-a}{(a-d)(b-d)}+\frac{c-b}{(b-d)(c-d)}\\
&= \frac{1}{a-d}-\frac{1}{b-d}+\frac{1}{b-d}-\frac{1}{c-d}\\
&= \frac{1}{a-d}-\frac{1}{c-d}=\frac{CA}{DC.DA}.\\
\frac{AB}{DA.DB}+\frac{BC}{DB.DC} &= \left|\frac{b-a}{(a-d)(b-d)}\right|+\left|\frac{c-b}{(b-d)(c-d)}\right|\\
&\geqslant \left|\frac{1}{a-d}-\frac{1}{b-d}+\frac{1}{b-d}-\frac{1}{c-d}\right|\\
&= \left|\frac{1}{a-d}-\frac{1}{c-d}\right|=\frac{CA}{DC.DA}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{AB.AC.MA}+\frac{1}{BC.BA.MB}+\frac{1}{CA.CB.MC}\\
= &\left|\frac{1}{(b-a)(c-a)(a-m)}\right|+\left|\frac{1}{(c-b)(a-b)(b-m)}\right|\\
+ &\left|\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-m)}\right|\\
\geqslant &\left|\frac{1}{(a-m)(b-m)(c-m)}\right|=\frac{1}{MA.MB.MC}
\end{aligned}$$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

qua việc xét đồng nhất $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(m-a)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)(m-b)}$
$+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(m-c)}=\dfrac{1}{(m-a)(m-b)(m-c)}$.
Từ cách tính toán hình thức như trên ta mở rộng các kết quả của Ptolemy và của Hayashi như sau đây:

Ví dụ 2.1.1. [**Ptolemy**] *Nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn thì có $AB.CD + AD.BC = AC.DB$ hay $\dfrac{AB}{DA.DB}+\dfrac{BC}{DB.DC}=\dfrac{CA}{DC.DA}$.*

Bài giải: Không hạn chế có thể giả thiết đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ có bán kính $R = 1$. Các điểm A, B, C, D có tọa vị z_1, z_2, z_3, z_4 với $z_k = \cos u_k + i \sin u_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, và $0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < 2\pi$. Vì $(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_4 - z_1)(z_3 - z_2) = (z_3 - z_1)(z_4 - z_2)$ và

$$\begin{aligned}
(z_2-z_1)(z_4-z_3) &= -4\sin\frac{u_2-u_1}{2}\sin\frac{u_4-u_3}{2}e^{\dfrac{i(u_1+u_2+u_3+u_4)}{2}}\\
(z_4-z_1)(z_3-z_2) &= -4\sin\frac{u_4-u_1}{2}\sin\frac{u_3-u_2}{2}e^{\dfrac{i(u_1+u_2+u_3+u_4)}{2}}\\
(z_3-z_1)(z_4-z_2) &= -4\sin\frac{u_3-u_1}{2}\sin\frac{u_4-u_2}{2}e^{\dfrac{i(u_1+u_2+u_3+u_4)}{2}}
\end{aligned}$$

nên có đồng nhất $4\sin\dfrac{u_3-u_1}{2}\sin\dfrac{u_4-u_2}{2}=4\sin\dfrac{u_2-u_1}{2}\sin\dfrac{u_4-u_3}{2}$
$+4\sin\dfrac{u_4-u_1}{2}\sin\dfrac{u_3-u_2}{2}$ và suy ra $AB.CD+AD.BC = AC.DB$. □

Mệnh đề 2.1.2. [**Đồng nhất thức Ptolemy cho đa giác**] *Nếu $A_1 \dots A_n M$ là đa giác nội tiếp trong một đường tròn thì luôn có đồng nhất thức*

$$\frac{A_1A_2}{MA_1.MA_2}+\frac{A_2A_3}{MA_2.MA_3}+\cdots+\frac{A_{n-1}A_n}{MA_{n-1}.MA_n}=\frac{A_nA_1}{MA_n.MA_1}.$$

Khi $n = 3$ ta có ngay Đồng nhất thức Ptolemy.

Bài giải: Không hạn chế có thể giả thiết đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2\dots A_nM$ có bán kính $R = 1$. Các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, M$

có tọa vị $z_1, z_2, \ldots, z_n, z$ với $z_k = \cos u_k + i\sin u_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, và $z = \cos u + i\sin u$, trong đó $0 < u < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < 2\pi$. Vì $\dfrac{z_1 - z_n}{(z - z_1)(z - z_n)} = \dfrac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} + \cdots + \dfrac{z_{n-1} - z_n}{(z - z_{n-1})(z - z_n)}$ và các hệ thức sau đây:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} &= \frac{i2\sin\dfrac{u_2 - u_1}{2}e^{-iu}}{4\sin\dfrac{u_1 - u}{2}\sin\dfrac{u_2 - u}{2}} = \frac{iA_1A_2e^{-iu}}{MA_1.MA_2}\\
\frac{z_2 - z_3}{(z - z_2)(z - z_3)} &= \frac{i2\sin\dfrac{u_3 - u_2}{2}e^{-iu}}{4\sin\dfrac{u_2 - u}{2}\sin\dfrac{u_3 - u}{2}} = \frac{iA_2A_3e^{-iu}}{MA_2.MA_3}\\
\cdots &= \cdots\\
\frac{z_{n-1} - z_n}{(z - z_{n-1})(z - z_n)} &= \frac{i2\sin\dfrac{u_n - u_{n-1}}{2}e^{-iu}}{4\sin\dfrac{u_n - u}{2}\sin\dfrac{u_{n-1} - u}{2}} = \frac{iA_{n-1}A_ne^{-iu}}{MA_{n-1}.MA_n}\\
\frac{z_1 - z_n}{(z - z_1)(z - z_n)} &= \frac{i2\sin\dfrac{u_n - u_1}{2}e^{-iu}}{4\sin\dfrac{u_n - u}{2}\sin\dfrac{u_1 - u}{2}} = \frac{iA_nA_1e^{-iu}}{MA_n.MA_1}
\end{aligned}$$

nên có $\dfrac{A_1A_2}{MA_1.MA_2} + \dfrac{A_2A_3}{MA_2.MA_3} + \cdots + \dfrac{A_{n-1}A_n}{MA_{n-1}.MA_n} = \dfrac{A_nA_1}{MA_n.MA_1}$. $\square$

Mệnh đề 2.1.3. [Bất đẳng thức Ptolemy cho đa giác] *Với đa giác $A_1 \ldots A_n$ và điểm M thuộc cùng một mặt phẳng ta luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{A_1A_2}{MA_1.MA_2} + \frac{A_2A_3}{MA_2.MA_3} + \cdots + \frac{A_{n-1}A_n}{MA_{n-1}.MA_n} \geqslant \frac{A_nA_1}{MA_n.MA_1}.$$

Khi $n = 3$ ta có Bất đẳng thức Ptolemy. Đặc biệt, khi $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nA_1 > 0$ ta còn có bất đẳng thức $\dfrac{1}{MA_1.MA_2} + \dfrac{1}{MA_2.MA_3} + \cdots + \dfrac{1}{MA_{n-1}.MA_n} \geqslant \dfrac{1}{MA_n.MA_1}$.

Chứng minh: Giả sử đỉnh A_k có tọa vị z_k và điểm M có tọa vị z. Từ bất đẳng thức $\dfrac{|z_1 - z_2|}{|z - z_1||z - z_2|} + \dfrac{|z_2 - z_3|}{|z - z_2||z - z_3|} + \cdots + \dfrac{|z_{n-1} - z_n|}{|z - z_{n-1}||z - z_n|}$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

$\geqslant \dfrac{|z_1 - z_n|}{|z - z_1||z - z_n|}$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{A_1A_2}{MA_1.MA_2} + \frac{A_2A_3}{MA_2.MA_3} + \cdots + \frac{A_{n-1}A_n}{MA_{n-1}.MA_n} \geqslant \frac{A_nA_1}{MA_n.MA_1}.$$

Với $n = 3$ bất đẳng thức trở thành $\dfrac{A_1A_2}{MA_1.MA_2} + \dfrac{A_2A_3}{MA_2.MA_3} \geqslant \dfrac{A_3A_1}{MA_3.MA_1}$ hay $A_1A_2.MA_3 + A_2A_3.MA_1 \geqslant A_3A_1.MA_2$: là Bất đẳng thức Ptolemy. Ta có $\dfrac{1}{MA_1.MA_2} + \dfrac{1}{MA_2.MA_3} + \cdots + \dfrac{1}{MA_{n-1}.MA_n} \geqslant \dfrac{1}{MA_n.MA_1}$ khi $A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$. □

Ví dụ 2.1.4. *Giả sử đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$ với độ dài cạnh $A_kA_{k+1} = kA_1A_2$ và quy ước $n+1 \equiv 1$. Chứng minh rằng, không thể tồn tại điểm M ở trong mặt phẳng $A_1A_2 \ldots A_n$ thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\frac{1}{MA_1.MA_2} + \frac{2}{MA_2.MA_3} + \cdots + \frac{n-1}{MA_{n-1}.MA_n} < \frac{n}{MA_n.MA_1}.$$

Bài giải: Nếu có điểm M thỏa mãn đầu bài thì ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{MA_1.MA_2} + \frac{2}{MA_2.MA_3} + \cdots + \frac{n-1}{MA_{n-1}.MA_n} \geqslant \frac{n}{MA_n.MA_1}.$$

Từ đây suy ra điều cần chứng minh. □

Ví dụ 2.1.5. [Erdos-Mordell] *Ký hiệu khoảng cách từ điểm M ở trong tam giác ABC đến cạnh BC, CA, AB là x, y, z. Khi đó có bất đẳng thức*

$$MA + MB + MC \geqslant 2(x + y + z).$$

Bài giải: Giả sử AM cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D. Gọi khoảng cách từ D đến CA, BA là y', z'. Khi đó ta có $aDA = bDB + cDC$ theo Đồng nhất thức Ptolemy và $\dfrac{y}{y'} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{z}{z'}$. Vì $DC \geqslant y' = \dfrac{yDA}{MA}$ và $DB \geqslant z' = \dfrac{zDA}{MA}$ nên $aDA \geqslant b\dfrac{zDA}{MA} + c\dfrac{yDA}{MA}$ hay $MA \geqslant z\dfrac{b}{a} + y\dfrac{c}{a}$. Hoàn toàn tương tự có $MB \geqslant x\dfrac{c}{b} + z\dfrac{a}{b}$ và $MC \geqslant y\dfrac{a}{c} + x\dfrac{b}{c}$. Từ đây suy ra $MA + MB + MC \geqslant 2(x + y + z)$. □

2.1.2 Bất đẳng thức Hayashi cho đa giác

Ví dụ 2.1.6. [**Hayashi**] *Với ΔABC cạnh a, b, c và điểm M tùy ý luôn có*

$$aMB.MC + bMC.MA + cMA.MB \geqslant abc.$$

Bài giải: Giả sử A, B, C và M có tọa vị z_a, z_b, z_c và z, tương ứng. Từ đồng nhất thức $\dfrac{1}{(z-z_a)(z-z_b)(z-z_c)} = \dfrac{1}{(z_a-z_b)(z_a-z_c)(z-z_a)}$

$$+\frac{1}{(z_b-z_c)(z_b-z_a)(z-z_b)} + \frac{1}{(z_c-z_a)(z_c-z_b)(z-z_c)}$$

suy ra $\dfrac{1}{AB.AC.MA} + \dfrac{1}{BC.BA.MB} + \dfrac{1}{CA.CB.MC} \geqslant \dfrac{1}{MA.MB.MC}$ và ta có điều cần chứng minh. □

Tiếp theo là việc mở rộng Bất đẳng thức Hayashi cho đa giác n cạnh.

Mệnh đề 2.1.7. [**Bất đẳng thức Hayashi cho đa giác**] *Với đa giác $A_1 \ldots A_n M$ ta luôn có bất đẳng thức sau đây:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{MA_k \prod\limits_{i \neq k}^{n} A_i A_k} \geqslant \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} MA_k}.$$

Khi $n = 3$ và $a_1 = A_2A_3, a_2 = A_3A_1, a_3 = A_1A_2$ ta nhận được Bất đẳng thức Hayashi cho tam giác $a_1MA_2.MA_3 + a_2MA_3.MA_1 + a_3MA_1.MA_2 \geqslant a_1a_2a_3$.

Chứng minh: Giả sử đỉnh A_k có tọa vị a_k với $k = 1, 2, \ldots, n$, và điểm M có tọa vị z. Dễ dàng kiểm tra biểu diễn

$$\frac{1}{(a_1 - z)\ldots(a_n - z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\prod\limits_{i \neq k}^{n} (a_i - a_k)(a_k - z)}.$$

Từ đây suy ra bất dẳng thức $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{MA_k \prod\limits_{i \neq k}^{n} A_i A_k} \geqslant \dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} MA_k}$. □

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Ví dụ 2.1.8. *Giả sử tam giác ABC không tù có ba cạnh là a, b, c. Chứng minh rằng, với bất kỳ điểm M ở trong tam giác ABC ta đều có*

$$aMB.MC + bMC.MA + cMA.MB \geqslant abc.$$

Dấu = xảy ra khi M là trực tâm ΔABC.

Bài giải: Ta có $aMB.MC + bMC.MA + cMA.MB \geqslant abc$ theo Bất đẳng thức Hayashi. Giả thiết M trùng trực tâm H của ΔABC. Khi đó $aHB.HC = 2RHB.HC \sin \angle A = 4RS_{HBC}$. Tương tự, có $bHC.HA = 4RS_{HCA}$ và $cHA.HB = 4RS_{HAB}$. Do vậy $aHB.HC + bHC.HA + cHA.HB = 4RS_{ABC} = abc$. □

2.1.3 Bất đẳng thức và đồng nhất thức (M, N)

Bây giờ ta sẽ chứng minh một bất đẳng thức mà Bất đẳng thức Hayashi chỉ là những trường hợp đặc biệt của nó. Vận dụng các kết quả đạt được ta có thể xây dựng được nhiều bất đẳng thức mới cho tam giác.

Mệnh đề 2.1.9. *Giả sử đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$. Khi đó, với bất kỳ $s < n$ điểm $N_1, \ldots, N_s$ và điểm M thuộc mặt phẳng $A_1A_2 \ldots A_n$ luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{s} MN_j}{\prod\limits_{i=1}^{n} MA_i} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s} A_kN_j}{\prod\limits_{i \neq k} A_kA_i.MA_k}, (M, N).$$

Hơn nữa, ta còn có những trường hợp đặc biệt thể hiện tính tổng quát cho một số kết quả đã nêu ra.

(i) *Khi $s = 0$ ta có Bất đẳng thức Hayashi cho đa giác.*

(ii) *Khi $n = 3, s = 1$, bốn điểm A, B, C, N thuộc đường tròn tâm M ta có bất đẳng thức $aAN + bBN + cCN \geqslant 4S_{ABC}$.*

Chứng minh: Giả sử các A_k có tọa vị a_k, M có tọa vị z và N_h có tọa vị z_h. Theo Công thức nội suy Lagrange có $\prod\limits_{j=1}^{s}(z - z_j) =$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\prod_{j=1}^{s}(a_k - z_j)}{\prod_{i \neq k}(a_k - a_i)} \prod_{i \neq k}(z - a_i)$ và suy ra $\dfrac{\prod_{j=1}^{s}|z - z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|z - a_i|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\prod_{j=1}^{s}|a_k - z_j|}{\prod_{i \neq k}|a_k - a_i||z - a_k|}$.

Từ đây suy ra bất đẳng thức hình học $\dfrac{\prod_{j=1}^{s} MN_j}{\prod_{i=1}^{n} MA_i} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\prod_{j=1}^{s} A_kN_j}{\prod_{i \neq k} A_kA_i.MA_k}$.

(i) Khi $s = 0$ ta có $\prod MN_j = 1 = \prod A_kN_j$ và Bất dẳng thức (M, N) trở thành Bất đẳng thức Hayashi cho đa giác $\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n} MA_i} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\prod_{i \neq k} A_kA_i.MA_k}$.

(ii) Khi $n = 3, s = 1$, và bốn điểm A, B, C, N cùng thuộc đường tròn tâm M ta có bất đẳng thức $\dfrac{abc}{R} \leqslant aAN + bBN + cCN$ hay $aAN + bBN + cCN \geqslant 4S_{ABC}$. □

Chú ý 2.1.10. *Ký hiệu R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC và N là tâm đường tròn ngoại tiếp. Từ bất đẳng thức $aAN + bBN + cCN \geqslant 4S_{ABC}$ suy ra $R(a + b + c) \geqslant 2r(a + b + c)$ hay $R \geqslant 2r$* [**Euler**].

Ví dụ 2.1.11. *Cho tam giác ABC với độ dài cạnh a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp là R, r. Gọi O, I và G là tâm đường tròn ngoại, nội tiếp và trọng tâm của ΔABC. Ký hiệu R_1, R_2, R_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB, tương ứng. Ký hiệu r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB, tương ứng và ký hiệu R_1', R_2', R_3' là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB. Khi đó có*

(i) $R^2 \geqslant \dfrac{abc}{a + b + c}$.

(ii) $R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 3R$.

(iii) $\dfrac{r_a}{h_a} + \dfrac{r_b}{h_b} + \dfrac{r_c}{h_c} \geqslant \dfrac{R}{r}$, *ở đó h_a, h_b, h_c là độ dài ba đường cao của ΔABC.*

(iv) $\dfrac{R'_1x}{h_a} + \dfrac{R'_2y}{h_b} + \dfrac{R'_3z}{h_c} \geqslant R$ *khi* ΔABC *không tù và* x, y, z *là khoảng cách từ* O *đến ba cạnh.*

Bài giải: (i) Ta có $aOB.OC + bOC.OA + cOA.OB \geqslant abc$ hay $R^2 \geqslant \dfrac{abc}{a+b+c}$ theo Bất đẳng thức (M,N).

(ii) Theo Bất đẳng thức (M,N) ta có $aGB.GC+bGC.GA+cGA.GB \geqslant abc$. Vì $aGB.GC = 4R_1S_{GBC} = 4R_1\dfrac{S_{ABC}}{3} = 4R_1\dfrac{abc}{3.4R}$,... nên ta có $R_1\dfrac{abc}{3R} + R_2\dfrac{abc}{3R} + R_3\dfrac{abc}{3R} \geqslant abc$ hay $R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 3R$.

(iii) Theo Bất đẳng thức (M,N) ta có $aIB.IC + bIC.IA + cIA.IB \geqslant abc$. Vì $aIB.IC = 4r_aS_{IBC} = 2r_ara = 4\dfrac{r_a}{h_a}\dfrac{rabc}{4R} = \dfrac{r_a}{h_a}\dfrac{rabc}{R}$,... nên ta có $\dfrac{r_a}{h_a}\dfrac{rabc}{R} + \dfrac{r_a}{h_a}\dfrac{rabc}{R} + \dfrac{r_a}{h_a}\dfrac{rabc}{R} \geqslant abc$ hay $\dfrac{r_a}{h_a} + \dfrac{r_b}{h_b} + \dfrac{r_c}{h_c} \geqslant \dfrac{R}{r}$.

(iv) Theo Bất đẳng thức (M,N) ta có $aOB.OC+bOC.OA+cOA.OB \geqslant abc$. Vì $aOB.OC = 4R'_1S_{OBC} = 2R'_1xa = 4R'_1\dfrac{x}{h_a}\dfrac{abc}{4R} = R'_1\dfrac{x}{h_a}\dfrac{abc}{R}$,... nên ta có $\dfrac{R'_1x}{h_a}\dfrac{abc}{R} + \dfrac{R'_2y}{h_b}\dfrac{abc}{R} + \dfrac{R'_3z}{h_c}\dfrac{abc}{R} \geqslant abc$ hay $\dfrac{R'_1x}{h_a} + \dfrac{R'_2y}{h_b} + \dfrac{R'_3z}{h_c} \geqslant R$. $\square$

Ví dụ 2.1.12. *Cho tứ giác* $ABCD$ *nội tiếp đường tròn tâm* O *bán kính* R. *Giả sử tam giác* ABC *với độ dài cạnh* a, b, c *và* I, J_a, J_b, J_c *là tâm đường tròn nội tiếp và tâm các đường tròn bàng tiếp của* ΔABC. *Đặt* $DA = x, DB = y, DC = z$. *Khi đó, với bất kỳ điểm* M *luôn có*

(i) $\dfrac{abcMI}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{aAI}{MA} + \dfrac{bBI}{MB} + \dfrac{cCI}{MC}$.

(ii) $\dfrac{MI\sqrt{a+b+c}}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{bc}MA} + \dfrac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{ca}MB} + \dfrac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{ab}MC}$.

(iii) $\dfrac{MJ_a + MJ_b + MJ_c}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{AJ_a + AJ_b + AJ_c}{bcMA} + \dfrac{BJ_a + BJ_b + BJ_c}{caMB} + \dfrac{CJ_a + CJ_b + CJ_c}{abMC}$.

(iv) $\dfrac{MJ_a.MJ_b + MJ_b.MJ_c + MJ_c.MJ_a}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{AJ_a.AJ_b + AJ_b.AJ_c + AJ_c.AJ_a}{bcMA} + \dfrac{BJ_a.BJ_b + BJ_b.BJ_c + BJ_c.BJ_a}{caMB} + \dfrac{CJ_a.CJ_b + CJ_b.CJ_c + CJ_c.CJ_a}{abMC}$.

(v) $\dfrac{MJ_a.MJ_b.MJ_c}{MA.MB.MC.MD} \leqslant \dfrac{AJ_a.AJ_b.AJ_c}{bcxMA} + \dfrac{BJ_a.BJ_b.BJ_c}{cayMB} + \dfrac{CJ_a.CJ_b.CJ_c}{abzMC}$
$+\dfrac{DJ_a.DJ_b.DJ_c}{xyzMD}$.

(vi) $\dfrac{\dfrac{MJ_a.MJ_b.MJ_c}{\sqrt{a+b+c}}}{MA.MB.MC.MD} \leqslant \dfrac{\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b+c-a}}}{xMA} + \dfrac{\dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c+a-b}}}{yMB} + \dfrac{\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b-c}}}{zMC}$
$+\dfrac{\dfrac{DJ_a.DJ_b.DJ_c}{\sqrt{a+b+c}}}{xyzMD}$.

Bài giải: (i) Theo Bất đẳng thức (M,N) với $n = 3, s = 1$ có bất đẳng thức

$$\frac{MI}{MA.MB.MC} \leqslant \frac{AI}{bcMA} + \frac{BI}{caMB} + \frac{CI}{abMC}.$$

(ii) Vì $IA^2 = \dfrac{bc(b+c-a)}{a+b+c}, IB^2 = \dfrac{ca(c+a-b)}{a+b+c}, IC^2 = \dfrac{ab(a+b-c)}{a+b+c}$
nên $\dfrac{MI\sqrt{a+b+c}}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{bc}MA} + \dfrac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{ca}MB} + \dfrac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{ab}MC}$.
(iii) Theo Bất đẳng thức (M,N) với $n = 3, s = 1$ có các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
\frac{MJ_a}{MA.MB.MC} &\leqslant \frac{AJ_a}{bcMA} + \frac{BJ_a}{caMB} + \frac{CJ_a}{abMC}\\
\frac{MJ_b}{MA.MB.MC} &\leqslant \frac{AJ_b}{bcMA} + \frac{BJ_b}{caMB} + \frac{CJ_b}{abMC}\\
\frac{MJ_c}{MA.MB.MC} &\leqslant \frac{AJ_c}{bcMA} + \frac{BJ_c}{caMB} + \frac{CJ_c}{abMC}.
\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức được $\dfrac{MJ_a + MJ_b + MJ_c}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{AJ_a + AJ_b + AJ_c}{bcMA} +$
$\dfrac{BJ_a + BJ_b + BJ_c}{caMB} + \dfrac{CJ_a + CJ_b + CJ_c}{abMC}$.
(iv) Theo Bất đẳng thức (M,N) với $n = 3, s = 2$ có các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
\frac{MJ_a.MJ_b}{MA.MB.MC} &\leqslant \frac{AJ_a.AJ_b}{bcMA} + \frac{BJ_a.BJ_b}{caMB} + \frac{CJ_a.CJ_c}{abMC}\\
\frac{MJ_b.MJ_c}{MA.MB.MC} &\leqslant \frac{AJ_b.AJ_c}{bcMA} + \frac{BJ_b.BJ_c}{caMB} + \frac{CJ_b.CJ_c}{abMC}\\
\frac{MJ_c.MJ_a}{MA.MB.MC} &\leqslant \frac{AJ_c.AJ_a}{bcMA} + \frac{BJ_c.BJ_a}{caMB} + \frac{CJ_c.CJ_a}{abMC}.
\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức ta nhận được $\dfrac{MJ_a.MJ_b + MJ_b.MJ_c + MJ_c.MJ_a}{MA.MB.MC}$
$\leqslant \dfrac{AJ_a.AJ_b + AJ_b.AJ_c + AJ_c.AJ_a}{bcMA} + \dfrac{BJ_a.BJ_b + BJ_b.BJ_c + BJ_c.BJ_a}{caMB} +$
$\dfrac{CJ_a.CJ_b + CJ_b.CJ_c + CJ_c.CJ_a}{abMC}.$

(v) Theo Bất đẳng thức (M,N) với $n = 4, s = 3$ có bất đẳng thức dưới đây: $\dfrac{MJ_a.MJ_b.MJ_c}{MA.MB.MC.MD} \leqslant \dfrac{AJ_a.AJ_b.AJ_c}{bcxMA} + \dfrac{BJ_a.BJ_b.BJ_c}{cayMB} + \dfrac{CJ_a.CJ_b.CJ_c}{abzMC}$
$+\dfrac{DJ_a.DJ_b.DJ_c}{xyzMD}.$

(vi) Do bởi

$$\begin{cases} J_aA^2 = \dfrac{bc(a+b+c)}{b+c-a}, J_aB^2 = \dfrac{ca(a+b-c)}{b+c-a}, J_aC^2 = \dfrac{ab(a-b+c)}{b+c-a} \\ J_bA^2 = \dfrac{bc(b+a-c)}{c+a-b}, J_bB^2 = \dfrac{ca(a+b+c)}{c+a-b}, J_bC^2 = \dfrac{ab(b+c-a)}{c+a-b} \\ J_cA^2 = \dfrac{bc(c+a-b)}{a+b-c}, J_cB^2 = \dfrac{ca(c+b-a)}{a+b-c}, J_cC^2 = \dfrac{ab(a+b+c)}{a+b-c} \end{cases}$$

nên ta có $\dfrac{\dfrac{MJ_a.MJ_b.MJ_c}{\sqrt{a+b+c}}}{MA.MB.MC.MD} \leqslant \dfrac{\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b+c-a}}}{xMA} + \dfrac{\dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c+a-b}}}{yMB} + \dfrac{\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b-c}}}{zMC}$
$+\dfrac{\dfrac{DJ_a.DJ_b.DJ_c}{\sqrt{a+b+c}}}{xyzMD}.$ □

Ví dụ 2.1.13. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Giả sử tam giác ABC với độ dài cạnh a, b, c và bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3. Ký hiệu khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến tâm các đường tròn bàng tiếp là d_a, d_b, d_c. Khi đó luôn có các bất đẳng thức*

(i) $\dfrac{\dfrac{d_ad_bd_c}{\sqrt{a+b+c}}}{R^3} \leqslant \dfrac{\sqrt{bc}}{x\sqrt{b+c-a}} + \dfrac{\sqrt{ca}}{y\sqrt{c+a-b}} + \dfrac{\sqrt{ab}}{z\sqrt{a+b-c}}$
$+\dfrac{DJ_a.DJ_b.DJ_c}{xyz\sqrt{a+b+c}}.$

(ii) $\sqrt{\dfrac{(R+2r_1)(R+2r_2)(R+2r_3)}{R^3(a+b+c)}} \leqslant \dfrac{\sqrt{bc}}{x\sqrt{b+c-a}} + \dfrac{\sqrt{ca}}{y\sqrt{c+a-b}}$

$$+\frac{\sqrt{ab}}{z\sqrt{a+b-c}}+\frac{DJ_a.DJ_b.DJ_c}{xyz\sqrt{a+b+c}}.$$

Bài giải: (i) Với $M \equiv O$ có $\dfrac{\dfrac{d_ad_bd_c}{\sqrt{a+b+c}}}{R^3} \leqslant \dfrac{\sqrt{bc}}{x\sqrt{b+c-a}}+\dfrac{\sqrt{ca}}{y\sqrt{c+a-b}}+$
$\dfrac{\sqrt{ab}}{z\sqrt{a+b-c}}+\dfrac{DJ_a.DJ_b.DJ_c}{xyz\sqrt{a+b+c}}.$
(ii) Vì $d_a^2 = R^2+2Rr_1, d_b^2 = R^2+2Rr_2, d_c^2 = R^2+2Rr_3$ nên có bất đẳng thức $\sqrt{\dfrac{(R+2r_1)(R+2r_2)(R+2r_3)}{R^3(a+b+c)}} \leqslant \dfrac{\sqrt{bc}}{x\sqrt{b+c-a}}+\dfrac{\sqrt{ca}}{y\sqrt{c+a-b}}$

$$+\frac{\sqrt{ab}}{z\sqrt{a+b-c}}+\frac{DJ_a.DJ_b.DJ_c}{xyz\sqrt{a+b+c}}.$$ □

Tuy chưa chứng minh được, nhưng hy vọng các kết quả sau cũng đúng.

Vấn đề mở 2.1.14. *Cho tam giác ABC với độ dài cạnh a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Gọi I, J_a, J_b, J_c là tâm đường tròn nội tiếp và tâm các đường tròn bàng tiếp của ΔABC. Khi đó, với bất kỳ điểm M luôn có*

(i) $\dfrac{MJ_a.MJ_b.MJ_c}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{AJ_a.AJ_b.AJ_c}{bcMA}+\dfrac{BJ_a.BJ_b.BJ_c}{caMB}+\dfrac{CJ_a.CJ_b.CJ_c}{abMC}.$

(ii) $\dfrac{\dfrac{MJ_a.MJ_b.MJ_c}{\sqrt{a+b+c}}}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b+c-a}}}{MA}+\dfrac{\dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c+a-b}}}{MB}+\dfrac{\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b-c}}}{MC}.$

Vấn đề mở 2.1.15. *Cho tam giác ABC với độ dài cạnh a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp R, bán kính các đường tròn bàng tiếp là r_1, r_2, r_3. Ký hiệu khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến tâm các đường tròn bàng tiếp là d_a, d_b, d_c. Khi đó luôn có các bất đẳng thức*

(i) $\dfrac{\dfrac{d_ad_bd_c}{\sqrt{a+b+c}}}{R^2} \leqslant \dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b+c-a}}+\dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c+a-b}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b-c}}.$

(ii) $\sqrt{\dfrac{(R+2r_1)(R+2r_2)(R+2r_3)}{R(a+b+c)}} \leqslant \dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b+c-a}}+\dfrac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c+a-b}}$

$$+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a+b-c}}.$$

Ví dụ 2.1.16. *Cho tam giác ABC với độ dài cạnh a, b, c và bán kính đường tròn ngoại tiếp R. Gọi O, H là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của ΔABC. Khi đó, với bất kỳ điểm M luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{abcMO.MH}{RMA.MB.MC} \leqslant \frac{aAH}{MA} + \frac{bBH}{MB} + \frac{cCH}{MC}.$$

Khi M thuộc đường tròn tâm O bán kính R ta còn có bất đẳng thứcsau:

$$\frac{abcMH}{MA.MB.MC} \leqslant \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{MA} + \frac{b\sqrt{4R^2 - b^2}}{MB} + \frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{MC}.$$

Bài giải: Theo Bất đẳng thức (M,N) có bất đẳng thức dưới đây:

$$\frac{MO.MH}{MA.MB.MC} \leqslant \frac{AO.AH}{bcMA} + \frac{BO.BH}{caMB} + \frac{CO.CH}{abMC}.$$

Vậy ta có bất đẳng thức $\dfrac{abcMO.MH}{RMA.MB.MC} \leqslant \dfrac{aAH}{MA} + \dfrac{bBH}{MB} + \dfrac{cCH}{MC}$. □

Ví dụ 2.1.17. *Cho tam giác ABC với độ dài cạnh a, b, c. Gọi I, G, H là tâm đường tròn nội tiếp, trọng tâm và trực tâm của ΔABC. Khi đó, với bất kỳ điểm M ta luôn có các bất đẳng thức*

(i) $\dfrac{abcMI^2}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{aAI^2}{MA} + \dfrac{bBI^2}{MB} + \dfrac{cCI^2}{MC}$.

(ii) $\dfrac{abcMG^2}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{aAG^2}{MA} + \dfrac{bBG^2}{MB} + \dfrac{cCG^2}{MC}$.

(iii) $\dfrac{abcMH^2}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{a(4R^2 - a^2)}{MA} + \dfrac{b(4R^2 - b^2)}{MB} + \dfrac{c(4R^2 - c^2)}{MC}$.

Bài giải: Với $s = 2$, $N_1 \equiv N_2 \equiv N$, theo Bất đẳng thức (M,N) có

$$\frac{MN^2}{MA.MB.MC} \leqslant \frac{AN^2}{bcMA} + \frac{BN^2}{caMB} + \frac{CN^2}{abMC}.$$

Vậy ta có bất đẳng thức $\dfrac{abcMI^2}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{aAI^2}{MA} + \dfrac{bBI^2}{MB} + \dfrac{cCI^2}{MC}$ và $\dfrac{abcMG^2}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{aAG^2}{MA} + \dfrac{bBG^2}{MB} + \dfrac{cCG^2}{MC}$. Ta có (i) và (ii). Khi lấy $N \equiv H$ ta có (iii): $\dfrac{abcMH^2}{MA.MB.MC} \leqslant \dfrac{a(4R^2 - a^2)}{MA} + \dfrac{b(4R^2 - b^2)}{MB} + \dfrac{c(4R^2 - c^2)}{MC}$. □

Mệnh đề 2.1.18. *Giả sử đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Khi đó, với bất kỳ $s < n$ điểm $N_1,\ldots,N_s$ ở trong mặt phẳng $A_1A_2\ldots A_n$ luôn có bất đẳng thức* $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{s}A_kN_i}{\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{n}A_kA_i} \geqslant \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{s}ON_i}{R^{n-1}}$. *Khi $R=1$ ta có* $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{s}A_kN_i}{\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{n}A_kA_i} \geqslant \prod\limits_{i=1}^{s}ON_i$.

Khi $n=3, s=1$ và $a_1=A_2A_3, a_2=A_3A_1, a_3=A_1A_2$ ta có bất đẳng thức $a_1A_1N+a_2A_2N+a_3A_3N \geqslant 4S_{A_1A_2A_3}\dfrac{ON}{R}$.

Bài giải: Suy ra từ Bất đẳng thức (M,N) khi $M\equiv O$ và bất đẳng thức $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{s}A_kN_i}{\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{n}A_kA_i} \geqslant \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{s}ON_i}{R^{n-1}}$. Với $R=1$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\prod\limits_{i=1}^{s}A_kM_i}{\prod\limits_{i=1,i\neq k}^{n}A_kA_i} \geqslant \prod\limits_{i=1}^{s}OM_i$. □

Mệnh đề 2.1.19. *Giả sử tứ giác $ABCD$ có $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=x, BD=y$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Khi đó, với ba điểm E,F,H ở trong mặt phẳng $ABCD$ ta luôn có* $\dfrac{OE.OF.OH}{R^3} \leqslant \dfrac{AE.AF.AH}{adx}+\dfrac{BE.BF.BH}{aby}+\dfrac{CE.CF.CH}{bcx}+\dfrac{DE.DF.DH}{cdy}$.

Đặc biệt, khi $E\equiv F\equiv H$ ta có

$$\frac{AE^3}{adx}+\frac{BE^3}{aby}+\frac{CE^3}{bcx}+\frac{DE^3}{cdy} \geqslant \frac{OE^3}{R^3}$$

và với G là trọng tâm của tứ giác $ABCD$ có

$$\frac{GA^3}{adx}+\frac{GB^3}{aby}+\frac{GC^3}{bcx}+\frac{GD^3}{cdy} \geqslant \frac{GO^3}{R^3}.$$

Chứng minh: Theo Bất đẳng thức (M,N) với $n=4, s=3$ và điểm O ta có $\dfrac{OE.OF.OH}{R^3} \leqslant \dfrac{AE.AF.AH}{adx}+\dfrac{BE.BF.BH}{aby}+\dfrac{CE.CF.CH}{bcx}+\dfrac{DE.DF.DH}{cdy}$. Khi $E\equiv F\equiv H$ ta có bất đẳng thức rất đẹp $\dfrac{AE^3}{adx}+\dfrac{BE^3}{aby}+\dfrac{CE^3}{bcx}+\dfrac{DE^3}{cdy} \geqslant \dfrac{OE^3}{R^3}$, $\dfrac{GA^3}{adx}+\dfrac{GB^3}{aby}+\dfrac{GC^3}{bcx}+\dfrac{GD^3}{cdy} \geqslant \dfrac{GO^3}{R^3}$. □

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Ví dụ 2.1.20. *Giả sử tứ giác $ABCD$ có $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = x, BD = y$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Khi đó, với ba điểm E, F, H thuộc đường tròn (O, R) luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{AE.AF.AH}{adx} + \frac{BE.BF.BH}{aby} + \frac{CE.CF.CH}{bcx} + \frac{DE.DF.DH}{cdy} \geqslant 1.$$

Khi $ABCD$ là một hình vuông cạnh a luôn có bất đẳng thức sau đây:

$$AE.AF.AH + BE.BF.BH + CE.CF.CH + DE.DF.DH \geqslant \sqrt{2}a^3.$$

Bài giải: Có $\dfrac{AE.AF.AH}{adx} + \dfrac{BE.BF.BH}{aby} + \dfrac{CE.CF.CH}{bcx} + \dfrac{DE.DF.DH}{cdy}$ $\geqslant \dfrac{OE.OF.OH}{R^3} = 1$ theo ví dụ trên. Khi $ABCD$ là một hình vuông cạnh a thì $a = b = c = d$ và $x = y = a\sqrt{2}$. Vậy $AE.AF.AH + BE.BF.BH + CE.CF.CH + DE.DF.DH \geqslant \sqrt{2}a^3$. □

Mệnh đề 2.1.21. *Giả sử đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Khi đó, với bất kỳ $s < n$ điểm $M_1, \ldots, M_s$ ở trong mặt phẳng $A_1A_2 \ldots A_n$ và N_{kI} là trung điểm đoạn A_kM_i có bất đẳng thức*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} ON_{ki}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} A_kA_i} \geqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} OM_i}{2^s R^{n-1}}.$$

Khi $R = 1$ ta luôn có $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} ON_{ki}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} A_kA_i} \geqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} OM_i}{2^s}$.

Bài giải: Theo Bất đẳng thức (M,N) ta có $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} ON_{ki}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} A_kA_i} \geqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} OM_i}{2^s R^{n-1}}$.

Khi $R = 1$ ta có $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} ON_{ki}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{n} A_kA_i} \geqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} OM_i}{2^s}$. □

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Mệnh đề 2.1.22. *Giả sử tứ giác $ABCD$ có $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = x, BD = y$. Khi đó, với bất kỳ 2 điểm M, T ở trong mặt phẳng $ABCD$ luôn có bất đẳng thức*

$$\frac{TM}{TA.TB.TC.TD} \leqslant \frac{AM}{adxTA} + \frac{BM}{abyTB} + \frac{CM}{bcxTC} + \frac{DM}{cdyTD}.$$

Đặc biệt, khi ngũ giác $ABCDM$ nội tiếp trong đường tròn tâm T bán kính R ta có bất đẳng thức $\frac{1}{R^2} \leqslant \frac{AM}{adx} + \frac{BM}{aby} + \frac{CM}{bcx} + \frac{DM}{cdy}$; còn khi ngũ giác $ABCDT$ nội tiếp trong đường tròn tâm M ta có Bất đẳng thức Hayashi cho tứ giác: $\frac{1}{TA.TB.TC.TD} \leqslant \frac{1}{adxTA} + \frac{1}{abyTB} + \frac{1}{bcxTC} + \frac{1}{cdyTD}$.

Chứng minh: Từ Bất đẳng thức (M,N) suy ra $TM \leqslant \frac{AM.TB.TC.TD}{AB.AC.AD} + \frac{BM.TA.TC.TD}{BA.BC.BD} + \frac{CM.TA.TB.TD}{CA.CB.CD} + \frac{DM.TA.TB.TC}{DA.DB.DC}$ hay bất đẳng thức $\frac{TM}{TA.TB.TC.TD} \leqslant \frac{AM}{adxTA} + \frac{BM}{abyTB} + \frac{CM}{bcxTC} + \frac{DM}{cdyTD}$. □

Tất nhiên sẽ có một câu hỏi về đồng nhất thức (M,N). Bước đầu chúng ta sử dụng hàm sin và cosin để hình thành đồng nhất thức dưới dạng lượng giác.

Không làm mất tính chất tổng quát ta có thể giả thiết bán kính đường tròn $\mathfrak{C}$ bằng 1. Giả sử các A_k có tọa vị $a_k = \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k$, M có tọa vị $z = \cos u + i\sin u$ và N_h có tọa vị $z_h = \cos u_h + i\sin u_h$. Theo Công thức nội suy Lagrange ta có $\frac{\prod_{j=1}^{s}(z - z_j)}{\prod_{t=1}^{n}(z - a_t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{s}(a_k - z_j)}{(z - a_k)\prod_{t\neq k}(a_k - a_t)}$

hay $\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{s} 2i\sin\dfrac{u-u_j}{2}e^{\dfrac{i(u+u_j)}{2}}}{\prod\limits_{t=1}^{n} 2i\sin\dfrac{u-\alpha_t}{2}e^{\dfrac{i(u+\alpha_t)}{2}}}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod\limits_{j=1}^{s} 2i\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}e^{\dfrac{i(\alpha_k+u_j)}{2}}}{2i\sin\dfrac{u-\alpha_k}{2}e^{\dfrac{i(u+\alpha_k)}{2}}\prod\limits_{t\neq k} 2i\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}e^{\dfrac{i(\alpha_k+\alpha_t)}{2}}}.$$

Trước tiên giảm ước tất cả nhân tử $2i, e^{\dfrac{iu_j}{2}}$ và $e^{\dfrac{i\alpha_t}{2}}$ ta nhận được hệ thức

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\sin\dfrac{u-u_j}{2}}{\prod\limits_{t=1}^{n}\sin\dfrac{u-\alpha_t}{2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}}{\sin\dfrac{u-\alpha_k}{2}\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}}e^{\dfrac{i(s+1-n)(\alpha_k-u)}{2}}.$$

Từ hệ thức này ta suy ra hai đồng nhất thức sau đây:

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\sin\dfrac{u-u_j}{2}}{\prod\limits_{t=1}^{n}\sin\dfrac{u-\alpha_t}{2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}}{\sin\dfrac{u-\alpha_k}{2}\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}}\cos\frac{(s+1-n)(\alpha_k-u)}{2}$$

và $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}}{\sin\dfrac{u-\alpha_k}{2}\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}}\sin\frac{(s+1-n)(\alpha_k-u)}{2} = 0$. Với kết quả này, chúng ta đã xây dựng được đồng nhất thức phát biểu dưới dạng lượng giác và hình học cho Bất đẳng thức (M,N) như sau:

Mệnh đề 2.1.23. *Giả sử đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn $\mathfrak{C}$, bán kính $R=1$. Lấy $s+1$ điểm $N_1,\ldots,N_s,M$ cũng thuộc $\mathfrak{C}$. Giả sử tọa độ $A_k(\cos\alpha_k;\sin\alpha_k), k=1,2,\ldots,n$; tọa độ $N_j(\cos u_j;\sin u_j), j=1,2,\ldots,s$ và tọa độ $M(\cos u;\sin u)$. Khi đó ta có các đồng nhất thức*

(i) $$\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\sin\dfrac{u-u_j}{2}}{\prod\limits_{t=1}^{n}\sin\dfrac{u-\alpha_t}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}\cos\dfrac{(s+1-n)(\alpha_k-u)}{2}}{\sin\dfrac{u-\alpha_k}{2}\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}}.$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}}{\sin\dfrac{u-\alpha_k}{2}\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}}\sin\frac{(s+1-n)(\alpha_k-u)}{2}=0.$$

(iii) $$\sum_{k=1}^{3}\frac{\sin\dfrac{\alpha_k-u_1}{2}}{\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}}=0 \text{ } \textit{khi } n=3, s=1.$$

(iv) $$\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}\sin\dfrac{u-u_j}{2}}{\prod\limits_{t=1}^{n}\sin\dfrac{u-\alpha_t}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}}{\sin\dfrac{u-\alpha_k}{2}\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}} \text{ } \textit{khi } s=n-1.$$

(v) $$\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2}\sin\dfrac{u_j}{2}}{\prod\limits_{t=1}^{n}\sin\dfrac{\alpha_t}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2}\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}}{\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}}\cot\frac{\alpha_k}{2},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-2}\sin\dfrac{\alpha_k-u_j}{2}}{\prod\limits_{t\neq k}\sin\dfrac{\alpha_k-\alpha_t}{2}}=0$$

khi $s=n-2, u=0.$

Chú ý 2.1.24. *Khi tứ giác* $ABCD$ *nội tiếp trong đường tròn ta có* $\dfrac{DA}{bc}+\dfrac{DC}{ab}=\dfrac{DB}{ca}$ *theo (iii) hay* $\dfrac{aDA^2}{DA}+\dfrac{cDC^2}{DC}=\dfrac{bDB^2}{DB}$. *Từ đây suy ra*

$$DA^2.DB.DC.a+DC^2.DA.DB.c=DB^2.DC.DA.b.$$

Vậy có đồng nhất thức $DA^2S_{DBC}+DC^2S_{DAB}=DB^2S_{DCA}$ [**Feuerbach**].

2.1.4 Bất đẳng thức Erdos-Mordell cho đa giác

Mệnh đề 2.1.25. *Cho đa giác lồi* $A_1A_2\ldots A_n$ *với* $n\geqslant 3$. *Giả sử* M *là một điểm trong đa giác và ký hiệu khoảng cách từ* M *đến cạnh* A_iA_{i+1} *là* r_i *với* $i=1,2,\ldots,n$ *và quy ước* $n+1:=1$. *Đặt* $2\alpha_i=\angle A_iMA_{i+1}$

và $d_k = MA_k$ với $k = 1, \dots, n$. Ta có đồng nhất thức cho Bất đẳng thức Erdos-Mordell:

$$\sum_{k=1}^{n} d_k d_{k+1} \sin 2\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} r_k \sqrt{(d_k - d_{k+1})^2 + 4d_k d_{k+1} \sin^2 \alpha_k}.$$

Từ đó suy ra $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{d_k d_{k+1}} \cos \alpha_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} r_k$.

Chứng minh: Xét $\Delta A_1 M A_2$. Từ $r_1.A_1A_2 = d_1d_2 \sin 2\alpha_1$ có $d_1d_2 \sin 2\alpha_1 = r_1\sqrt{(d_1 - d_2)^2 + 4d_1d_2 \sin^2 \alpha_1}$. Tương tự, với $k = 1, 2, \dots, n$ ta có

$$d_k d_{k+1} \sin 2\alpha_k = r_k \sqrt{(d_k - d_{k+1})^2 + 4d_k d_{k+1} \sin^2 \alpha_k}.$$

Vậy, tổng $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k d_{k+1} \sin 2\alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k \sqrt{(d_k - d_{k+1})^2 + 4d_k d_{k+1} \sin^2 \alpha_k}$. Vì $\sqrt{(d_k - d_{k+1})^2 + 4d_k d_{k+1} \sin^2 \alpha_k} \geqslant 2\sqrt{d_k d_{k+1}} \sin \alpha_k$ và viết $\sin 2\alpha_k = 2 \sin \alpha_k \cos \alpha_k$ nên được bất đẳng thức $\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{d_k d_{k+1}} \cos \alpha_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} r_k$. $\square$

Trước khi phát biểu và chứng minh lại Bất đẳng thức Erdos-Mordell cho đa giác lồi ta chứng minh Bất đẳng thức Erdos-Mordell cho tam giác.

Ví dụ 2.1.26. *Cho tam giác ABC. Giả sử M là một điểm trong tam giác và ký hiệu khoảng cách từ M đến cạnh BC, CA, AB là x, y, z. Đặt $d_1 = MA, d_2 = MB, d_3 = MC$. Khi đó ta có Bất đẳng thức Erdos-Mordell:*

$$\cos \frac{\pi}{3}(d_1 + d_2 + d_3) \geqslant x + y + z.$$

Bài giải: Ta có $\sqrt{d_1d_2} \cos \alpha_1 + \sqrt{d_2d_3} \cos \alpha_2 + \sqrt{d_3d_1} \cos \alpha_3 \geqslant x + y + z$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$. Đặt $a_k = \sqrt{d_k}$ với $k = 1, 2, 3$. Ta phải chứng minh

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geqslant 2a_1a_2 \cos \alpha_1 + 2a_2a_3 \cos \alpha_2 + 2a_3a_1 \cos \alpha_3$$

hay $(a_1 - a_2 \cos \alpha_1 - a_3 \cos \alpha_3)^2 + (a_2 \sin \alpha_1 - a_3 \sin \alpha_3)^2 \geqslant 0$: đúng. Do vậy, ta nhận được bất đẳng thức $\cos \frac{\pi}{3}(d_1 + d_2 + d_3) \geqslant x + y + z$. $\square$

Marian Dinca đã chứng minh lại kết quả của Wolstenholme và Lenhard:

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Mệnh đề 2.1.27. *Cho đa giác lồi $A_1A_2\dots A_n$ với $n \geqslant 3$. Giả sử M là một điểm trong đa giác. Ký hiệu khoảng cách từ M đến cạnh A_iA_{i+1} là r_i, $d_i = MA_i$, với $i = 1, 2, \dots, n$ và quy ước $n + 1 := 1$. Khi đó ta có các bất đẳng thức*

(i) $\cos\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} d_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{d_kd_{k+1}}\cos\alpha_k$.

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k \geqslant \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\sum\limits_{k=1}^{n} r_k$.

Chứng minh: (i) Bất đẳng thức $\cos\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} d_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{d_kd_{k+1}}\cos\alpha_k$. Theo mệnh đề trên ta đã có $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{d_kd_{k+1}}\cos\alpha_k$ được suy ra từ một kết quả của Wolstenholme và Lenhard.
(ii) Vì $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{d_kd_{k+1}}\cos\alpha_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} r_k$ nên $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k \geqslant \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\sum\limits_{k=1}^{n} r_k$. □

2.2 Sử dụng số phức biểu diễn phép quay

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), phép quay tâm $I(a;b)$ đi một góc α được biểu diễn qua matrận và qua số phức:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$
Giả sử điểm I, M, N tương ứng các số phức z_I, z_M, z_N. Phép quay tâm I góc quay α biến điểm M thành điểm N được biểu diễn:
$$z_N = z_I + (z_M - z_I)e^{i\alpha}.$$

Bây giờ ta vận dụng phép quay vào việc xét một số bài hình dưới đây.

Ví dụ 2.2.1. [Định lý Con Nhím] *Trong mặt phẳng cho đa giác đơn bất kỳ $A_1A_2\dots A_n$ và coi $A_{n+1} \equiv A_1$. Xét hệ véc tơ $\vec{e}_i$ sao cho $\vec{e}_i \perp \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $\vec{e}_i$ hướng ra ngoài miền đa giác và $|\vec{e}_i| = A_iA_{i+1}$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{e}_i = \vec{0}$.*

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Bài giải: Định hướng đa giác, chẳng hạn hướng thuận, $\vec{e}_i$ có được do quay $A_i\vec{A}_{i+1}$ góc $-\frac{\pi}{2}$. Vậy $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{e}_i = e^{-i\frac{\pi}{2}}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\vec{A}_{i+1}\Big) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(\vec{0}) = \vec{0}$. □

Ví dụ 2.2.2. *Cho tam giác ABC với độ dài cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Dựng ra phía ngoài ba tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1. Dựng tiếp ra phía ngoài tam giác $A_1B_1C_1$ ba tam giác đều $B_1C_1A_2$, $C_1A_1B_2$ và $A_1B_1C_2$. Chứng minh*

(i) *$AA_1 = BB_1 = CC_1$ và $\Delta O_1O_2O_3$ đều, trong đó O_1, O_2, O_3 là tâm các tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1.*

(ii) *A, A_1, A_2 thẳng hàng. Khi b, c cố định còn a thay đổi, hãy tìm a để A_1A_2 lớn nhất.*

(iii) *Tiếp tục quá trình như trên để có tam giác $A_{2010}B_{2010}C_{2010}$. Khi đó $A, A_1, \ldots, A_{2010}$ thẳng hàng và tìm giá trị lớn nhất của $A_{2010}A_{2009}$ khi b, c cố định, còn a thay đổi.*

Bài giải: (i) Tương ứng A, B, C ba số phức z_A, z_B, z_C. Khi đó ta có

$$\begin{cases} z_{A_1} = z_C + e^{iu}(z_B - z_C) \\ z_{B_1} = z_A + e^{iu}(z_C - z_A) \\ z_{C_1} = z_B + e^{iu}(z_A - z_B) \\ z_{A_2} = z_{C_1} + e^{iu}(z_{B_1} - z_{C_1}) \\ u = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Từ $z_C + e^{iu}(z_{B_1} - z_C) = z_C + e^{iu}(z_A + e^{iu}(z_C - z_A) - z_C)$ ta suy ra hệ thức $z_C + e^{iu}(z_{B_1} - z_C) = z_C(1 - e^{iu} + e^{2iu}) + z_A(e^{iu} - e^{2iu}) = z_A$ vì $e^{iu} \neq -1, e^{3iu} + 1 = 0$ nên $1 - e^{iu} + e^{2iu} = 0, e^{iu} - e^{2iu} = 1$. Như vậy ta có $z_{A_1} - z_A = e^{iu}(z_B - z_{B_1})$ và suy ra $AA_1 = BB_1$. Tương tự $BB_1 = CC_1$. Dễ dàng kiểm tra $3\big[z_{O_2} + e^{iu}(z_{O_3} - z_{O_2})\big] = 3z_{O_1}$. Vậy $\Delta O_1O_2O_3$ đều.
(ii) Dễ dàng chỉ ra $z_{A_1} + z_{A_2} = 2z_A$. Vậy A là trung điểm của A_1A_2. Từ $A_1A_2 = 2AA_1 = 2BB_1 \leqslant (b + c)$. Vậy A_1A_2 lớn nhất bằng $2(b + c)$ khi $A = \frac{2\pi}{3}$. Từ đó có a để A_1A_2 lớn nhất.
(iii) được suy ra từ (ii). □

Ví dụ 2.2.3. *Cho tam giác ABC với độ dài cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Dựng ra phía ngoài ba tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1. Dựng tiếp ra phía ngoài tam giác $A_1B_1C_1$ ba tam giác đều sau đây: $B_1C_1A_2, C_1A_1B_2, A_1B_1C_2$. Gọi M, N, P là trung điểm BC, CA, AB; M_1, N_1, P_1 là trung điểm B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, và M_2, N_2, P_2 là trung điểm B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, tương ứng. Chứng minh rằng*

(i) $AA_1 \underset{=}{\|} 2MM_1, BB_1 \underset{=}{\|} 2NN_1, CC_1 \underset{=}{\|} 2PP_1$ *và* MM_1, NN_1, PP_1 *đồng quy.*

(ii) $A_2M_2 \underset{=}{\|} AM_1 \underset{=}{\|} MM_0$, *trong đó* M_0 *là trung điểm của* AA_1.

(iii) *Hạ* $MM_2 \perp B_1C_1, NN_2 \perp C_1A_1, PP_2 \perp A_1B_1$. *Khi đó* MM_2, NN_2, PP_2 *đồng quy tại một điểm.*

Bài giải: (i) Ta có $2z_M = z_B + z_C, 2z_{M_1} = z_{B_1} + z_{C_1}$. Viết $\vec{IJ} = z_J - z_I$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2\vec{MM_1} &= 2z_{M_1} - 2z_M = z_{B_1} + z_{C_1} - z_B - z_C = z_A - z_C + e^{iu}(z_C - z_B) \\ &= \vec{A_1A}. \text{ Vậy } AA_1 \| MM_1, AA_1 = 2MM_1. \end{aligned}$$

Ba đoạn MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy được suy ra từ việc xét ΔMNP và phép quay e^{iu}.
(ii) Từ $AA_1 \underset{=}{\|} 2MM_1$ suy ra $AM_1 \underset{=}{\|} MM_0$. Ta lại có $AM_1 \underset{=}{\|} A_2M_2$. Do vậy $A_2M_2 \underset{=}{\|} AM_1 \underset{=}{\|} MM_0$.
(iii) Sử dụng kết quả $AA_1 = BB_1 = CC_1 = d$ và công thức đường trung tuyến ta có $2MB_1^2 = d^2 + b^2 - \dfrac{a^2}{2}, 2MC_1^2 = d^2 + c^2 - \dfrac{a^2}{2}$. Vậy $MB_1^2 - MC_1^2 = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$ hay $M_2B_1^2 - M_2C_1^2 = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$. Tương tự, có $N_2C_1^2 - N_2A_1^2 = \dfrac{c^2 - a^2}{2}$, $P_2A_1^2 - P_2B_1^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$. Khi đó $M_2B_1^2 - M_2C_1^2 + N_2C_1^2 - N_2A_1^2 + P_2A_1^2 - P_2B_1^2 = 0$. Do đó MM_2, NN_2, PP_2 đồng quy tại một điểm. □

Ví dụ 2.2.4. *Trong mặt phẳng cho tứ giác $A_0A_1A_2A_3$ và định nghĩa $A_{4k+i} \equiv A_i$ với $i = 0, 1, 2, 3$ và $k \in \mathbb{Z}$. Với điểm P_0 ta thực hiện phép quay tâm A_0 góc quay $\dfrac{\pi}{2}$ để được P_1; thực hiện phép quay tâm A_1 góc quay $\dfrac{\pi}{2}$ để được P_2; thực hiện phép quay tâm A_2 góc quay $\dfrac{\pi}{2}$ để được*

P_3; thực hiện phép quay tâm A_3 góc quay $\dfrac{\pi}{2}$ để được P_4 và cứ tiếp tục như vậy. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để có P_0 sao cho $P_{2012} \equiv P_0$ là $A_0A_2 = A_1A_3$ và $A_0A_2 \perp A_1A_3$.

Bài giải: Tương ứng A_0, A_1, A_2, A_3 là bốn số phức z_0, z_1, z_2, z_3 và tương ứng với P_k là số phức $\alpha_k, k = 0, 1, 2, \ldots$. Khi đó có biểu diễn

$$\begin{cases} \alpha_1 = z_0 + i(\alpha_0 - z_0) \\ \alpha_2 = z_1 + i(\alpha_1 - z_1) \\ \alpha_3 = z_2 + i(\alpha_2 - z_2) \\ \alpha_4 = z_3 + i(\alpha_3 - z_3). \end{cases}$$

Dễ dàng chỉ ra $\alpha_4 = (1-i)(z_3 - z_1) + (1+i)(z_2 - z_0) + \alpha_0$. Vậy, qua 4 lần quay ta được một phép tịnh tiến $\alpha_4 = \alpha_0 + (1-i)(z_3 - z_1) + i(1-i)(z_2 - z_0)$. Vì $2012 = 503.4$ nên $\alpha_{2012} = \alpha_0 + 503[(1-i)(z_3 - z_1) + i(1-i)(z_2 - z_0)]$. Để $\alpha_{2012} \equiv \alpha_0$ cần và đủ $(1-i)(z_3 - z_1) + i(1-i)(z_2 - z_0) = 0$ hay $(z_3 - z_1) + i(z_2 - z_0) = 0$. Điều này tương đương $A_0A_2 = A_1A_3$ và $A_0A_2 \perp A_1A_3$. □

Ví dụ 2.2.5. *Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Dựng ra phía ngoài bốn hình vuông sau đây: $ABB_1A_2, BCC_1B_2, CDD_1C_2$ và DAA_1D_2. Gọi A_3, B_3, C_3, D_3 là trung điểm các đoạn A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 và D_1D_2, tương ứng. Chứng minh rằng*

(i) *$AA_3 = CC_3 = \dfrac{BD}{2}$ và $AA_3 \perp BD, CC_3 \perp BD$. Từ đó suy ra từng cặp A_3C_3 và AC; B_3D_3 và BD, cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn khi AC và BD không vuông góc với nhau.*

(ii) *Tứ giác $A_3B_3C_3D_3$ có nội tiếp trong một đường tròn không? (coi như một bài tập).*

Bài giải: (i) Ta chỉ cần xét $R = 1$. Tương ứng A, B, C, D là bốn số phức z_a, z_b, z_c, z_d với $|z_a| = |z_b| = |z_c| = |z_d| = 1$ và tương ứng A_k, B_k, C_k, D_k là các số phức $z_{a_k}, z_{b_k}, z_{c_k}, z_{d_k}$ với $k = 1, 2, 3$. Khi đó có biểu diễn

$$\begin{cases} z_{a_1} = z_a - i(z_d - z_a) \\ z_{b_1} = z_b - i(z_a - z_b) \\ z_{c_1} = z_c - i(z_b - z_c) \\ z_{d_1} = z_d - i(z_c - z_d) \end{cases} \quad \begin{cases} z_{a_2} = z_a + i(z_b - z_a) \\ z_{b_2} = z_b + i(z_c - z_b) \\ z_{c_2} = z_c + i(z_d - z_c) \\ z_{d_2} = z_d + i(z_a - z_d) \end{cases} \quad \begin{cases} z_{a_3} = \dfrac{z_{a_1} + z_{a_2}}{2} \\ z_{b_3} = \dfrac{z_{b_1} + z_{b_2}}{2} \\ z_{c_3} = \dfrac{z_{c_1} + z_{c_2}}{2} \\ z_{d_3} = \dfrac{z_{d_1} + z_{d_2}}{2}. \end{cases}$$

Dễ dàng có $z_{a_3} - z_a = i\dfrac{z_b - z_d}{2} = z_{c_3} - z_c$. Vậy $AA_3 = CC_3 = \dfrac{BD}{2}$ và $AA_3 \perp BD, CC_3 \perp BD$. Từ đây suy ra A_3C_3 và AC cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn. Tương tự có $BB_3 = DD_3 = \dfrac{AC}{2}$ và $BB_3 \perp AC, DD_3 \perp AC$. Từ đây suy ra B_3D_3 và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.
(ii) Giả sử I, J, H, K là tâm các hình vuông $ABB_1A_2, BCC_1B_2, CDD_1C_2$ và DAA_1D_2 và ứng với số phức z_I, z_J, z_H, z_K. $\square$

Ví dụ 2.2.6. *Cho ΔABC. Dựng ra phía ngoài ba hình vuông BCA_1A_2, CAB_1B_2, ABC_1C_2. Gọi tâm các hình vuông này là I, J, K và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $AI = JK, AI \perp JK$ và $MJ = MK, MJ \perp MK$.*

Bài giải: Tương ứng A, B, C ba số phức z_A, z_B, z_C. Khi đó có biểu diễn

$$\begin{cases} z_{A_1} = z_C + i(z_B - z_C) \\ z_{B_1} = z_A + i(z_C - z_A) \\ z_{C_1} = z_B + i(z_A - z_B). \end{cases}$$

Tương ứng I, J, K, M là bốn số phức z_I, z_J, z_K, z_M. Từ các quan hệ sau:

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{z_B + z_{A_1}}{2} = \frac{z_B + z_C + i(z_B - z_C)}{2} \\ z_J &= \frac{z_C + z_{B_1}}{2} = \frac{z_C + z_A + i(z_C - z_A)}{2} \\ z_K &= \frac{z_A + z_{C_1}}{2} = \frac{z_A + z_B + i(z_A - z_B)}{2} \end{aligned}$$

có $2\overrightarrow{AI} = z_B + z_C + i(z_B - z_C) - 2z_A, 2\overrightarrow{JK} = z_B - z_C + i(2z_A - z_B - z_C)$. Bởi vì $z_B + z_C + i(z_B - z_C) - 2z_A = i\big(z_B - z_C + i(2z_A - z_B - z_C)\big)$ nên có được $AI = JK, AI \perp JK$.

Từ $z_M = \dfrac{z_B + z_C}{2}$ suy ra ngay $2\overrightarrow{MJ} = z_A - z_B + i(z_C - z_A)$ và , $2\overrightarrow{MK} = z_A - z_C + i(z_A - z_B)$. Bởi vì $z_A - z_C + i(z_A - z_B) = i\big(z_A - z_B + i(z_C - z_A)\big)$ nên có được $MJ = MK, MJ \perp MK$. □

Ví dụ 2.2.7. *Giả sử điểm M ở trong hay trên cạnh hình vuông $ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(M) = \angle MAB + \angle MBC + \angle MCD + \angle MDA$.*

Bài giải: Không hạn chế có thể coi đỉnh A, B, C, D tương ứng với số phức $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$. Giả sử M tương ứng số phức z. Ta có

$$\overrightarrow{AM} = z - 1, \overrightarrow{BM} = z - i, \overrightarrow{CM} = z + 1, \overrightarrow{DM} = z + i$$
$$\overrightarrow{AB} = i - 1, \overrightarrow{BC} = -1 - i, \overrightarrow{CD} = -i + 1, \overrightarrow{DA} = 1 + i.$$

Ký hiệu $\angle MAB = A_1, \angle MBC = B_1, \angle MCD = C_1, \angle MDA = D_1$ và các góc phụ tương ứng là A_2, B_2, C_2, D_2. Hiển nhiên $A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2 = 2\pi$. Nếu $A_2 + B_2 + C_2 + D_2 > A_1 + B_1 + C_1 + D_1$ thì lấy đối xứng M qua trục IJ thành M', trong đó I là trung điểm BC và J là trung điểm AD. Lúc này $f(M') = \angle M'AB + \angle M'BC + \angle M'CD + \angle M'DA = A_2 + B_2 + C_2 + D_2$. Do vậy có thể coi $\pi \leqslant f(M) < 2\pi$. Dễ dàng chỉ ra

$$f(M) = \arg\Big(\frac{z-1}{i-1}\frac{z-i}{-i-1}\frac{z+1}{-i+1}\frac{z+i}{i+1}\Big) = \arg\Big(\frac{z^4-1}{4}\Big).$$

Hai đường chéo cắt nhau $O = AC \times BD$ và chia hình vuông ra làm 4 miền. Khi đó M thuộc một miền, chẳng hạn M thuộc miền OAB và ta có thể giả thiết $\alpha = \angle MOA \geqslant \dfrac{\pi}{4}$. Như vậy $\dfrac{\pi}{2} \geqslant \alpha = \arg(z) \geqslant \dfrac{\pi}{4}$. Do vậy $f(M) = \arg(z^4 - 1) = \angle xAN = \pi + \angle OAN \leqslant \pi + \angle OAD = \dfrac{5\pi}{4}$, ở đó N ứng với số phức z^4. Dấu $=$ xẩy ra khi $M \equiv B$, chẳng hạn. Khi đó $\angle MAB = 0, \angle MBC = \dfrac{\pi}{2}, \angle MCD = \dfrac{\pi}{2}$ và $\angle MDA = \dfrac{\pi}{4}$. Tóm lại, ta có $f(M)_{ln} = \dfrac{5\pi}{4}$. □

Ví dụ 2.2.8. *Giả sử điểm M ở trong hay trên cạnh tam giác đều ABC. Tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(M) = \angle MAB + \angle MBC + \angle MCA$.*

Bài giải: Không hạn chế có thể coi đỉnh A, B, C tương ứng với số phức $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Giả sử M tương ứng số phức z. Khi đó có

$$\overrightarrow{AM} = z - 1, \overrightarrow{BM} = z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \overrightarrow{CM} = z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ký hiệu $\angle MAB = A_1, \angle MBC = B_1, \angle MCA = C_1$ và các góc còn lại tương ứng là A_2, B_2, C_2. Hiển nhiên $A_1 + B_1 + C_1 + A_2 + B_2 + C_2 = \pi$. Nếu $A_2 + B_2 + C_2 > A_1 + B_1 + C_1$ thì lấy đối xứng M qua trục AH thành M', trong đó H là trung điểm BC. Lúc này $f(M') = \angle M'AB + \angle M'BC + \angle M'CA = A_2 + B_2 + C_2$. Do vậy có thể coi $\frac{\pi}{2} \leqslant f(M) < \pi$. Dễ dàng chỉ ra $f(M) =$

$$\arg\Big(\frac{z-1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}\frac{z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-i\sqrt{3}}\frac{z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}\Big) = \arg\Big(\frac{z^3 - 1}{3\sqrt{3}i}\Big).$$

Như vậy $(M) = \arg(z^3 - 1) - \frac{\pi}{2}$. Ba đoạn OA, OB, OC chia tam giác đều ra làm 3 miền. Khi đó M thuộc một miền, chẳng hạn M thuộc miền OAB. Như vậy $f(M) \leqslant \pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$. Dấu $=$ xẩy ra khi $M \equiv B$, chẳng hạn. Khi đó $\angle MAB = 0, \angle MBC = \frac{\pi}{3}, \angle MCA = \frac{\pi}{3}$. Tóm lại, ta có $f(M)_{ln} = \frac{2\pi}{3}$. □

Ví dụ 2.2.9. *Trong một mặt phẳng, cho tứ giác lồi $ABCD$. Dựng hai hình vuông cùng hướng $AEBF$ và $CHDK$. Chứng minh đồng nhất thức*

$$|EH^2 - FK^2| = 4S_{ABCD}.$$

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy để $A(0; -a)$, $E(-a; 0)$, $B(0; a)$, $F(a; 0)$. Giả sử tâm hình vuông $CHDK$ là $I(u; v)$ và $C(x_1; y_1)$. Vì hình vuông $CHDK$ cùng hướng hình vuông $AEBF$ nên sử dụng phép quay tâm $I(u; v)$ với góc quay $\frac{-\pi}{2}$ biểu diễn qua matrận:

$$\begin{pmatrix} x' - u \\ y' - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix}$$

ta được $H(u-v+y_1; u+v-x_1)$. Dễ dàng có $D(2u-x_1; 2v-y_1)$, và $K(u+v-y_1; v-u+x_1)$. Ta có $|EH^2 - FK^2| = 4|ua + uy_1 - vx_1| = 4S_{ABCD}$. □

Ví dụ 2.2.10. *Trong mặt phẳng, cho hai hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$ với thứ tự các đỉnh cùng theo một hướng. Chứng minh đồng nhất thức*

$$A'A^2 + C'C^2 = B'B^2 + D'D^2.$$

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy để $A(a;0)$, $B(0;a)$, $C(-a;0)$, D$(0;-a)$. Giả sử tâm hình vuông $A'B'C'D'$ là $I(u;v)$ và $A'(x_1;y_1)$. Vì hình vuông $A'B'C'D'$ cùng hướng hình vuông $ABCD$ nên sử dụng phép quay tâm $I(u;v)$ với góc quay $\frac{\pi}{2}$ biểu diễn qua matrận:

$$\begin{pmatrix} x'-u \\ y'-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix}$$

ta được $B'(u+v-y_1; x_1-u+v)$. Dễ dàng có $C'(2u-x_1; 2v-y_1)$, và $D(u-v+y_1; u+v-x_1)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} A'A^2 + C'C^2 &= (a-x_1)^2 + y_1^2 + (-a-2u+x_1)^2 + (2v-y_1)^2 \\ B'B^2 + D'D^2 &= (u+v-y_1)^2 + (a+u-v-x_1)^2 \\ &+ (u-v+y_1)^2 + (-a-u-v+x_1)^2. \end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra đồng nhất thức $A'A^2 + C'C^2 = B'B^2 + D'D^2$ vì cả hai đều bằng $2a^2 + 4u^2 + 4v^2 + 2x_1^2 + 2y_1^2 + 4au - 4ax_1 - 4ux_1 - 4vy_1$. □

2.3 Vận dụng trong Lượng giác

Mục này dành trình bày việc vận dụng số phức vào xây dựng các hệ thức lượng giác.

2.3.1 Xây dựng đồng nhất thức

Mệnh đề 2.3.1. *Với số nguyên dương n và góc α có* $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1 = (x^2 - 2x\cos\frac{\alpha}{n} + 1)\,(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi+\alpha}{n} + 1)\cdots(x^2 - 2x\cos\frac{(2n-2)\pi+\alpha}{n} + 1)$ *khi* $\cos\alpha \neq \pm 1$.

Chứng minh: Xét phương trình $x^n = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Hai phương trình có $2n$ nghiệm x. Vậy $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1 = (x^2 - 2x\cos\frac{\alpha}{n} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi+\alpha}{n} + 1)\cdots(x^2 - 2x\cos\frac{(2n-2)\pi+\alpha}{n} + 1)$. □

Mệnh đề 2.3.2. *Với số nguyên $n \geqslant 1$ ta luôn có các kết quả sau đây:*

(i) $x^{2n} - 1 = (x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k2\pi}{2n} + 1)$.

(ii) $x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod\limits_{k=1}^{n}(x^2 - 2x\cos\frac{k2\pi}{2n+1} + 1)$.

(iii) $x^{2n} + 1 = \prod\limits_{k=1,3,\ldots,2n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{2n} + 1)$.

(iv) $x^{2n+1} + 1 = (x+1)\prod\limits_{k=1,3,\ldots,2n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{2n+1} + 1)$.

Chứng minh: Từ $x^{2n} - 1 = \prod\limits_{k=1}^{n}(x - \cos\frac{k2\pi}{2n} - i\sin\frac{k2\pi}{2n})$ suy ra ngay $x^{2n} - 1 = (x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k2\pi}{2n} + 1)$. Tương tự cũng nhận được các công thức khác. □

Ví dụ 2.3.3. *Với số nguyên dương n và góc α có*

$$\begin{cases} \pm\sin\frac{\alpha}{2} = 2^{n-1}\sin\frac{\alpha}{2n}\sin\frac{2\pi+\alpha}{2n}\cdots\sin\frac{(2n-2)\pi+\alpha}{2n} \\ \cos\frac{\alpha}{2} = 2^{n-1}\sin\frac{\pi+\alpha}{2n}\sin\frac{3\pi+\alpha}{2n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi+\alpha}{2n} \\ \tan\frac{\alpha}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan\frac{\alpha}{2n}\tan\frac{2\pi+\alpha}{2n}\cdots\tan\frac{(2n-2)\pi+\alpha}{2n}. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $\begin{cases} n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} \\ 1 = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}. \end{cases}$

Bài giải: Vì $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1 = (x^2 - 2x\cos\frac{\alpha}{n} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi+\alpha}{n} + 1)\cdots(x^2 - 2x\cos\frac{(2n-2)\pi+\alpha}{n} + 1)$ nên khi cho $x = 1$ ta được

$2 - 2\cos\alpha = (2 - 2\cos\frac{\alpha}{n})(2 - 2\cos\frac{2\pi+\alpha}{n})\cdots(2 - 2\cos\frac{(2n-2)\pi+\alpha}{n})$

hay $4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=4^n\sin^2\dfrac{\alpha}{2n}\sin^2\dfrac{2\pi+\alpha}{2n}\cdots\sin^2\dfrac{(2n-2)\pi+\alpha}{2n}$. Khi đó ta nhận được
$$\begin{cases}\pm\sin\dfrac{\alpha}{2}=2^{n-1}\sin\dfrac{\alpha}{2n}\sin\dfrac{2\pi+\alpha}{2n}\cdots\sin\dfrac{(2n-2)\pi+\alpha}{2n}\\ \cos\dfrac{\alpha}{2}=2^{n-1}\sin\dfrac{\pi+\alpha}{2n}\sin\dfrac{3\pi+\alpha}{2n}\cdots\sin\dfrac{(2n-1)\pi+\alpha}{2n}\\ \tan\dfrac{\alpha}{2}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan\dfrac{\alpha}{2n}\tan\dfrac{2\pi+\alpha}{2n}\cdots\tan\dfrac{(2n-2)\pi+\alpha}{2n}.\end{cases}$$

Khi $\alpha\to 0$,
$$\begin{cases}2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\lim\limits_{\alpha\to0}\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2n}}=n\\ 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{3\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2n}=\lim\limits_{\alpha\to0}\cos\dfrac{\alpha}{2}=1.\end{cases}$$
□

Ví dụ 2.3.4. *Với số nguyên dương n, hãy tính tổng* $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2\alpha^{k-1}$ *với* $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{2n}$. *Từ đây suy ra*

Bài giải: □

2.3.2 Kết quả về đa giác đều

Ví dụ 2.3.5. *Chứng minh rằng, nếu đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và điểm tùy ý P với góc $(OP,OA_1)=\alpha$ thì*
$$(PA_1.PA_2\ldots PA_n)^2=OP^{2n}-2OP^n.R^n.\cos n\alpha+R^{2n}.$$
Đặc biệt, nếu P nằm trên đường tròn ngoại tiếp đa giác thì ta có hệ thức
$$PA_1.PA_2\ldots PA_n=2R^n|\sin\frac{n\alpha}{2}|.$$

Bài giải: Ta tính
$$\begin{cases}PA_1^2=OP^2-2OP.R\cos\alpha+R^2\\ PA_2^2=OP^2-2OP.R\cos(\dfrac{2\pi}{n}+\alpha)+R^2\\ \ldots\\ PA_n^2=OP^2-2OP.R\cos(\dfrac{(2n-2)\pi}{n}+\alpha)+R^2.\end{cases}$$
Nhân theo vế được $(PA_1.PA_2\ldots PA_n)^2=OP^{2n}-2OP^n.R^n.\cos n\alpha+$

R^{2n}. Khi $OP = R$ thì $(PA_1.PA_2\dots PA_n)^2 = 2R^{2n} - 2R^n.R^n.\cos n\alpha + R^{2n}$. Như vậy $PA_1.PA_2\dots PA_n = 2R^n|\sin\frac{n\alpha}{2}|$. $\square$

Ví dụ 2.3.6. [Théorême de cotes] *Chứng minh rằng, nếu đa giác đều $A_1A_2\dots A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R và điểm tùy ý P thuộc tia OA_1 thì $PA_1.PA_2\dots PA_n = |OP^n - R^n|$ và nếu $B_1,\dots,B_n$ là trung điểm các cung $\widehat{A_1A_2},\dots,\widehat{A_nA_1}$ thì $PB_1.PB_2\dots PB_n = OP^n + R^n$.*

Bài giải: Theo Ví dụ 2.3.5, với $\alpha = 0$ ta có $(PA_1.PA_2\dots PA_n)^2 = OP^{2n} - 2OP^n.R^n + R^{2n}$. Do vậy $PA_1.PA_2\dots PA_n = |OP^n - R^n|$. Sử dụng kết quả tương tự trên cho $2n$ giác đều $A_1B_1A_2\dots A_nB_n$ được $\prod_{k=1}^{n} PA_k.PB_k = |OP^{2n} - R^{2n}|$. Vậy $PB_1.PB_2\dots PB_n = OP^n + R^n$. $\square$

Ví dụ 2.3.7. *Cho đa giác đều $A_1A_2\dots A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Chứng minh rằng với bất kỳ điểm P ở trong đa giác có*

$$PA_1.PA_2\dots PA_n \leqslant (1 + \cos^n\frac{\pi}{n})R^n.$$

Bài giải: Không làm mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét $R = 1$. Trong mặt phẳng phức, mỗi đỉnh A_k tương ứng một số phức $z_k, |z_k| = 1$, với $k = 1, 2, \dots, n$; còn P tương ứng z. Khi đó $PA_1.PA_2\dots PA_n = \prod_{k=1}^{n}|z - z_k|$. Vì P ở trong đa giác nên P phải thuộc một tam giác OA_iA_{i+1}, chẳng hạn OA_1A_2. Gọi M là trung điểm A_1A_2. Ta có thể coi P thuộc tam giác vuông OA_1M. Vì $A_1\hat{O}A_2 = \frac{2\pi}{n}$ nên $\alpha \leqslant \frac{\pi}{n}$. Gọi OP cắt A_1M tại $K, d = OK$. Hiển nhiên $\Big(PA_1.PA_2\dots PA_n\Big)^2 = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)(\overline{z} - \overline{z_k}) = (z^n - 1)(\overline{z}^n - 1)$. Do đó $\Big(PA_1.PA_2\dots PA_n\Big)^2 = x^2 - 2x\cos n\alpha + 1$ với $x = OP^n$, xem Ví dụ 2.3.5, và $0 \leqslant x = OP^n \leqslant d^n$. Giá trị lớn nhất của tam thức đạt được tại 0 hoặc d^n. Vậy $\Big(PA_1.PA_2\dots PA_n\Big)^2 \leqslant \max\{1, d^{2n} - 2d^n\cos n\alpha + 1\}$. Xét $f(t) = t^2 - 2t\cos n\alpha + 1$ với $t = d^n$ và $\cos\frac{\pi}{n} \leqslant d \leqslant 1$. Chú ý rằng khi $d = 1$ thì $\alpha = 0$ và khi $d = \cos\frac{\pi}{n}$ thì $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Dễ dàng thấy $f(t) \leqslant \max\{f(1), f(\cos\frac{\pi}{n})\} = \max\{0, (1 + \cos^n\frac{\pi}{n})^2\}$. Tóm lại, ta luôn có bất đẳng thức $PA_1.PA_2\dots PA_n \leqslant 1 + \cos^n\frac{\pi}{n}$. $\square$

2.3.3 Tính chia hết của một vài đa thức đặc biệt

Định lý 2.3.8. *Giả sử K là một trường và đa thức bất khả quy $g(x) \in K[x]$ có nghiệm α. Đa thức $f(x) \in K[x]$ chia hết cho $g(x)$ khi và chỉ khi $f(\alpha) = 0$.*

Chứng minh: Giả sử đa thức $f(x) \in K[x]$. Theo Định lý **??**, có duy nhất hai đa thức $q(x), r(x)$ sao cho $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ với $\deg r(x) < \deg g(x)$. Như vậy $f(\alpha) = 0$ khi và chỉ khi $r(\alpha) = 0$. Do bởi $g(x)$ là đa thức bậc thấp nhất để $g(\alpha) = 0$ nên $r(x) = 0$. Tóm lại $f(x) \in K[x]$ chia hết cho $g(x)$ khi và chỉ khi $f(\alpha) = 0$. $\square$

Định lý 2.3.9. *Giả sử K là một trường và đa thức $g(x) \in K[x]$ chỉ có các nghiệm đơn $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Đa thức $f(x) \in K[x]$ chia hết cho $g(x)$ khi và chỉ khi $f(\alpha_i) = 0$ với $i = 1, \ldots, r$.*

Chứng minh: Giả sử đa thức $f(x) \in K[x]$. Nếu $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ thì có $h(x) \in K[x]$ để $f(x) = h(x)g(x)$. Vậy$f(\alpha_i) = h(\alpha_i)g(\alpha_i) = 0$ với $i = 1, 2, \ldots, r$. Ngược lại, giả sử $f(\alpha_i) = 0$ với $i = 1, \ldots, r$. Do các α_i khác nhau nên $f(x)$ chia hết cho tích $(x - \alpha_1) \ldots 9x - \alpha_r)$. Vậy $f(x) \in K[x]$ chia hết cho $g(x)$. $\square$

Ví dụ 2.3.10. *Với các số tự nhiên m và n, tam thức $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $mn - 2 \vdots 3$. Từ đó suy ra $x^{10} + x^5 + 1, x^{20} + x^4 + 1$ đều chia hết cho $x^2 + x + 1$.*

Bài giải: Đa thức $x^2 + x + 1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ với nghiệm phức $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \alpha^3 = 1$. Biểu diễn $m = 3h + r, n = 3k + s$ với $r, s \in \{0, 1, 2\}$. Vậy $p(x) = x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $\alpha^m + \alpha^n + 1 = 0$ hay $\alpha^r + \alpha^s + 1 = 0$. Do vậy $0 = \Big(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\Big)^r + \Big(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\Big)^s + 1 = \cos\dfrac{r2\pi}{3} + i\sin\dfrac{r2\pi}{3} + \cos\dfrac{s2\pi}{3} + i\sin\dfrac{s2\pi}{3} + 1$. Điều này tương đương

$$\begin{cases} \sin\dfrac{r2\pi}{3} + \sin\dfrac{s2\pi}{3} = 0 \text{ hay} \\ \cos\dfrac{r2\pi}{3} + \cos\dfrac{s2\pi}{3} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r + s \vdots 3 \leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix} r=s=0 \\ r+s=3 \end{smallmatrix}\right. \\ 2\cos\dfrac{(r+s)\pi}{3}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{3} + 1 = 0. \end{cases}$$

Kiểm tra $r = s = 0$ không thỏa mãn hệ. Vậy $r + s = 3$ hay $\{r, s\} = \{1, 2\}$. Vậy $mn = (3u+1)(3v+2) = 3(3uv+u+v)+2$. Do đó x^m+x^n+1 chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $mn - 2 \vdots 3$. $\square$

Ví dụ 2.3.11. *Với các số tự nhiên m và n, tam thức $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$ khi và chỉ khi $m+n, mn-2 \vdots 6$. Như vậy, $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^4 + x^2 + 1$ khi và chỉ khi $m+n, mn-2 \vdots 6$.*

Bài giải: Đa thức $x^2 - x + 1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ với nghiệm phức $\alpha = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \alpha^3 = -1$. Biểu diễn $m = 6h + r, n = 6k + s$ với $r, s \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Đa thức $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$ khi và chỉ khi $\alpha^m + \alpha^n + 1 = 0$ hay $\alpha^r + \alpha^s + 1 = 0$. Do vậy $0 = \Big(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^r + \Big(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^s + 1 = \cos\dfrac{r\pi}{3} + i\sin\dfrac{r\pi}{3} + \cos\dfrac{s\pi}{3} + i\sin\dfrac{s\pi}{3} + 1$. Điều này tương đương

$$\begin{cases}\sin\dfrac{r\pi}{3} + \sin\dfrac{s\pi}{3} = 0 \text{ hay}\\ \cos\dfrac{r\pi}{3} + \cos\dfrac{s\pi}{3} + 1 = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}2\sin\dfrac{(r+s)\pi}{6}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{6} = 0\\ 2\cos\dfrac{(r+s)\pi}{6}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{6} + 1 = 0.\end{cases}$$

Như vậy $\begin{cases} r+s \vdots 6 \leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix} r=s=0\\ r+s=6\end{smallmatrix}\right.\\ 2\cos\dfrac{(r+s)\pi}{6}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{6} + 1 = 0.\end{cases}$ Kiểm tra $r = s = 0$ không thỏa mãn hệ. Vậy $r + s = 6$. Khi đó ta có $\begin{cases} r+s = 6\\ \cos\dfrac{(r-s)\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\end{cases}$ hay $\begin{cases} r+s=6\\ r-s=\pm 2.\end{cases}$ Vậy $\{r,s\} = \{2,4\}$. Chỉ cần xét $m = 6u+4, n = 6v+2$. Khi đó $m+n = 6(u+v+1), mn = 6(6uv+4v+2u+1)+2$. Điều này tương đương $m+n, mn-2 \vdots 6$. Theo Ví dụ 2.3.10 ta suy ra $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^4 + x^2 + 1$ khi và chỉ khi $m+n, mn-2 \vdots 6$. □

Ví dụ 2.3.12. *Với các số tự nhiên m và n, tam thức $x^m + x^n - 2$ chia hết cho $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $m, n \vdots 5$.*

Bài giải: Đa thức $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ với nghiệm phức $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}, \alpha^5 = 1$. Biểu diễn $m = 5h + r, n = 5k + s$ với $r, s \in \{0,1,2,3,4\}$. Đa thức $x^m + x^n - 2$ chia hết cho $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $\alpha^m + \alpha^n - 2 = 0$ hay $\alpha^r + \alpha^s - 2 = 0$. Do vậy $\cos\dfrac{r2\pi}{5} + i\sin\dfrac{r2\pi}{5} + \cos\dfrac{s2\pi}{5} + i\sin\dfrac{s2\pi}{5} - 2 = 0$. Điều này tương đương

$$\begin{cases} \sin\dfrac{r2\pi}{5}+\sin\dfrac{s2\pi}{5}=0 \\ \cos\dfrac{r2\pi}{5}+\cos\dfrac{s2\pi}{5}-2=0\end{cases} \text{hay} \quad \begin{cases} 2\sin\dfrac{(r+s)\pi}{5}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{5}=0 \\ 2\cos\dfrac{(r+s)\pi}{5}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{5}-2=0.\end{cases}$$

Như vậy $\begin{cases} r+s \,\vdots\, 5 \leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix} r=s=0 \\ r+s=5\end{smallmatrix}\right. \\ 2\cos\dfrac{(r+s)\pi}{5}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{5}-2=0.\end{cases}$ Kiểm tra $r=s=0$ thỏa mãn hệ. Với $r+s=5$ ta có $\begin{cases} r+s=5 \\ \cos\dfrac{(r-s)\pi}{5}=-1\end{cases}$ hay $\begin{cases} r+s=5 \\ r-s=\pm 5.\end{cases}$ Vậy $\{r,s\}=\{0,5\}$. Vậy, tam thức x^m+x^n-2 chia hết cho $x^4+x^3+x^2+x+1$ khi và chỉ khi $m,n \,\vdots\, 5$. □

Ví dụ 2.3.13. *Với mọi tự nhiên m và n, tam thức x^m+x^n+1 không chia hết cho $x^4+x^3+x^2+x+1$.*

Bài giải: Đa thức $x^4+x^3+x^2+x+1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ với nghiệm phức $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}, \alpha^5=1$. Biểu diễn $m=5h+r, n=5k+s$ với $r,s\in\{0,1,2,3,4\}$. Đa thức x^m+x^n+1 chia hết cho $x^4+x^3+x^2+x+1$ khi và chỉ khi $\alpha^m+\alpha^n+1=0$ hay $\alpha^r+\alpha^s+1=0$. Do vậy $\cos\dfrac{r2\pi}{5}+i\sin\dfrac{r2\pi}{5}+\cos\dfrac{s2\pi}{5}+i\sin\dfrac{s2\pi}{5}+1=0$. Điều này tương đương

$$\begin{cases} \sin\dfrac{r2\pi}{5}+\sin\dfrac{s2\pi}{5}=0 \\ \cos\dfrac{r2\pi}{5}+\cos\dfrac{s2\pi}{5}+1=0\end{cases} \text{hay} \quad \begin{cases} 2\sin\dfrac{(r+s)\pi}{5}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{5}=0 \\ 2\cos\dfrac{(r+s)\pi}{5}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{5}+1=0.\end{cases}$$

Như vậy $\begin{cases} r+s \,\vdots\, 5 \leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix} r=s=0 \\ r+s=5\end{smallmatrix}\right. \\ 2\cos\dfrac{(r+s)\pi}{5}\cos\dfrac{(r-s)\pi}{5}+1=0.\end{cases}$ Kiểm tra $r=s=0$ không thỏa mãn hệ. Với $r+s=5$ không thỏa mãn $\begin{cases} r+s=5 \\ 2\cos\dfrac{(r-s)\pi}{5}=1.\end{cases}$ Vậy, tam thức x^m+x^n+1 không bao giờ chia hết cho $x^4+x^3+x^2+x+1$. □

Ví dụ 2.3.14. *Xác định số tự nhiên m để đa thức $(x+1)^m+x^m+1$ chia hết cho x^2+x+1.*

Bài giải: Đa thức x^2+x+1 là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ với nghiệm phức $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}, \alpha^3 = 1$. Vì $\alpha^2+\alpha+1=0$ nên $1+\alpha=-\alpha^2$. Vậy $(1+\alpha)^6=1$. Biểu diễn $m=6k+r$ với $r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Đa thức $(x+1)^m+x^m+1$ chia hết cho x^2+x+1 khi và chỉ khi $(1+\alpha)^m+\alpha^m+1=0$ hay $(1+\alpha)^r+\alpha^r+1=0$. Vậy $\cos\dfrac{r\pi}{3}+i\sin\dfrac{r\pi}{3}+\cos\dfrac{r2\pi}{3}+i\sin\dfrac{r2\pi}{3}+1=0$. Điều này tương đương

$$\begin{cases}\sin\dfrac{r\pi}{3}+\sin\dfrac{r2\pi}{3}=0 \text{ hay}\\ \cos\dfrac{r\pi}{3}+\cos\dfrac{r2\pi}{3}+1=0\end{cases}\quad \begin{cases}2\sin\dfrac{r\pi}{2}\cos\dfrac{r\pi}{6}=0\\ 2\cos\dfrac{r\pi}{2}\cos\dfrac{r\pi}{6}+1=0.\end{cases}$$

Như vậy $\begin{cases}r=0,2,3,4\\ 2\cos\dfrac{r\pi}{2}\cos\dfrac{r\pi}{6}+1=0.\end{cases}$ Kiểm tra $r=2, r=4$ thỏa mãn hệ. Vậy, đa thức $(x+1)^m+x^m+1$ chia hết cho x^2+x+1 khi và chỉ khi $m=6k+2$ hoặc $m=6k+4$. □

Ví dụ 2.3.15. *Xác định số tự nhiên m để đa thức $(x+1)^m+x^m+1$ chia hết cho $(x^2+x+1)^2$. Từ đó suy ra $21^{2014}+20^{2014}+1$ chia hết cho 421^2.*

Bài giải: Đa thức x^2+x+1 là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ với nghiệm phức $\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}, \alpha^3=1$. Vì $\alpha^2+\alpha+1=0$ nên $1+\alpha=-\alpha^2$. Vậy $(1+\alpha)^6=1$. Biểu diễn $m=6k+r$ với $r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Đa thức $(x+1)^m+x^m+1$ chia hết cho (x^2+x+1) khi và chỉ khi $\begin{cases}(1+\alpha)^m+\alpha^m+1=0\\ m(1+\alpha)^{m-1}+m\alpha^{m-1}=0\end{cases}$ tương đương $\begin{cases}r=2, r=4\\ (1+\alpha)^{r-1}+\alpha^{r-1}=0.\end{cases}$ Kiểm tra $r=4$ thỏa mãn hệ. Vậy, đa thức $(x+1)^m+x^m+1$ chia hết cho $(x^2+x+1)^2$ khi và chỉ khi $m=6k+4$. Với $x=20$ có $21^{2014}+20^{201}+1$ chia hết cho 421^2. □

Ví dụ 2.3.16. *Chứng minh rằng không có số tự nhiên m để ước chung lớn nhất $\big((x+1)^m+x^m+1, (x+1)^m-x^m-1\big)$ chia hết cho $(x^2+x+1)^3$.*

Bài giải: Suy ra từ các ví dụ trên. □

Ví dụ 2.3.17. [Poland 1996] *Xác định tất cả các cặp số $(9n, r)$, trong đó n là số nguyên dương và r là số thực, sao cho đa thức $(x+1)^n-r$ chia hết cho $2x^2+2x+1$.*

Bài giải: Đa thức $2x^2 + 2x + 1$ là bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ với nghiệm phức $\alpha = \dfrac{-1+i}{2}$. Đa thức $(x+1)^n - r$ chia hết cho $2x^2 + 2x + 1$ khi và chỉ khi $\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n = r$ hay $\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n = \sqrt{2^n}r$. Như vậy ta có $n = 4m$ và $r = \dfrac{(-1)^m}{4^m}$ với số nguyên dương m. $\square$

Ví dụ 2.3.18. *Cho $a \neq 0$ và số nguyên dương $n \geqslant r > 0$. Khi đó hãy*

(i) *Xác định tất cả các cặp số (n, r) để $x^n - a^n$ chia hết cho $x^r - a^r$.*

(ii) *Với bất kỳ cặp số nguyên n, r hãy xác định dư của phép chia $x^n - a^n$ cho $x^r - a^r$.*

Bài giải: (i) Vì $(x^r - a^r)' = rx^{r-1}$ không có nghiệm khác 0 nên đa thức $x^r - a^r$ chỉ có các nghiệm đơn. Vậy $f(x) = x^n - a^r$ chia hết cho $x^r - a^r$ khi và chỉ khi mọi nghệm của $x^r - a^r$ cũng là nghiệm của $f(x)$. Không hạn chế có thể coi $a = 1$. Nghiệm của $x^r - 1$ là $x_s = \cos\dfrac{s2\pi}{r} + i\sin\dfrac{s2\pi}{r}$ với $s = 1, \ldots, r$. Vậy $x^n - 1$ chia hết cho $x^r - 1$ khi và chi khi $\cos\dfrac{ns2\pi}{r} + i\sin\dfrac{ns2\pi}{r} = 1$ với mọi $s = 1, \ldots, r$. Điều này tương đương $\begin{cases} \cos\dfrac{ns2\pi}{r} = 1 \\ \sin\dfrac{ns2\pi}{r} = 0 \\ s = 1, 2, \ldots, r. \end{cases}$ Do vậy $n \vdots r$ và có các cặp dạng (mr, r).

(ii) Biểu diễn $n = pr + s$ với $0 \leqslant s < r$. Khi đó $x^n - 1 = x^{pr+s} - 1 = (x^r - 1)(x^{n-r} + x^{n-2r} + \cdots + x^{m-pr}) + x^s - 1$. Vậy phần dư là $x^s - 1$. $\square$

2.3.4 Tính một vài tổng và tích

Ví dụ 2.3.19. *Với số nguyên $n \geqslant 1$ ta luôn có đồng nhất thức dưới đây:*

$$\sqrt{2} = 2^n \sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\sin\frac{5\pi}{4n}\ldots\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}.$$

Với số nguyên $r \geqslant 1$ có $\dfrac{1}{2^r} = \sin\dfrac{\pi}{2(2r+1)}\sin\dfrac{3\pi}{2(2r+1)}\ldots\sin\dfrac{(2r-1)\pi}{2(2r+1)}$.

Từ đó tính tổng $T_m = \displaystyle\sum_{r=1}^{m}\sin\frac{\pi}{2(2r+1)}\sin\frac{3\pi}{2(2r+1)}\ldots\sin\frac{(2r-1)\pi}{2(2r+1)}$ và giới hạn của dãy (T_m).

Bài giải: Theo Mệnh đề 2.3.2 có $x^{2n}+1 = \prod_{k=1,3,\ldots,2n-1}(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{2n}+1)$. Cho $x = 1$ ta được $2 = \prod_{k=1,3,\ldots,2n-1}(2-2\cos\frac{k\pi}{2n}) = \prod_{k=1,3,\ldots,2n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{4n}$. Như vậy $\sqrt{2} = \prod_{k=1,3,\ldots,2n-1} 2\sin\frac{k\pi}{4n}$ hay $\sqrt{2} = 2^n \prod_{k=1,3,\ldots,2n-1}\sin\frac{k\pi}{4n}$.
Nếu $n = 2r+1$ thì $\sqrt{2} = 2^n \sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}\sin\frac{3\pi}{4n}\sin\frac{(2n-3)\pi}{4n}\ldots$.
Vậy $\frac{1}{2^r} = \sin\frac{\pi}{2(2r+1)}\sin\frac{3\pi}{2(2r+1)}\sin\frac{5\pi}{2(2r+1)}\ldots\sin\frac{(2r-1)\pi}{2(2r+1)}$, vì trong tích có thừa số $\sin\frac{n\pi}{4n}$, và suy ra $T = 1-\frac{1}{2^m}$. Vậy $\lim\ T_m = 1$. □

Ví dụ 2.3.20. *Với số nguyên $n \geqslant 1$ ta luôn có đồng nhất thức dưới đây:*

$$\sqrt{n} = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Bài giải: Theo Mệnh đề 2.3.2 có $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{k2\pi}{2n}+1)$. Cho $x \to 1$ ta được $n = \prod_{k=1}^{n-1}(2-2\cos\frac{k2\pi}{2n}) = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$. Như vậy $n = \prod_{k=1}^{n-1} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$ hay $\sqrt{n} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$. □

Ví dụ 2.3.21. **[IMO 1973]** *Chứng minh với mọi số nguyên dương n có*

$$2^n\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}.$$

Bài giải: Xét đa thức $x^{2n+1}-1$ trên $\mathbb{C}$ với $2n+1$ nghiệm ta suy ra biểu diễn

$$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1} = \prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos\frac{k2\pi}{2n+1}+1).$$

Cho $x \to 1$ được hệ thức $2n+1 = \prod_{k=1}^{n}(2-2\cos\frac{k2\pi}{2n+1}) = \prod_{k=1}^{n} 4\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}$.
Do đó $2^n\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$. □

Ví dụ 2.3.22. *Với số nguyên dương n, tính tổng $T = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$.*

Bài giải: Đặt $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$. Xét $S + iT = \sum\limits_{k=1}^{n} (\cos kx + i \sin kx)$. Đặt $u = \cos x + i \sin x$. Khi đó $S + iT = \sum\limits_{k=1}^{n} u^k = u\dfrac{u^n - 1}{u - 1}$. Từ đây dễ dàng suy ra $T = \dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$. □

Ví dụ 2.3.23. *Với số nguyên dương n, tính tổng $T = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k+1)x$ và $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k+1)x$.*

Ví dụ 2.3.24. *Tính $S = \sin\dfrac{\pi}{15}\sin\dfrac{2\pi}{15}\sin\dfrac{3\pi}{15}\sin\dfrac{4\pi}{15}\sin\dfrac{5\pi}{15}\sin\dfrac{6\pi}{15}\sin\dfrac{7\pi}{15}$ và $T = \tan\dfrac{\pi}{15}\tan\dfrac{2\pi}{15}\tan\dfrac{3\pi}{15}\tan\dfrac{4\pi}{15}\tan\dfrac{5\pi}{15}\tan\dfrac{6\pi}{15}\tan\dfrac{7\pi}{15}$.*

Bài giải: Theo Ví dụ 2.3.21, với $n = 7$ có $S = \dfrac{\sqrt{15}}{2^7}$. Theo Ví dụ 2.3.3, với $n = 15$ có $\sin^2\dfrac{\pi}{30}\sin^2\dfrac{3\pi}{30}\cdots\sin^2\dfrac{13\pi}{30} = \dfrac{1}{2^{14}}$ hay $\cos^2\dfrac{7\pi}{15}\cdots\cos^2\dfrac{\pi}{15} = \dfrac{1}{2^{14}}$. Từ đây có $P = \cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cdots\cos\dfrac{7\pi}{15} = \dfrac{1}{2^7}$ và $T = \dfrac{S}{P} = \sqrt{15}$. □

Ví dụ 2.3.25. *Chứng minh rằng $\prod\limits_{k=1}^{n} \tan\dfrac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$.*

Bài giải: Theo Mệnh đề 2.3.2, $\dfrac{x^{2n+1} - 1}{x - 1} = \prod\limits_{k=1}^{n}(x^2 - 2x\cos\dfrac{k2\pi}{2n+1} + 1)$. Cho $x \to 1$ được hệ thức $2n + 1 = \prod\limits_{k=1}^{n}(2 - 2\cos\dfrac{k2\pi}{2n+1}) = \prod\limits_{k=1}^{n} 4\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$ hay $2^n\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$. Cho $x = -1$ ta nhận được hệ thức $1 = \prod\limits_{k=1}^{n}(2 + 2\cos\dfrac{k2\pi}{2n+1}) = \prod\limits_{k=1}^{n} 4\cos^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$ hay $2^n\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k\pi}{2n+1} = 1$. Do vậy $\prod\limits_{k=1}^{n}\tan\dfrac{k\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$. □

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Ví dụ 2.3.26. *Ta luôn có* $\dfrac{p(x)}{x^n+1} = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k) + \dfrac{1}{2}p(0)$, *trong đó* $\alpha_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{n}, k = 1, 2, \ldots, n$, *và đa thức* $p(x)$ *có* $\deg p(x) < n$. *Từ đó suy ra hệ thức* $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n} = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{n} = n$ *và* $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} = 0$.

Bài giải: Hiển nhiên $\dfrac{p(x)}{x^n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{p(\alpha_k)}{n\alpha_k^{n-1}(x-\alpha_k)} = -\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k p(\alpha_k)}{x-\alpha_k}$. Cho $x = 0$ có $p(0) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p(\alpha_k)$. Khi đó ta có hệ thức sau: $\dfrac{p(x)}{x^n+1} - \dfrac{1}{2}p(0) = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\alpha_k p(\alpha_k)}{x-\alpha_k} - \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}p(\alpha_k) = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k)$. Do vậy $\dfrac{p(x)}{x^n+1} = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k) + \dfrac{1}{2}p(0)$.

Khi chọn $p(x) = x$ và $x = 1$ ta có $\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}\alpha_k$. Dễ dàng biến đổi $\dfrac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}\alpha_k = i\cot\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\Big(\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{n}\Big)$. Vậy $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{n} = 0, \sum\limits_{k=1}^{n}\cot\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{n} = n$. Khi $p(x) = 1, x = 1$, có $\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} + \dfrac{1}{2}$ hay $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} = 0$. Biến đổi $\dfrac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} = i\cot\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Vậy $\sum\limits_{k=1}^{n}\cot\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} = 0$. $\square$

Ví dụ 2.3.27. *Ta luôn có* $\dfrac{p(x)}{x^n-1} = \dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k) - \dfrac{1}{2}p(0)$, *trong đó* $\alpha_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}, k = 1, 2, \ldots, n$, *và đa thức* $p(x)$ *có* $\deg p(x) < n$. *Vậy* $\dfrac{2n}{2^n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\cos\dfrac{4k\pi}{n} - \cos\dfrac{2k\pi}{n}}{5 - 4\cos\dfrac{2k\pi}{n}}, \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2\sin\dfrac{4k\pi}{n} - \sin\dfrac{2k\pi}{n}}{5 - 4\cos\dfrac{2k\pi}{n}} = 0$.

Bài giải: Hiển nhiên $\dfrac{p(x)}{x^n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{p(\alpha_k)}{n\alpha_k^{n-1}(x-\alpha_k)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k p(\alpha_k)}{x-\alpha_k}$.

Cho $x = 0$ có $p(0) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p(\alpha_k)$. Khi đó ta có $\dfrac{p(x)}{x^n - 1} + \dfrac{1}{2}p(0) = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2\alpha_k p(\alpha_k)}{x-\alpha_k} + \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} p(\alpha_k) = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k)$. Do vậy $\dfrac{p(x)}{x^n-1} = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{x+\alpha_k}{x-\alpha_k}p(\alpha_k) - \dfrac{1}{2}p(0)$.

Khi chọn $p(x) = x$ ta có $\dfrac{x}{x^n-1} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k^2}{x-\alpha_k}$. Cho $x = 2$ ta nhận được $\dfrac{2}{2^n-1} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\alpha_k^2}{2-\alpha_k}$. Từ đây có $\dfrac{2n}{2^n-1} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{2\cos\dfrac{4k\pi}{n} - \cos\dfrac{2k\pi}{n}}{5 - 4\cos\dfrac{2k\pi}{n}}$ và $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2\sin\dfrac{4k\pi}{n} - \sin\dfrac{2k\pi}{n}}{5-4\cos\dfrac{2k\pi}{n}} = 0$. □

Ví dụ 2.3.28. *Với số nguyên dương n và góc α hãy tính tích dưới đây:*

$$T = \prod_{s=1}^{n}\Big(1 + \frac{\sin\big(\alpha + \dfrac{(2s-1)\pi}{2n}\big)}{\sin\dfrac{(2s-1)\pi}{2n}}\Big).$$

Bài giải: Xét phương trình $t^n = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$. Khi đó mỗi nghiệm $t_s = \cos\dfrac{s\pi}{n} + i\sin\dfrac{s\pi}{n}$ với $s = 1, 2, \ldots, n$. Giả sử $\dfrac{x_s + \cos\alpha + i\sin\alpha}{x_s + \cos\alpha - i\sin\alpha} = t_s$. Khi đó $x_s = -\dfrac{\sin\big(\alpha + \dfrac{(2s-1)\pi}{2n}\big)}{\sin\dfrac{(2s-1)\pi}{2n}}$. Vì mỗi x_s là nghiệm của phương trình $f(x) = (x + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (x + \cos\alpha - i\sin\alpha)^n = 0$ nên ta có

$$f(x) = 2\prod_{s=1}^{n}\Big(x + \frac{\sin\big(\alpha + \dfrac{(2s-1)\pi}{2n}\big)}{\sin\dfrac{(2s-1)\pi}{2n}}\Big).$$

Do vậy $2T = (1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (1 + \cos\alpha - i\sin\alpha)^n$ hay chúng ta có $T = 2^n\cos^n\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{n\alpha}{2}$. □

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Ví dụ 2.3.29. *Với mỗi số nguyên dương n hãy tính các tổng dưới đây:*

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{3 + 2\sin^2 \frac{k\pi}{n}}{9 + 16\sin^2 \frac{k\pi}{n}}, S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{2k\pi}{n}}{9 + 16\sin^2 \frac{k\pi}{n}}.$$

Bài giải: Vì $x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$ với $\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}$ và $k = 1, 2, \ldots, n$, nên $\frac{nx^{n-1}}{x^n - 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_k}$ với $\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}$ và $k = 1, 2, \ldots, n$, Với $x = 4$ ta có hệ thức

$$\begin{aligned} \frac{n4^{n-1}}{4^n - 1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4 - \alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i\sin \frac{2k\pi}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{4 - \cos \frac{2k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}}{17 - 8\cos \frac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3 + 2\sin^2 \frac{k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}}{9 + 16\sin^2 \frac{k\pi}{n}} \end{aligned}$$

Do vậy $\sum_{k=1}^{n} \frac{3 + 2\sin^2 \frac{k\pi}{n}}{9 + 16\sin^2 \frac{k\pi}{n}} = \frac{n4^{n-1}}{4^n - 1}$ và $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{2k\pi}{n}}{9 + 16\sin^2 \frac{k\pi}{n}} = 0.$ □

Ví dụ 2.3.30. *Với mỗi số nguyên dương n, hãy tính các tổng dưới đây:*

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{n - 1 + 2\sin^2 \frac{k\pi}{n}}{(n-1)^2 + 2n\sin^2 \frac{k\pi}{n}}, S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{2k\pi}{n}}{(n-1)^2 + 4n\sin^2 \frac{k\pi}{n}}.$$

Bài giải: Vì $x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}(x - \alpha_k)$ với $\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}$ và $k = 1, 2, \ldots, n$, nên $\frac{nx^{n-1}}{x^n - 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_k}$ với $\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i\sin \frac{2k\pi}{n}$

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

và $k = 1, 2, \dots, n$, Với $x = n$ ta nhận được hệ thức $I = \dfrac{n^n}{n^n - 1}$:

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n - \alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n - \cos\dfrac{2k\pi}{n} - i\sin\dfrac{2k\pi}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n - \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}}{n^2 + 1 - 2n\cos\dfrac{2k\pi}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n - 1 + 2\sin^2\dfrac{k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}}{(n-1)^2 + 4n\sin^2\dfrac{k\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $T = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n - 1 + 2\sin^2\dfrac{k\pi}{n}}{(n-1)^2 + 2n\sin^2\dfrac{k\pi}{n}} = \dfrac{n^n}{n^n - 1}$ và $S = 0$. □

Ví dụ 2.3.31. *Tính tổng* $T = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \dfrac{7^{2k+2}}{2k+2}$.

Bài giải: Tính tích phân $I_n = \int\limits_0^7 x(1 + x^2)^n \,\mathrm{dx}$. Đặt $y = 1 + x^2$. Khi đó $I_n = \dfrac{1}{2}\int\limits_1^{50} y^n \,\mathrm{dy} = \dfrac{1}{2(n+1)} y^{n+1}|_1^{50}$ hay ta có $I_n = \dfrac{50^{n+1} - 1}{2(n+1)}$. Khai triển tích $x(1 + x^2)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^{2k+1}$. Vậy $\dfrac{50^{n+1} - 1}{2(n+1)} = I_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \int\limits_0^7 x^{2k+1} \,\mathrm{dx} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \dfrac{7^{2k+2}}{2k+2}$. □

Ví dụ 2.3.32. *Tính tổng* $T = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \dfrac{1}{2k+1}$.

Bài giải: Tính tích phân $I_n = \int\limits_0^1 (1 - x^2)^n \,\mathrm{dx}$ với số nguyên dương n. Sử dụng công thức tính tích phân từng phần ta nhận được

$$I_n = x(1 - x^2)^n|_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1 - x^2)^{n-1} \,\mathrm{dx} = -2n(I_n - I_{n-1})$$

hay ta có $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$. Với công thức truy hồi này ta nhận được

$I_n = \dfrac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1}$. Vậy $\dfrac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)} = I_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{C}_n^k \int\limits_0^1 x^{2k}\,\mathrm{dx}$
hay $\dfrac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{C}_n^k \dfrac{1}{2k+1}$. □

Ví dụ 2.3.33. *Phân tích $x^{2n}+x^n+1$ ra thành tích các nhân tử bất khả quy trong $\mathbb{R}[x]$ và tính tích $P = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \sin\dfrac{(3k+1)\pi}{3n}$.*

Bài giải: Đa thức $x^{3n}-1$ có $3n$ nghiệm phân biệt nên tập nghiệm của $x^{2n}+x^n+1$ và của x^n-1 không giao nhau. Phân tích đa thức $f = x^{3n}-1$:

$$\begin{aligned} f &= \prod_{k=0}^{3n-1}(x-\cos\frac{2k\pi}{3n} - i\sin\frac{2k\pi}{3n}) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-\cos\frac{3k2\pi}{3n} - i\sin\frac{3k2\pi}{3n}) \\ &.\ \prod_{k=0}^{n-1}(x-\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n} - i\sin\frac{(3k+1)2\pi}{3n}) \\ &.\ \prod_{k=0}^{n-1}(x-\cos\frac{(3k+2)2\pi}{3n} - i\sin\frac{(3k+2)2\pi}{3n}). \end{aligned}$$

Vì $x^n-1 = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(x-\cos\dfrac{2k\pi}{n} - i\sin\dfrac{2k\pi}{n}) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(x-\cos\dfrac{3k2\pi}{3n} - i\sin\dfrac{3k2\pi}{3n})$ nên ta được biểu diễn thành tích $x^{2n}+x^n+1 = g(x)h(x)$ với

$$\begin{cases} g(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(x-\cos\dfrac{(3k+1)2\pi}{3n} - i\sin\dfrac{(3k+1)2\pi}{3n}) \\ h(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(x-\cos\dfrac{(3k+2)2\pi}{3n} - i\sin\dfrac{(3k+2)2\pi}{3n}). \end{cases}$$

Đặt $x_h = \cos\dfrac{h.2\pi}{3n} - i\sin\dfrac{h.2\pi}{3n}$ và $T_k = (x-x_{3k+1})(x-x_{3(n-k-1)+2})$ với $h = 0, 1, \ldots, 3n-1$. Khi đó ta có kết quả dưới đây:

$$\begin{aligned} T_k &= (x-\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n} - i\sin\frac{(3k+1)2\pi}{3n}) \\ &.\ (x-\cos\frac{(3n-3k-1)2\pi}{3n} - i\sin\frac{(3n-3k-1)2\pi}{3n}) \end{aligned}$$

hay $T_k = x^2 - 2x\cos\dfrac{(3k+1)2\pi}{3n} + 1$ và nhận được phân tích thành

tích
$$x^{2n}+x^n+1=\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n}+1).$$
Với $x=1$ có $3=\prod_{k=0}^{n-1}(2-2\cos\frac{(3k+1)2\pi}{3n})=4^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\frac{(3k+1)\pi}{3n}$. Do vậy $\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(3k+1)\pi}{3n}=\frac{\sqrt{3}}{2^n}$. □

Ví dụ 2.3.34. *Phân tích $x^{2n}-2x^n+2$ ra thành tích các nhân tử bậc hai trong $\mathbb{R}[x]$ và tính tích $P=\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(8k+1)\pi}{8n}$.*

Bài giải: Đa thức $x^{2n}-2x^n+2=(x^n-1)^2-i^2=(x^n-1+i)(x^n-1-i)$. Từ $x^{2n}-2x^n+2=\big(x^n-\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\big)\big(x^n-\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})\big)$

$$\begin{aligned}&=\prod_{k=0}^{n-1}\Big[x-\sqrt[2n]{2}\Big(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{n}\Big)\Big]\\ &.\prod_{k=0}^{n-1}\Big[x-\sqrt[2n]{2}\Big(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{n}-i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{n}\Big)\Big]\\ &=\prod_{k=0}^{n-1}\Big[x^2-2\sqrt[2n]{2}x\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{n}+\sqrt[n]{2}\Big]\end{aligned}$$

và $x=\sqrt[2n]{2}$ suy ra $\prod_{k=0}^{n-1}\sin\frac{(8k+1)\pi}{8n}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2^n}$. □

Kết luận của luận văn

Trong luận văn chúng tôi đã trình bày được các kết quả sau đây:

1. Xây dựng trường $\mathbb{C}$ và nhúng được trường $\mathbb{R}$ vào trường $\mathbb{C}$.
2. Trình bày lại hai cách chứng minh định lý cơ bản của đại số.
3. Mở rộng đồng nhất thức và Bất đẳng thức của Ptolemy và Bất đẳng thức Hayashi cho đa giác.
4. Chứng minh lại Bất đẳng thức Erdos-Mordell cho đa giác.
5. Chứng minh lại đồng nhất thức và Bất đẳng thức (M,N) và một vài bất đẳng thức mới.
6. Trình bày được phép quay qua số phức và mở rộng một vài bài toán hình đã biết từ lâu.
7. Xây dựng được một số hệ thức mới và tính một vài tổng, tích trong lượng giác.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Tài liệu tham khảo

[1] T. Andreescu and D. Andrica, Proving some geometric inequalities by using complex numbers, Eduatia Math. Vol 1. Nr. 2 (2005),19-26.

[2] D. Demidovich, *Bài tập giải tích toán học,* Hà Nội 1975.

[3] D. Faddéev et I. Sominski, *Recueil D'Exercices D'Algèbre Supérieure,* Editions Mir-Moscou 1977.

[4] N. V. Mậu và Đ. V. Nhỉ, Đồng nhất thức và phương pháp tọa độ trong Hình học, Nhà Xuất Bản ĐHQG Hà Nội 2012.

[5] Đ. V. Nhỉ, Số phức trong giải Toán sơ cấp, Tạp chí Khoa học ĐHSP Hà Nội số 6 2006, 40-48.

[6] Đ. V. Nhỉ, Mở rộng Bất đẳng thức Ptolemy và Hayashi cho đa giác, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 426, 12 2012.

[7] D. V. Nhi, A new Inequality and Identity (M, N), Journal of Science and Arts, No. 1 (22) 2013, 5-16.

[8] J. Rivaud, *Exercices D'Algèbre 1,* Paris Librairie Vuibert 1964.

[9] D. Q. Việt và Đ. V. Nhỉ, *Giáo trình Đại số Sơ cấp*, Nhà Xuất Bản ĐHSP Hà Nội 2007.

[10] Tuyển tập: *The IMO Compendium 1959-2004*.