

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Thị Thu Hà

MỘT SỐ DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC
TRONG LỚP HÀM ĐƠN ĐIỀU VÀ
ÁP DỤNG TRONG LƯỢNG GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.40

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mở đầu	2
1 Hàm đơn điệu theo bậc và các tính chất	4
1.1 Hàm đơn điệu bậc nhất	4
1.2 Hàm đơn điệu bậc hai	13
1.3 Hàm đơn điệu bậc cao	21
2 Bất đẳng thức liên quan đến lớp hàm đơn điệu liên tiếp	25
2.1 Hàm đơn điệu liên tiếp bậc 1-2	25
2.2 Hàm đơn điệu liên tiếp bậc 2-3	29
2.3 Một số lớp hàm đơn điệu tuần hoàn và đơn điệu tuyệt đối .	31
3 Một số ứng dụng của hàm đơn điệu theo bậc trong lượng giác	35
3.1 Một số dạng bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác	35
3.1.1 Bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi hàm $\cos$	35
3.1.2 Bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi hàm $\sin$	46
3.2 Nhận dạng một số dạng tam giác đặc biệt	52
Kết luận	59
Tài liệu tham khảo	60

Mở đầu

Trong chương trình toán học bậc trung học phổ thông học sinh được học khái niệm hàm số và quan tâm đến các tính chất cơ bản của hàm số như tính đơn điệu, tính đồng biến nghịch biến, tính liên tục và gián đoạn, tính lồi, lõm, tính tuần hoàn, tính chẵn, lẻ,.....

Đối với lớp hàm nói trên người ta tìm cách xây dựng các bất đẳng thức tương ứng và được gọi là các bất đẳng thức hàm. Ví dụ như bất đẳng thức Jensen là bất đẳng thức hàm của lớp hàm lồi và hàm lõm. Đây là các bài toán hay và thường rất khó, mang tính khái quát cao, bao hàm nhiều mảng kiến thức sâu và rộng về toán sơ cấp và cao cấp. Phần lớn học sinh bậc phổ thông chỉ mới làm quen với các định nghĩa, các tính chất đơn giản của hàm số như tính đồng biến, nghịch biến để giải phương trình, bất phương trình và tính lồi lõm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số mà chưa được nghiên cứu sâu về các bất đẳng thức có liên quan đến các vấn đề trên.

Có thể nói, nghiên cứu về hàm đơn điệu là một đề tài thú vị, nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Các vấn đề liên quan đến hàm đơn điệu không ngừng nảy sinh và có nhiều kết quả đẹp, nhiều kết quả được ứng dụng trong việc giải các bài toán lượng giác.

Trong luận văn này, tác giả được thầy hướng dẫn giao nhiệm vụ khảo sát một số dạng bất đẳng thức hàm cho các lớp hàm đồng biến, nghịch biến, hàm lồi, hàm lõm và mở rộng cho các lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 1 -2, hàm đơn điệu liên tiếp bậc 2 - 3 và các hàm đơn điệu bậc cao, khảo sát ứng dụng của hàm đơn điệu trong giải các bài toán lượng giác.

Nội dung của luận văn chia làm ba chương:

Chương 1: Chương này trình bày ngắn gọn các vấn đề lý thuyết về hàm đơn điệu theo bậc làm cơ sở cho các vấn đề trình bày ở hai chương sau. Hàm đơn điệu bậc nhất là các hàm đơn điệu thường, hàm đơn điệu

bậc hai chính là hàm lồi hay hàm lõm. Hàm đơn điệu bậc n là hàm số có đạo hàm cấp n là hàm đơn điệu. Tìm hiểu các khái niệm định nghĩa, các tính chất đặc trưng cơ bản và các định lý quan trọng thường dùng liên quan đến các hàm này. Tiếp đến, ta sẽ tìm hiểu một số tính chất đặc biệt như tính liên tục, tính khả vi.

Chương 2: Trong chương này, ta quan tâm đến lớp con của lớp hàm đơn điệu đó là lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 1-2 và lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 2-3. Ta sẽ tìm hiểu tổng quát định nghĩa, tính chất và các định lý liên quan. Phần cuối chương trình bày về một số lớp hàm đơn điệu tuần hoàn và đơn điệu tuyệt đối.

Chương 3: Nội dung trong chương ba, ta xét một số bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi các hàm sin và cos mà dấu đẳng thức không xảy ra trong tập các tam giác thường. Cuối cùng là một số ứng dụng của hàm đơn điệu trong lượng giác để nhận dạng một số dạng tam giác đặc biệt.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 5 năm 2013

Người thực hiện

Nguyễn Thị Thu Hà

Chương 1

Hàm đơn điệu theo bậc và các tính chất

Trong chương này, chúng tôi trình bày ngắn gọn các vấn đề lý thuyết về hàm đơn điệu theo bậc làm cơ sở cho các vấn đề trình bày ở hai chương sau. Hàm đơn điệu bậc nhất là các hàm đơn điệu, hàm đơn điệu bậc hai chính là hàm lồi hay hàm lõm. Hàm đơn điệu bậc n là hàm có đạo hàm cấp n là hàm đơn điệu. Ta sẽ tìm hiểu sơ qua định nghĩa, tính chất đặc trưng cơ bản và các định lý quan trọng thường dùng liên quan đến các hàm này. Tiếp đến, ta sẽ tìm hiểu một số tính chất đặc biệt như tính liên tục, tính khả vi.

1.1 Hàm đơn điệu bậc nhất

Trong luận văn này, ta sử dụng kí hiệu $I(a, b) \subset \mathbb{R}$ nhằm ngầm định một trong bốn tập hợp (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ hoặc $[a, b]$ với $a < b$. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $I(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1 ([4],[5]). Với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$, $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \leq f(x_2)$, thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $I(a, b)$.

Định nghĩa 1.2 ([4],[5]). Với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu tăng thực sự trên $I(a, b)$.

Định nghĩa 1.3 ([4],[5]). Với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a, b)$, $x_1 < x_2$, ta đều có $f(x_1) \geq f(x_2)$, thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $I(a, b)$.

Định nghĩa 1.4 ([4],[6]). Với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2,$$

thì ta nói rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm thực sự trên $I(a, b)$.

Những hàm số đơn điệu tăng thực sự trên $I(a, b)$ được gọi là hàm đồng biến trên $I(a, b)$ và hàm số đơn điệu giảm thực sự trên $I(a, b)$ được gọi là hàm nghịch biến trên tập đó.

Trong chương trình giải tích, chúng ta đã biết đến các tiêu chuẩn để nhận biết khi nào thì một hàm số khả vi cho trước trên khoảng (a, b) là một hàm đơn điệu trên khoảng đó.

Định lý 1.1 ([4],[5]). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a, b) .

- (i) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó.
- (ii) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Chứng minh. Theo định lý Lagrange thì

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ suy ra $f'(c) > 0$. Do $(x_2 - x_1) > 0$ suy ra $f(x_2) > f(x_1)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $I(a, b)$.

Chứng minh tương tự, nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $I(a, b)$.

Các định lý sau đây cho ta một số đặc trưng đơn giản khác của hàm đơn điệu. Một vài đặc trưng quan trọng khác của lớp hàm vừa có tính chất lồi hoặc có tính lõm sẽ được đề cập đến ở chương sau.

Định lý 1.2 ([4],[5]). Hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ là một hàm số đơn điệu tăng khi và chỉ khi với mọi cặp bộ số dương $a_1, a, \dots, a_n$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta đều có

$$\sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) f\left(\sum_{k=1}^n x_k \right). \quad (1.1)$$

Chứng minh. Khi $f(x)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$ thì hiển nhiên ta có

$$f(x_j) \leq f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Suy ra

$$a_j f(x_j) \leq a_j f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Lấy tổng theo j ($j = 1, 2, \dots, n$), từ (1.2), ta thu được (1.1).

Ngược lại, với $n = 2$, từ (1.1), ta có

$$f(x) + \epsilon f(h) \leq (1 + \epsilon)f(x + h), \quad \forall \epsilon, h > 0. \quad (1.3)$$

Khi $\epsilon \rightarrow 0$, ta thu được $f(x + h) \geq f(x)$, hay $f(x)$ là một hàm đồng biến.

Định lý 1.3 ([4],[5]). Để bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \leq f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right), \quad (1.4)$$

được thỏa mãn với bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$, điều kiện đủ là hàm $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Nhận xét rằng, ta có hàm số $f(x) = xg(x)$ và (1.4) sẽ có dạng (1.1) với $a_j = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$):

$$\sum_{k=1}^n x_k g(x_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) g\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \quad (1.5)$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì $x_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$ và $g(x)$ là một hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Hệ quả 1.1. Giả sử $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ là hàm đơn điệu tăng trong $[0, +\infty]$.

Khi đó với mọi dãy số dương và giảm $x_1 > x_2 > \dots > x_n$, ta đều có

$$f(x_1 - x_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k - x_{k+1}).$$

Chứng minh. Ta có $x_1 - x_2 > 0, x_2 - x_3 > 0, \dots, x_{n-1} - x_n > 0$. Theo Định lý 1.3, ta có

$$\begin{aligned} & f(x_1 - x_2) + f(x_2 - x_3) + \dots + f(x_{n-1} - x_n) \\ & \leq f(x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots + x_{n-1} - x_n), \\ \Rightarrow & f(x_1 - x_2) + f(x_2 - x_3) + \dots + f(x_{n-1} - x_n) \leq f(x_1 - x_n). \end{aligned}$$

Nhận xét rằng, (1.5) không là điều kiện cần để $g(x)$ là một hàm đồng biến. Thật vậy, chỉ cần chọn hàm $g(x)$ có tính chất

$$0 < g(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+), \forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ và } \max g(x) \leq 2 \min g(x),$$

ta dễ dàng kiểm chứng rằng (1.5) được thỏa mãn. Chẳng hạn, ta thấy số

$$g(x) = 3 + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

thỏa mãn điều kiện nêu trên và vì vậy nó thỏa mãn điều kiện (1.5). Tuy nhiên, hàm $g(x)$ không là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Định lý 1.4 ([4],[6]). Hàm $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}^+$ là một hàm số đơn điệu giảm khi và chỉ khi với mọi cặp bộ số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $x_1, x_2, \dots, x_n$, ta đều có

$$\sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) f\left(\sum_{k=1}^n x_k \right).$$

Định lý 1.5 ([4],[5]). Để bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^n x_k \right),$$

được thỏa mãn với mọi bộ số dương $x_1, x_2, \dots, x_n$, điều kiện đủ là hàm $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}^+$.

Nhận xét rằng, trong số các hàm số sơ cấp một biến, thì hàm tuyến tính $f(x) = ax$ đóng vai trò đặc biệt quan trọng, vì nó rất dễ nhận biết và tính đồng biến (khi $a > 0$) và nghịch biến (khi $a < 0$) trong mỗi khoảng tùy ý cho trước. Định lý sau đây sẽ cho ta thấy rõ hơn về đặc trưng (bất đẳng thức hàm) của hàm tuyến tính.

Định lý 1.6 ([4],[5]). Giả thiết rằng, với mọi cặp bố số dương

$$a_1, a_2, \dots, a_n; \quad x_1, x_2, \dots, x_n,$$

ta đều có

$$\sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right) \quad (1.6)$$

thì $f(x) = ax$, trong đó a là hằng số.

Chứng minh. Lấy $n = 2$ và chọn $x_1 = x, x_2 = y; a_1 = \frac{y}{2x}, a_2 = \frac{1}{2}$, từ (1.6), ta thu được

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)}{y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Suy ra $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ là một hàm hằng trên $\mathbb{R}^+$.

Tiếp theo, ta nêu một số tính chất của hàm đơn điệu để ước lượng một số tổng và tích phân.

Định lý 1.7 ([4],[6]). Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $(0, +\infty)$ và $\{a_k\}$ là một dãy tăng trong $(0, +\infty)$. Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) f(a_k) \leq \int_{a_0}^{a_n} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) f(a_{k-1}). \quad (1.7)$$

Khi $f(x)$ là hàm nghịch biến thì có dấu bất đẳng thức thực sự.

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm nên ta luôn có

$$(a_k - a_{k-1}) f(a_k) \leq \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx \leq (a_k - a_{k-1}) f(a_{k-1}).$$

Lấy tổng theo k , ta thu được (1.7), chính là điều phải chứng minh.

Định lý 1.8 (Maclaurin, Cauchy, [4],[5]). Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm trên $(0, +\infty)$. Khi đó, ta luôn có

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k). \quad (1.8)$$

Khi $f(x)$ là hàm nghịch biến thì có dấu bất đẳng thức thực sự.

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết $f(x)$ là một hàm đơn điệu giảm nên ta luôn có

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Lấy tổng theo k , ta thu được (1.8), chính là điều phải chứng minh.

Định lý 1.9 ([4],[6]). Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đồng biến trên $[0, +\infty)$ và $f(0) = 0$. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Khi đó, ta luôn có

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức được suy trực tiếp bằng cách so sánh diện tích tạo bởi đường cong $y = f(x)$ và $x = g(x)$ với diện tích hình chữ nhật tạo bởi $x = 0, x = a; y = 0, y = b$.

Hệ quả 1.2. Giả thiết rằng $f(x)$ là một hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$ và $f(0) = 0$. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Khi đó, ta luôn có

$$ab \leq af(a) + bg(b), \quad \forall a, b \geq 0.$$

Định lý 1.10 ([4],[6]). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm và đơn điệu tăng trên $[\alpha, \beta)$ với $0 \leq \alpha < \beta$. Khi đó $\forall a \in [\alpha, \beta); \forall b \in [f(\alpha), f(\beta))$ ta có

$$\int_{\alpha}^a f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^b f^{-1}(x)dx \geq ab - \alpha f(\alpha).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(a) = b$.

Chứng minh. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $x = \alpha, x = a, y = 0, y = f(x)$ thì

$$S_1 = \int_{\alpha}^a f(x)dx.$$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(\alpha), y = b, x = 0, y = f^{-1}(x)$, thì

$$S_2 = \int_{f(\alpha)}^b f^{-1}(x)dx.$$

Gọi S là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0, x = a, y = 0, y = b$, thì $S = ab$. Gọi S' là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0, x = \alpha, y = 0, y = f(\alpha)$, thì $S' = \alpha f(\alpha)$. Trong cả hai trường hợp $f(a) \leq b$ hoặc $f(a) > b$, ta đều có $S_1 + S_2 \geq S - S'$. Do đó

$$\int_{\alpha}^a f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^b f^{-1}(x)dx \geq ab - \alpha f(\alpha).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(a) = b$.

Định lý 1.11 ([4],[6]). Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, b], \forall a \in [0, b]$. Khi đó, ta luôn có

$$b \int_0^a f(x)dx \geq a \int_0^b f(x)dx. \quad (1.9)$$

Tương tự, với $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $[0, b], \forall a \in [0, b]$. Khi đó, ta luôn có

$$b \int_0^a f(x)dx \leq a \int_0^b f(x)dx.$$

Chứng minh. Nếu $a = 0$ hoặc $a = b$ thì bất đẳng thức (1.9) trở thành đẳng thức. Nếu $0 < a < b$, thì do $f(x)$ nghịch biến trên $[0, b]$ nên với mọi x thỏa mãn điều kiện $0 < a \leq x \leq b$, ta đều có $f(x) \leq f(a)$. Suy ra

$$\int_a^b f(x)dx \geq f(a) \int_a^b dx = (b - a)f(a).$$

Vậy nên

$$f(a) \geq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx. \quad (1.10)$$

Mặt khác, khi $0 < x \leq a$, thì $f(x) \geq f(a)$. Suy ra

$$\int_0^a f(x)dx \geq \int_0^a f(a)dx = af(a),$$

hay

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx \geq f(a). \quad (1.11)$$

Từ (1.10) và (1.11), suy ra

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

hay

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x)dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \quad (1.12)$$

Do đó

$$(b-a) \int_0^a f(x)dx \geq a \int_a^b f(x)dx \quad (\text{do } a > 0, (b-a) > 0)$$

hay

$$(b-a) \int_0^a f(x)dx \geq a \left[\int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx \right].$$

Vậy nên

$$b \int_0^a f(x)dx \geq a \int_0^b f(x)dx. \quad (1.13)$$

Ta chứng minh rằng, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b$ hoặc $a = 0$. Thật vậy, nếu tồn tại $c \in (0, b)$ sao cho

$$b \int_0^c f(x)dx = c \int_0^b f(x)dx$$

thì

$$\frac{1}{c} \int_0^c f(x)dx = \frac{1}{b} \int_0^b f(x)dx = \frac{1}{b-c} \int_c^b f(x)dx.$$

Vậy

$$\frac{1}{c} \int_0^c f(x)dx = \frac{1}{b-c} \int_c^b f(x)dx. \quad (1.14)$$

Từ (1.14) suy ra tồn tại $\xi \in (0, c)$ và $\delta \in (c, b)$, sao cho

$$\frac{1}{c}(c-0)f(\xi) = \frac{1}{b-c}(b-c)f(\delta).$$

Mà $\delta > \xi$, điều này trái với giả thiết rằng $f(x)$ là hàm số nghịch biến trong (a, b) . Vậy, không xảy ra dấu đẳng thức.

Hệ quả 1.3. (i) Nếu $b = 1$ và $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, 1]$ thì $\forall a \in [0, 1]$, ta đều có

$$\int_0^a f(x)dx \geq a \int_0^1 f(x)dx.$$

(ii) Nếu $b = 1$, $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên $[0, 1]$ thì $\forall a \in [0, 1]$, ta đều có

$$\int_0^a f(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx.$$

Định lý 1.12 ([4],[6], Bất đẳng thức thứ tự Chebyshev). Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm đơn điệu tăng và (x_k) là một dãy đơn điệu tăng:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Khi đó với mọi bộ trọng số (p_j) :

$$p_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n; \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

ta đều có

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)\right) \left(\sum_{k=1}^n p_k g(x_k)\right) \leq \left(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k) g(x_k)\right).$$

Chứng minh. Theo giả thiết thì

$$0 \leq [f(x_k) - f(x_j)][g(x_k) - g(x_j)]$$

hay

$$f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k) \leq f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k). \quad (1.15)$$

Để ý rằng

$$\sum_{j,k=1}^n p_j p_k [f(x_k)g(x_j) + f(x_j)g(x_k)] = 2 \left(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)\right) \left(\sum_{k=1}^n p_k g(x_k)\right)$$

và

$$\sum_{j,k=1}^n p_j p_k [f(x_j)g(x_j) + f(x_k)g(x_k)] = 2 \left(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)g(x_k)\right).$$

Kết hợp các đẳng thức này với (1.15). ta thu được

$$\left(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)\right) \left(\sum_{k=1}^n p_k g(x_k)\right) \leq \left(\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)g(x_k)\right).$$

1.2 Hàm đơn điệu bậc hai

Hàm đơn điệu bậc 2 là hàm lồi, lõm.

Định nghĩa 1.5 ([4],[6]). (i) Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lồi (lồi dưới) trên tập $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \quad (1.16)$$

Nếu dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $[a, b]$.

(ii) Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lõm (lồi trên) trên tập $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nếu

với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \quad (1.17)$$

Nếu dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lõm thực sự (chặt) trên $[a, b]$.

Tương tự, ta cũng có định nghĩa về hàm lồi (lõm) trên các tập (a, b) , $(a, b]$ và $[a, b]$. Chú ý rằng, đôi khi ta chỉ nói về tính lồi của một hàm số mà không nói tới hàm đó lồi trên tập $I(a, b)$ một cách cụ thể như đã nêu ở trên.

Ta nhắc lại các tiêu chuẩn đơn giản để nhận biết tính lồi (lõm) của một hàm số.

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b) . Khi đó

(i) Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a, b) là

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

(ii) Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lõm trên (a, b) là

$$f''(x) \leq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Tuy nhiên, trong ứng dụng, ta nhận thấy, có thể coi hàm lồi (lõm) như là lớp hàm đồng biến (nghịch biến) bậc hai, vì ứng với nó, đạo hàm bậc nhất (trong lớp hàm lồi khả vi) là một hàm đơn điệu tăng (giảm).

Định nghĩa 1.6. Hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp hai và lồi (lõm) trong khoảng (a, b) được gọi là hàm đồng biến (nghịch biến) bậc hai trong khoảng đó.

Nhận xét rằng, khi $x_1 < x_2$ thì $x = \alpha x_1 + \beta x_2$ với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, đều thuộc (x_1, x_2) và

$$\alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \beta = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

Về sau, ta thường quan tâm và nói nhiều đến các tính chất của hàm lồi trên $I(a, b)$. Ta tự ngầm hiểu và phát biểu cũng như thực hiện các phép tính tương ứng cho trường hợp hàm lõm trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.1. Nếu $f(x)$ là hàm lồi (lõm) trên $I(a, b)$ thì $g(x) := cf(x)$ là hàm lõm (lồi) trên $I(a, b)$ khi $c < 0$ ($c > 0$).

Tính chất 1.2. Tổng hữu hạn các hàm lồi trên $I(a, b)$ là một hàm lồi trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.3. Nếu $f(x)$ là một hàm số liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lồi và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết, $f(x)$ là hàm số liên tục trên $I(a, b)$ nên tập giá trị của nó cũng là một tập dạng $I(a, b) \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ nên với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Từ giả thiết $g(x)$ là hàm số đồng biến, ta nhận được

$$g[f(\alpha x_1 + \beta x_2)] \leq g[\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)]. \quad (1.18)$$

Do $g(x)$ là hàm lồi nên

$$g[\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)] \leq \alpha g[f(x_1)] + \beta g[f(x_2)]. \quad (1.19)$$

Từ (1.18) và (1.19) suy ra

$$g[f(\alpha x_1 + \beta x_2)] \leq \alpha g[f(x_1)] + \beta g[f(x_2)].$$

Tương tự, ta cũng có các tính chất sau:

Tính chất 1.4. (i) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lồi và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

(ii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lõm và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.

(iii) Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ lõm và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.5. Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$ thì ta có các

kết luận sau:

- (i) $f(x)$ lõm, đồng biến $\Leftrightarrow g(x)$ lồi, đồng biến.
- (ii) $f(x)$ lõm, nghịch biến $\Leftrightarrow g(x)$ lõm, nghịch biến.
- (iii) $f(x)$ lồi, nghịch biến $\Leftrightarrow g(x)$ lồi, nghịch biến.

Chứng minh. Suy trực tiếp từ tính chất của hàm ngược: hàm ngược luôn luôn cùng tính đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) với hàm xuất phát.

Tính chất 1.6. Nếu $f(x)$ là hàm số khả vi trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $I(a, b)$.

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$. Khi đó với $x_1 < x < x_2$ ($x, x_1, x_2 \in I(a, b)$), ta có

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} > 0, \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} > 0, \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1$$

và vì vậy

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

hay

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1.20)$$

Trong (1.20), cho $x \rightarrow x_1$, ta thu được

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1.21)$$

Tương tự, trong (1.20), cho $x \rightarrow x_2$, ta thu được

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2). \quad (1.22)$$

Từ (1.21) và (1.22), ta nhận được $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, tức là hàm số $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng.

Ngược lại, giả sử $f'(x)$ là hàm số đơn điệu tăng và $x_1 < x < x_2$ ($x, x_1, x_2 \in I(a, b)$). Theo Định lý Lagrange, tồn tại x_3, x_4 với $x_1 < x_3 < x < x_4 < x_2$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_3), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_4).$$

Do $f'(x_3) \leq f'(x_4)$ nên

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

tức là ta có (1.20).

Về sau, ta thường dùng các tính chất sau đây:

Định lý 1.13 ([4],[6]). Nếu $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với mọi $x \in (a, b)$ và

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

Chứng minh. Với mọi $x_0 \in (a, b)$ cố định, chọn các số dương tùy ý u, v sao cho $x_0 - u \in (a, b), x_0 + v \in (a, b)$. Khi đó, theo (1.20), thì

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - u)}{u} \leq \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v}. \quad (1.23)$$

Chọn $v' > v$ để $x_0 + v' \in (a, b)$, thì $x_0 < x_0 + v < x_0 + v'$ và theo (1.20), thì

$$\frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} \leq \frac{f(x_0 + v') - f(x_0 + v)}{v' - v}. \quad (1.24)$$

Biến đổi (1.24), ta thu được

$$\frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} \leq \frac{f(x_0 + v') - f(x_0)}{v'}. \quad (1.25)$$

Hệ thức (1.25) chứng tỏ rằng hàm số

$$g(v) := \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v}$$

là một hàm đơn điệu tăng và khi v giảm dần tới 0 thì $g(v)$ đơn điệu giảm và bị chặn (theo (1.23)) nên tồn tại giới hạn một phía

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} g(v) = \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + v) - f(x_0)}{v} = f'_+(x_0).$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được sự tồn tại của đạo hàm trái $f'_-(x_0)$. Nhận xét rằng, nếu trong (1.23), cho $u, v \rightarrow 0^+$ thì sẽ thu được bất đẳng thức

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$

Nhận xét 1.1. Các hàm số $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ là những hàm đơn điệu tăng trong (a, b) .

Chứng minh. Thật vậy, khi $x_1 < x_2$ thì ta chọn t_1, t_2 sao cho $x_1 < t_1 < t_2 < x_2$. Khi đó, theo (1.20) thì

$$\frac{f(t_1) - f(x_1)}{t_1 - x_1} \leq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \leq \frac{f(x_2) - f(t_2)}{x_2 - t_2}. \quad (1.26)$$

Lấy giới hạn khi $t_1 \rightarrow x_1$ và $t_2 \rightarrow x_2$ trong (1.26), ta thu được

$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2).$$

và vì vậy

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$$

hay

$$f'_-(x_1) \leq f'_-(x_2), \quad \text{khi } x_1 < x_2,$$

$$f'_+(x_1) \leq f'_+(x_2), \quad \text{khi } x_1 < x_2.$$

Định lý 1.14 ([4],[6]). Nếu $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ liên tục trên (a, b) .

Chứng minh. Theo Định lý 1.13 thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với mọi $x \in (a, b)$ và do vậy hàm $f(x)$ vừa liên tục trái vừa liên tục phải. Suy ra $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong (a, b) .

Nhận xét 1.2. Hàm lồi trên $[a, b]$ có thể không liên tục tại đầu mút của đoạn $[a, b]$.

Thật vậy, chẳng hạn hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

là hàm lồi trên $[0, 1]$ nhưng không liên tục tại $x = 1$.

Như vậy hàm lồi luôn là hàm liên tục trong khoảng đang xét. Về sau, ta luôn luôn quan tâm đến các hàm số lồi và liên tục trên $I(a, b)$. Tính chất sau đây cho phép ta dễ dàng kiểm chứng tính lồi (lõm) đối với một hàm số cho trước và nhiều tác giả chọn tính chất này để đặc trưng cho hàm lồi.

Định lý 1.15 ([4],[6], Jensen). Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I(a, b). \quad (1.27)$$

Chứng minh. Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ thì ta có ngay (1.27) bằng cách chọn $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Giả sử ta có (1.27). Ta cần chứng minh rằng với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}$ thì $\beta \in \mathbb{Q}$ và ta có thể viết

$$\alpha = \frac{m}{q}, \quad \beta = \frac{n}{q},$$

trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ và $m + n = q$. Bằng phương pháp quy nạp, ta có ngay

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= f\left(\frac{mx_1 + nx_2}{q}\right) \\ &\leq \frac{mf(x_1) + nf(x_2)}{q} = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \end{aligned}$$

Nếu α là số vô tỷ thì $\beta = (1 - \alpha)$ cũng là số vô tỷ. Chọn dãy số hữu tỷ dương u_n trong khoảng $(0, 1)$ có giới hạn bằng α :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha.$$

Khi đó, hiển nhiên dãy $v_n := 1 - u_n$ cũng nằm trong $(0, 1)$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \beta.$$

Theo chứng minh trên ứng với trường hợp α hữu tỷ, thì

$$f(u_n x_1 + v_n x_2) \leq u_n f(x_1) + v_n f(x_2), \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_1, x_2 \in I(a, b).$$

Chuyển qua giới hạn và sử dụng tính liên tục của $f(x)$, ta thu được

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Nhận xét 1.3. Giả sử $f(x)$ khác hằng số và là hàm lồi trên $[a, b]$ với $f(a) = f(b)$. Khi đó $f(x) \neq f(a)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Tiếp theo, ta đặc biệt quan tâm đến lớp con của lớp hàm các hàm lồi. Đó là lớp các hàm lồi hai lần khả vi. Đây là lớp hàm thông dụng nhất của giải tích gắn với nhiều bất đẳng thức cổ điển.

Định lý 1.16 ([4],[6]). Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b) . Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên (a, b) là

$$f''(x) \leq 0, \quad x \in (a, b). \quad (1.28)$$

Chứng minh. *Điều kiện cần.* Khi $f(x)$ là hàm lồi, ta có

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0, \quad \forall x \in (a, b), h > 0, \text{ mà } x \pm h \in (a, b). \quad (1.29)$$

Giả sử $f''(x) < 0$. Khi đó tồn tại cặp số dương δ, u sao cho

$$f'(x_0 + u) - f'(x_0 - u) < -\delta u, \quad \text{với } 0 \leq u \leq h.$$

Lấy tích phân hai vế theo cận từ $u = 0$ đến $u = h$, ta được

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) < \frac{1}{2}\delta h^2,$$

mâu thuẫn với (1.29).

Điều kiện đủ. Ta sử dụng giả thiết $f''(x) \geq 0$ trong (a, b) để chứng minh bất đẳng thức (1.27):

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b).$$

Thật vậy, theo Định lý Lagrange thì

$$f'(x) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{khi } x > x_0,$$

và

$$f'(x) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{khi } x < x_0.$$

Suy ra

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad \text{khi } x_1 < x < x_2.$$

Điều này tương đương với

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad \text{khi } x_1 < x < x_2.$$

Chọn $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, ta được (1.27).

Bổ đề 1.1 ([4],[6]). (i) Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai và lồi trên $I(a, b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(ii) Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai và lõm trên $I(a, b)$ thì với mọi cặp $x_0, x \in I(a, b)$ ta đều có

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Chứng minh. (i) Với $x, x_0 \in I(a, b)$

+ Nếu $x > x_0$ thì theo Định lí Lagrange ta có

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_1) \text{ với } x_1 \in I(x_0, x).$$

Lại có $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in I(a, b)$ nên $f'(x)$ đồng biến trong $I(a, b)$.

Suy ra $f'(x_1) \geq f'(x_0)$. Vậy $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0)$. Từ đó suy ra $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (do $x - x_0 > 0$).

+ Nếu $x < x_0$ thì theo Định lí Lagrange ta có

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_1) \text{ với } x_1 \in I(x, x_0).$$

Lại có $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in I(a, b)$ nên $f'(x)$ đồng biến trong $I(a, b)$.

Suy ra $f'(x_1) \leq f'(x_0)$. Vậy $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0)$. Từ đó suy ra $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (do $x - x_0 < 0$).

(ii) Lập luận tương tự (i).

1.3 Hàm đơn điệu bậc cao

Tiếp theo, ta xét lớp hàm lồi bậc cao và một số tính chất cơ bản của chúng. Trước hết, ta nhắc lại các tính chất đặc trưng và cũng là định nghĩa của hàm đồng biến và hàm lồi quen biết.

Tính chất 1.7 (Dạng nội suy). Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp số phân biệt $x_0, x_1 \in I(a, b)$, ta đều có

$$\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} \geq 0. \quad (1.30)$$

Chứng minh. Chứng minh là hiển nhiên.

Tính chất 1.8 (Dạng nội suy). Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi với mọi bộ ba số phân biệt $x_0, x_1, x_2 \in I(a, b)$, ta đều có

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \geq 0. \quad (1.31)$$

Chứng minh. Chứng minh được suy ra trực tiếp từ tính chất tương đương sau đây của hàm lồi.

Tính chất 1.9. Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi với mọi cặp $x_1, x_2 \in I(a, b)$, $x_1 < x_2$, ta đều có

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \quad \text{khi } x_1 < x < x_2.$$

Từ các tính chất đã nêu này, gợi ý cho ta có thể ngầm coi hàm đồng biến như là hàm lồi “bậc 0”, còn hàm lồi thì cũng có thể gọi là “hàm đồng biến bậc hai”. Với cách ngầm hiểu như vậy, ta có thể phát biểu định nghĩa hàm lồi bậc cao (bậc k , $k \in \mathbb{N}^*$) tùy ý, như sau.

Định nghĩa 1.7 ([4],[6]). Hàm số $f(x)$ được gọi là n -lồi trên $I(a, b)$ khi ứng với mọi bộ $n + 1$ số phân biệt trong $I(a, b)$, ta đều có

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)} \geq 0,$$

trong đó

$$\omega(x) := \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Tương tự, ta cũng có định nghĩa hàm lõm bậc cao.

Định nghĩa 1.8 ([4],[6]). Hàm số $f(x)$ được gọi là n -lồi trên $I(a, b)$ khi ứng với mọi bộ $n + 1$ số phân biệt trong $I(a, b)$, ta đều có

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] := \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\omega'(x_j)} \leq 0,$$

trong đó

$$\omega(x) := \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Tương như định nghĩa của hàm đơn điệu bậc hai, ta có định nghĩa của hàm đơn điệu bậc cao như sau.

Định nghĩa 1.9. Hàm $f(x)$ có đạo hàm cấp n ($n \in \mathbb{N}^*$) không đổi dấu trong khoảng $I(a, b)$ được gọi là hàm đơn điệu ngặt (thực sự) bậc n . Nếu $f^{(n)}(x) \geq 0, \forall x \in I(a, b)$ ($f^{(n)}(x) \leq 0, \forall x \in I(a, b)$) thì ta nói hàm đơn điệu tăng (đơn điệu giảm) bậc n trong khoảng đó.

Từ Định nghĩa hàm n -lồi (lõm) trên $I(a, b)$, ta dễ dàng chứng minh các tính chất sau.

Tính chất 1.10. Nếu hàm số $f(x)$ là n -lồi trên $I(a, b)$ với $n > 2$, thì tồn tại $f^{(k)}(x)$ với mọi $1 \leq k \leq n - 2$ và hàm số $g(x) := f^{(k)}(x)$ là $n - k$ -lồi trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.11. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm bậc n trên $I(a, b)$ là n -lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f^{(n)}(x) \geq 0, \forall x \in I(a, b).$$

Bổ đề 1.2. Nếu $f(x)$ khả vi bậc ba và bậc hai và $f'''(x) \geq 0, \forall x \in I(a, b)$ thì với mọi cặp điểm phân biệt $x_0, x \in I(a, b)$, ta đều có

$$\frac{f(x)}{x - x_0} \geq \frac{f(x_0)}{x - x_0} + f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0). \quad (1.32)$$

Cũng tương tự như phép biểu diễn hàm lồi (lõm) thông thường, ta có

Định lý 1.17 ([4],[6]). Nếu hàm số $f(x)$ là n -lồi trên $[a, b]$ thì tồn tại hàm số $g(x)$ và đa thức $P(x)$ bậc không quá $n - 1$ sao cho

$$f(x) = P(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g(t) dt. \quad (1.33)$$

Chứng minh. Chứng minh được suy trực tiếp từ biểu diễn của hàm lồi $f^{(n-2)}(x)$

$$f^{(n-2)}(x) = a_0 + \int_a^x g(t) dt,$$

và lấy tích phân $n - 2$ lần liên tiếp, ta sẽ thu được (1.33), điều phải chứng minh.

Để đơn giản cách trình bày, về sau, nếu không có chú thích đặc biệt, ta chỉ xét lớp các hàm lồi (lõm) khả vi bậc hai. Như vậy, hàm $f(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I(a, b)$$

và hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi

$$f''(x) \geq 0, \quad \forall x \in I(a, b).$$

Từ đó, ta có nhận xét, khi hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ thì đạo hàm bậc nhất của nó là một hàm đơn điệu tăng.

Do vậy, ta có thể phát biểu tính chất biểu diễn hàm lồi như sau.

Định lý 1.18 ([4],[6]). Hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu tăng trong $I(a, b)$ và số $c \in (a, b)$, sao cho

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt.$$

Chương 2

Bất đẳng thức liên quan đến lớp hàm đơn điệu liên tiếp

Trong chương hai, ta quan tâm đến lớp con của lớp hàm đơn điệu đó là lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 1-2 và lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 2-3. Ta sẽ tìm hiểu tổng quát định nghĩa, tính chất và các định lý liên quan. Phần cuối chương xét một số lớp hàm đơn điệu tuần hoàn và hàm đơn điệu tuyệt đối.

2.1 Hàm đơn điệu liên tiếp bậc 1-2

Trong mục này, ta đặc biệt quan tâm đến dạng bất đẳng thức sau (thường được gọi là Bất đẳng thức Karamanta) có rất nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Định lý 2.1 (Bất đẳng thức Karamanta). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$, thỏa mãn các điều kiện

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{cases}$$

Khi đó, ứng với mọi hàm lồi thực sự $f(x)$ ($f''(x) > 0$) trên $I(a, b)$, ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n). \quad (2.1)$$

Tiếp theo, ta xét lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 1-2 và một số tính chất cơ bản của chúng. Đó là lớp hàm đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai không đổi dấu trên $I(a, b)$.

Định nghĩa 2.1 ([5]). Nếu hàm đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai dương trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đó đồng biến liên tiếp bậc 1-2 trên khoảng đã cho.

Định nghĩa 2.2 ([5]). Nếu hàm đồng thời có đạo hàm bậc nhất và bậc hai âm trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đó nghịch biến liên tiếp bậc 1-2 trên khoảng đã cho.

Định lý 2.2 ([5]). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$, thỏa mãn các điều kiện

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Khi đó, ứng với mọi hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ đồng thời đồng biến hoặc nghịch biến liên tiếp bậc (1, 2) trên $I(a, b)$, ta đều có

$$\frac{f_1(x_1)}{f'_1(y_1)} + \frac{f_2(x_2)}{f'_2(y_2)} + \cdots + \frac{f_n(x_n)}{f'_n(y_n)} \geq \frac{f_1(y_1)}{f'_1(y_1)} + \frac{f_2(y_2)}{f'_2(y_2)} + \cdots + \frac{f_n(y_n)}{f'_n(y_n)}. \quad (2.2)$$

Chứng minh. Trước hết, ta xét trường hợp các hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ đồng biến liên tiếp bậc 1-2 trên $I(a, b)$. Theo giả thiết, các hàm $f_k(t)$ có đạo hàm bậc nhất và bậc hai dương trên $I(a, b)$, nên theo Bổ đề 1.1 ta có

$$f_k(x_k) \geq f_k(y_k) + f'_k(y_k)(x_k - y_k)$$

và

$$\frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \geq \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)} + x_k - y_k.$$

Vậy

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)} + x_k - y_k \right)$$

hay

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \geq \sum_{k=1}^n \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)}$$

do $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0$.

Đối với trường hợp khi các hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ nghịch biến liên tiếp bậc 1-2 trên $I(a, b)$ thì theo giả thiết, các hàm $f_k(t)$ là có đạo hàm bậc nhất và bậc hai âm trên $I(a, b)$, nên ta có

$$f_k(x_k) \leq f_k(y_k) + f'_k(y_k)(x_k - y_k)$$

và

$$\frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \geq \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)} + x_k - y_k.$$

Vậy nên

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)} + x_k - y_k \right)$$

hay

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \geq \sum_{k=1}^n \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)}$$

do $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$x_k = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Với cách chứng minh tương tự, ta có thể chứng minh định lí sau.

Định lý 2.3 ([5]). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$, thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$. Khi đó, ứng với mọi hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ lõm và có đạo hàm bậc nhất là các hàm số dương trên khoảng $I(a, b)$, ta đều có

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)}.$$

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết, các hàm $f_k(t)$ là có đạo hàm bậc nhất dương và bậc hai không dương trên $I(a, b)$, nên theo Bổ đề 1.1, ta có

$$f_k(x_k) \leq f_k(y_k) + f'_k(y_k)(x_k - y_k)$$

và

$$\frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)} + x_k - y_k.$$

Vậy nên

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)} + x_k - y_k \right)$$

hay

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)}$$

do $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$x_k = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Định lý 2.4 ([5]). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$, thỏa mãn các điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$. Khi đó, ứng với mọi hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ lồi và có đạo hàm bậc nhất là các hàm số âm trên khoảng $I(a, b)$, ta đều có

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)}.$$

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết, các hàm $f_k(t)$ là có đạo hàm bậc nhất âm và bậc hai không âm trên $I(a, b)$, nên theo Bổ đề 1.1, ta có

$$f_k(x_k) \geq f_k(y_k) + f'_k(y_k)(x_k - y_k)$$

và

$$\frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)} + x_k - y_k.$$

Vậy nên

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)} + x_k - y_k \right)$$

hay

$$\sum_{k=1}^n \frac{f_k(x_k)}{f'_k(y_k)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{f_k(y_k)}{f'_k(y_k)}$$

do $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$x_k = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2.2 Hàm đơn điệu liên tiếp bậc 2-3

Tiếp theo, trong mục này, ta xét lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 2-3 và một số tính chất cơ bản của chúng. Đó là lớp hàm đồng thời có đạo hàm bậc hai và bậc ba không đổi dấu trên $I(a, b)$.

Định nghĩa 2.3 ([5]). Nếu hàm đồng thời có đạo hàm bậc hai và bậc ba dương trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đó đồng biến liên tiếp bậc 2-3 trên khoảng đã cho.

Định nghĩa 2.4 ([5]). Nếu hàm đồng thời có đạo hàm bậc hai và bậc ba âm trong khoảng đang xét thì ta nói hàm số đó nghịch biến liên tiếp bậc 2-3 trên khoảng đã cho.

Định lý 2.5 ([5]). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$, thỏa mãn các điều kiện

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n, x_k \neq y_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó, ứng với mọi hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ đồng biến hoặc nghịch biến liên tiếp bậc 2-3 trên khoảng $I(a, b)$, ta đều có

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} - \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \right] \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} \right).$$

Chứng minh. Trước hết xét trường hợp các hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ đồng biến liên tiếp bậc 2-3 trên $I(a, b)$. Theo giả thiết các hàm $f_k(t)$ là có đạo hàm bậc hai và bậc ba dương trên $I(a, b)$, nên theo Bổ đề 1.2, ta có

$$\frac{f_k(x_k)}{x_k - y_k} \geq \frac{f_k(y_k)}{x_k - y_k} + f_k'(y_k) + \frac{f_k''(y_k)}{2!}(x_k - y_k).$$

và

$$\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \geq \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} + \frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} + \frac{x_k - y_k}{2!}.$$

Vậy nên

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} - \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \right] \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} + \frac{x_k - y_k}{2!} \right),$$

hay

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} - \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \right] \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} \right)$$

do $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0$.

Đối với trường hợp khi các hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ nghịch biến liên tiếp bậc 2-3 trên $I(a, b)$ thì theo giả thiết, các hàm $f_k(t)$ là có đạo hàm bậc hai và bậc ba âm trên $I(a, b)$, nên ta có

$$\frac{f_k(x_k)}{x_k - y_k} \leq \frac{f_k(y_k)}{x_k - y_k} + f_k'(y_k) + \frac{f_k''(y_k)}{2!}(x_k - y_k).$$

và

$$\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \geq \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} + \frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} + \frac{x_k - y_k}{2!}.$$

Vậy nên

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} - \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \right] \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} + \frac{x_k - y_k}{2!} \right)$$

hay

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} - \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \right] \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} \right).$$

do $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$x_k \rightarrow y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Điều này chứng tỏ bất đẳng thức đã cho là chặt.

Với cách chứng minh tương tự, ta có các định lí sau.

Định lý 2.6 ([5]). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, 2, \dots, n\}$, thỏa mãn các điều kiện

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n, x_k \neq y_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó, ứng với mọi hàm $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ đồng thời đồng biến (nghịch biến) bậc hai và nghịch biến (đồng biến) bậc 3 trên khoảng $I(a, b)$, ta đều có

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} - \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \right] \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} \right).$$

Chứng minh. Thật vậy, giả thiết các hàm $f_k(t)$ có đạo hàm bậc hai dương và bậc ba không dương trên $I(a, b)$. Khi đó

$$\frac{f_k(x_k)}{x_k - y_k} \leq \frac{f_k(y_k)}{x_k - y_k} + f_k'(y_k) + \frac{f_k''(y_k)}{2!}(x_k - y_k).$$

và

$$\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \leq \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} + \frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} + \frac{x_k - y_k}{2!}.$$

Vậy nên

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} - \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \right] \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} + \frac{x_k - y_k}{2!} \right)$$

hay

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{f_k(x_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} - \frac{f_k(y_k)}{f_k''(y_k)(x_k - y_k)} \right] \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{f_k'(y_k)}{f_k''(y_k)} \right).$$

do $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0$.

2.3 Một số lớp hàm đơn điệu tuần hoàn và đơn điệu tuyệt đối

Song song với lớp hàm đơn điệu thông thường, nhiều lớp hàm đơn điệu khác cũng được nhiều người nghiên cứu các đặc trưng của chúng như đơn điệu đầy đủ ¹, đơn điệu có tính tuần hoàn ², đơn điệu tuyệt đối,...

Định nghĩa 2.5 ([4],[6]). Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng (a, b) khi và chỉ khi các đạo hàm của chúng không triệt tiêu (có dấu không đổi) và

$$f^{(k)}(x)f^{(k+2)}(x) \leq 0, \quad x \in (a, b), k = 0, 1, 2, \dots$$

¹Tiếng Anh: completely monotonic function

²Tiếng Anh: cyclically monotonic function

Ví dụ về hàm sơ cấp đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng (a, b) ($a > 0$) là các hàm số sau.

Ví dụ 2.1. Hàm số $f(x) = \sin x$ là hàm số đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 2.2. Hàm số $f(x) = \cos x$ là hàm số đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Ví dụ 2.3. Cho hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, +\infty)$ thì hàm số

$$f(x) = \int_0^1 g(t)e^{-\lambda tx} dt, \quad \lambda > 0$$

là hàm số đơn điệu có tính tuần hoàn trong khoảng $(0, +\infty)$.

Bài toán 2.1. Cho hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, 1]$ và hàm số

$$f(x) = \int_0^1 g(t)e^{-tx} dt.$$

Chứng minh rằng

$$|f^{(k)}(\frac{x+y}{2})| \geq 2^k |f(\frac{x+y}{2})|, \quad \forall x, y \in (0, 1), k = 0, 1, \dots$$

Chứng minh. Chứng minh được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức Chebychev đối với tích phân xác định.

Nhận xét 2.1. Hoàn toàn tương tự, ta cũng có thể khảo sát lớp hàm lồi thay cho lớp hàm đơn điệu.

Định nghĩa 2.6 ([4],[6]). Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm đơn điệu tuyệt đối trong khoảng (a, b) nếu đạo hàm mọi cấp của nó đều không đổi dấu:

$$f^{(k)}(x) \geq 0 \quad (\leq 0), \quad \forall x \in (a, b), k = 0, 1, 2, \dots$$

Cũng vậy, ta có định nghĩa của hàm đồng biến và nghịch biến tuyệt đối.

Định nghĩa 2.7 ([4],[6]). Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng (a, b) nếu đạo hàm mọi cấp của nó đều là hàm đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng đó.

Ví dụ về các hàm số sơ cấp đơn điệu, đồng biến (nghịch biến) tuyệt đối trong khoảng (a, b) ($a > 0$) là các hàm số sau.

Ví dụ 2.4. Mọi đa thức $P(x)$ với các hệ số đều dương là hàm đơn điệu tăng tuyệt đối trong khoảng $(0, +\infty)$.

Thật vậy, dãy các đa thức $P^{(k)}(x)$ có các hệ số đều không âm nên

$$P^{(k)}(x) \geq 0, \quad \forall x > 0, k = 0, 1, \dots$$

Ví dụ 2.5. Hàm số $f(x) = e^x$ là hàm đồng biến tuyệt đối trong khoảng $(0, +\infty)$.

Ví dụ 2.6. Với mọi hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên $[0, 1]$, hàm số

$$f(x) = \int_0^1 g(t)e^{tx} dt$$

đồng biến tuyệt đối trong khoảng $(0, 1)$.

Ví dụ 2.7. Hàm số

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^x$$

là hàm nghịch biến tuyệt đối trong khoảng $(1, +\infty)$.

Nhận xét 2.2. Nếu hàm số $f(x)$ là hàm đồng biến tuyệt đối trong khoảng (a, b) thì hàm số $g(x) := -f(x)$ sẽ là hàm nghịch biến tuyệt đối trong khoảng đó và ngược lại. Vì vậy, không mất tính tổng quát, ta chỉ trình bày các bài toán liên quan đến hàm đơn điệu tăng và đồng biến tuyệt đối trong khoảng đã cho.

Bài toán 2.2. Chứng minh rằng với mọi hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, 1]$, hàm số

$$f(x) = \int_0^1 g(t)e^{tx} dt$$

sẽ là hàm đồng biến tuyệt đối trong khoảng $(0, 1)$.

Chứng minh. Chứng minh được suy ra trực tiếp từ tính chất của tích phân xác định.

Bài toán 2.3. Cho hàm số $g(x)$ liên tục và dương trên đoạn $[0, 1]$ và hàm số

$$f(x) = \int_0^1 g(t)e^{\lambda tx} dt, \quad \lambda \geq 0.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{f^{(k)}(x)}{f^{(k+1)}(x)} \geq \frac{f^{(k+1)}(x)}{f^{(k+2)}(x)}, \quad \forall x \in (0, 1), k = 0, 1, \dots$$

Chứng minh. Chứng minh được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức Chebyshev đối với tích phân xác định sau đây

$$\int_0^1 g(t)t^k e^{\lambda tx} dt \int_0^1 g(t)t^{2+k} e^{\lambda tx} dt \geq \int_0^1 g(t)t^{k+1} e^{\lambda tx} dt \int_0^1 g(t)t^{k+1} e^{\lambda tx} dt.$$

Chương 3

Một số ứng dụng của hàm đơn điệu theo bậc trong lượng giác

Trong chương này, ta xét một số bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi các hàm sin và cos mà dấu đẳng thức không xảy ra trong tập các tam giác thường. Cuối cùng là nhận dạng một số dạng tam giác đặc biệt.

3.1 Một số dạng bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác

Trong mục này, đầu tiên ta xét một số bất đẳng thức cơ bản dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi hàm cos mà dấu đẳng thức không thể xảy ra trong tập các tam giác thường. Sau đó áp dụng phương pháp đó để chứng minh các bất đẳng thức dạng tương tự.

3.1.1 Bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi hàm cos

Ta bắt đầu bằng bài toán sau đây.

Bài toán 3.1. Cho các số dương x, y, z tùy ý. Chứng minh rằng với mọi tam giác thường ABC ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C > -\max\{x, y, z\} + \text{med}\{x, y, z\} + \min\{x, y, z\}. \quad (3.1)$$

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$.

Ta nhắc lại bất đẳng thức quen thuộc sau

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 1,$$

do $\sin \frac{A}{2} > 0, \sin \frac{B}{2} > 0, \sin \frac{C}{2} > 0$, với mọi tam giác ABC . Nhận xét rằng số 1 là ước lượng tốt nhất của bài toán.

Thật vậy, khi cho $A = \alpha > 0$ đủ nhỏ thì $B + C = \pi - \alpha$, đủ gần π thì

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\cos \alpha + 2 \cos \frac{\pi - \alpha}{2} \cos \frac{B - C}{2} \right) = 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x \cos A + y \cos B + z \cos C &= x(\cos A + \cos B + \cos C) \\ &\quad + (y - x) \cos B + (z - x) \cos C. \end{aligned}$$

Theo chứng minh trên, $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ và $x > 0$ nên

$$x(\cos A + \cos B + \cos C) > x.$$

Lại có, do $\cos B < 1, \cos C < 1$ và $y - x \leq 0, z - x \leq 0$ nên

$$(y - x) \cos B + (z - x) \cos C \geq (y - x) + (z - x).$$

Vậy nên ta thu được

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C > x + y - x + z - x = -x + y + z.$$

Nhận xét 3.1. Với các tam giác thường, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.1) không xảy ra, nhưng ta không thể thay thế vế phải bởi một giá trị lớn hơn $-x + y + z$, thật vậy, khi cho $B = C = \alpha > 0$ đủ nhỏ thì $A = \pi - 2\alpha$ đủ gần π và

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (x \cos(\pi - 2\alpha) + y \cos \alpha + z \cos \alpha) = -x + y + z.$$

Để xét tiếp giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C,$$

ta bắt đầu bằng việc xét các trường hợp đơn giản nhất khi biểu thức được xét trong bài toán có tính chất đối xứng cục bộ.

Bài toán 3.2. Cho số thực m thỏa mãn $0 < m \leq \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$\cos A + \cos B + m \cos C < 2 - m. \quad (3.2)$$

Giải. Ta có các biến đổi và ước lượng sau đây.

$$\begin{aligned} P &= \cos A + \cos C + m \cos C \\ &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + m \cos C \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + m(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}) \\ &\leq 2 \sin \frac{C}{2} + m(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}) \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B$. Xét hàm số

$$f(t) = 2 \sin t + m(1 - 2 \sin^2 t), \quad t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Ta có

$$f'(t) = 2 \cos t(1 - 2m \sin t) \geq 0, \quad \forall t \in (0, \frac{\pi}{2}), \quad 0 < m \leq \frac{1}{2}.$$

$f'(t) = 0$ khi và chỉ khi $t = \frac{\pi}{2}$. Vậy $f(t)$ là một hàm đồng biến trong khoảng đang xét. Do vậy

$$f(t) < f(\frac{\pi}{2}) = 2 - m, \quad \forall t \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Nhận xét 3.2. Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.2) xảy ra khi và chỉ khi $C = \pi, A = B = 0$. Với các tam giác thường, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.2) không xảy ra, nhưng ta không thể thay thế vế phải bởi một giá trị nhỏ hơn $2 - m$, thật vậy, khi cho $A = B = \alpha > 0$ đủ nhỏ thì $C = \pi - 2\alpha$ đủ gần π và

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\cos \alpha + \cos \alpha + m \cos(\pi - 2\alpha)) = 2 - m.$$

Tiếp theo, ta xét trường hợp x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$.

Ta bắt đầu bằng việc chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.1. Giả sử x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Khi đó với mọi tam giác thường ABC ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C < x + y - z. \quad (3.3)$$

Chứng minh. Ta có các đồng nhất thức sau:

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C = x \cos A + y \cos B - z \cos(A + B), \quad (3.4)$$

$$(x \cos A + y \cos B)^2 = x^2 \cos^2 A + y^2 \cos^2 B + 2xy \cos A \cos B. \quad (3.5)$$

Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$2xy \sin A \sin B \leq x^2 \sin^2 A + y^2 \sin^2 B, \quad (3.6)$$

$$2\delta(x \cos A + y \cos B) \leq \delta^2 + (x \cos A + y \cos B)^2, \quad \forall \delta \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Từ các hệ thức (3.4) đến (3.7), suy ra

$$\begin{aligned} & 2\delta(x \cos A + y \cos B) + 2xy \cos C \\ &= 2\delta(x \cos A + y \cos B) - 2xy \cos(A + B) \\ &= 2\delta(x \cos A + y \cos B) - 2xy \cos A \cos B + 2xy \sin A \sin B \\ &\leq \delta^2 + x^2 \cos^2 A + y^2 \cos^2 B + 2xy \cos A \cos B \\ &\quad - 2xy \cos A \cos B + 2xy \sin A \sin B \\ &\leq \delta^2 + x^2 \cos^2 A + y^2 \cos^2 B + x^2 \sin^2 A + y^2 \sin^2 B \\ &= x^2 + y^2 + \delta^2, \end{aligned}$$

hay

$$2\delta(x \cos A + y \cos B) + 2xy \cos C \leq x^2 + y^2 + \delta^2. \quad (3.8)$$

Chọn $\delta = x + y$, ta thu được

$$x \cos A + y \cos A + \frac{xy}{x + y} \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + (x + y)^2}{2(x + y)} = x + y - \frac{xy}{x + y}.$$

Theo giả thiết, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{xy}{x + y} = z$ nên ta có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C < x + y - z.$$

Nhận xét 3.3. Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.3) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x \sin A = y \sin B \\ x + y = x \cos A + y \cos B \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 0, C = \pi.$$

Với các tam giác thường, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.3) không xảy ra, nhưng ta không thể thay thế vế phải bởi một giá trị nhỏ hơn $x + y - z$, thật vậy, khi cho $A = B = \alpha > 0$ đủ nhỏ thì $C = \pi - 2\alpha$ đủ gần π và khi đó

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (x \cos \alpha + y \cos \alpha + z \cos(\pi - 2\alpha)) = x + y - z.$$

Từ bổ đề trên ta có bài toán sau đây.

Bài toán 3.3. Giả sử x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$. Chứng minh rằng với mọi tam giác thường ABC ta đều có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C < x + y - z. \quad (3.9)$$

Giải. Từ giả thiết ta suy ra $x > z$ và $y > z$.

Không giảm tính tổng quát, ta coi $x \geq y > z$.

Trường hợp $x = y$ đã được xét trong Bài toán 3.2. Vậy ta xét khi $x > y > z$.

Chọn $z_1 (z_1 \geq z)$ sao cho

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z_1}.$$

Theo Bổ đề 3.1 thì

$$x \cos A + y \cos B + z_1 \cos C < x + y - z_1.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x \cos A + y \cos B + z \cos C &= x \cos A + y \cos B + z_1 \cos C + (z - z_1) \cos C \\ &\leq x + y - z_1 + (z - z_1) \cos C. \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh rằng

$$x + y - z_1 + (z - z_1) \cos C \leq x + y - z, \quad \forall C \in [0, \pi],$$

hay

$$(z - z_1) \cos C \leq z_1 - z, \forall C \in [0, \pi] \Leftrightarrow \cos C \geq -1.$$

Điều này là hiển nhiên.

Nhận xét 3.4. Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.9) xảy ra khi và chỉ khi $A = B = 0, C = \pi$.

Với các tam giác thường, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.9) không xảy ra, nhưng ta không thể thay thế vế phải bởi một giá trị nhỏ hơn $x + y - z$, thật vậy, khi cho $A = B = \alpha > 0$ đủ nhỏ thì $C = \pi - 2\alpha$ đủ gần π và

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (x \cos \alpha + y \cos \alpha + z \cos(\pi - 2\alpha)) = x + y - z.$$

Bài toán 3.4. Cho x, y, z là ba số dương tùy ý. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta đều có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C < x + y + z.$$

Giải. Ta có

$$\cos 2A \leq 1, \cos 2B \leq 1, \cos 2C \leq 1$$

nên

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C \leq x + y + z, \quad (3.10)$$

do x, y, z dương.

Nhận xét 3.5. Dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.10) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos 2A = 1 \\ \cos 2B = 1 \\ \cos 2C = 1 \end{cases}$$

mà $A + B + C = \pi$, nên $A = 0, B = 0, C = \pi$ hoặc các hoán vị của nó. Với các tam giác thường, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.10) không xảy ra, nhưng ta không thể thay thế vế phải bởi một giá trị nhỏ hơn $x + y + z$, thật vậy, khi cho $A = B = \alpha > 0$ đủ nhỏ thì $C = \pi - 2\alpha$ đủ gần π và

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (x \cos 2\alpha + y \cos 2\alpha + z \cos(2\pi - 4\alpha)) = x + y + z.$$

Để xét các bài toán tiếp theo, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 3.2. Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Khi đó với mọi tam giác thường ABC ta đều có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C > z - y - x.$$

Chứng minh. Từ giả thiết, ta có $x > z, y > z$. Không mất tính tổng quát, coi $x \geq y > z$. Khi đó $\forall \triangle ABC$, ta có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C = x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos(2A + 2B), \quad (3.11)$$

$$\cos(2A + 2B) = \cos 2A \cos 2B - \sin 2A \sin 2B, \quad (3.12)$$

$$(x \cos 2A + y \cos 2B)^2 = x^2 \cos^2 2A + y^2 \cos^2 2B + 2xy \cos 2A \cos 2B \quad (3.13)$$

$$-2xy \sin 2A \sin 2B \geq -x^2 \sin^2 2A - y^2 \sin^2 2B, \quad (3.14)$$

và

$$2(x+y)(x \cos 2A + y \cos 2B) \geq -(x+y)^2 - (x \cos 2A + y \cos 2B)^2. \quad (3.15)$$

Từ (3.11) - (3.15), ta suy ra

$$\begin{aligned} & 2(x+y)(x \cos 2A + y \cos 2B) + 2xy \cos 2C \\ & \geq -(x+y)^2 - x^2 \cos^2 2A - y^2 \cos^2 2B - 2xy \cos 2A \cos 2B + 2xy \cos 2C \\ & = -(x+y)^2 - x^2 \cos^2 2A - y^2 \cos^2 2B - 2xy \sin 2A \sin 2B \\ & \geq -(x+y)^2 - x^2 \cos^2 2A - y^2 \cos^2 2B - x^2 \sin^2 2A - y^2 \sin^2 2B \\ & = -(x^2 + y^2) - (x+y)^2 = -2(x+y)^2 + 2xy. \end{aligned}$$

Vậy

$$2(x+y)(x \cos 2A + y \cos 2B) + 2xy \cos 2C \geq -2(x+y)^2 + 2xy,$$

hay

$$x \cos 2A + y \cos 2B + \frac{xy}{x+y} \cos 2C \geq -(x+y) + \frac{xy}{x+y}. \quad (3.16)$$

Sử dụng đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, ta thu được

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C > z - y - x. \quad (3.17)$$

Nhận xét 3.6. Dấu đẳng thức trong (3.17) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x \sin 2A = y \sin 2B \\ x + y = -(x \cos 2A + y \cos 2B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{y \sin 2C}{\sin 2A} \\ x + y = -(x \cos 2A + y \cos 2B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2A + \sin 2B = \sin 2C \\ x + y = -(x \cos 2A + y \cos 2B) \end{cases}$$

hay $A = \frac{\pi}{2}, B = \frac{\pi}{2}, C = 0$.

Với các tam giác thường, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.17) không xảy ra, nhưng ta không thể thay thế về phải bởi một giá trị lớn hơn $z - y - x$, thật vậy, nếu chọn $A = B = \alpha < \frac{\pi}{2}$ đủ gần $\frac{\pi}{2}$ thì giá trị của biểu thức ở vế phải của (3.17) đủ gần $z - y - x$ vì

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (x \cos 2\alpha + y \cos 2\alpha + z \cos(2\pi - 4\alpha)) = z - y - x.$$

Bài toán 3.5. Cho các số dương x, y, z sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$. Chứng minh rằng với mọi tam giác thường ABC ta đều có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C > z - y - x. \quad (3.18)$$

Giải. Không mất tính tổng quát, coi $x \geq y > z > 0$. Chọn z_1 thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z_1}$. Hiển nhiên là $z_1 \geq z$. Ta có

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C = x \cos 2A + y \cos 2B + z_1 \cos 2C + (z - z_1) \cos 2C. \quad (3.19)$$

Theo Bổ đề 3.2 thì

$$x \cos 2A + y \cos 2B + z_1 \cos 2C \geq z_1 - y - x$$

và do $\cos 2C \leq 1$ nên

$$(z - z_1) \cos 2C \geq z - z_1.$$

Suy ra, với mọi $\triangle ABC$ ta đều có

$$\begin{aligned} & x \cos 2A + y \cos 2B + z \cos 2C \\ &= x \cos 2A + y \cos 2B + z_1 \cos 2C + (z - z_1) \cos 2C \\ &\geq (z_1 - x - y) + (z - z_1) = z - x - y. \end{aligned}$$

Nhận xét 3.7. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hay $A = \frac{\pi}{2}, B = \frac{\pi}{2}, C = 0$.

Với các tam giác thường, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.18) không xảy ra, nhưng ta không thể thay thế vế phải bởi một giá trị lớn hơn $z - y - x$, thật vậy, nếu chọn $A = B = \alpha < \frac{\pi}{2}$ đủ gần $\frac{\pi}{2}$ thì giá trị của biểu thức ở vế phải của (3.18) đủ gần $z - y - x$ vì

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (x \cos 2\alpha + y \cos 2\alpha + z \cos(2\pi - 4\alpha)) = z - y - x.$$

Để xét bài toán tiếp theo, ta cần các bổ đề sau.

Bổ đề 3.3. Với mọi tam giác ABC ta đều có

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} > 2.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} &\geq \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \\ &= \frac{1 + \cos A}{2} + \frac{1 + \cos B}{2} + \frac{1 + \cos C}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C). \end{aligned}$$

Ta luôn có

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 1.$$

Vậy

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC có số đo ba góc là $0, 0, \pi$. Ta cũng nhận xét, trong tập các tam giác thường dấu đẳng thức không xảy ra và cũng không thể thay thế bởi một giá trị khác lớn hơn, vì khi ta cho $A = B = \alpha, \alpha > 0$ đủ nhỏ thì C đủ gần π , khi đó

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) = 2.$$

Bài toán 3.6. Cho các số dương x, y, z tùy ý. Chứng minh rằng với mọi tam giác thường ABC ta đều có

$$x \cos \frac{A}{2} + y \cos \frac{B}{2} + z \cos \frac{C}{2} > \min\{x, y, z\} + \text{med}\{x, y, z\}. \quad (3.20)$$

Giải. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \leq y \leq z$. Theo bổ đề về bất đẳng thức hoán vị thì ta chỉ cần chứng minh bài toán với điều kiện $A \leq B \leq C$. Áp dụng Bổ đề 3.3 ta có

$$x \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \geq 2x \quad (3.21)$$

do $x > 0$. Ta có với mọi tam giác ABC thì

$$\begin{cases} 0 < \frac{B+C}{4} < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \left| \frac{B-C}{4} \right| < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

nên

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \frac{B+C}{4} \leq 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos \frac{B-C}{4} \leq 1 \end{cases}$$

suy ra

$$\cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{B+C}{4} \cos \frac{B-C}{4} \geq 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$$

Vậy

$$(y-x) \left(\cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \geq y-x, \quad (3.22)$$

do $y \geq x$. Lại có

$$(z-y) \cos \frac{C}{2} \geq 0, \quad (3.23)$$

do $z \geq y$ và $\cos \frac{C}{2} \geq 0$. Từ các bất đẳng thức (3.21), (3.22), (3.23) ta có

$$\begin{aligned} & x \cos \frac{A}{2} + y \cos \frac{B}{2} + z \cos \frac{C}{2} \\ &= x \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) + (y-x) \left(\cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \\ & \quad + (z-y) \cos \frac{C}{2} \\ &\geq 2x + y - x + 0 = x + y. \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$x \cos \frac{A}{2} + y \cos \frac{B}{2} + z \cos \frac{C}{2} \geq x + y. \quad (3.24)$$

Nhận xét 3.8. Dấu đẳng thức trong (3.24) xảy ra khi và chỉ khi $A = 0, B = 0, C = \pi$.

Với các tam giác thường, dấu đẳng thức trong bất đẳng thức (3.24) không xảy ra, nhưng ta không thể thay thế bởi một giá trị khác lớn hơn $x + y$, thật vậy, nếu chọn $A = B = \alpha, \alpha > 0$ đủ nhỏ thì giá trị của biểu thức ở vế phải của (3.24) đủ gần $x + y$ vì

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(x \cos \frac{A}{2} + y \cos \frac{B}{2} + z \cos \frac{C}{2} \right) = x + y.$$

Tiếp theo, ta xét một số bất đẳng thức của tổ hợp tuyến tính các góc trong tam giác với hàm cos.

Trong phần này, ta xét bài toán sau.

Cho α, β, γ là các số dương thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = 1$, và các số dương x, y, z tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M_c = x \cos(\alpha A + \beta B + \gamma C) + y \cos(\alpha B + \beta C + \gamma A) + z \cos(\alpha C + \beta A + \gamma B),$$

trong tập $M(\Delta)$.

Để giải bài toán trên, ta cần sử dụng các bổ đề sau.

Bổ đề 3.4. Cho các tam giác nhọn ABC và $A_0B_0C_0$ sao cho tam giác $A_0B_0C_0$ gần đều hơn tam giác ABC . Khi đó

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \cos A_0 + \cos B_0 + \cos C_0.$$

Chứng minh. Giả sử rằng $A \geq B \geq C; A_0 \geq B_0 \geq C_0$, ta có

$$\begin{cases} A \geq A_0 \\ A + B \geq A_0 + B_0 \\ A + B + C = A_0 + B_0 + C_0. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \cos x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Ta có $f'(x) = -\sin x; f''(x) = -\cos x \leq 0, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Theo Bổ đề 1.1, suy ra $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \forall x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Vậy ta có

$$\begin{aligned}\cos A &\leq \cos A_0 - \sin A_0(A - A_0), \\ \cos B &\leq \cos B_0 - \sin B_0(B - B_0), \\ \cos C &\leq \cos C_0 - \sin C_0(C - C_0)\end{aligned}$$

Ta thu được

$$\begin{aligned}&\cos A + \cos B + \cos C \\ &\leq \cos A_0 + \cos B_0 + \cos C_0 - \sin C_0(A + B + C - A_0 - B_0 - C_0) \\ &\quad - (\sin B_0 - \sin C_0)(A + B - A_0 - B_0) - (\sin A_0 - \sin B_0)(A - A_0).\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}A + B + C - A_0 - B_0 - C_0 &= 0; A + B \geq A_0 + B_0; A \geq A_0, \\ \frac{\pi}{2} > B_0 \geq C_0 > 0 &\Rightarrow \sin B_0 \geq \sin C_0, \\ \frac{\pi}{2} > A_0 \geq B_0 > 0 &\Rightarrow \sin A_0 \geq \sin B_0,\end{aligned}$$

Vậy nên ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \cos A_0 + \cos B_0 + \cos C_0.$$

3.1.2 Bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi hàm sin

Bây giờ, ta xét một số bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi hàm sin mà dấu đẳng thức không xảy ra trong tập các tam giác thường. Trước hết, ta xét bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T_s = x \sin A + y \sin B + z \sin C,$$

trong đó A, B, C là ba góc của tam giác thường ABC .

Ta có kết quả hiển nhiên sau.

Bài toán 3.7. Với các số dương x, y, z tùy ý và với mọi tam giác ABC ta đều có

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C > 0.$$

Thật vậy, ta có

$$\sin A \geq 0, \sin B \geq 0, \sin C \geq 0,$$

nên

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C > 0,$$

do x, y, z là các số dương.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sin A = 0, \sin B = 0, \sin C = 0,$$

hay $A = 0, B = 0, C = \pi$ hoặc các hoán vị của nó. Nhận thấy rằng trong tập các tam giác thường, dấu đẳng thức không xảy ra nhưng ta cũng không thể thay thế một giá trị khác lớn hơn 0 cho vế phải bất đẳng thức, thật vậy khi cho $A = \alpha, B = \alpha$ với $\alpha > 0$ đủ nhỏ thì $C = \pi - 2\alpha$ đủ gần π nên

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (x \sin \alpha + y \sin \alpha + z \sin(\pi - 2\alpha)) = 0.$$

Tiếp theo ta xét giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P_s = x \sin 2A + y \sin 2B + z \sin 2C,$$

trong đó A, B, C là ba góc của tam giác thường ABC .

Nhận xét 3.9. Với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C > 0.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 4 \sin A \sin B \sin C \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sin A = 0 \text{ hoặc } \sin B = 0 \text{ hoặc } \sin C = 0,$$

tam giác ABC suy biến với số đo ít nhất một trong ba góc là 0.

Nói cách khác, dấu đẳng thức không xảy ra trong tập các tam giác thường.

Bài toán 3.8. Cho các số dương x, y, z tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$x \sin 2A + y \sin 2B + z \sin 2C,$$

với mọi tam giác ABC .

Giải.

Xét trường hợp 1: Tam giác ABC không tù.

Trong trường hợp này, $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$ là các giá trị dương, nên dễ thấy

$$x \sin 2A + y \sin 2B + z \sin 2C > 0.$$

Nhận xét rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin 2A = 0 \\ \sin 2B = \sin 2A \\ \frac{\pi}{2} \geq A \geq B \geq C \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = 0 \end{cases}$$

Xét trường hợp 2: Tam giác ABC là tam giác tù.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq z \geq y$. Không giảm tính tổng quát, ta chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức trên với điều kiện $A \geq \frac{\pi}{2} \geq B \geq C \geq 0$.

Thật vậy, khi $A \geq \frac{\pi}{2} \geq B \geq C \geq 0$ ta có

$$\sin 2A - \sin 2C = 2 \cos(A + C) \sin(A - C) \leq 0, \text{ hay } \sin 2A \leq \sin 2C,$$

do $0 \leq A - C \leq \pi$, nên $\sin(A - C) \geq 0$ và $\frac{\pi}{2} \leq A + C \leq \pi$, nên $\cos(A + C) \leq 0$.

Tương tự, ta cũng có

$$\sin 2B - \sin 2C = 2 \cos(B + C) \sin(B - C) \leq 0, \text{ hay } \sin 2B \leq \sin 2C,$$

do $0 \leq B - C \leq \frac{\pi}{2}$, nên $\sin(B - C) \geq 0$ và $0 \leq B + C \leq \frac{\pi}{2}$, nên $\cos(A + C) \geq 0$.

Vậy nếu $A \geq \frac{\pi}{2} \geq B \geq C \geq 0$, thì $\sin 2A \leq \sin 2C \leq \sin 2B$.

Ta có

$$\begin{aligned} & x \sin 2A + y \sin 2B + z \sin 2C \\ &= z(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + (x - z) \sin 2A + (y - z) \sin 2B. \end{aligned}$$

Áp dụng Nhận xét 3.9 ta có

$$z(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \geq 0 \text{ do } z > 0. \quad (3.25)$$

Theo giả sử trên, ta có $x - z \geq 0$ và $\sin 2A \geq -1$, nên

$$(x - z) \sin 2A \geq -x + z. \quad (3.26)$$

Lại có $y - z \leq 0$ và $\sin 2B \leq 1$, nên

$$(y - z) \sin 2B \geq y - z. \quad (3.27)$$

Từ (3.25), (3.26) và (3.27), ta có

$$x \sin 2A + y \sin 2B + z \sin 2C \geq y - x.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin 2A = -1 \\ \sin 2B = 1 \\ 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3\pi}{4} \\ B = \frac{\pi}{4} \\ C = 0 \end{cases}$$

Vậy ta luôn có bất đẳng thức

$$x \sin 2A + y \sin 2B + z \sin 2C > \min\{x, y, x\} - \max\{x, y, x\}.$$

Trong tập các tam giác thường, dấu đẳng thức không thể xảy ra.

Ta xét tiếp giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P_s = x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2}.$$

Nhận xét 3.10. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} > 1.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{C+A}{2} + \cos \frac{A+B}{2} + \\ &\quad \cos A_1 + \cos B_1 + \cos C_1 \\ &= 1 + 4 \sin \frac{A_1}{2} \sin \frac{B_1}{2} \sin \frac{C_1}{2}, \end{aligned}$$

trong đó A_1, B_1, C_1 là các góc của một tam giác nhọn. Từ đây, ta có ngay điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = \pi, B = C = 0$. Ta có nhận xét, với tam giác thường thì dấu đẳng thức không xảy ra nhưng 1 là ước lượng tốt nhất của vế phải, bởi khi ta cho $B = C = \alpha, \alpha > 0$ đủ nhỏ thì A đủ gần π , khi đó

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) = 1.$$

Bài toán 3.9. Cho các số dương x, y, z . Chứng minh rằng với mọi tam giác $ABC \in M(\Delta)$, ta đều có

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} > \min\{x, y, z\}. \quad (3.28)$$

Giải. Không mất tính tổng quát, ta coi $x \leq y \leq z$.

Không giảm tính tổng quát, ta chỉ cần chứng minh bài toán với điều kiện $A \geq B \geq C$.

Với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\begin{aligned} & x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} \\ = & x \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) + (y - x) \left(\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \\ & + (z - y) \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Áp dụng Nhận xét 3.10 ta có

$$x \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \geq x \text{ do } x > 0.$$

Lại có

$$(y - x) \left(\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \geq 0 \text{ do } y \geq x, \sin \frac{B}{2} \geq 0, \sin \frac{C}{2} \geq 0,$$

$$(z - y) \sin \frac{C}{2} \geq 0 \text{ do } z \geq y, \sin \frac{C}{2} \geq 0.$$

Vậy nên ta có

$$x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} > x.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC có số đo ba góc là

$$A = \pi, B = C = 0.$$

Nhận xét rằng trong tập các tam giác thường thì dấu đẳng thức không xảy ra nhưng ta không thể thay thế x bởi một giá trị khác lớn hơn. Thật vậy, cho $B = C = \alpha, A = \pi - \alpha$, với $\alpha > 0$ đủ nhỏ thì khi đó

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{A}{2} + y \sin \frac{B}{2} + z \sin \frac{C}{2} \right) = x.$$

Tiếp theo, ta xét một số bất đẳng thức của tổ hợp tuyến tính các góc trong tam giác với hàm sin.

Trong phần này ta xét bài toán sau.

Cho α, β, γ là các số dương thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = 1$, và các số dương x, y, z tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M_s = x \sin(\alpha A + \beta B + \gamma C) + y \sin(\alpha B + \beta C + \gamma A) + z \sin(\alpha C + \beta A + \gamma B),$$

Để giải bài toán trên, ta cần sử dụng các bổ đề sau.

Bổ đề 3.5. Cho tam giác ABC và $A_0B_0C_0$ sao cho tam giác $A_0B_0C_0$ đều hơn tam giác ABC . Khi đó

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0.$$

Chứng minh. Giả sử rằng $A \geq B \geq C; A_0 \geq B_0 \geq C_0$, ta có

$$\begin{cases} A = A_0 \\ A + B = A_0 + B_0 \\ A + B + C = A_0 + B_0 + C_0. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x, \forall x \in [0, \pi]$.

Ta có $f'(x) = \cos x; f''(x) = -\sin x \leq 0, \forall x \in [0, \pi]$.

Theo Bổ đề 1.1 suy ra $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in [0, \pi], x_0 \in [0, \pi]$.

Vậy ta có

$$\sin A \leq \sin A_0 + \cos A_0(A - A_0),$$

$$\sin B \leq \sin B_0 + \cos B_0(B - B_0),$$

$$\sin C \leq \sin C_0 + \cos C_0(C - C_0).$$

Ta thu được

$$\begin{aligned} & \sin A + \sin B + \sin C \\ & \leq \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0 + \cos C_0(A + B + C - A_0 - B_0 - C_0) \\ & + (\cos B_0 - \cos C_0)(A + B - A_0 - B_0) + (\cos A_0 - \cos B_0)(A + B - A_0 - B_0) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ta có

$$A + B + C - A_0 - B_0 - C_0 = 0, A + B \geq A_0 + B_0, A \geq A_0,$$

$$\pi \geq B_0 \geq C_0 \geq 0 \Rightarrow \sin B_0 \geq \sin C_0,$$

$$\pi \geq A_0 \geq B_0 \geq 0 \Rightarrow \sin A_0 \geq \sin B_0.$$

Vậy nên ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0.$$

3.2 Nhận dạng một số dạng tam giác đặc biệt

Bài toán 3.10. Cho tam giác nhọn $A_0B_0C_0$. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta đều có

$$\frac{\sin A}{\cos A_0} + \frac{\sin B}{\cos B_0} + \frac{\sin C}{\cos C_0} \leq \tan A_0 \tan B_0 \tan C_0.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = \sin x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f'(x) = \cos x > 0$ và $f''(x) = -\sin x < 0$ trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vậy nên

$$f(A) \leq f(A_0) + f'(A_0)(A - A_0),$$

suy ra

$$\frac{\sin A}{\cos A_0} \leq \tan A_0 + A - A_0. \quad (*)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\sin B}{\cos B_0} \leq \tan B_0 + B - B_0, \quad (**)$$

và

$$\frac{\sin C}{\cos C_0} \leq \tan C_0 + C - C_0. \quad (***)$$

Từ (*), (**) và (***), suy ra

$$\frac{\sin A}{\cos A_0} + \frac{\sin B}{\cos B_0} + \frac{\sin C}{\cos C_0} \leq \tan A_0 + \tan B_0 + \tan C_0.$$

Để ý rằng

$$\tan A_0 + \tan B_0 + \tan C_0 = \tan A_0 \tan B_0 \tan C_0,$$

suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $A_0B_0C_0$ đồng dạng với tam giác ABC .

■

Bài toán 3.11. Cho tam giác nhọn $A_0B_0C_0$. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta đều có

$$\frac{\sin A}{\cos A_0} + \frac{\sin B}{\cos B_0} + \frac{\sin C}{\cos C_0} \leq \tan A_0 + \tan B_0 + \cot C_0.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f'(x) = \cos x > 0, f''(x) = -\sin x < 0$ và $g'(x) = -\sin x < 0$ và $g''(x) = -\cos x < 0$ trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vậy nên

$$f(A) \leq f(A_0) + f'(A_0)(A - A_0),$$

$$f(B) \leq f(B_0) + f'(B_0)(B - B_0),$$

$$g(C) \leq g(C_0) + g'(C_0)(C - C_0),$$

suy ra

$$\frac{\sin A}{\cos A_0} \leq \tan A_0 + A - A_0. \quad (*)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\sin B}{\cos B_0} \leq \tan B_0 + B - B_0, \quad (**)$$

và

$$\frac{\sin C}{\cos C_0} \leq \cot C_0 + C - C_0. \quad (***)$$

Từ (*), (**) và (***), suy ra

$$\frac{\sin A}{\cos A_0} + \frac{\sin B}{\cos B_0} + \frac{\sin C}{\cos C_0} \leq \tan A_0 + \tan B_0 + \cot C_0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $A_0B_0C_0$ đồng dạng với tam giác ABC . ■

Bài toán 3.12. Cho tam giác nhọn $A_0B_0C_0$. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta đều có

$$\frac{\cos A}{\sin A_0} + \frac{\cos B}{\sin B_0} + \frac{\cos C}{\sin C_0} \leq \cot A_0 + \cot B_0 + \cot C_0.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = \cos x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f'(x) = -\sin x < 0$ và $f''(x) = -\cos x < 0$ trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vậy nên

$$f(A) \leq f(A_0) + f'(A_0)(A - A_0),$$

suy ra

$$\frac{\cos A}{\sin A_0} \leq \cot A_0 + A - A_0. \quad (*)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\cos B}{\sin B_0} \leq \cot B_0 + B - B_0, \quad (**)$$

và

$$\frac{\cos C}{\sin C_0} \leq \cot C_0 + C - C_0. \quad (***)$$

Từ (*), (**) và (***), suy ra

$$\frac{\cos A}{\sin A_0} + \frac{\cos B}{\sin B_0} + \frac{\cos C}{\sin C_0} \leq \cot A_0 + \cot B_0 + \cot C_0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $A_0B_0C_0$ đồng dạng với tam giác ABC . ■

Bài toán 3.13. Cho tam giác nhọn $A_0B_0C_0$. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta đều có

$$\frac{\tan A}{1 + \tan^2 A_0} + \frac{\tan B}{1 + \tan^2 B_0} + \frac{\tan C}{1 + \tan^2 C_0} \geq 2 \sin A_0 \sin B_0 \sin C_0.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = \tan x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ và $f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} > 0$ trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vậy nên

$$f(A) \geq f(A_0) + f'(A_0)(A - A_0),$$

suy ra

$$\frac{\tan A}{1 + \tan^2 A_0} \geq \frac{1}{2} \sin 2A_0 + A - A_0. \quad (*)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\tan B}{1 + \tan^2 B_0} \geq \frac{1}{2} \sin 2B_0 + B - B_0, \quad (**)$$

và

$$\frac{\tan C}{1 + \tan^2 C_0} \geq \frac{1}{2} \sin 2C_0 + C - C_0. \quad (***)$$

Từ (*), (**) và (***), suy ra

$$\frac{\tan A}{1 + \tan^2 A_0} + \frac{\tan B}{1 + \tan^2 B_0} + \frac{\tan C}{1 + \tan^2 C_0} \geq \frac{1}{2} (\sin 2A_0 + \sin 2B_0 + \sin 2C_0).$$

Để ý rằng

$$\sin 2A_0 + \sin 2B_0 + \sin 2C_0 = 4 \sin A_0 \sin B_0 \sin C_0,$$

suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $A_0B_0C_0$ đồng dạng với tam giác ABC . ■

Bài toán 3.14. Cho tam giác nhọn $A_0B_0C_0$. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta đều có

$$\frac{\cot A}{1 + \cot^2 A_0} + \frac{\cot B}{1 + \cot^2 B_0} + \frac{\cot C}{1 + \cot^2 C_0} \geq 2 \sin A_0 \sin B_0 \sin C_0.$$

Giải. Xét hàm số $f(x) = \cot x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có $f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$ và $f''(x) = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} > 0$ trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vậy nên

$$f(A) \geq f(A_0) + f'(A_0)(A - A_0),$$

suy ra

$$\frac{\cot A}{1 + \cot^2 A_0} \geq \frac{1}{2} \sin 2A_0 + A - A_0. \quad (*)$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\cot B}{1 + \cot^2 B_0} \geq \frac{1}{2} \sin 2B_0 + B - B_0, \quad (**)$$

và

$$\frac{\cot C}{1 + \cot^2 C_0} \geq \frac{1}{2} \sin 2C_0 + C - C_0. \quad (***)$$

Từ (*), (**) và (***), suy ra

$$\frac{\cot A}{1 + \cot^2 A_0} + \frac{\cot B}{1 + \cot^2 B_0} + \frac{\cot C}{1 + \cot^2 C_0} \geq 2 \sin A_0 \sin B_0 \sin C_0.$$

Để ý rằng

$$\sin 2A_0 + \sin 2B_0 + \sin 2C_0 = 4 \sin A_0 \sin B_0 \sin C_0,$$

suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác $A_0B_0C_0$ đồng dạng với tam giác ABC . ■

Bài toán 3.15. Chứng minh rằng trong tam giác nhọn ABC , ta luôn có

$$(\tan A)^{\tan A} (\tan B)^{\tan B} (\tan C)^{\tan C} \geq (\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}. \quad (3.30)$$

Giải. Trước hết, ta chứng minh bất đẳng thức sau:

Với x, y, z là ba số dương thì

$$x^x y^y z^z \geq (xyz)^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
x^x y^y z^z &\geq (xyz)^{\frac{1}{3}(x+y+z)} \\
\Leftrightarrow x \ln xy \ln yz \ln z &\geq \frac{1}{3}(x+y+z)(\ln x + \ln y + \ln z) \\
\Leftrightarrow (x-y)(\ln x - \ln y) + (y-z)(\ln y - \ln z) + (z-x)(\ln z - \ln x) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Vì hàm $y = \ln x$ là hàm đồng biến trong $(0, +\infty)$ nên ta có

$$(x-y)(\ln x - \ln y) > 0, \forall x, y > 0.$$

Do vậy

$$(x-y)(\ln x - \ln y) + (y-z)(\ln y - \ln z) + (z-x)(\ln z - \ln x) \geq 0$$

Suy ra

$$x^x y^y z^z \geq (xyz)^{\frac{1}{3}(x+y+z)}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Với $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$, trong đó A, B, C là các góc của tam giác nhọn ABC , ta nhận được

$$\begin{aligned}
(\tan A)^{\tan A} (\tan B)^{\tan B} (\tan C)^{\tan C} &\geq (\tan A \tan B \tan C)^{\frac{1}{3}(\tan A + \tan B + \tan C)} \\
&\geq (3\sqrt{3})^{\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \tan A = \tan B = \tan C \\ A = B = C, \end{cases}$$

tức là tam giác ABC là tam giác đều. ■

Bài toán 3.16. Cho tam giác nhọn ABC . Chứng minh rằng với n là số nguyên dương, ta luôn có

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt{3}^n.$$

Giải. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^3} \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^n}$$

(do $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C = 3\sqrt{3}$).

Vậy ta có điều phải chứng minh

$$\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \geq 3\sqrt{3^n}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Từ đó, ta có các bất đẳng thức

$$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \geq 9;$$

$$\tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C \geq 9\sqrt{3};$$

$$\tan^4 A + \tan^4 B + \tan^4 C \geq 27;$$

.....

$$\tan^{2004} A + \tan^{2004} B + \tan^{2004} C \geq 3^{1003}.$$



Kết luận

Luận văn " Một số dạng bất đẳng thức trong lớp hàm đơn điệu và áp dụng trong lượng giác" đã tập trung nghiên cứu một số vấn đề chính sau đây:

- Hệ thống hóa được các kiến thức cơ bản về hàm đơn điệu bậc nhất, hàm đơn điệu bậc hai, hàm đơn điệu bậc cao.
- Hệ thống hóa lớp con của lớp hàm đơn điệu đó là lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 1-2 và lớp hàm đơn điệu liên tiếp bậc 2-3. Trình bày về hàm tuần hoàn và hàm đơn điệu tuyệt đối.
- Trình bày một số bất đẳng thức dạng không đối xứng trong tam giác sinh bởi các hàm sin và cos mà dấu đẳng thức không xảy ra trong tập các tam giác thường.
- Cuối cùng là một số ứng dụng của hàm đơn điệu theo bậc trong lượng giác để nhận dạng một số tam giác đặc biệt.

Tuy nhiên luận văn còn rất nhiều hạn chế. Chắc chắn rằng trong thời gian tới tác giả sẽ tập trung tìm hiểu kỹ hơn về những vấn đề này trong quá trình giảng dạy và nghiên cứu của mình.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của GS-TSKH Nguyễn Văn Mậu và sự nghiên cứu, làm việc nghiêm túc của bản thân. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình đến GS - TSKH Nguyễn Văn Mậu.

Trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn, tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán - Tin học trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình và các bạn trong lớp Cao học, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục, 1993.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, NXB Giáo dục, 2004.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lí và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2006.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Ngọc, *Chuyên đề chọn lọc: Đa thức đối xứng và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2008.
- [5] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2008.
- [6] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Số phức và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2010.
- [7] Tạ Duy Phượng, *Phương trình bậc ba và các bài toán trong tam giác*, NXB Giáo dục, 2006.