

DÙNG MTCT RÚT GỌN BIỂU THỨC SỐ PHỨC

Mai Mẫn Tiệp*

Ngày 17 tháng 5 năm 2014

Tóm tắt nội dung

Dựa theo ý tưởng của bạn Bùi Thế Việt trong bài viết *Phân tích đa thức hai biến thành nhân tử bằng CASIO* đăng trên web diendantoanhoc.net, Mẫn Tiệp tiếp tục phát triển thủ thuật trên theo hướng áp dụng vào *bài toán xác định số phức* - một trong các dạng bài tập thường xuyên xuất hiện ở kì thi Tuyển sinh Đại học, Cao đẳng những năm gần đây.

Lưu ý

- Các bạn hoàn toàn được quyền sử dụng file nguồn \LaTeX của bài viết này, nhưng phải ghi rõ đội ngũ thực hiện.
- Mọi ý kiến về các sai sót mắc phải, xin liên hệ với tác giả qua email.

1 Kiến thức chuẩn bị

1. Đơn vị ảo: $i^2 = -1$.
2. Số phức: $\forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$.
3. Số phức liên hợp: $\bar{z} = x - iy$.
4. Hai số phức bằng nhau: $\forall z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

2 Cơ sở của thuật toán

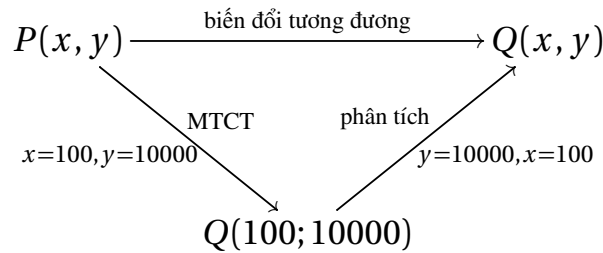
Cho hai đa thức hai biến $P(x, y)$ và $Q(x, y)$. Khi ấy,

Nếu $P(x, y) \equiv Q(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ thì $P(100; 10000) = Q(100; 10000)$.

*maimantiep.wordpress.com – maimantiep@gmail.com.

Do đó, thay vì biến đổi tương đương để đưa $P(x, y)$ về $Q(x, y)$, ta sẽ dùng MTCT thực hiện việc này một cách tự động, nhanh chóng và chính xác.

Tức là ta dùng thuật toán theo sơ đồ:



3 Ví dụ áp dụng

3.1 Ví dụ (\simeq CĐ-2010, VII.a)

Tìm số phức z thỏa mãn

$$(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2 \quad (*).$$

Giải

1. Nhập vào màn hình vế trái của (*) với $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Tức là trong chế độ số phức (MODE 2: CMPLX), ta bấm máy:

$$(2 - 3i)(X + iY) + (4 + i)(X - iY)$$

Bấm CALC, máy hỏi $X?$, nhập 100, bấm =, máy hỏi $Y?$, nhập 10000, bấm =, máy hiện:

$$40600 - 20200i$$

2. Phân tích:

$$40600 - 20200i = 40000 + 600 - (20000 + 200)i \stackrel{y=10000, x=100}{=} 4y + 6x - (2y + 2x)i.$$

$$\text{Suy ra vế trái} = 6x + 4y + (-2x - 2y)i.$$

$$\text{Mà vế phải} = -(1 + 3i)^2 = 8 - 6i.$$

3. Do đó:

$$(*) \Leftrightarrow 6x + 4y + (-2x - 2y)i = 8 - 6i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 8 \\ -2x - 2y = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5. \end{cases}$$

4. Vậy $\boxed{z = -2 + 5i}$.

3.2 Ví dụ (\simeq CĐ-2011, VII.a)

Tìm số phức z thỏa mãn

$$(1 + 2i)^2 z + \bar{z} = 4i - 20 \quad (*).$$

Giải¹

1. Trong chế độ số phức, nhập vào màn hình vế trái của (*) với $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$:

$$(1 + 2i)^2(X + iY) + X - iY$$

Dùng CALC để gán $X = 100$ và $Y = 10000$ ta được:

$$-40200 - 39600i$$

2. Phân tích:

$$-40200 - 39600i = \dots \quad \quad \quad = \dots \quad \quad \quad .$$

Suy ra vế trái =

Mà vế phải $= 4i - 20 = 20 - 4i$.

3. Do đó:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \dots \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Vậy $\boxed{z = 4 + 3i}$.

3.3 Ví dụ (\simeq D-2011, VII.a)

Tìm số phức z thỏa mãn

$$z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i \quad (*).$$

- Độc giả tự giải xem như bài tập.
- Gợi ý: $-30100 + 29700i = -(30000 + 100) + (30000 - 300)i$
 $\stackrel{y=10000, x=100}{=} -(3y + x) + (3y - 3x)i = \boxed{(-x - 3y) + (-3x + 3y)i = 1 - 9i}.$
- Đáp án: $\boxed{z = 2 - i}$.

¹Độc giả hãy điền vào chỗ trống để có được bài giải hoàn chỉnh.

4 Bài tập củng cố

4.1 Bài tập (\simeq A-2011, VII.b)

Tìm số phức z thỏa mãn

$$(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i \quad (*).$$

- Đáp án: $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$.
- Gợi ý: $-29700 + 10098i = -(30000 - 300) + (10000 + 100 - 2)i$
 $\stackrel{y=10000, x=100}{=} -(3y - 3x) + (y + x - 2)i = \boxed{(3x - 3y) + (x + y - 2)i = 2 - 2i}.$

4.2 Bài tập (\simeq AA1-2012, 9.b)

Tìm số phức z thỏa mãn

$$\frac{5(\bar{z} + i)}{z + 1} = 2 - i \quad (*).$$

- Đáp án: $z = 1 + i$.
- Gợi ý:
 - Phải chuyển về trước rồi mới bấm máy:

$$(*) \Leftrightarrow 5(\bar{z} + i) - (2 - i)(z + 1) = 0.$$

- Phân tích:

$$\begin{aligned} -9702 - 69894i &= -(10000 - 298) - (70000 - 106)i \\ &= -(10000 - 300 + 2) - (70000 - 100 - 6)i \stackrel{\begin{cases} y=10000 \\ x=100 \end{cases}}{=} -(y - 3x + 2) - (7y - x - 6)i \\ &= (3x - y - 2) + (x - 7y + 6)i = 0 + 0i. \end{aligned}$$

Nhận xét

Không phải bài tập xác định số phức nào cũng áp dụng được thủ thuật này, nó chỉ dùng tốt khi bài toán qui về hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Nói cách khác, cách này chỉ dùng được khi đề bài *không có* $|z|$, $z \cdot \bar{z}$ và z^2 .

Tài liệu

[1] Mai Mẫn Tiệp (2013), *Toán học tình hoa*.

[2] Bùi Thế Việt (2014), *Thủ thuật giải toán bằng CASIO*.