

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TRẦN VĂN PÁO

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM KÉP

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.40.01.13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

Luận văn được hoàn thành tại
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS NÔNG QUỐC CHINH

Phản biện 1:
.....

Phản biện 2:
.....

Luận văn sẽ được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:

Trường Đại học khoa học - ĐHTN

Ngày ... tháng ... năm 2013

Có thể tìm hiểu luận văn tại thư viện Đại học Thái Nguyên

Mục lục

1	Nghiệm của đa thức - Nghiệm của phương trình	4
1.1	Nghiệm của đa thức.	4
1.2	Nghiệm bội và tính chất của nghiệm bội.	4
1.3	Công thức Viet.	5
1.4	Nghiệm của đa thức với hệ số nguyên.	5
1.5	Tính chặn nghiệm trên $\mathbb{C}$	7
2	Phương pháp nghiệm kép	9
2.1	Cơ sở của phương pháp nghiệm kép	9
2.2	Nghiệm bội của phương trình	10
2.3	Nghiệm kép của phương trình và vấn đề đường cong tiếp xúc với trục hoành	13
2.4	Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép . . .	15
2.5	Bài toán nghiệm kép viết phương trình tiếp tuyến	17
2.6	Bài toán nghiệm kép xét sự tiếp xúc của hai đồ thị	19
2.6.1	Nghiệm của đa thức bậc hai và bất đẳng thức	20
2.6.2	Nghiệm của đa thức bậc n và bất đẳng thức	20
2.6.3	Các ví dụ	21
	Kết luận	24
	Tài liệu tham khảo	25

MỞ ĐẦU

Nghiệm của đa thức là một phần rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực của Toán học, chẳng hạn: Đại số, Giải tích, Hình học, Toán rời rạc...vv. Trong chương trình toán phổ thông, phần đa thức và nghiệm của đa thức chủ yếu được đưa vào bộ môn Đại số và Giải tích. Đặc biệt trong các kỳ thi đại học, học sinh giỏi quốc gia và quốc tế đều có những bài toán liên quan đến nghiệm bội của đa thức. Chính vì vậy mà chuyên đề về nghiệm bội của đa thức rất thiết thực với những ai muốn tìm hiểu sâu về toán sơ cấp.

Từ các kết quả đạt được trong phương pháp nghiệm bội của đa thức chúng ta có thể vận dụng giải một số bài toán về hình học rất phức tạp, giải hệ phương trình và xây dựng một số kết quả về Tổ hợp, chứng minh bất đẳng thức. Khi xét đa thức ta thường quan tâm đến nghiệm, nghiệm bội của đa thức. Nội dung của luận văn nhằm giải quyết hai vấn đề chính:

Vấn đề 1: Chứng minh lại, một số kết quả cơ bản về nghiệm và nghiệm bội của phương trình mà các kết quả ấy gắn liền với tên tuổi của những nhà toán học lỗi lạc. Vận dụng các kết quả đạt được để giải quyết một số bài toán đã được đặt ra.

Vấn đề 2: Đưa ra cơ sở của phương pháp nghiệm kép, vận dụng phương pháp nghiệm kép giải: Bài toán tiếp xúc với trục hoành; bài toán tiếp xúc của hai đồ thị; Bài toán tiếp tuyến; Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép.

Luận văn này được chia làm hai chương.

Chương I: Nghiệm của đa thức.

(1) Nội dung chương I trình bày một số khái niệm về vành đa thức, nghiệm của đa thức, nghiệm của phương trình.

Chương II: Phương pháp nghiệm kép.

(2) Nội dung chương II trình bày về cơ sở của phương pháp nghiệm kép, vận dụng phương pháp nghiệm kép giải các bài toán: Bài toán tiếp xúc với trục hoành; bài toán tiếp xúc của hai đồ thị; Bài toán tiếp tuyến; Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép, bài toán nghiệm kép vận dụng giải bất đẳng thức.

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót nhất định, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TS Nông Quốc Chỉnh. Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tiếp theo em xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện đã đọc và góp ý để em hoàn thiện luận văn của mình. Em xin được cảm ơn chân thành nhất tới Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, nơi em đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản. Xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp đã cảm thông, chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ trong thời gian em học cao học và viết luận văn. Lời cuối em xin chúc sức khỏe các thầy cô giáo và đồng nghiệp.

Em xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2013

Người thực hiện

Bàn Vàng Pao

Chương 1

Nghiệm của đa thức - Nghiệm của phương trình

1.1 Nghiệm của đa thức.

Định nghĩa 1.1.1.

Giả sử K là một trường số nào đó, A là trường con của K . Một phần tử $\alpha \in K$ gọi là nghiệm của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(\alpha) = 0$. Ta cũng nói α là nghiệm của phương trình đại số $f(x) = 0$. Nếu $\deg f(x) = n$ gọi là phương trình đại số bậc n ($n \geq 1$).

Định lý 1.1.2 (Định lý Bezout).

Cho vành đa thức $A[x]$, $f(x) \in A[x]$, $\alpha \in A$. Dư trong phép chia $f(x)$ cho $x - \alpha$ là $f(\alpha)$.

Hệ quả 1.1.3.

Phần tử $\alpha \in A$ là nghiệm của đa thức $f(x) \in A[x]$, nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $x - \alpha$ trong $A[x]$.

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$$

tức $f(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$.

Định lý 1.1.4. Mọi đa thức

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in A[x], \quad a_0 \neq 0$$

có thể viết dưới dạng $f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$ trong vành $K[x]$. Ở đây $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là những nghiệm của đa thức $f(x)$ trong trường mở rộng K của A .

1.2 Nghiệm bội và tính chất của nghiệm bội.

Định nghĩa 1.2.1.

Giả sử k là một số tự nhiên khác 0. Một phần tử $\alpha \in A$ gọi là nghiệm bội cấp k

của đa thức $f(x) \in A[x]$ nếu và chỉ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x - p\alpha)^k$ đồng thời không chia hết cho $(x - \alpha)^{k+1}$.

$$f(x) = (x - \alpha)^k q(x) \quad (q(\alpha) \neq 0),$$

$k = 1$ thì α gọi là nghiệm đơn.

$k = 2$ thì α gọi là nghiệm kép.

Định lý 1.2.2 (Định lý cơ bản của đại số cổ điển).

Mọi đa thức $f(x)$ với hệ số phức, $\deg f(x) \geq 1$ có đúng n nghiệm phức, kể cả số bội của mỗi nghiệm.

1.3 Công thức Viet.

Định lý 1.3.1. Cho $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in A[x]$, $a_0 \neq 0$ là một đa thức bất kỳ và $f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$. Ở đây, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là những nghiệm của đa thức $f(x)$. Khi đó,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_1}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_2}{a_0} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k + \dots + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}\dots\alpha_n = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

1.1 Gọi là công thức Viet.

1.4 Nghiệm của đa thức với hệ số nguyên.

Với mọi $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ luôn tìm được số nguyên $m \neq 0$ để $mf(x) = g(x)$, $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (m -mẫu số chung các hệ số của $f(x)$).

$$\forall \alpha \in \mathbb{Q}, \quad f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0.$$

Do đó, để xét nghiệm của đa thức trên $\mathbb{Q}$, ta chỉ cần xét nghiệm của đa thức trên $\mathbb{Z}$.

Định lý 1.4.1. Nếu u và v là những số nguyên tố cùng nhau và nếu số hữu tỉ $\alpha = \frac{u}{v}$ là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

thì $a_0 : v$ và $a_n : u$.

Hệ quả 1.4.2.

- Mọi nghiệm nguyên của đa thức với hệ số nguyên đều là ước của hạng tử tự do.
- Mọi nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên có hệ số cao nhất bằng 1 đều là nghiệm nguyên.

Bài toán

Cho đa thức với hệ số nguyên

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Chứng minh rằng nếu α là 1 nghiệm nguyên của đa thức

$$\varphi(x) = y^n + a_1y^{n-1} + a_0^{n-2}a_{n-1}y + a_0^{n-1}a_n,$$

thì $\frac{\alpha}{a_0}$ cũng là nghiệm của đa thức đã cho.

Định lý 1.4.3. Nếu số hữu tỉ $\alpha = \frac{u}{v}$, $((u, v) = 1)$ là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

thì với mọi số nguyên m , số $p(m):(mv - u)$. Trong trường hợp đặc biệt $(u + v)$ là ước của $p(-1)$ còn $(u - v)$ là ước của $p(1)$.

Hệ quả 1.4.4. Nếu $\alpha = \pm 1$ là nghiệm của đa thức

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

thì $\frac{f(1)}{1 - \alpha}$ và $\frac{f(-1)}{1 + \alpha}$ đều nguyên.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng, mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó chính là nội dung Định lý cơ bản của đại số. Người đầu tiên chứng minh Định lý này là nhà toán học C. Gauss (1777-1855).

Định nghĩa 1.4.5. Trường K được gọi là một trường đóng đại số nếu mọi đa thức bậc dương thuộc $K[x]$ đều có nghiệm trong K .

Như vậy, trong $K[x]$ mọi đa thức bậc dương đều phân tích được thành tích các nhân tử tuyến tính khi K là một trường đóng đại số.

Bổ đề 1.4.6. Mỗi đa thức bậc lẻ thuộc $\mathbb{R}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thực thuộc $\mathbb{R}$.

Bổ đề 1.4.7. Mỗi đa thức bậc hai thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có hai nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.

Định lý 1.4.8. [D'Alembert - Gauss, Định lý cơ bản của đại số] Mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.

Hệ quả 1.4.9. Mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ với bậc $n > 0$ đều có n nghiệm trong $\mathbb{C}$ và các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$ là các đa thức bậc nhất.

Bổ đề 1.4.10. Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$. $f(x)$ là đa thức bất khả quy khi và chỉ khi hoặc $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$.

Định lý 1.4.11. Mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành dạng

$$f(x) = a(x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_s)^{n_s} (x^2 + b_1x + c_1)^{d_1} \dots (x^2 + b_rx + c_r)^{d_r}$$

với các $b_i^2 - 4c_i < 0$ cho $i = 1, \dots, r$ khi $r \geq 1$.

Định lý 1.4.12. [Viết] Giả sử $x_1, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n sau đây: $f(x) = x^n - \delta_1 x^{n-1} + \delta_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \delta_n$. Khi đó có các hệ thức

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \delta_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ \dots \\ \delta_n = x_1x_2 \dots x_n. \end{cases}$$

Định lý 1.4.13. Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là một đa thức đối xứng khác 0.

Khi đó tồn tại một và chỉ một đa thức $s(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = s(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.

1.5 Tính chặn nghiệm trên $\mathbb{C}$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng, mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó chính là nội dung Định lý cơ bản của đại số. Người đầu tiên chứng minh định lý này là nhà toán học C. Gauss (1777-1855).

Định nghĩa 1.5.1. Trường K được gọi là một trường đóng đại số nếu mọi đa thức bậc dương thuộc $K[x]$ đều có nghiệm trong K .

Như vậy, trong $K[x]$ mọi đa thức bậc dương đều phân tích được thành tích các nhân tử tuyến tính khi K là một trường đóng đại số.

Bổ đề 1.5.2. Mỗi đa thức bậc lẻ thuộc $\mathbb{R}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thực thuộc $\mathbb{R}$.

Bổ đề 1.5.3. Mỗi đa thức bậc hai thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có hai nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.

Định lý 1.5.4. [D'Alembert - Gauss, Định lý cơ bản của đại số] Mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.

Từ Định lý 1.5.4 suy ra kết quả sau đây về đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$

Hệ quả 1.5.5. Mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ với bậc $n > 0$ đều có n nghiệm trong $\mathbb{C}$ và các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$ là các đa thức bậc nhất.

Bổ đề 1.5.6. Cho $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$. $f(x)$ là đa thức bất khả quy khi và chỉ khi hoặc $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$.

Định lý 1.5.7. Mỗi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ đều có thể phân tích được một cách duy nhất thành dạng

$$f(x) = a(x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_s)^{n_s} (x^2 + b_1x + c_1)^{d_1} \dots (x^2 + b_rx + c_r)^{d_r}$$

với các $b_i^2 - 4c_i < 0$ cho $i = 1, \dots, r$ khi $r \geq 1$.

Định lý 1.5.8. [Viết] Giả sử $x_1, \dots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n sau đây: $f(x) = x^n - \delta_1 x^{n-1} + \delta_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \delta_n$. Khi đó có các hệ thức

$$\begin{cases} \delta_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \delta_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \\ \dots \\ \delta_n = x_1x_2 \dots x_n. \end{cases}$$

Định lý 1.5.9. Giả sử $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là một đa thức đối xứng khác 0. Khi đó tồn tại một và chỉ một đa thức $s(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = s(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.

Bổ đề 1.5.10. Cho đa thức $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0 \neq 0$. Nếu số hữu tỷ $\frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thì

(i) p là một ước của a_n và q là một ước của a_0 .

(ii) $p - mq$ là một ước của $f(m)$ cho mọi số nguyên m .

Hệ quả 1.5.11. Nghiệm hữu tỷ của đa thức $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ phải là số nguyên.

Chương 2

Phương pháp nghiệm kép

2.1 Cơ sở của phương pháp nghiệm kép

Ta nhắc lại khái niệm sự tiếp xúc của đồ thị hai hàm số và khái niệm nghiệm bội của đa thức

Định nghĩa 2.1.1. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ được gọi là tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ nếu $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$.

Định nghĩa 2.1.2. Giả sử $F(x)$ là một đa thức. Số x_0 được gọi là *nghiệm bội* của đa thức $F(x)$ nếu $F(x)$ chia hết cho $(x - x_0)^2$ tức là $F(x)$ có dạng

$$F(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q(x)$$

trong đó $Q(x)$ là một đa thức.

Trong trường hợp đa thức $F(x)$ là tam thức bậc hai, nghiệm bội được gọi là *nghiệm kép*.

Định lý sau đây chứng tỏ rằng phương pháp nghiệm kép là có cơ sở toán học khi chúng ta xét sự tiếp xúc của hai đồ thị các hàm số phân thức hữu tỉ.

Định lý 2.1.3. Cho hai phân thức hữu tỉ

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, g(x) = \frac{U(x)}{V(x)}.$$

Khi đó đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình

$$P(x) \cdot V(x) - Q(x) \cdot U(x) = 0 \tag{2.1}$$

có nghiệm bội $x = x_0$ với $Q(x_0) \neq 0, V(x_0) \neq 0$ (tức là x_0 thuộc miền xác định của $f(x)$ và $g(x)$)

Vì đa thức cũng là phân thức hữu tỉ (khi đa thức ở mẫu là đa thức hằng số) nên ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 2.1.4. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm đa thức $y = P(x)$ khi và chỉ khi phương trình $P(x) - (kx + h) = 0$ có nghiệm bội.

Hệ quả 2.1.5. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm phân thức hữu tỉ $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ khi và chỉ khi phương trình $P(x) - Q(x).(kx + h) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$ với $Q(x_0) \neq 0$.

Hệ quả 2.1.6. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ khi và chỉ khi phương trình $ax^2 + bx + a - (mx + n).(kx + h) = 0$ có nghiệm kép (tức là khi biệt thức $\Delta = 0$).

Hệ quả 2.1.7. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ khi và chỉ khi phương trình $ax + b - (cx + d).(kx + h) = 0$ có nghiệm kép (tức là khi biệt thức $\Delta = 0$).

Để chứng minh định lý ta cần đến bổ đề sau:

Bổ đề 2.1.8. Đa thức $f(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$ khi và chỉ khi $F(x_0) = f'(x_0) = 0$

2.2 Nghiệm bội của phương trình

Trong khi giải toán ta mới chỉ chú ý đến khái niệm nghiệm kép của phương trình, tuy vậy nhiều bài toán lại đòi hỏi các kiến thức liên quan đến khái niệm nghiệm bội (nói riêng là nghiệm kép) của phương trình. Ta xét bài toán sau:

Ví dụ 2.2.1. Chứng minh rằng đồ thị hàm số

$$y = \frac{-m(x+1) + x + 2}{m(x+1) - 1} (m \neq 0)$$

luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định.

Bài giải: Gọi $d : y = a(x+1) + b$ là đường thẳng cần tìm. Để d tiếp xúc với đồ thị hàm số thì phương trình

$$\frac{-m(x+1) + x + 2}{m(x+1) - 1} = a(x+1) + b. \quad (2.2)$$

có nghiệm kép với $m \neq 0$, hay phương trình bậc hai

$$am(x+1)^2 + (m(1+b) - 1 - a)(x+1) - 1 - b = 0. \quad (2.3)$$

có nghiệm kép với $m \neq 0$.

Do đó cần phải hiểu thế nào là nghiệm kép của phương trình và các phép biến đổi nào giữ nguyên nghiệm kép của phương trình.

Định nghĩa nghiệm bội

Định nghĩa 2.2.2. Số u được gọi là nghiệm bội n (n là số tự nhiên, $n \geq 2$) của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm đến cấp $n - 1$ tại u và số u là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \\ \dots \\ f^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

với đạo hàm cấp n của $f(x), g(x)$ tại u hoặc không xác định, hoặc xác định nhưng

$$f^{(n)}(u) \neq g^{(n)}(u). \quad (2.5)$$

Khi $n = 2$ ta gọi nghiệm u là nghiệm kép.

Từ định nghĩa ta thấy: Nếu u là nghiệm bội $k \geq n$ của phương trình $f(x) = g(x)$ thì u sẽ thỏa mãn hệ 2.4.

Tính chất nghiệm bội

Ta có một số tính chất sau đây của nghiệm bội.

Tính chất 1. Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định trên tập D , khi đó đồ thị của chúng tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ bằng $u \in D$ khi và chỉ khi số u là nghiệm bội $n(n \geq 2)$ của phương trình

$$f(x) = g(x). \quad (2.6)$$

Chứng minh. Thật vậy, nếu hai đồ thị tiếp xúc nhau tại điểm $M(u, v)$ thì u là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad (2.7)$$

Vậy số u là nghiệm bội n với $n \geq 2$ của 2.6.

Ngược lại, nếu u là nghiệm bội n với $n \geq 2$ của 2.6 thì u là nghiệm của hệ 2.7 nhưng $n - 1 \geq 1$ nên hệ 2.4 có ít nhất hai phương trình của hệ 2.7. Từ đó hai đồ thị phải tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ u .

□

Khi tìm nghiệm bội của phương trình bất kỳ ta thường quy về tìm nghiệm bội của đa thức vì vậy các tính chất sau rất có ích cho việc đó.

Tính chất 2. Số u là nghiệm của đa thức $F(x)$ khi và chỉ khi

$$F(x) = (x - u)^n \cdot P(x)$$

với $P(x)$ là đa thức khác 0 và không nhận u làm nghiệm.

Vậy khi đó số u là nghiệm bội của đa thức $F(x)$ theo nghĩa đã biết (đa thức có

đúng n nghiệm bằng u). Sử dụng tính chất 2 ta có

Tính chất 3. Giả sử b là số thực tùy ý, thì số u là nghiệm bội n của đa thức

$$a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$$

khi và chỉ khi số $u - b$ là nghiệm bội n của đa thức

$$a_m(x + b)^m + a_{m-1}(x + b)^{m-1} + \dots + a_1(x + b) + a_0.$$

Tính chất 4. Giả sử $f(x), g(x), h(x), r(x)$ là các đa thức với $g(x) \neq 0, r(x) \neq 0$ thì số u là nghiệm bội n của phương trình

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{r(x)} \quad (2.8)$$

khi và chỉ khi số u là nghiệm bội n của phương trình

$$f(x).r(x) = g(x).h(x).$$

Theo các tính chất trên ta có thể thực hiện các phép biến đổi tương đương mà không làm thay đổi nghiệm bội của phương trình, minh họa trong các ví dụ sau.

Ví dụ 2.2.3. Chứng minh rằng đồ thị hàm số

$$y = \frac{-m(x + 1) + x + 2}{m(x + 1) - 1} (m \neq 0)$$

luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định.

Ta lấy lại ví dụ đặt vấn đề đã nêu ở trên. Ở đây sử dụng cách giải đơn thuần nhất, mặc dù có nhiều cách giải khác. Chúng tôi bổ sung một vài chỗ để lời giải chính xác, và đó chính là sự minh họa cho cách giải này bởi cơ sở lý thuyết trên.

Bài giải:

Giả sử đường thẳng $y = a(x + 1) + b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số nói trên với mọi $n \neq 0$, khi đó hoành độ u của tiếp tuyến là nghiệm bội n của phương trình 2.2 với mọi $m \neq 0$. Tức là u là nghiệm bội n (với $m(u + 1) \neq 0$) của phương trình 2.3

$$am(x + 1)^2 + (m(1 + b) - 1 - a)(x + 1) - 1 - b = 0.$$

với mọi $m \neq 0$.

Do tính chất 3, phương trình 2.3 có nghiệm bội n khi và chỉ khi

$$amx^2 + (m(1 + b) - 1 - a)x - 1 - b = 0 \quad (2.9)$$

có nghiệm bội n . Vì 2.9 là phương trình bậc hai nên nghiệm bội là nghiệm kép. Ta giải hệ điều kiện

$$\begin{cases} am \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ (m((1+b) - 1 - a)^2 - 4am(-1 - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a = b = -1 \end{cases}$$

vậy $a = b = -1$

Thử lại với $a = b = -1$ và $m \neq 0$ nghiệm kép của phương trình 2.3 thỏa mãn điều kiện $u \neq \frac{1}{m} - 1$ (hay $g(u) \neq 0$ trong tính chất 4 nói trên).

2.3 Nghiệm kép của phương trình và vấn đề đường cong tiếp xúc với trục hoành

Nghiệm bội của đa thức là gì?

Định nghĩa 2.3.1. Đa thức bậc $n \geq 1$ có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

nhận số thực α làm nghiệm bội k (k là số nguyên dương) nếu như

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x)$$

trong đó $Q(x)$ cũng là một đa thức với $Q(\alpha) \neq 0$.

Trong trường hợp đặc biệt, nghiệm bội hai được gọi là nghiệm kép, còn nghiệm bội $k = 1$ được gọi là nghiệm đơn.

Nếu kí hiệu $P^{(i)}(x)$ là đạo hàm cấp i của $P(x)$ khi đó ta có các kết quả dưới đây

Mệnh đề 2.3.2. Điều kiện ắt có và đủ để đa thức $P(x)$ nhận α làm nghiệm bội k là $P(\alpha) = 0, P^{(i)}(\alpha) = 0$ với $k - 1$ giá trị $i = 1, 2, 3, \dots, k - 1$ và $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Vậy thì có một câu hỏi được đặt ra

Khi nào đường cong tiếp xúc với trục hoành?

Mệnh đề 2.3.3. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

có nghiệm

Do đó ta thấy: Nếu kết hợp mệnh đề 1 và mệnh đề 2, ta nhận được kết quả về mối quan hệ giữa tính tiếp xúc với trục hoành của một đa thức và nghiệm bội.

Mệnh đề 2.3.4. Đồ thị hàm đa thức

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

có bậc cao hơn 1 tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi $P(x)$ có nghiệm bội k (với $k \geq 2$) hay có ít nhất hai nghiệm trùng nhau.

Nhìn lại những sai lầm

Nếu cho rằng điều kiện để đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép hoặc là nghiệm bội k (với $k \geq 2$) thì sẽ ra sao?

Sau đây chúng ta dẫn ra một số ví dụ minh họa cho sai lầm đó

Ví dụ 2.3.5. Đồ thị hàm số $y = f(x) = \sin x - x$ tiếp xúc với trục hoành khi nào?

Đồ thị hàm số $y = \sin x - x$ tiếp xúc với trục hoành khi tại $x = 0$ vì $y(0) = y'(0) = 0$, nhưng có lẽ nào ta lại có phương trình $\sin x - x = 0$ có nghiệm kép hay nghiệm bội!

Một sai lầm khó phát hiện hơn, thực sự phải tinh tế thì mới phát hiện ra. Ta thấy trong một số tài liệu ôn thi đại học của các trường đã lập luận như sau

Hàm số bậc ba

$$f(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$$

tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép.

Điều đó tương đương với hai trường hợp

Trường hợp 1: Tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ nhận x_0 làm nghiệm, tức là

$$\Leftrightarrow ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$$

Trường hợp 2: Tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có nghiệm kép, tức là

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0.$$

Sự tinh tế (tế nhị) là ở chỗ cả hai bước của lập luận trên đều sai nhưng lại cho kết quả đúng.

Thật vậy, chúng ta cùng xem lại từng bước của lập luận này.

Đồ thị của hàm bậc ba

$$f(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$$

tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trùng nhau (Mệnh đề 3), điều đó tương đương với

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Nếu cả hai điều kiện của 2.10 cùng xảy ra thì $f(x)$ nhận x_0 là nghiệm bội ba. Ta cũng có thể dùng mệnh đề 2 để chứng minh kết quả này. Bây giờ ta xem xét bước 2.

Phương trình bậc ba

$$(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$$

có nghiệm kép thì nghiệm kép đó là x_0 hoặc khác x_0 .

Nếu nghiệm kép đó là x_0 thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ phải có một nghiệm x_0 và một nghiệm khác x_0 .

Nếu phương trình $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có nghiệm kép khác x_0 thì nghiệm đó chính là nghiệm kép của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Vậy phương trình

$$(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$$

có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\left[\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \right. \quad (2.11)$$

Chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng mệnh đề 1 kiểm tra lại kết quả này. *Điều kiện đề đường cong $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tương đương với phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép, chỉ có thể tin cậy được trên các hàm bậc hai, còn với các đường cong khác cần phải xem xét lại cho chuẩn mực.*

2.4 Bài toán tiếp tuyến khi không dùng phương pháp nghiệm kép

Định lý 2.4.1. *Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với đồ thị hàm số của $y = g(x)$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau*

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

có nghiệm.

Ví dụ 2.4.2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C)

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} \quad (C),$$

biết tiếp tuyến đi qua $A(4; 1)$.

Bài giải:

Đường thẳng d đi qua $A(4; 1)$ với hệ số góc k có phương trình

$$y = kx + 1 - 4k.$$

Để d tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = k(x - 4) + 1 \\ \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2} = k \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - 1 + \frac{1}{x - 1} = k(x - 1) + 1 - 3k \\ 2 - \frac{1}{(x - 1)^2} = k \end{cases} \quad (*) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x - 1 + \frac{1}{x - 1} = 2(x - 1) - \frac{1}{x - 1} + 1 - 3k \\ k = 2 - \frac{1}{(x - 1)^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{1}{x - 1} = -\frac{3k}{2} \\ k = 2 - \frac{9k^2}{4} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{1}{x - 1} = -\frac{3k}{2} \\ 9k^2 + 4k - 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{1}{x - 1} = -\frac{3k}{2} \\ k = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ta tìm được hai tiếp tuyến $(d_1), (d_2)$ có phương trình:

$$y = \left(\frac{-2 \pm \sqrt{76}}{9}\right)(x - 4) + 1.$$

Nhận xét: Cần chú ý thủ thuật viết $y = k(x - 4) + 1$ về dạng $y = k(x - 1) + (1 - 3k)$. Khi thay $k = 2 - \frac{1}{(x - 1)^2}$ vào $(*)$, ta chỉ thay vào $k(x - 1)$ và không thay vào $(1 - 3k)$.

2.5 Bài toán nghiệm kép viết phương trình tiếp tuyến

Ta biết, bài toán tiếp tuyến được giải bằng hai cách nhờ mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.5.1. Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

- $\begin{cases} f(x_0) = ax_0 + b \\ f'(x_0) = a \end{cases}$ (Cách 1)
- Phương trình $f(x) = ax + b$ có nghiệm bội $x = x_0$. (Cách 2)

Ta sẽ nghiên cứu cơ sở lý thuyết của cách 2 trong mệnh đề 2.5.1, tức là phương pháp nghiệm kép đối với các hàm số đa thức hoặc phân thức hữu tỉ mà chứng minh phù hợp hơn với toán phổ thông.

Xét đa thức

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Ta nói $x = x_0$ là nghiệm bội k của đa thức $P(x)$ nếu

$$P(x) = (x - x_0)^k \cdot Q(x),$$

trong đó $k > 1, k \in \mathbb{N}$ và $Q(x)$ là đa thức thỏa mãn $Q(x_0) \neq 0$ ($Q(x)$ có thể là hằng số).

Ta gọi x_0 là nghiệm bội của $P(x)$ khi không cần chỉ rõ số k . Nghiệm bội $k = 2$ được gọi là nghiệm kép của đa thức.

Mệnh đề 2.5.2. Đa thức $P(x)$ có nghiệm bội x_0 khi và chỉ khi $P(x_0) = 0$ và $P'(x_0) = 0$.

Mệnh đề 2.5.3. Đường thẳng d với phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C_1) của hàm số $y = P(x)$ tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình

$$P(x) - (ax + b) = 0,$$

có nghiệm bội $x = x_0$.

Đối với đồ thị hàm phân thức hữu tỉ có dạng $y = \frac{U(x)}{V(x)}$, ta có

Mệnh đề 2.5.4. Đường thẳng d với phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C_2) của hàm số $y = \frac{U(x)}{V(x)}$ tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình

$$U(x) - (ax + b)V(x) = 0,$$

với $V(x_0) \neq 0$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Áp dụng mệnh đề 2.5.4 vào xét các hàm số có dạng

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}, \quad (2.12)$$

và

$$f(x) = \frac{ax + b}{a'x + b'}. \quad (2.13)$$

Ta được

Mệnh đề 2.5.5. Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ với $f(x)$ có dạng ?? hoặc 2.12 khi và chỉ khi phương trình

$$f(x) - (ax + b) = 0$$

là phương trình bậc hai có nghiệm kép $x = x_0$.

Ví dụ 2.5.6. Cho hàm số $= \frac{x^2 + 1}{x}$ có đồ thị (C).

Tìm tập hợp các điểm M mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) mà hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Bài giải: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm bất kì trên mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình đường thẳng d qua M có hệ số góc a là

$$(d) : y = a(x - x_0) + y_0.$$

Để tìm tọa độ giao điểm giữa (C) và (d) ta xét phương trình

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x} &= a(x - x_0) + y_0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (a - 1)x^2 - (ax_0 - y_0)x - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi phương trình 2.14 có nghiệm kép khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \text{ và } x \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

(với $a = 1$ thì hệ số a là hệ số góc của tiệm cận xiên $y = x$)

Ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (ax_0 - y_0)^2 + 4(a - 1) \\ \Leftrightarrow \Delta &= x_0 a^2 - 2(x_0 y_0 - 2)a + y_0^2 + 4. \end{aligned}$$

Để qua M kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) vuông góc với nhau khi và chỉ khi phương trình $\Delta = 0$ có hai nghiệm a_1, a_2 thỏa mãn $a_1 a_2 = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ \frac{y_0^2 + 4}{x_0} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 4 \end{cases}.$$

Vậy tập hợp điểm M phải tìm là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, trừ đi các giao điểm của đường tròn đó với hai đường tiệm cận (do các điều kiện $x_0 \neq 0$ và $a \neq 1$).

2.6 Bài toán nghiệm kép xét sự tiếp xúc của hai đồ thị

Nếu bỏ phương pháp nghiệm kép thì việc giải một số bài toán trước đây có thể không giải được.

Trong chuyên đề này chúng ta xét một số bài toán mang tính điển hình để thấy được ứng dụng của phương pháp nghiệm kép trong bài toán tiếp xúc của hai đồ thị hàm số.

Ví dụ 2.6.1. Tìm m để đồ thị hàm số

$$y = (x + 2)(x^2 - mx + m^2 - 3)$$

tiếp xúc với trục hoành.

Bài giải: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành $y = 0$ khi và chỉ khi hệ phương trình ẩn x sau có nghiệm

$$(I) \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

Do đó, để đồ thị hàm số tiếp xúc với Ox thì điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} (x + 2)(x^2 - mx + m^2 - 3) = 0 \\ (x^2 - mx + m^2 - 3) + (x + 2)(2x - m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (II) \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \end{cases} \\ (III) \begin{cases} x^2 - mx + m^2 - 3 = 0 \\ (x + 2)(2x - m) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Nếu $t(x) = x^2 - mx + m^2 - 3$ thì hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (II) hoặc hệ (III) có nghiệm, điều đó tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t(-2) = 0 \\ t(\frac{m}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 = 0 \\ \frac{3}{4}m^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \pm 2 \end{cases}$$

Nhận xét. Điều kiện $t(\frac{m}{2}) = 0$ cũng chính là điều kiện để $t(x)$ có nghiệm kép thì lời giải trên chúng ta đã giải trước đây.

2.6.1 Nghiệm của đa thức bậc hai và bất đẳng thức

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Mệnh đề 2.6.2. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của $f(x) = 0$. Khi đó có kết quả:

$$\begin{cases} f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Mệnh đề 2.6.3. Giả sử $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ và $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó có các kết quả sau:

(i) $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

(ii) $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. (iii) $f(x) < 0$

với mọi giá trị của x khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

(iv) $f(x) \leq 0$ với mọi giá trị của x khi và chỉ khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

(v) $f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và số thực α sao cho $x_1 < \alpha < x_2$ khi và chỉ khi $a \cdot f(\alpha) < 0$.

Mệnh đề 2.6.4. Giả sử dãy hữu hạn các số thực $(a_i); (b_i); (t_i)$ thỏa mãn $0 < a \leq a_i \leq A, 0 < b \leq b_i \leq B$ và $t_i \geq 0$ với mọi $i = 1, \dots, n$. Khi đó có

$$(i) \text{ [Polya]} \quad \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{ab}{AB}} + \sqrt{\frac{AB}{ab}} \right)^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2}.$$

$$(ii) \text{ [Cantorovic]} \quad \frac{(a + A)^2}{aA} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n t_i a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{a_i} \right).$$

2.6.2 Nghiệm của đa thức bậc n và bất đẳng thức

Bổ đề 2.6.5 (Rolle).

Nếu hàm số $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b], a < b$, thỏa mãn $g(a) = g(b)$ thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ để $g'(x_0) = 0$.

Hàm tiếp theo được xét đến là một đa thức bậc $n > 2$ với n nghiệm sau đây:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = x^n \sigma_1 x^{n-1} - \sigma_2 x^{n-2} - \dots - (-1)^n \sigma_n.$$

Mệnh đề 2.6.6. Nếu các $a_i > 0; i = 1, \dots, n$, thì ta có các bất đẳng thức

$$\frac{\sigma_1}{\binom{n}{1}} \geq \sqrt{\frac{\sigma_2}{\binom{n}{2}}} \geq \dots \geq \sqrt[k]{\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}} \geq \dots \geq \sqrt[n-1]{\frac{\sigma_{n-1}}{\binom{n}{n-1}}} \geq \sqrt[n]{\frac{\sigma_n}{\binom{n}{n}}}.$$

Hệ quả 2.6.7 (APMO 1990).

Nếu các $a_i, i = 1, \dots, n$ thì ta có

$$\delta_i \delta_{n-i} \geq \binom{n}{i}^2 \delta_n.$$

Chứng minh. Do $\sqrt[i]{\frac{\delta_i}{\binom{n}{i}}} \geq \sqrt[n]{\frac{\delta_n}{\binom{n}{n}}}$, $\sqrt[n-i]{\frac{\delta_{n-i}}{\binom{n}{n-i}}} \geq \sqrt[n]{\frac{\delta_n}{\binom{n}{n}}}$ theo mệnh

đề 2.6.6 nên

$$\frac{\delta_i}{\binom{n}{i}} \geq \sqrt[n]{\delta_{n-i}}, \frac{\delta_{n-i}}{\binom{n}{n-i}} \geq \sqrt[n]{\delta_i}.$$

$$\text{Vậy } \delta_i \delta_{n-i} \geq \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \delta_n = \binom{n}{i}^2 \delta_n.$$

□

2.6.3 Các ví dụ

Ví dụ 2.6.8. Giả sử ba số $a, b, c > 0$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng nếu các số thực x, y, z thỏa mãn hệ thức $ax + by + cz = 0$ thì

$$ayz + bzx + cxy \leq 0 \text{ và } yz + zx + xy \leq 0.$$

Chứng minh. Từ giả thiết $ax + by + cz = 0$ suy ra $cz = -ax - by$. Vì $c > 0$ nên

$$ayz + bzx + cxy \leq 0$$

$$\Leftrightarrow aycz + bczx + c^2xy \leq 0.$$

Vậy ta phải chỉ ra

$$ay(-ax - by) + bx(-ax - by) + c^2xy \leq 0$$

hay

$$abx^2 + (a^2 + b^2 - c^2)xy + aby^2 \geq 0.$$

Xét hàm số $f(x, y) = abx^2 + (a^2 + b^2 - c^2)xy + aby^2$ với $ab > 0$. Có biệt thức

$$\Delta = -(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)y^2 \leq 0,$$

nên với $f(x, y) \geq 0$ với mọi x, y .

Vì $z = -\frac{+by}{c}$ nên $yz + zx + xy \leq 0$ tương đương

$$ax^2 + (a + b - c)xy + by^2 \geq 0.$$

Dễ dàng thấy $\Delta \leq 0$. Vậy

$$yz + zx + xy \leq 0.$$

□

Ví dụ 2.6.9. Chứng minh rằng, nếu $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_{[x]}$ có bốn nghiệm thực dương thì

$$ac \geq 16d \text{ và } b^2 \geq 36d.$$

Từ đó suy ra phương trình $x^4 + ax^3 + 10x^2 + cx + 3 = 0$ không thể có bốn nghiệm dương với mọi $a, c \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Giả sử bốn nghiệm của $f(x) = 0$ là $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$. Từ bất đẳng thức

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) \geq 16$$

suy ra bất đẳng thức

$$(-a)(-c) \geq 16d \text{ hay } ac \geq 16d.$$

$$\text{Vì } \sqrt{\frac{b}{\binom{4}{2}}} \geq \sqrt[4]{\frac{d}{\binom{4}{2}}} \text{ nên } b^2 \geq 36d.$$

Do $10^2 = 100 < 108 = 38.3$ nên $x^4 + ax^3 + 10x^2 + cx + 3 = 0$ không thể có bốn nghiệm dương. □

Ví dụ 2.6.10 (VMO 2004). Giả sử x, y, z là những số thực dương thỏa mãn $(x + y + z)^3 = 32xyz$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{(x + y + z)^4}.$$

Chứng minh. Ta thấy ngay, với mọi số thực dương α luôn có

$$T(x; y; z) = T(\alpha x, \alpha y; \alpha z).$$

Vậy, không làm mất tính chất tổng quát có thể giả thiết $x + y + z = 4$. Khi đó $x + y + z = 4, xyz = 2$, ở đó $x, y, z > 0$. Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{256}.$$

Dễ thấy x, y, z đều là nghiệm của phương trình $t^3 - 4t^2 + at - 2 = 0$, ở đó $a = xy + yz + zx$.

Do tính bình đẳng của x, y, z nên có thể coi $x \geq y, z$. Biểu diễn

$$x^4 + y^4 + z^4 = [x^2 + y^2 + z^2]^2 - 2[x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2] = 2[a^2 - 32] + 288.$$

Từ $a = xy + yz + zx = x(y + z) + yz = x(4 - x) + \frac{2}{x}$ suy ra $a = x(4 - x) + \frac{2}{x}$ hay $x \geq \frac{4}{3}$.

Từ $(4 - x)^2 = (y + z)^2 \geq 4yz = \frac{8}{x}$ hay $(x - 2)(x^2 - 6x + 4) \geq 0$, và $x \geq \frac{4}{3}$ suy ra $\frac{4}{3} \leq x \leq 2$.

Khảo sát $a = x(4 - x) + \frac{2}{x}$ với $\frac{4}{3} \leq x \leq 2$. Ta có

$$a' = \frac{-2x - 1)(x^2 - x - 1)}{x^2},$$

với $\frac{4}{3} \leq x \leq 2$. Từ đây suy ra

$$5 \leq a \leq \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Xét $x^4 + y^4 + z^4 = 2[a^2 - 32a] + 288$ với $5 \leq a \leq \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}$. Ta được

$$T_{max} = \frac{9}{128} \text{ khi } x = 2, y = z = 1.$$

Và

$$T_{min} = \frac{383 - 165\sqrt{5}}{256} \text{ khi } x = 3 - \sqrt{5}, y = z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

□

Kết luận

Sau một quá trình tìm và đọc các tài liệu, đề tài đã hoàn thành nhiệm vụ nghiên cứu, cụ thể:

1. Luận văn đã trình bày bài toán nghiệm kép được xem xét trên nhiều góc khác nhau để thấy sự cần thiết của bài toán trong Toán nói chung và trong Toán phổ thông nói riêng. Luận văn đã trình bày được các vấn đề sau:

Bài toán tìm nghiệm kép của phương trình.

Bài toán nghiệm kép và các ứng dụng trong Toán phổ thông.

2. Chúng tôi hy vọng nội dung luận văn đã một phần này minh họa cho thấy mối liên hệ hữu cơ giữa kiến thức đại số cao cấp (nói riêng), kiến thức toán cao cấp (nói chung) với các bài toán trong chương trình phổ thông.

3. Hướng phát triển của đề tài là mở và vô cùng hấp dẫn, hữu ích đối với các giáo viên dạy toán ở trường phổ thông.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Tự Cường : *Giáo trình đại số hiện đại*. Đại học quốc gia Hà Nội.
- [2] Lê Thị Thanh Nhân: *Đại số đại cương*. Đại học Thái Nguyên.
- [3] Đàm Văn Nhĩ, *Bản tin dạy và học trong nhà trường số 05 và số 06*, Đại học sư phạm Hà Nội 2011.
- [4] Ngô Thúc Lanh, *Đại số và số học (Tập II)* , NXB Giáo Dục 1987.
- [5] Tuyển tập: *The IMO Compendium 1959-2004*.
- [6] S.lang, *Đại số*. Nhà xuất bản Đại học và trung học chuyên nghiệp Hà Nội, 1974.
- [7] <http://www.apmath.spbu.ru/en/staff/uteshev/>