

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ MINH TIẾN

CỰC TRỊ
CỦA MỘT SỐ HÀM NHIỀU BIẾN
CÓ CÁC DẠNG ĐẶC BIỆT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ MINH TIẾN

CỰC TRỊ
CỦA MỘT SỐ HÀM NHIỀU BIẾN
CÓ CÁC DẠNG ĐẶC BIỆT

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60460113

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. HOÀNG VĂN HÙNG

Thái Nguyên - Năm 2013

Mục lục

Lời nói đầu	2
1 Một số các bất đẳng thức cổ điển	5
1.1 Bất đẳng thức Cauchy và các hệ quả	5
1.2 Bất đẳng thức Holder và các hệ quả	9
2 Cực trị của một số hàm nhiều biến dạng đặc biệt	13
2.1 Giá trị bé nhất của các phân thức k - chính quy	13
2.2 Một số ví dụ áp dụng định lí 2.1.1	16
2.3 Tích của phân thức k - chính quy với phân thức l - chính quy . . .	21
2.4 Cực trị của tỉ số hai phân thức đồng dạng	23
2.5 Cực trị của các hàm nửa cộng tính	28
3 Cực trị của các hàm của hai đa thức đối xứng hai biến	35
3.1 Các đa thức đối xứng của hai biến	35
3.2 Cực trị của các hàm của hai đa thức đối xứng của hai biến	36
Kết luận	44
Tài liệu tham khảo	45

Lời nói đầu

Các bài toán cực trị là một trong những vấn đề quan trọng của cả toán học cao cấp lẫn toán học sơ cấp. Trong chương trình toán sơ cấp ở bậc phổ thông trung học, giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của các hàm một biến hoặc nhiều biến trên một miền nào đó được tìm bằng một trong các phương pháp sau đây:

- Dùng đạo hàm khảo sát hàm số trên miền đã cho (đối với hàm một biến).
- Dùng lý thuyết về tam thức bậc hai (phương pháp miền giá trị).
- Sử dụng các bất đẳng thức khác nhau.

Các bài toán tìm giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của hàm nhiều biến (theo thuật ngữ của toán cao cấp) rất thường hay xuất hiện ở câu hỏi phân loại của các đề thi tuyển sinh đại học và cao đẳng môn Toán học (xem đề thi tuyển sinh đại học môn Toán các khối A,B,D từ năm 2002 đến năm 2012). Để giải các bài toán này thường phải vận dụng phương pháp thứ ba (phương pháp dùng bất đẳng thức), hai phương pháp đầu hầu như không phát huy tác dụng. Vì vậy, để nâng cao khả năng giải các bài toán cực trị của các hàm nhiều biến, học sinh phải rèn luyện rất nhiều về các bất đẳng thức. Các bất đẳng thức mà học sinh phổ thông thường sử dụng là bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Cauchy –Schwarz (hay còn gọi là bất đẳng thức Bunhiacovski). Các bất đẳng thức này có các dạng tổng quát khác nhau, chẳng hạn tổng quát hơn bất đẳng thức Cauchy là bất đẳng thức Cauchy suy rộng, tổng quát hơn bất đẳng thức Cauchy - Schwarz là bất đẳng thức Holder.

Tác giả Phan Huy Khải (xem [P.H.Khải1]) đã sử dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng để tìm cực tiểu của một lớp các hàm nhiều biến mà tác giả gọi là các

phân thức chính quy. Theo hướng này, trong [H.V. Hùng 1] tác giả Hoàng Văn Hùng đã dùng bất đẳng thức Holder để tìm giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của một lớp các hàm nhiều biến có dạng tỉ số của hai phân thức đồng dạng. Hướng nghiên cứu này cho thấy mỗi một bất đẳng thức chứa nhiều biến hầu như cho khả năng kết luận về cực trị của một lớp nào đó các hàm nhiều biến. Vấn đề là các lớp hàm đưa ra phải đủ đơn giản về dạng để dễ nhận biết, có như vậy người sử dụng mới có thể nhớ và vận dụng được linh hoạt.

Bản luận văn “**Cực trị của một số hàm nhiều biến có các dạng đặc biệt**” nghiên cứu một số bất đẳng thức chứa nhiều biến và đưa ra kết luận tương ứng về giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của một số lớp hàm nhiều biến có dạng đặc biệt. Nội dung của bản luận văn gồm Lời nói đầu, 03 chương và Phần kết luận:

Chương 1: Một số các bất đẳng thức cổ điển

Chương 2: Cực trị của một số hàm nhiều biến dạng đặc biệt

Chương 3: Cực trị của các hàm của hai đa thức đối xứng hai biến

Trong chương 1 tác giả đưa ra các bất đẳng thức cổ điển Cauchy, Bunhia-covski, Holder, Mincowski cùng với một số hệ quả và mở rộng của chúng. Tất cả các bất đẳng thức được đưa ra đều được chứng minh chặt chẽ, theo cách ngắn gọn nhất mà tác giả biết.

Chương 2 dành cho các định lý về giá trị bé nhất của các phân thức k - chính quy, giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm có dạng tỉ số của hai phân thức đồng dạng, suy rộng kết quả cho tỉ số của các hàm một biến có dạng đặc biệt, giá trị bé nhất và lớn nhất của các hàm nửa cộng tính. Sau mỗi định lý đều có các ví dụ minh họa lấy từ các đề tuyển sinh đại học môn Toán của các khối A, B, D từ năm 2002 đến 2012 và một số tài liệu tham khảo về các bài toán cực trị, bất đẳng thức. Tất cả các định lý đều được chứng minh chặt chẽ.

Chương 3 dành cho việc xét bài toán giá trị bé nhất và lớn nhất của các hàm hai biến biểu diễn được qua các đa thức đối xứng của hai biến $u = x + y$ và $v = xy$. Tác giả đã đưa ra và chứng minh hai định lý về giá trị bé nhất và lớn nhất

của các hàm dạng này. Một số ví dụ minh hoạ cho áp dụng của các định lý của chương này được lấy từ các đề tuyển sinh đại học môn Toán của các khối A, B, D từ năm 2002 đến 2012. Các ví dụ khác do tác giả sáng tác.

Phần tài liệu tham khảo gồm 07 tài liệu.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn TS. Hoàng Văn Hùng, Viện Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam, thầy đã tận tình hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình chuẩn bị luận văn.

Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô công tác tại: Trường Đại học khoa học, Trường Đại học sư phạm, Khoa công nghệ thông tin- Đại học Thái Nguyên, Trường Đại học khoa học- Đại học Quốc gia Hà Nội, Trường Đại học sư phạm Hà Nội, Trường Đại học Hải Phòng, Viện Công nghệ Thông tin, Viện Toán học- Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã rất quan tâm và tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành chương trình học tập bậc cao học trong suốt thời gian qua.

Hải Phòng, ngày 10 tháng 5 năm 2013

Tác giả

Lê Minh Tiến

Chương 1

Một số các bất đẳng thức cổ điển

Chương này chứng minh một số các bất đẳng thức cổ điển như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacovski, bất đẳng thức Holder và các mở rộng của chúng. Các chứng minh đưa ra trong chương này không giống các cách chứng minh truyền thống của các bất đẳng thức nêu trên trong các sách phổ thông về chủ đề bất đẳng thức.

1.1 Bất đẳng thức Cauchy và các hệ quả

Mệnh đề 1.1.1: Với mọi số thực x ta có bất đẳng thức $e^x \geq x + 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Chứng minh. Xét hàm $f(x) = e^x - x - 1$ ta có $f'(x) = e^x - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khi $x < 0$ ta có $f'(x) < 0$, khi $x > 0$ ta có $f'(x) > 0$. Vậy $f(x)$ đạt cực tiểu thực sự và toàn cục tại $x = 0$. Ta có $f(0) = 0$. Vậy $f(x) \geq 0$ với mọi số thực x , dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=0$. Khẳng định này tương đương với bất đẳng thức $e^x \geq x + 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Định lý 1.1.2 (bất đẳng thức Cauchy): Nếu x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là n số dương thì:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Chứng minh. Đặt $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$. Áp dụng bất đẳng thức của mệnh đề 1.1.1 với $x = \frac{x_i}{A} - 1$ ($i = 1, \dots, n$) ta có: $e^{\frac{x_i}{A}-1} \geq \frac{x_i}{A}$ (dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_i}{A} = 1 \leftrightarrow x_i = A$).

Vì các x_i đều là các số dương nên từ bất đẳng thức trên ta suy ra:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n e^{\frac{x_i}{A}-1} &\geq \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{A}\right) = \frac{G^n}{A^n} \leftrightarrow e^{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{A}-n} \geq \frac{G^n}{A^n} \leftrightarrow 1 = e^{n-n} \geq \frac{G^n}{A^n} \\ &\leftrightarrow A^n \geq G^n \leftrightarrow A \geq G \leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = A$ với mọi $i \leftrightarrow$ tất cả các x_i phải bằng nhau.

Tiếp theo ta ký hiệu $\mathbf{R}_+^{*n}$ là tập hợp các véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ của $\mathbf{R}^n$ mà mọi thành phần x_i đều dương, $\mathbf{Q}_+^{*n}$ là tập con của $\mathbf{R}_+^{*n}$ mà mọi thành phần của các véc tơ thuộc nó đều là các số hữu tỉ dương. Ta sẽ gọi mỗi véc tơ thuộc $\mathbf{Q}_+^{*n}$ là một véc tơ hữu tỷ dương n -chiều. Hàm thực n biến $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ gọi là liên tục tại điểm $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbf{R}^n$ nếu $\mathbf{x}^*$ thuộc tập xác định của $f(\mathbf{x})$ và với mọi dãy $\{\xi_k = (\xi_{1k}, \dots, \xi_{nk})\}$ nằm trong tập xác định của $f(\mathbf{x})$ thoả mãn:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{ik} = x_i^* \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad (1.1)$$

ta luôn có $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\xi_k) = f(\mathbf{x}^*)$. Khi (1.1) đúng ta nói dãy $\{\xi_k = (\xi_{1k}, \dots, \xi_{nk})\}$ hội tụ tới $\mathbf{x}^*$ và ký hiệu $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \mathbf{x}^*$.

Nếu D là một tập con của tập xác định của $f(\mathbf{x})$ và $f(\mathbf{x})$ liên tục tại mọi $\mathbf{x} \in D$ ta nói $f(\mathbf{x})$ liên tục trên D . Một véc tơ $p = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbf{R}_+^{*m}$ gọi là một hệ trọng lượng chuẩn nếu $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1.1.3: Giả sử $F(p, \mathbf{x})$, $G(p, \mathbf{x})$ là hai hàm xác định trên $\mathbf{R}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$ và liên tục theo biến p trên $\mathbf{R}_+^{*m}$ với mỗi $\mathbf{x}$ cố định $\in \mathbf{R}_+^{*n}$. Khi đó:

1) Nếu bất đẳng thức $F(p, \mathbf{x}) \geq G(p, \mathbf{x})$ đúng với mọi $(p, \mathbf{x}) \in \mathbf{Q}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$ thì nó cũng đúng với mọi $(p, \mathbf{x}) \in \mathbf{R}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$.

2) Nếu bất đẳng thức $F(p, x) \geq G(p, x)$ đúng với mọi cặp $(p, x) \in \mathbf{Q}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$ trong đó p là một hệ trọng lượng chuẩn thì nó cũng đúng với mọi cặp $(p, x) \in \mathbf{R}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$ trong đó p là một hệ trọng lượng chuẩn.

Chứng minh. 1) Giả sử (p^*, x^*) là một cặp tùy ý thuộc $\mathbf{R}_+^{*m} \times \mathbf{R}_+^{*n}$. Tồn tại một dãy $\{p_k\}$ các véc tơ hữu tỷ dương sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p^*$. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$F(p_k, x^*) \geq G(p_k, x^*) \text{ với mọi } k \text{ nguyên dương.} \quad (1.2)$$

Cho k dần tới vô cực trong (1.2) và dùng tính liên tục của các hàm F, G theo biến p ta được điều cần chứng minh: $F(p^*, x^*) \geq G(p^*, x^*)$.

2) Chứng minh hoàn toàn tương tự như phần 1). Chỉ cần nhận xét rằng nếu p^* là một hệ trọng lượng chuẩn tùy ý thì bao giờ cũng tồn tại một dãy các hệ trọng lượng chuẩn gồm toàn các véc tơ hữu tỷ dương $\{p_k\}$ sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p^*$.

Định lý 1.1.4 (bất đẳng thức Cauchy suy rộng):

Giả sử $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một véc tơ thuộc $\mathbf{R}_+^{*n}$ và $p = (p_1, \dots, p_n)$ là một hệ trọng lượng chuẩn. Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{p_i} \quad (1.3)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức (1.3) đúng với mọi hệ trọng lượng chuẩn hữu tỷ. Giả sử p_i là các số hữu tỷ dương sao cho $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Quy đồng mẫu số chung cho tất cả các p_i ta có thể xem $p_i = \frac{m_i}{m}$ trong đó $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ và m là các số nguyên dương thoả mãn $\sum_{i=1}^n m_i = m$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho m số dương: m_1 số x_1, m_2 số $x_2, \dots, m_n$ số x_n ta được:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i \geq \sqrt[m]{\prod_{i=1}^n x_i^{m_i}} \leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{m_i/m} \leftrightarrow \sum_{i=1}^n p_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{p_i}$$

Vậy (1.3) đúng với mọi cặp $(p, x) \in \mathbf{Q}_+^{*n} \times \mathbf{R}_+^{*n}$. Đặt $F(p, x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i, G(p, x) = \prod_{i=1}^n x_i^{p_i}$

Rõ ràng $F(p, x)$ và $G(p, x)$ là các hàm liên tục theo $p = (p_1, \dots, p_n)$ trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ với mỗi x cố định thuộc $\mathbf{R}_+^{*n}$. Áp dụng khẳng định 2) của mệnh đề 1.1.3 ta suy ra tính đúng đắn của bất đẳng thức Cauchy suy rộng (1.3).

Mệnh đề 1.1.5: Nếu $x_j (j = 1, 2, \dots, k)$ là các số dương thoả mãn $\prod_{j=1}^k x_j = 1$ và $\alpha/\beta > 1$ thì:

$$\sum_{j=1}^k x_j^\alpha \geq \sum_{j=1}^k x_j^\beta \quad (1.4)$$

Nhận xét: Bất đẳng thức (1.4) cho câu trả lời khẳng định đối với câu hỏi đặt ra bởi tác giả Lê Thống Nhất trong bài báo “Những suy nghĩ ban đầu về đề thi tuyển sinh đại học môn Toán năm 2001” (Tập chí Toán học và Tuổi trẻ số 8/2001)

Chứng minh. Chứng minh bất đẳng thức (1.4) được chia làm hai bước:

i) Bước 1: Ta sẽ chứng minh rằng nếu m, n là các số nguyên dương và $m > n$ thì:

$$\sum_{j=1}^k x_j^{m/n} \geq \sum_{j=1}^k x_j \quad (1.5)$$

Với mỗi $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho m số dương: n số bằng $x_j^{m/n}$ và $m - n$ số bằng 1 ta có:

$$nx_j^{m/n} + m - n \geq mx_j \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (1.6)$$

Đặt $A = \sum_{j=1}^k x_j^{m/n}$, cộng các vế của k bất đẳng thức trong (1.6) rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho k số dương $x_j (j = 1, 2, \dots, k)$ (chú ý $\prod_{j=1}^k x_j = 1$) ta suy ra:

$$\begin{aligned} nA + k(m - n) &\geq m \sum_{j=1}^k x_j = n \sum_{j=1}^k x_j + (m - n) \sum_{j=1}^k x_j \\ &\geq n \sum_{j=1}^k x_j + k(m - n) \rightarrow A \geq \sum_{j=1}^k x_j \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (1.5) đúng, tức bất đẳng thức (1.4) đúng với α là số hữu tỷ $\alpha = \frac{m}{n}$, m, n là các số nguyên dương, $m > n$ và $\beta = 1$

ii) Bước 2: Giả sử $\gamma > 1$ là số vô tỷ, chọn dãy số hữu tỷ (r_n) sao cho $r_n > 1$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \gamma$. Bởi vì (1.5) đúng khi $\alpha = \frac{m}{n}$ là số hữu tỷ > 1 ta có:

$$\sum_{j=1}^k x_j^{r_n} \geq \sum_{j=1}^k x_j \quad (\text{với mọi } n)$$

Áp dụng mệnh đề 1.1.3 với $p = \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^{*k}$, $F(p, x) = F(\gamma, x) = \sum_{i=1}^k x_i^\gamma$, $G(p, x) = G(\gamma, x) = \sum_{j=1}^k x_j$ (G không phụ thuộc vào γ) do F, G đều liên tục theo γ ta có:

$$\sum_{j=1}^k x_j^\gamma \geq \sum_{j=1}^k x_j \quad (1.7)$$

Kết hợp các kết quả của bước 1 và bước 2 ta suy ra bất đẳng thức (1.7) đúng với mọi số thực $\gamma > 1$. Thay trong (1.7) x_j bởi x_j^β và γ bởi $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ ta thu được (1.4):

$$\sum_{j=1}^k x_j^\alpha \geq \sum_{j=1}^k x_j^\beta$$

1.2 Bất đẳng thức Holder và các hệ quả

Mệnh đề 1.2.1: Giả sử k, k' là các số dương thoả mãn $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$. Khi đó với mọi x, y dương ta có bất đẳng thức:

$$xy \leq \frac{x^k}{k} + \frac{y^{k'}}{k'} \quad (1.8)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^k = y^{k'}$

Chứng minh. Cố định y và xét hàm $f(x) = xy - \frac{x^k}{k} - \frac{y^{k'}}{k'}$. Đạo hàm theo biến x ta có :

$$f'(x) = y - x^{k-1}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^k = y^{k'}$$

Xét dấu đạo hàm $f'(x)$ trên miền $x > 0$ ta có $f'(x) > 0$ khi $x < y^{k'/k} = y^{k'-1}$ và $f'(x) < 0$ khi $x > y^{k'-1}$. Vậy hàm $f(x)$ đạt cực đại chặt và toàn cục trên miền $x > 0$ tại $x = y^{k'-1}$. Ta có $f(y^{k'-1}) = 0$. Vậy $f(x) \leq 0$ với mọi $x > 0$, dấu đẳng

thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x = y^{k'-1}$ hay $x^k = y^{k'}$. Khẳng định này tương đương với khẳng định của mệnh đề 1.2.1 và (1.8) được chứng minh.

Nhận xét: i) Bất đẳng thức (1.8) vẫn đúng nếu một trong các số x, y hoặc cả hai đều bằng 0. Nếu $x = 0, y > 0$ hoặc $x > 0, y = 0$ thì trong (1.8) có dấu bất đẳng thức thực sự.

ii) Bất đẳng thức (1.8) có thể suy ra từ bất đẳng thức Cauchy suy rộng (1.3). Thực vậy, đặt trong (1.3) $n = 2, x_1 = x^k, x_2 = y^{k'}$. Vì $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$ áp dụng (1.3) với $p_1 = \frac{1}{k}, p_2 = \frac{1}{k'}$ ta có:

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \leq p_1 x_1 + p_2 x_2 \leftrightarrow xy \leq \frac{x^k}{k} + \frac{y^{k'}}{k'}$$

Mệnh đề 1.2.2 (bất đẳng thức Holder): Giả sử $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$ là hai véc tơ của $\mathbf{R}^n$, k và k' là hai số dương thoả mãn $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$. Khi đó ta có:

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k \right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^{k'} \right)^{1/k'} \quad (1.9)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các véc tơ $(|a_1|^k, \dots, |a_n|^k), (|b_1|^{k'}, \dots, |b_n|^{k'})$ phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Rõ ràng nếu một trong hai véc tơ a hoặc b là véc tơ không thì (1.9) hiển nhiên đúng. Do đó ta chỉ cần chứng minh (1.9) với giả thiết là vế phải của (1.9) dương. Không giảm tổng quát ta có thể xem trong (1.9) tất cả các a_i, b_i đều không âm đồng thời ít nhất một a_i và một b_j nào đó dương. Thay lần lượt trong (1.8) x và y bởi :

$$x_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{1/k}}, \quad y_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^{k'} \right)^{1/k'}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

ta được :

$$\begin{aligned} x_i y_i &\leq \frac{x_i^k}{k} + \frac{y_i^{k'}}{k'} \\ \leftrightarrow \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n b_i^{k'} \right)^{1/k'}} &\leq \frac{a_i^k}{k \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)} + \frac{b_i^{k'}}{k' \left(\sum_{i=1}^n b_i^{k'} \right)} \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Lấy tổng theo i các bất đẳng thức (1.10) ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i &\leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{k} + \frac{\sum_{i=1}^n y_i^{k'}}{k'} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n b_i^{k'} \right)^{1/k'} \quad (1.11) \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức trong (1.11) xảy ra khi và chỉ khi có dấu đẳng thức ở tất cả các bất đẳng thức (1.10), tức là hoặc $a_i = b_i = 0$ hoặc $\frac{a_i^k}{\sum_{i=1}^n a_i^k} = \frac{b_i^{k'}}{\sum_{i=1}^n b_i^{k'}} \Leftrightarrow a_i^k = \lambda b_i^{k'}$

với $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^k}{\sum_{i=1}^n b_i^{k'}}$ $\Leftrightarrow$ các véc tơ $(a_1^k, \dots, a_n^k), (b_1^{k'}, \dots, b_n^{k'})$, phụ thuộc tuyến tính.

Trường hợp riêng của bất đẳng thức Holder là bất đẳng thức Cauchy- Bunhiacovski.

Mệnh đề 1.2.3 (bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski): Giả sử

$a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$ là hai véc tơ của $\mathbf{R}^n$. Khi đó ta có:

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)} \quad (1.12)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các véc tơ $(|a_1|, \dots, |a_n|), (|b_1|, \dots, |b_n|)$ phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Holder với $k = k' = 2$ ta suy ra bất đẳng thức (1.12). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các véc tơ $(|a_1|^2, \dots, |a_n|^2), (|b_1|^2, \dots, |b_n|^2)$ phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow$ các véc tơ $(|a_1|, \dots, |a_n|), (|b_1|, \dots, |b_n|)$ phụ thuộc tuyến tính.

Mệnh đề 1.2.4 (bất đẳng thức Mincowski): Với số $k \geq 1$ và $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$ là hai véc tơ của $\mathbf{R}^n$ ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^k \right)^{1/k} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k \right)^{1/k} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^k \right)^{1/k} \quad (1.13)$$

Chứng minh. Rõ ràng (1.13) đúng nếu vế trái của nó bằng 0. Cũng hiển nhiên là (1.13) đúng với $k = 1$ do bất đẳng thức $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ đúng với mọi số thực α, β . Vậy ta chỉ cần chứng minh (1.13) đúng khi vế trái của nó dương và $k > 1$. Gọi k' là số thoả mãn $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức (1.9) ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^k &= \sum_{i=1}^n |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{k-1} \leq \sum_{i=1}^n |a_i| |a_i + b_i|^{k-1} + \sum_{i=1}^n |b_i| |a_i + b_i|^{k-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k \right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{k'(k-1)} \right)^{1/k'} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^k \right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^{k'(k-1)} \right)^{1/k'} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k \right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^k \right)^{1/k'} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^k \right)^{1/k} \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^k \right)^{1/k'} \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Dùng giả thiết vế trái của (1.13) dương, từ (1.14) ta suy ra:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^k \right)^{1 - \frac{1}{k'}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k \right)^{1/k} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^k \right)^{1/k} \\
\leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^k \right)^{\frac{1}{k}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^k \right)^{1/k} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^k \right)^{1/k}
\end{aligned}$$

Vậy (1.13) được chứng minh.

Chương 2

Cực trị của một số hàm nhiều biến dạng đặc biệt

Chương này sử dụng các bất đẳng thức đã chứng minh trong chương 1 để đưa ra các kết luận về giá trị bé nhất hoặc lớn nhất của một số hàm nhiều biến có dạng đặc biệt.

2.1 Giá trị bé nhất của các phân thức k- chính quy

Định nghĩa 2.1.1. Cho k là một số thực. Hàm của n biến $x_1, \dots, x_n$ dạng:

$$f = \sum_{i=1}^m c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} \quad (2.1)$$

trong đó c_i là các số dương, α_{ji} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) là các số thực tùy ý, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n}$ gọi là một phân thức k- chính quy nếu với mọi $j = 1, \dots, n$ ta đều có:

$$\sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ji} = k \quad (2.2)$$

Nhận xét : Khi $k = 0$, tác giả Phan Huy Khải (xem [P.H.Khải 1]) gọi một hàm n biến dạng (2.1) là một phân thức chính quy.

Định lý 2.1.1: Giả sử $f = \sum_{i=1}^m c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}}$ là một phân thức k- chính quy. Đặt:

$$t = x_1 x_2 \dots x_n$$

khi đó:

1. Với $k = 0$ giá trị bé nhất của f trên $\mathbf{R}_+^{*n}$ là $S = \sum_{i=1}^m c_i$ (xem [P.H.Khải 1]).
2. Với $k > 0$ giá trị bé nhất của f trên miền $\{t \geq 1\}$ là $S = \sum_{i=1}^m c_i$
3. Với $k < 0$ giá trị bé nhất của f trên miền $\{0 < t \leq 1\}$ là $S = \sum_{i=1}^m c_i$
4. Với k tùy ý, giá trị bé nhất của f trên miền $t = 1$ là $S = \sum_{i=1}^m c_i$

Chứng minh.

1) Giả sử $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n}$ Đặt:

$$p_i = \frac{c_i}{S}, \quad y_i = x_1^{\alpha_{1i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} \quad (i = 1, \dots, m)$$

ta có $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ là một hệ trọng lượng chuẩn và $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbf{R}_+^{*m}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng (1.3) cho hệ trọng lượng chuẩn p và véc tơ $y \in \mathbf{R}_+^{*m}$, dùng điều kiện (2.2) với $k = 0$ ta được:

$$\sum_{i=1}^m p_i y_i \geq \prod_{i=1}^m y_i^{p_i} = 1 \leftrightarrow f = \sum_{i=1}^m c_i x_1^{\alpha_{1i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} \geq S = \sum_{i=1}^m c_i \quad (\text{trên miền } x \in \mathbf{R}_+^{*n}).$$

Mặt khác $f(1, 1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^m c_i = S$. Vậy:

$$\text{Min}\{f : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n}\} = S.$$

2) Giả sử $k > 0$, đặt $g = f + x_1^{-k} \dots x_n^{-k} = f + t^{-k}$. Khi đó g là một phân thức chính quy của n biến $x_1, \dots, x_n$. Thực vậy, đặt $c_{m+1} = 1$, $\alpha_{j(m+1)} = -k$ ($j = 1, \dots, n$) điều kiện (2.2) đối với g trở thành:

$$\sum_{i=1}^{m+1} c_i \alpha_{ji} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Theo chứng minh khẳng định 1) ta có $g(x_1, \dots, x_n) \geq S' = \sum_{i=1}^{m+1} c_i = \sum_{i=1}^m c_i + 1$.

Do đó trên miền $\{t \geq 1\}$ ta có $f(x_1, \dots, x_n) \geq S' - t^{-k} \geq S' - 1 = S = \sum_{i=1}^m c_i$ (chú ý rằng trên miền $t > 0$ hàm t^{-k} nghịch biến). Với $x_1 = \dots = x_n = 1$ ta có $t = 1$ và $f(1, \dots, 1) = S$. Vậy suy ra :

$$\text{Min}\{f : t \geq 1\} = S$$

3) Giả sử $k < 0$. Lý luận tương tự như trong chứng minh phần 2) ta có:

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq S' - t^{-k} \geq S' - 1 = S = \sum_{i=1}^m c_i$$

(chú ý rằng trên miền $\{0 < t \leq 1\}$ hàm t^{-k} đồng biến). Với $x_1 = \dots = x_n = 1$ ta có $t = 1$ và $f(1, \dots, 1) = S$. Vậy suy ra:

$$\min \{f : 0 < t \leq 1\} = S$$

4) Bây giờ giả sử k là số thực tùy ý và $t = 1$. Lý luận hoàn toàn tương tự như trong chứng minh phần 2) và phần 3) ta có :

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq S' - t^{-k} = S' - 1 = S = \sum_{i=1}^m c_i$$

Lại do với $x_1 = \dots = x_n = 1$ ta có $t = 1$ và $f(1, \dots, 1) = S$. Vậy suy ra:

$$\min \{f : t = 1\} = S$$

Định lý 2.1.1 được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét: i) Khi $k \neq 0$ một phân thức k -chính quy có thể không có giá trị bé nhất và lớn nhất trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ như các ví dụ sau đây chứng tỏ:

a) Hàm $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ là phân thức (-1) -chính quy của 2 biến x, y . Ta có $f(x, x) = \frac{2}{x}$ nên dễ dàng suy ra $\sup \{f : (x, y) \in \mathbf{R}_+^{*2}\} = \infty$, $\inf \{f : (x, y) \in \mathbf{R}_+^{*2}\} = 0$. Nhưng $f(x, y) > 0$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}_+^{*2}$

b) Hàm $g(x, y, z) = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ là phân thức 1 -chính quy của 3 biến x, y, z . Ta có $g(x, x, x) = 3x$ nên cũng dễ dàng suy ra:

$$\sup \{g : (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^{*3}\} = +\infty, \inf \{g : (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^{*3}\} = 0$$

Nhưng $g(x, y, z) > 0$ với mọi $(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^{*3}$

ii) Trên miền $t = 1$, với mọi số thực k luôn tồn tại các phân thức k -chính quy không có giá trị lớn nhất trên miền này. Chẳng hạn, nếu $k = 0$, hàm:

$$h(x, y) = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$$

là phân thức chính quy của 2 biến x, y không có giá trị lớn nhất trên miền $t=xy=1$. Bởi vì trên miền này tập giá trị của h trùng với tập giá trị của hàm một biến:

$$h(x, x) = 2(x^2 + \frac{1}{x^2}) \quad (x > 0)$$

Rõ ràng $\sup\{h(x, x) : x > 0\} = +\infty$.

Nếu $k \neq 0$, hàm:

$$p(x, y) = x^k + y^k$$

là phân thức k - chính quy thoả mãn $\sup\{p(x, y) : t = xy = 1\} = +\infty$

iii) Trên miền $\{t = 1\}$, một phân thức k - chính quy của n biến có thể biến đổi thành một phân thức chính quy của $n - 1$ biến trên $\mathbf{R}_+^{*(n-1)}$. Vì vậy kết luận của khẳng định 4) trong định lý 2.1.1 cũng có thể suy ra từ khẳng định 1) của định lý và nhận xét này.

2.2 Một số ví dụ áp dụng định lý 2.1.1

Áp dụng định lý 2.1.1 có thể tìm giá trị bé nhất của một số các hàm nhiều biến trên một tập con của miền mà các biến đó chỉ nhận giá trị dương. Trước hết ta chỉ ra một vài ví dụ áp dụng trực tiếp các khẳng định của định lý 2.1.1, sau đó các ví dụ phức tạp hơn, xuất hiện trong các tài liệu khác về các bài toán cực trị hoặc bất đẳng thức sẽ được chỉ ra.

Ví dụ 1: Tìm giá trị bé nhất của hàm số sau trên miền mà các biến chỉ nhận giá trị dương:

$$f(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ là các hằng số dương})$$

Giải. Hàm f là phân thức chính quy của 3 biến x, y, z bởi vì:

$$1.\alpha + \alpha(-1) = 1.\beta + \beta(-1) = 1.\gamma + \gamma(-1) = 0$$

Theo khẳng định 1) của định lý 2.1.1 ta có $\min \{f : (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^{*3}\} = 1 + \alpha + \beta + \gamma$

Ví dụ 2: Tìm giá trị bé nhất của hàm g dưới đây trên miền các biến x, y, z nhận giá trị dương và thoả mãn $xyz \geq 1$:

$$g(x, y, z) = \frac{x^{2\alpha+2} \cdot y^{2\beta+2}}{z^{2\alpha-2}} + \frac{2}{y^\beta} + \frac{\alpha z^2}{x} + \frac{1}{x^\alpha}$$

(α là hằng số dương, β là hằng số thực tùy ý).

Giải. Hàm g là phân thức 2- chính quy, bởi vì :

$$1.(2\alpha + 2) + \alpha.(-1) + 1.(-\alpha) = 2$$

$$1.(2\beta + 2) + 2.(-\beta) = 2$$

$$1.(-2\alpha + 2) + \alpha.2 = 2$$

Theo khẳng định 2) của định lý 2.1.1 giá trị bé nhất của hàm g trên miền được chỉ ra là:

$$1+2+\alpha +1 = 4+ \alpha$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị bé nhất của hàm h cho dưới đây trên miền $D = \{x > 0, y > 0, z > 0; x + y + z \leq 3\}$

$$h(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{x^3 + y^3 + z^3 - xyz}{2}$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với (x, y, z) thuộc miền D ta có:

$$xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^3 \leq 1 \quad (2.3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

$$\text{Do đó: } h(x, y, z) \geq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{3xyz - xyz}{2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + xyz = N(x, y, z)$$

Hàm $N(x, y, z)$ là phân thức (-1) - chính quy. Theo khẳng định 3) của định lý 2.1.1, trên miền $G = \{x > 0, y > 0, z > 0; xyz \leq 1\}$ ta có $N(x, y, z) \geq 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. Do đó ở trên miền G ta cũng có $h(x, y, z) \geq 4$. Bất đẳng thức (2.3) chứng tỏ miền D nằm trong miền G . Vậy trên D ta có:

$$h(x, y, z) \geq 4$$

Nhưng điểm $(1,1,1)$ thuộc miền D và $h(1,1,1) = 4$ do đó ta có:

$$\min\{h(x, y, z) : (x, y, z) \in D\} = 4$$

Ví dụ 4: Tìm giá trị bé nhất của hàm k cho dưới đây trên miền

$$E = \{x > 0, y > 0, z > 0; xyz = 1\}:$$

$$k(x, y, z) = x^3 + \frac{5}{x} + \frac{2}{y} + \frac{4}{\sqrt{z}}$$

Giải. Dễ thấy hàm $k(x, y, z)$ là hàm $(-2)-$ chính quy, do đó theo khẳng định 4) của định lý 2.1.1 ta có ngay $\min\{k(x, y, z) : (x, y, z) \in E\} = 1 + 5 + 2 + 4 = 12$.

Bạn đọc không khó khăn có thể tự tạo ra các ví dụ với các hàm phức tạp hơn. Bây giờ ta sẽ chứng minh một số bất đẳng thức nhờ sử dụng định lý 2.1.1.

Ví dụ 5: Cho m, n là các số nguyên dương và $a \geq 0, b \geq 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$m \sqrt[m]{a} + n \sqrt[n]{b} \geq (m+n) \sqrt[m+n]{ab} \quad (2.4)$$

(bài toán 1.9 [Tr. Phương]).

Giải. Bất đẳng thức (2.4) rõ ràng đúng nếu $ab = 0$, do đó ta chỉ cần chứng minh (2.4) khi $a > 0, b > 0$. Xét hàm:

$$f(a, b) = m \cdot a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n}} - \frac{1}{m+n} \cdot \frac{-1}{b^{\frac{1}{m+n}}} + n \cdot b^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n}} - \frac{1}{m+n} \cdot \frac{-1}{a^{\frac{1}{m+n}}}$$

$f(a, b)$ là phân thức chính quy đối với hai biến a, b vì điều kiện (2.2) đối với các biến a, b tương ứng là:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} \right) + n \left(\frac{-1}{m+n} \right) &= 0 \\ m \left(\frac{-1}{m+n} \right) + n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Theo khẳng định 1) của định lý 2.1.1 ta suy ra :

$$f(a, b) \geq m+n \quad (2.5)$$

Nhưng (2.5) tương đương với (2.4) do đó (2.4) được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

(bài toán 5.1 [Tr.Phương]).

Giải. Xét hàm số: $f(x, y, z) = bx + cy + az + \frac{b}{x} + \frac{c}{y} + \frac{a}{z}$

Dễ thấy f là phân thức chính quy của 3 biến x,y,z nên theo khẳng định 1) của định lý 2.1.1 trên miền x, y, z dương ta có:

$$f(x, y, z) \geq b + c + a + b + c + a = 2(a + b + c)$$

Thay $x = \frac{c}{a}, y = \frac{a}{b}, z = \frac{b}{c}$ trong biểu thức của f ta được:

$$f\left(\frac{c}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b}{c}\right) = \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} + \frac{ba}{c} + \frac{cb}{a} + \frac{ac}{b} = 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq 2(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{mb + nc} + \frac{b}{mc + na} + \frac{c}{ma + nb} \geq \frac{3}{m + n} \quad (2.6)$$

với mọi a, b, c, m, n dương (bài toán 5.8 [Tr.Phương]).

Giải. Đặt $x = mb + nc, y = mc + na, z = ma + nb$, ta có x, y, z dương và:

$$a = \frac{m^2z + n^2y - mnx}{m^3 + n^3}; b = \frac{n^2z + m^2x - mny}{m^3 + n^3}; c = \frac{m^2y + n^2x - mnz}{m^3 + n^3}$$

Thay biểu diễn của a, b, c qua x, y, z vào vế trái của (2.6) ta được:

$$\frac{1}{m^3 + n^3} \left(\frac{m^2z}{x} + \frac{n^2y}{x} + \frac{n^2z}{y} + \frac{m^2x}{y} + \frac{m^2y}{z} + \frac{n^2x}{z} \right) - \frac{3mn}{m^3 + n^3}$$

$$\text{Đặt: } f(x, y, z) = \frac{1}{m^3 + n^3} \left(\frac{m^2z}{x} + \frac{n^2y}{x} + \frac{n^2z}{y} + \frac{m^2x}{y} + \frac{m^2y}{z} + \frac{n^2x}{z} \right)$$

Dễ thấy f(x,y,z) là phân thức chính quy, do đó theo khẳng định 1) của định lý 2.1.1 ta có:

$$f(x, y, z) \geq \frac{3(m^2 + n^2)}{m^3 + n^3}$$

Vậy vế trái của (2.6) $\geq \frac{3(m^2 + n^2)}{m^3 + n^3} - \frac{3mn}{m^3 + n^3} = \frac{3}{m + n}$ (điều phải chứng minh)

Ví dụ 8: Cho n số dương $x_1, \dots, x_n$ thoả mãn : $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq S$. Chứng minh rằng:

$$\prod_{i=1}^n (1 + \frac{1}{x_i}) \geq (1 + \frac{n}{S})^n \quad (2.7)$$

((2.7) là tổng quát hoá của bổ đề trong lời giải bài toán 295 trong [P.H.Khải 2]).

Giải. Để thuận tiện cho việc trình bày ta đưa vào ký hiệu sau:

Nếu $a_1, \dots, a_n$ là n biến thì ta ký hiệu $\sum_{n,k}(a)$ là tổng $\sum_{S_k} \prod_{j \in S_k} a_j$, trong đó S_k là một tập con gồm k phần tử ($k \geq 1$) của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$. Tổng $\sum_{S_k}$ được lấy theo tất cả các tập con S_k gồm k phần tử của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ (có C_n^k các tập S_k như vậy). Ví dụ, nếu $n = 3$ thì:

$$\sum_{3,1}(a) = a_1 + a_2 + a_3, \sum_{3,2}(a) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1, \sum_{3,3}(a) = a_1a_2a_3$$

Với dãy biến dương $y_1, \dots, y_n$ ký hiệu $\frac{1}{y}$ tương ứng với dãy $\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_n}$ Phân thức:

$$f_k = \sum_{n,k} (\frac{1}{y})$$

là phân thức $(-C_{n-1}^{k-1})$ - chính quy. Do đó, theo khẳng định 3) của định lý 2.1.1 nếu xét trên miền $t = y_1y_2\dots y_n \leq 1$ ta có $f_k \geq C_n^k$.

Giả sử dãy số dương $x_1, \dots, x_n$ thoả mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq S$ đặt $y_i = \frac{nx_i}{S}$ ta có $y_i > 0$ và $y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq n$. Từ bất đẳng thức Cauchy suy ra $t = y_1y_2\dots y_n \leq 1$.

Vậy:

$$\sum_{n,k} (\frac{1}{x}) = (\frac{n}{S})^k \sum_{n,k} (\frac{1}{y}) \geq C_n^k (\frac{n}{S})^k$$

Suy ra:

$$\prod_{i=1}^n (1 + \frac{1}{x_i}) = 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{n,k} (\frac{1}{x}) \geq 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k (\frac{n}{S})^k = (1 + \frac{n}{S})^n$$

Như vậy (2.7) được chứng minh. Dấu đẳng thức trong (2.7) xảy ra khi và chỉ khi tất cả các x_i đều bằng nhau và bằng $\frac{S}{n}$.

Nhận xét (bài toán 295 trong [P.H.Khải 2]): Khi A,B,C là các góc trong của một tam giác và $x_1 = \sin A$, $x_2 = \sin B$, $x_3 = \sin C$ ta có $x_i > 0$ và:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} = S$$

Do đó áp dụng (2.7) với $n = 3$ ta có:

$$(1 + \frac{1}{\sin A})(1 + \frac{1}{\sin B})(1 + \frac{1}{\sin C}) \geq (1 + \frac{2}{\sqrt{3}})^3$$

2.3 Tích của phân thức k- chính quy với phân thức l- chính quy

Định lý 2.3.1: Giả sử:

$$f = \sum_{i=1}^m c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} \text{ là phân thức k- chính quy.}$$

$$g = \sum_{p=1}^s d_p x_1^{\beta_{1p}} x_2^{\beta_{2p}} \dots x_n^{\beta_{np}} \text{ là phân thức l- chính quy.}$$

Khi đó hàm $h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n)$ là phân thức r- chính quy, trong đó r tính theo công thức:

$$r = k \sum_{p=1}^s d_p + l \sum_{i=1}^m c_i$$

Nói riêng, tích của hai phân thức chính quy lại là một phân thức chính quy.

Chứng minh. Thực hiện phép nhân phân thức f với phân thức g và lập tổng dạng (2.2) đối với hàm $h = f.g$ cho biến x_j tùy ý ta được tổng sau:

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^s c_i d_p (\alpha_{ji} + \beta_{jp}) = \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^s c_i d_p \alpha_{ji} + \sum_{i=1}^m \sum_{p=1}^s c_i d_p \beta_{jp} \\ &= \sum_{p=1}^s d_p \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ji} + \sum_{i=1}^m c_i \sum_{p=1}^s d_p \beta_{jp} = k \sum_{p=1}^s d_p + l \sum_{i=1}^m c_i \end{aligned}$$

Như vậy r không phụ thuộc j, do đó h là phân thức r- chính quy.

Hệ quả 2.3.2: Giả thiết như trong định lý 2.3.1. Khi đó:

1) Nếu $r = k \sum_{p=1}^s d_p + l \sum_{i=1}^m c_i = 0$ thì giá trị bé nhất của hàm $h = f.g$ trên $\mathbf{R}_+^{*n}$ là $(\sum_{i=1}^m c_i)(\sum_{p=1}^s d_p)$.

2) Nếu $r = k \sum_{p=1}^s d_p + l \sum_{i=1}^m c_i > 0$ thì giá trị bé nhất của hàm $h = f.g$ trên miền $\{t = x_1 x_2 \dots x_n \geq 1\}$ là $(\sum_{i=1}^m c_i)(\sum_{p=1}^s d_p)$

3) Nếu $r = k \sum_{p=1}^s d_p + l \sum_{i=1}^m c_i < 0$ thì giá trị bé nhất của hàm $h = f.g$ trên miền $\{t = x_1 x_2 \dots x_n \leq 1\}$ là $(\sum_{i=1}^m c_i)(\sum_{p=1}^s d_p)$.

Ví dụ: Tìm giá trị bé nhất trên miền $D = \{x > 0, y > 0, z > 0 : x + y + z \leq 3\}$ của hàm số sau:

$$f(x, y, z) = (x^{2013} y^{2014} z^{2015} + \frac{2012}{x} + \frac{2013}{y} + \frac{2014}{z}) (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{xy}{z})$$

Giải: Đặt:

$$g(x, y, z) = x^{2013} y^{2014} z^{2015} + \frac{2012}{x} + \frac{2013}{y} + \frac{2014}{z}; \quad h(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{xy}{z}$$

Dễ thấy g là phân thức 1- chính quy còn h là phân thức (-1)- chính quy, do đó f là phân thức r - chính quy với $r = (1+2012+2013+2014)(-1) + (1+1+1).1 = -6037 < 0$. Từ điều kiện $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x + y + z \leq 3$, dùng bất đẳng thức Cauchy ta suy ra $0 < t = xyz \leq 1$. Do đó D được chứa trong miền $E = \{x > 0, y > 0, z > 0; t = xyz \leq 1\}$. Theo hệ quả 2.3.2 ta có $f(x,y,z)$ có giá trị bé nhất trên miền E là $m = (1+2012+2013+2014)(1+1+1) = 18120$. Do đó trên miền D ta phải có: $f(x,y,z) \geq 18120$

Nhưng điểm $(1,1,1)$ thuộc D và $f(1,1,1) = 18120$ do đó:

$$\min\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in D\} = 18120.$$

2.4 Cực trị của tỉ số hai phân thức đồng dạng

Định nghĩa 2.4.1: Xét hàm n biến cho bởi công thức (2.1) :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}}$$

Các giả thiết về hàm f giống như trong định nghĩa 2.1.1, ngoại trừ điều kiện k - chính quy (2.2). Khi đó ta nói rằng các hàm:

$$u = \frac{f(x_1, \dots, x_n)^k}{f(x_1^k, \dots, x_n^k)} \text{ và } v = \frac{f(x_1^k, \dots, x_n^k)}{f(x_1, \dots, x_n)^k}$$

trong đó k là số thực tùy ý, $k > 1$, là các hàm có dạng tỷ số của hai phân thức đồng dạng.

Từ bất đẳng thức Holder ta suy ra bất đẳng thức sau đây:

Mệnh đề 2.4.2: Giả sử $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ là các véc tơ thuộc $\mathbf{R}_+^{*n}$, $k > 1$, khi đó có bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^n q_i z_i \leq \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^{1-\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n q_i z_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \quad (2.8)$$

(xem [Hardy, Littlewood, Polya], trang 85).

Nhận xét : Hiển nhiên (2.8) vẫn còn đúng nếu tổng hữu hạn trong (2.8) được thay bằng chuỗi vô hạn và một số các q_i hoặc z_i bằng 0, trong đó ta xem (2.8) là đúng nếu vế phải (2.8) bằng $+\infty$. Ta sẽ chỉ sử dụng bất đẳng thức (2.8) dưới dạng chuỗi kèm theo giả thiết là không phải tất cả các q_i và z_i đều bằng 0.

Chứng minh. Đặt $a_i = q_i^{1/k'}$, $b_i = q_i^{1/k} \cdot z_i$ ($i = 1, \dots, n$), trong đó $\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Holder cho hai dãy số (a_i) và (b_i) ta có ngay (2.8).

Định lý 2.4.3 ([H.V.Hùng 1]): Đặt:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}}$$

trong đó: $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in \mathbf{R}_+^{*m}$ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n}$ $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ni}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) là các số thực tùy ý, $k > 1$. Khi đó ta có:

$$\max\left\{\frac{f(x_1, \dots, x_n)^k}{f(x_1^k, \dots, x_n^k)} : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n}\right\} = \left(\sum_{i=1}^m c_i\right)^{k-1}$$

Chứng minh. Đặt $q_i = c_i, z_i = x_1^{\alpha_{1i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}}, (i = 1, 2, \dots, m)$. Áp dụng bất đẳng thức (2.8) ta được:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^m c_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} \leq \left(\sum_{i=1}^m c_i\right)^{1-\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^m c_i x_1^{k\alpha_{1i}} x_2^{k\alpha_{2i}} \dots x_n^{k\alpha_{ni}}\right)^{\frac{1}{k}} \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1^k, \dots, x_n^k)^{1/k}} \leq \left(\sum_{i=1}^m c_i\right)^{1-\frac{1}{k}} \Leftrightarrow \frac{f(x_1, \dots, x_n)^k}{f(x_1^k, \dots, x_n^k)} \leq \left(\sum_{i=1}^m c_i\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{f(1, 1, \dots, 1)^k}{f(1^k, 1^k, \dots, 1^k)} = \frac{f(1, 1, \dots, 1)^k}{f(1, 1, \dots, 1)} = \left(\sum_{i=1}^m c_i\right)^{k-1}$$

Vậy:

$$\max\left\{\frac{f(x_1, \dots, x_n)^k}{f(x_1^k, \dots, x_n^k)} : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n}\right\} = \left(\sum_{i=1}^m c_i\right)^{k-1}$$

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất của các hàm sau trên miền mà tất cả các biến đều dương:

- 1) $y = \frac{(x+1)^{2013}}{x^{2013}+1}$ (x là biến)
- 2) $z = \frac{(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^4)^2}{ax^6 + bx^4y^2 + cx^2y^4 + dy^8}$ ($a, b, c, d \in (0; +\infty)$) (x, y là biến)
- 3) $u = \frac{(x^3\sqrt{z} + 2y^2z^3 + 5xz^6)^{10}}{x^{30}z^5 + 1024y^{20}z^{30} + 5x^{10}z^{60}}$ (x, y, z là các biến).

Giải. Xem các đơn thức không chứa biến nào đó như các đơn thức chứa biến đó với số mũ 0, ta thấy tất cả các giả thiết của định lý 2.4.3 đều được thoả mãn đối với ví dụ 1 và 2 (các giá trị tương ứng của k là: k=2013 trong ví dụ 1; k=2 trong ví dụ 2). Đối với ví dụ 3, đặt $t = 2y^2$ ta viết lại hàm u như sau:

$$u = \frac{(x^3\sqrt{z} + tz^3 + 5xz^6)^{10}}{x^{30}z^5 + t^{10}z^{30} + 5x^{10}z^{60}}$$

giá trị k tương ứng là 10. Vậy theo định lý 2.4.3, giá trị lớn nhất của các hàm số tương ứng trên miền tất cả các biến đều dương là: $\max\{y : x > 0\} = 2^{2012}$, $\max\{z : x > 0, y > 0\} = a+b+c+d$, $\max\{u : x > 0, y > 0, z > 0\} = 7^9$

Nhận xét : Bằng cách đổi biến bạn đọc có thể tìm giá trị lớn nhất của các hàm phức tạp hơn các hàm đưa ra trong các ví dụ trên.

Từ định lý 2.4.3 ta suy ra hệ quả:

Định lý 2.4.4 [H.V.Hùng 1]: Với các giả thiết như trong định lý 2.4.3 ta có:

$$\min\left\{\frac{f(x_1^k, \dots, x_n^k)}{f(x_1, \dots, x_n)^k} : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n}\right\} = \left(\sum_{i=1}^m c_i\right)^{1-k}$$

Chứng minh. Với các giả thiết như trong định lý 2.4.3, đặt:

$$u = \frac{f(x_1, \dots, x_n)^k}{f(x_1^k, \dots, x_n^k)}, \quad v = \frac{f(x_1^k, \dots, x_n^k)}{f(x_1, \dots, x_n)^k}$$

Khi đó $u > 0$, $v > 0$ trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ và $v = \frac{1}{u}$. Do đó trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ ta có:

$$\min\left\{v = \frac{1}{u}\right\} = \frac{1}{\max u} = \left(\sum_{i=1}^m c_i\right)^{1-k}$$

Ví dụ: 1) Giả sử x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z = 3$. Chứng minh rằng với mọi số $k > 1$ ta có :

$$x^k + y^k + z^k \geq 3$$

2) Tìm giá trị bé nhất của hàm số:

$$u = x + y + z + t$$

trên miền $D = \{x > 0, y > 0, z > 0, t > 0 : xy + xz + xt + yz + yt + zt = 1\}$.

3) Cho n số dương x_i ($i = 1, \dots, n$) có tổng bằng a và $k > 1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^n x_i^k \geq \frac{a^k}{n^{k-1}}$$

Giải. 1) Áp dụng định lý 2.4.4 trên miền D ta có:

$$\frac{x^k + y^k + z^k}{(x + y + z)^k} \geq \frac{1}{3^{k-1}} \leftrightarrow \frac{x^k + y^k + z^k}{3^k} \geq \frac{1}{3^{k-1}} \leftrightarrow x^k + y^k + z^k \geq 3$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

2) Ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = (x + y + z + t)^2 - 2(xy + xz + xt + yz + yt + zt) = u^2 - 2.$$

Theo định lý 2.4.4 (hoặc theo bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski) ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \geq \frac{1}{4} (x + y + z + t)^2 = \frac{u^2}{4} \rightarrow u^2 - 2 \geq \frac{u^2}{4} \leftrightarrow u^2 \geq \frac{8}{3} \leftrightarrow u \geq \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Khi $x = y = z = t = \frac{1}{\sqrt{6}}$ ta có : $xy+xz+xt+yz+yt+zt = 1$ và $u = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Vậy:

$$\min_D u = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

3) Áp dụng định lý 2.4.4 cho hàm $f = \sum_{i=1}^n x_i$ trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ ta có ngay:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^k}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^k} \geq \frac{1}{n^{k-1}} \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^k \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^k}{n^{k-1}} = \frac{a^k}{n^{k-1}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tất cả các x_i bằng nhau và bằng a/n .

Bây giờ giả sử (a_n) ($n \in \mathbf{N}$) là một dãy các số thực không âm nhưng chứa vô hạn số dương sao cho chuỗi dương $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ. Xét chuỗi lũy thừa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.9)$$

Chuỗi (2.9) hội tụ tại $x = 1$ nên theo định lý Abel, miền hội tụ của chuỗi (2.9) chứa khoảng đóng $[0;1]$. Gọi tập các điểm hội tụ dương của chuỗi (2.9) là

$\mathbf{X}^*$, ta có $1 \in \mathbf{X}^*$. Gọi $f(x)$ là tổng của chuỗi (2.9) trên miền $\mathbf{X}^*$. Áp dụng bất đẳng thức (2.8) dưới dạng chuỗi ta có:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^{1-\frac{1}{k}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn} \right)^{\frac{1}{k}} \leftrightarrow \frac{f(x)}{\frac{1}{f(x^k)^{\frac{1}{k}}}} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^{1-\frac{1}{k}} \quad (2.10)$$

Trong đó ta xem vế trái của (2.10) bằng 0 nếu chuỗi $f(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$ phân kỳ (*). Bất đẳng thức (2.10) tương đương với bất đẳng thức:

$$\frac{f(x)^k}{f(x^k)} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^{k-1} \quad (\forall x \in \mathbf{X}^*) \quad (2.11)$$

Không khó khăn có thể chứng minh rằng nếu a_{i0} là hệ số có chỉ số bé nhất trong các hệ số khác 0 của chuỗi (2.9) thì: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)^k}{f(x^k)} = a_{i0}^{k-1}$

Do đó **nếu xem a_{i0}^{k-1} là giá trị của vế trái bất đẳng thức (2.11) khi $x = 0$ (**)** thì (2.11) đúng cả với trường hợp $x = 0$. Mặt khác, để ý rằng:

$$\frac{f(1)^k}{f(1^k)} = f(1)^{k-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^{k-1}$$

kết hợp với (2.11) ta suy ra:

$$\max \left\{ \frac{f(x)^k}{f(x^k)} : x \in \mathbf{X}^* \cup \{0\} \right\} = f(1)^{k-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^{k-1}$$

Như vậy ta thu được định lý:

Định lý 2.4.5: Giả sử chuỗi dương $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ và có tổng dương. Gọi $f(x)$ là tổng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ khi x thuộc tập $\mathbf{X}$ các điểm hội tụ không âm của chuỗi đó. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} \max \left\{ \frac{f(x)^k}{f(x^k)} : x \in \mathbf{X} \right\} &= f(1)^{k-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^{k-1} \\ \min \left\{ \frac{f(x^k)}{f(x)^k} : x \in \mathbf{X} \right\} &= f(1)^{1-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^{1-k} \end{aligned}$$

(ta giữ nguyên các quy ước (*) và (**)).

Ví dụ : 1) Ta có : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($\forall x \in \mathbf{R}$) nên áp dụng định lý 2.4.5 ta có ngay:

$$\max\left\{\frac{e^{2010x}}{e^{x^{2010}}} : x \geq 0\right\} = e^{2009} \quad (k = 2010)$$

Nếu nhận xét thêm rằng $\frac{e^{-2010x}}{e^{x^{2010}}} \leq \frac{e^{2010x}}{e^{x^{2010}}}$ khi $x \geq 0$ kết quả trên còn cho khẳng định mạnh hơn:

$$\max\left\{\frac{e^{2010x}}{e^{x^{2010}}} : x \in \mathbf{R}\right\} = e^{2009} \quad (k = 2010)$$

2) Ta có: $-\ln(1 - \frac{x}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$ ($\forall x \in (-2; 2)$) . Áp dụng định lý 2.4.5 ta có:

$$\max\left\{\frac{\ln^{100}(1 - \frac{x}{2})}{-\ln(1 - \frac{x}{2})} : 0 \leq x < \sqrt[100]{2}\right\} = (\ln 2)^{99} \quad (k = 100).$$

2.5 Cực trị của các hàm nửa cộng tính

Trong mục này, giống như ở đầu chương 1 đôi khi ta viết $f(\mathbf{x})$ thay cho $f(x_1, \dots, x_n)$, trong đó $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ là một véc tơ của $\mathbf{R}^n$. Ta cũng giả thiết rằng hàm $f(\mathbf{x})$ xác định trên tập con D của $\mathbf{R}^n$ có tính chất: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ kéo theo $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in D$.

Định nghĩa 2.5.1: Hàm f được gọi là:

- Dưới cộng tính trên tập xác định D của nó nếu f có tính chất:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

với mọi cặp véc tơ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$.

- Trên cộng tính trên tập xác định D của nó nếu f có tính chất:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

với mọi cặp véc tơ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$.

Các hàm dưới cộng tính và trên cộng tính trên một miền nào đó gọi chung là hàm nửa cộng tính trên miền đó.

Ví dụ: - Hàm $u = \left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{1/k}$ là hàm dưới cộng tính trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ với $k \geq 1$, bởi vì theo bất đẳng thức Mincowski trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^k\right)^{1/k} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{1/k} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^k\right)^{1/k}$$

- Hàm $u = x^2$ là trên cộng tính trên khoảng $(0, +\infty)$, bởi vì với mọi số thực $x, y \in (0, +\infty)$ ta có:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 > x^2 + y^2$$

Mệnh đề dưới đây cho phép ta thu được nhiều hàm nửa cộng tính từ một hàm nửa cộng tính biết trước.

Mệnh đề 2.5.1: 1) Giả sử $f(x)$ là hàm một biến xác định trên khoảng $(0, +\infty)$. Nếu hàm $\frac{f(x)}{x}$ là hàm không tăng thì $f(x)$ là hàm dưới cộng tính trên $(0, +\infty)$. Nếu hàm $\frac{f(x)}{x}$ là hàm không giảm thì $f(x)$ là hàm trên cộng tính trên $(0, +\infty)$.

2) Giả sử $f(u)$ là hàm dưới cộng tính và *không giảm* trên $(0, +\infty)$. Nếu $u=g(\mathbf{x})$ là hàm nhận giá trị dương và dưới cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$ thì hàm hợp $f(g(\mathbf{x}))$ là dưới cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$.

3) Giả sử $f(u)$ là hàm trên cộng tính và *không giảm* trên $(0, +\infty)$. Nếu $u=g(\mathbf{x})$ là hàm nhận giá trị dương và trên cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$ thì hàm hợp $f(g(\mathbf{x}))$ là trên cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$.

Chứng minh. 1) Trước hết ta chứng minh rằng nếu c, d là các số dương thì với các số a, b tùy ý ta có:

$$\min\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \max\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) \quad (2.12)$$

Thật vậy, không giảm tổng quát giả sử $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$. Khi đó có các số $m, n \geq 0$ sao

cho: $\frac{a}{c} = \frac{b-m}{d}$, $\frac{a+n}{c} = \frac{b}{d}$. Suy ra:

$$\begin{aligned}\min\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right) &= \frac{a}{c} = \frac{b-m}{d} = \frac{a+b-m}{c+d} \leq \frac{a+b}{c+d} \\ &\leq \frac{a+n+b}{c+d} = \frac{a+n}{c} = \frac{b}{d} = \max\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right)\end{aligned}$$

Vậy (2.12) được chứng minh.

Bây giờ giả sử $x, y \in (0, +\infty)$. Vì hàm $\frac{f(x)}{x}$ là không tăng trên $(0, +\infty)$ ta có:

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \min\left(\frac{f(x)}{x}, \frac{f(y)}{y}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{x+y} \rightarrow f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Vậy hàm $f(x)$ là dưới cộng tính trên $(0, +\infty)$.

Nếu hàm $\frac{f(x)}{x}$ là không giảm trên $(0, +\infty)$ và $x, y \in (0, +\infty)$ ta có:

$$\frac{f(x+y)}{x+y} \geq \max\left(\frac{f(x)}{x}, \frac{f(y)}{y}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{x+y} \rightarrow f(x+y) \geq f(x) + f(y)$$

Vậy hàm $f(x)$ là trên cộng tính trên $(0, +\infty)$.

2) Giả sử $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ là hai véc tơ tùy ý của $\mathbf{R}_+^{*n}$. Với các giả thiết nêu trong khẳng định 2) của mệnh đề 2.5.1 ta có:

$$f(g(\mathbf{x}+\mathbf{y})) \leq f(g(\mathbf{x})+g(\mathbf{y})) \leq f(g(\mathbf{x})) + f(g(\mathbf{y}))$$

Vậy hàm $f(g(\mathbf{x}))$ là dưới cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$.

3) Giả sử $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ là hai véc tơ tùy ý của $\mathbf{R}_+^{*n}$. Với các giả thiết nêu trong khẳng định 3) của mệnh đề 2.5.1 ta có:

$$f(g(\mathbf{x}+\mathbf{y})) \geq f(g(\mathbf{x})+g(\mathbf{y})) \geq f(g(\mathbf{x})) + f(g(\mathbf{y}))$$

Vậy hàm $f(g(\mathbf{x}))$ là trên cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$.

Ví dụ: - Hàm $f(x) = \ln(1+x)$ là hàm thỏa mãn $\frac{f(x)}{x}$ không tăng trên $(0; +\infty)$, còn bản thân $f(x)$ thực sự tăng trên $(0; +\infty)$ do đó theo khẳng định 2) của mệnh đề 2.5.1 hàm $f(g(\mathbf{x}))$ là hàm dưới cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$ với mọi hàm g dưới cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$. Nói riêng, hàm $u = \ln\left(1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^k\right)^{1/k}\right)$ là dưới cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$.

- Trong $\mathbf{R}^n$ đặt: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ với mọi véc tơ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Với mọi cặp véc tơ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}_+^{*n}$ ta có:

$$\|x + y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

Vậy hàm $g(\mathbf{x}) = \|x\|_1$ là cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$ (do đó $g(\mathbf{x})$ vừa dưới cộng tính, vừa trên cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$). Hàm $f(x) = x^2$ là trên cộng tính và thực sự tăng trên $(0, +\infty)$ nên theo khẳng định 3) của mệnh đề 2.5.1 ta có hàm $\|x\|_1^2$ là trên cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$.

Định nghĩa 2.5.2: Hàm n biến $f(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n$) gọi là thuần nhất dương trên D nếu D và f có các tính chất sau:

- 1) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ kéo theo $t\mathbf{x} \in D$ với mọi $t > 0$.
- 2) $f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$ với mọi $t > 0$ và mọi $\mathbf{x} \in D$.

Ví dụ : - Hàm $u = (\sum_{i=1}^n x_i^k)^{1/k}$ là thuần nhất dương trên miền $\mathbf{R}_+^{*n}$ với mọi $k > 0$. Khi $k > 1$ hàm u là dưới cộng tính (bất đẳng thức Mincovski). Khi $0 < k < 1$ hàm u là trên cộng tính trên $\mathbf{R}_+^{*n}$.

- Hàm $z = \frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{x^n + y^n}$ là thuần nhất dương trên miền $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\} = \mathbf{R}_+^{*2}$ với số thực n tùy ý.

- Nếu $z = \|\mathbf{x}\|$ là một chuẩn tùy ý của véc tơ $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_+^{*n}$ thì z vừa có tính chất dưới cộng tính, vừa có tính chất thuần nhất dương trên $\mathbf{R}^n$, $\|x\|_1$ là hàm cộng tính và thuần nhất dương trên $\mathbf{R}_+^{*n}$.

Định lý 2.5.2: 1) Giả sử $w = f(u, v)$ là hàm dưới cộng tính, thuần nhất dương trên miền $\mathbf{R}_+^{*2}$ và không giảm theo v với mỗi u cố định. Đặt:

$$G = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n} : \sum_{i=1}^n x_i \leq C = \text{const} > 0 \right\} ; z = \sum_{i=1}^n f(x_i, \frac{1}{x_i})$$

Nếu hàm $g(t) = f(t, \frac{1}{t})$ không tăng theo t trên $(0; C)$ thì:

$$\min \{z : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G\} = f(C, \frac{n^2}{C})$$

2) Giả sử $w = f(u, v)$ là hàm trên cộng tính, thuần nhất dương trên miền $\mathbf{R}_+^{*2}$ và không tăng theo v với mỗi u cố định. Đặt:

$$G = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n} : \sum_{i=1}^n x_i \leq C = \text{const} > 0 \right\} ; z = \sum_{i=1}^n f(x_i, \frac{1}{x_i})$$

Nếu hàm $g(t) = f(t, \frac{1}{t})$ không giảm theo t trên $(0; C)$ thì :

$$\max \{z : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G\} = f(C, \frac{n^2}{C})$$

Chứng minh. 1) Nếu $\sum_{i=1}^n x_i < C$, thay $\mathbf{x}_1$ bởi $\mathbf{x}_1^* > \mathbf{x}_1 > 0$ sao cho $\mathbf{x}_1^* + \sum_{i=2}^n x_i = C$. Do giả thiết $g(t)$ không tăng theo $t \in (0; C)$ và hàm f là dưới cộng tính ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i, \frac{1}{x_i}) &\geq f(x_1^*, \frac{1}{x_1^*}) + \sum_{i=2}^n f(x_i, \frac{1}{x_i}) \\ &\geq f(x_1^* + \sum_{i=2}^n x_i, \frac{1}{x_1^*} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{x_i}) = f(C, \frac{1}{x_1^*} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{x_i}) \end{aligned}$$

Vậy với $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tùy ý thuộc G ta có:

$$z = \sum_{i=1}^n f(x_i, \frac{1}{x_i}) \geq \inf \{ f(C, \sum_{i=1}^n \frac{1}{x'_i}) : \sum_{i=1}^n x'_i = C, x'_i > 0 \}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacovski, với $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G$ và $\sum_{i=1}^n x_i = C$ ta có:

$$n^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) = C(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) \rightarrow (\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) \geq \frac{n^2}{C}$$

Bởi vì hàm f không giảm theo biến thứ hai, ta suy ra khi $\sum_{i=1}^n x_i = C$ có bất đẳng thức:

$$f(C, \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) \geq f(C, \frac{n^2}{C})$$

Vậy: $z \geq f(C, \frac{n^2}{C})$ với mọi $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G$.

Khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{C}{n}$, do tính thuần nhất dương của f ta có $z = nf(\frac{C}{n}, \frac{n}{C}) = f(C, \frac{n^2}{C})$.

Vậy $\min\{z : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G\} = f(C, \frac{n^2}{C})$.

2) Nếu $\sum_{i=1}^n x_i < C$, thay $\mathbf{x}_1$ bởi $\mathbf{x}_1^* > \mathbf{x}_1 > 0$ sao cho $\mathbf{x}_1^* + \sum_{i=2}^n x_i = C$. Do giả thiết $g(t)$ không giảm theo $t \in (0; C)$ và hàm f là trên cộng tính ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_i, \frac{1}{x_i}) &\leq f(x_1^*, \frac{1}{x_1^*}) + \sum_{i=2}^n f(x_i, \frac{1}{x_i}) \\ &\leq f(x_1^* + \sum_{i=2}^n x_i, \frac{1}{x_1^* + \sum_{i=2}^n x_i}) = f(C, \frac{1}{x_1^* + \sum_{i=2}^n x_i}) \end{aligned}$$

Vậy với $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tùy ý thuộc G ta có:

$$z = \sum_{i=1}^n f(x_i, \frac{1}{x_i}) \leq \sup\{f(C, \sum_{i=1}^n \frac{1}{x'_i}) : \sum_{i=1}^n x'_i = C, x'_i > 0\}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacovski, với $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G$ và $\sum_{i=1}^n x_i = C$ ta có:

$$n^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) = C(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) \rightarrow (\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) \geq \frac{n^2}{C}$$

Bởi vì hàm f không tăng theo biến thứ hai, ta suy ra khi $\sum_{i=1}^n x_i = C$ có bất đẳng thức:

$$f(C, \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}) \leq f(C, \frac{n^2}{C})$$

Vậy ta có: $z \leq f(C, \frac{n^2}{C})$ với mọi $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G$.

Khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{C}{n}$, do tính thuần nhất dương của f ta có $z = n f(\frac{C}{n}, \frac{n}{C}) = f(C, \frac{n^2}{C})$.

Vậy $\max\{z : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in G\} = f(C, \frac{n^2}{C})$.

Ví dụ: 1) Trên $\mathbf{R}_+^{*2}$ hàm $f(u, v) = (u^k + v^k)^{1/k}$ với $k > 1$ là dưới cộng tính và thuần nhất dương, không giảm theo biến v (suy từ bất đẳng thức Mincovski và biểu thức của f). Giả sử:

$$G = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}_+^{*n} : \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\}$$

Ta có:

$$g(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right) = \left(t^k + \frac{1}{t^k}\right)^{1/k}$$

là hàm thực sự giảm trên $(0;1)$ bởi vì $g'(t) = \left(t^k + \frac{1}{t^k}\right)^{\frac{1-k}{k}} \left(\frac{t^{2k}-1}{t^{k+1}}\right) < 0$ khi $t \in (0;1)$. Như vậy, tất cả các giả thiết về các hàm f, g trong khẳng định 1) của định lý 2.5.2 được thỏa mãn. Theo khẳng định 1) của định lý này ta có:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \left(x_i^k + \frac{1}{x_i^k}\right)^{1/k} : \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i > 0 (i = 1, \dots, n) \right\} = (1 + n^{2k})^{1/k}$$

Khi $k = 2, n = 3$ ta nhận được chứng minh của bài toán số V của đề thi tuyển sinh đại học khối A năm 2003:

Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

2) Cho n số dương $x_1, \dots, x_n$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n x_i \leq C$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$z = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)$$

Giải. Xét hàm $w = u - v$. Khi đó w là thuần nhất dương và cộng tính, do đó có thể coi w là trên cộng tính. Hàm w thực sự giảm theo biến v với mỗi u cố định. Hàm $g(t) = t - \frac{1}{t}$ thực sự tăng trên $(0;C)$ bởi vì $g'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$. Do đó mọi giả thiết trong khẳng định 2) của định lý 2.5.2 được thỏa mãn. Theo khẳng định này ta có:

$$\max \left\{ z = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) : \sum_{i=1}^n x_i \leq C, x_i > 0 \forall i \right\} = C - \frac{n^2}{C}$$

Chương 3

Cực trị của các hàm của hai đa thức đối xứng hai biến

3.1 Các đa thức đối xứng của hai biến

Định nghĩa 3.1.1. Một đa thức đối xứng của hai biến x, y là một hàm dạng $\sum_{i=1}^m c_i x^{m_i} y^{n_i}$, trong đó c_i là các số thực, m_i, n_i là các số nguyên không âm, có tính chất bất biến khi hoán vị các ký hiệu x, y cho nhau.

Ví dụ: $s_1 = x + y$, $s_2 = xy$, $\sigma_n = x^n + y^n$ (n là số nguyên > 1) là các đa thức đối xứng của hai biến x, y .

Ta có khẳng định sau (xem [Kurosh]):

Mệnh đề 3.1.1: Mọi đa thức đối xứng của hai biến x, y đều là đa thức của các đa thức đối xứng s_1, s_2 .

Do mệnh đề 3.1.1, mọi hàm của hai đa thức đối xứng của hai biến x, y đều có thể xem là hàm của hai biến $s_1 = x + y$ và $s_2 = xy$. Vì vậy ta sẽ xét các hàm dạng $f(u, v)$, trong đó $u = x + y$, $v = xy$. Chương này dành cho bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của các hàm dạng $f(x+y, xy)$ khi các hàm này được xác định trên các tập dạng đặc biệt của $\mathbf{R}^2$. Về các kết quả liên quan xem bài báo [H.V.Hùng 2] .

3.2 Cực trị của các hàm của hai đa thức đối xứng của hai biến

Trong mục này ký hiệu $\langle a, b \rangle$ chỉ một trong các khoảng $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; b]$, $a \geq 0$ và b có thể là $+\infty$.

Định lý 3.2.1: Giả sử $f(u, v)$ là hàm của hai biến u, v xác định trên miền $D = \left\{ u \in \langle a, b \rangle, v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$ và $g(x, y) = f(x+y, xy)$ xác định trên miền $H = \{(x, y) : u = x + y \in \langle a, b \rangle\} \subset \mathbf{R}^2$. Đặt $N(x) = f(2x, x^2)$, $x \in \langle \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \rangle$. Khi đó:

1) Nếu trên miền $D = \left\{ u \in \langle a, b \rangle, v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$ hàm $f(u, v)$ không tăng theo biến v với mỗi u cố định và hàm $N(x)$ có giá trị bé nhất trên $\langle \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \rangle$ thì:

$$\min\{g(x, y) : (x, y) \in H\} = \min\left\{N(x) : x \in \langle \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \rangle\right\}.$$

2) Nếu trên miền $D = \left\{ u \in \langle a, b \rangle, v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$ hàm $f(u, v)$ không giảm theo biến v với mỗi u cố định và hàm $N(x)$ có giá trị lớn nhất trên $\langle \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \rangle$ thì:

$$\max\{g(x, y) : (x, y) \in H\} = \max\left\{N(x) : x \in \langle \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \rangle\right\}.$$

Chứng minh. 1) Cố định một giá trị $u \in \langle a, b \rangle$. Với mọi $(x, y) \in H$ thỏa mãn $x + y = u$ ta có:

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{u^2}{4} \quad (3.1)$$

Vì hàm $f(u, v)$ không tăng theo v , với $(x, y) \in H$ thỏa mãn $x + y = u$ ta có:

$$g(x, y) = f(x+y, xy) = f(u, xy) \geq f(u, \frac{u^2}{4}) \quad (3.2)$$

Khi $x = y = u/2$ ta có $(x, y) \in H$ và:

$$g(x, x) = f(2x, x^2) = N(x) = f(u, \frac{u^2}{4}) \quad (3.3)$$

Vì hàm $N(x)$ có giá trị bé nhất trên $\langle \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \rangle$, tồn tại điểm $x^* \in \langle \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \rangle$ sao cho:

$$\min \left\{ N(x) : x \in \left\langle \frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right\rangle \right\} = N(x^*) \quad (3.4)$$

Từ (3.2), (3.3), (3.4) ta suy ra:

$$g(x, y) \geq N(x^*) = f(2x^*, x^{*2}) \text{ với mọi } (x, y) \in H.$$

Lấy $u^* = 2.x^*$ và $x = y = x^*$ ta có $(x^*, x^*) \in H$ và $g(x^*, x^*) = N(x^*)$. Vậy:

$$\min \{g(x, y) : (x, y) \in H\} = \min \left\{ N(x) : x \in \left\langle \frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right\rangle \right\} = N(x^*)$$

2) Nếu $f(u, v)$ là hàm không giảm theo v thì từ (3.1) ta suy ra với mọi (x, y) thoả mãn $x+y = u \in \langle a; b \rangle$ ta có:

$$g(x, y) = f(x+y, xy) = f(u, xy) \leq f(u, \frac{u^2}{4}) \quad (3.5)$$

Khi $x = y = u/2$ ta có $(x, y) \in H$ và:

$$g(x, x) = f(2x, x^2) = N(x) = f(u, \frac{u^2}{4}) \quad (3.6)$$

Vì hàm $N(x)$ có giá trị bé nhất trên $\langle \frac{a}{2}; \frac{b}{2} \rangle$, tồn tại điểm $x^{**} \in \langle \frac{a}{2}; \frac{b}{2} \rangle$ sao cho:

$$\max \left\{ N(x) : x \in \left\langle \frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right\rangle \right\} = N(x^{**}) \quad (3.7)$$

Từ (3.5), (3.6), (3.7) ta suy ra:

$$g(x, y) \leq N(x^{**}) = f(2x^{**}, x^{**2}) \text{ với mọi } (x, y) \in H.$$

Lấy $u^{**} = 2.x^{**}$ và $x = y = x^{**}$ ta có $(x^{**}, x^{**}) \in H$ và $g(x^{**}, x^{**}) = N(x^{**})$.

Vậy:

$$\max \{g(x, y) : (x, y) \in H\} = \max \left\{ N(x) : x \in \left\langle \frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right\rangle \right\} = N(x^{**}).$$

Định lý 3.2.1 có thể áp dụng để giải một loạt các bài toán về tìm giá trị bé nhất, giá trị lớn nhất của các hàm của hai đa thức đối xứng của hai biến x, y trên miền dạng H . Những bài toán này thường xuất hiện trong các kỳ thi tuyển

sinh đại học và các kỳ thi học sinh giỏi toán bậc trung học cơ sở hoặc trung học phổ thông. Dưới đây là một số ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy - 1)(x + y - 2)$, trong đó x, y là các số thực thoả mãn $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + 2xy \leq 32$.

(Đề thi tuyển sinh đại học năm 2012, môn Toán-khối D).

Giải. Ta có: $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 8(x + y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq 8$;

$$A = (x + y)^3 - 3(x + y) - 6xy + 6$$

Vậy bài toán có dạng: Tìm giá trị bé nhất của hàm $f(u, v) = u^3 - 3u - 6v + 6$, trong đó $u = x + y$, $v = xy$ trên miền $H = \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 8\}$.

Hàm $f(u, v)$ rõ ràng giảm theo biến $v = xy$ và miền H có dạng như trong định lý 3.2.1 (khoảng $\langle a; b \rangle$ trong trường hợp này là khoảng đóng $[0; 8]$). Áp dụng khẳng định 1) của định lý ta có:

$$\min\{A : 0 \leq x + y \leq 8\} = \min\{N(x) = 8x^3 - 6x^2 - 6x + 6 : 0 \leq x \leq 4\}.$$

Ta có : $N'(x) = 24x^2 - 12x - 6$, $N'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Vì xét trên miền $0 \leq x \leq 4$ nên ta chỉ lấy giá trị $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$. So sánh các giá trị $N(0) = 6$, $N(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}) = \frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}$, $N(4) = 398$ ta suy ra:

$$\min\{A : 0 \leq x + y \leq 8\} = \min\{N(x) = 8x^3 - 6x^2 - 6x + 6 : 0 \leq x \leq 4\} = \frac{17 - 5\sqrt{5}}{4}.$$

Ví dụ 2: Cho các số thực x, y thay đổi và thoả mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

(Đề thi tuyển sinh đại học năm 2009, môn Toán - khối B).

Giải. Đặt $H = \{(x, y) : (x + y)^3 + 4xy \geq 2\}$. Bởi vì $(x + y)^2 - 4xy \geq 0$ nên ta suy ra:

$$(x + y)^3 + (x + y)^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 1$$

Như vậy miền H nằm trong miền $G = \{(x, y) : (x + y) \geq 1\}$. Do đó:

$$\inf\{A : (x, y) \in H\} \geq \inf\{A : (x, y) \in G\} \quad (3.8)$$

Ta có : $A = 3(x + y)^4 - 12xy(x + y)^2 + 9x^2y^2 - 2(x + y)^2 + 4xy + 1$. Đặt $u = x + y$, $v = xy$ ta nhận được:

$$A = f(u, v) = 3u^4 - 12vu^2 + 9v^2 - 2u^2 + 4v + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -12u^2 + 18v + 4 = 4(1 - u^2) + 18\left(v - \frac{4}{9}u^2\right)$$

Trên miền $D = \left\{u \geq 1, v \leq \frac{u^2}{4}\right\}$ ta có $\frac{\partial f}{\partial v} < 0$, do đó $f(u, v)$ giảm theo v với mỗi $u \geq 1$ cố định. Đặt $N(x) = f(2x, x^2) = 9x^4 - 4x^2 + 1$ ta có:

$$N'(x) = 36x^3 - 8x > 0 \text{ trên miền } x \geq \frac{1}{2}$$

Do đó: $\min\left\{N(x) : x \geq \frac{1}{2}\right\} = N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$. Theo khẳng định 1) của định lý 3.2.1 ta có:

$$\min\{A : (x, y) \in G\} = \min\left\{N(x) : x \geq \frac{1}{2}\right\} = \frac{9}{16}$$

Do (3.8) ta có: $\inf\{A : (x, y) \in H\} \geq \frac{9}{16}$. Nhưng với $x = y = 1/2$ ta có $(x + y)^3 + 4xy = 2$ vậy điểm $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \in H$ và $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$ nên ta suy ra $\min\{A : (x, y) \in H\} = \frac{9}{16}$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$z = \frac{x^3 + y^3}{x^3 + y^3 - xy}$$

trên miền $H = \{(x, y) : x + y \geq a > 1\}$.

Giải. Nếu $xy < 0$ ta có: $x^3 + y^3 - xy = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) - xy \geq a(x^2 + y^2 - xy) - xy > 0$. Nếu $xy \geq 0$ ta có $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) \geq a(x^2 + y^2 - xy) > axy \geq xy$ trên miền H . Vậy hàm z có nghĩa trên H . Đặt $u = x + y$, $v = xy$ ta có:

$$z = \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{(x + y)^3 - 3xy(x + y) - xy} = \frac{u^3 - 3uv}{u^3 - 3uv - v} = f(u, v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{u^3}{(u^3 - 3uv - v)^2} > 0 \text{ khi } u \geq a > 1.$$

Vậy hàm $f(u, v)$ không giảm theo v trên miền $G = \left\{ (u, v) : v \leq \frac{u^2}{4}, u \geq a > 1 \right\}$ với mỗi u cố định. Theo khẳng định 2) của định lý 3.2.1 ta có:

$$\max\{z : (x, y) \in H\} = \max\left\{N(x) = f(2x, x^2) : x \geq \frac{a}{2}\right\}.$$

Nhưng $N(x) = \frac{2x^3}{2x^3 - x^2} = \frac{2x}{2x - 1} = 1 + \frac{1}{2x - 1} \leq 1 + \frac{1}{a - 1}$ với mọi $x \geq \frac{a}{2}$. Khi $x = \frac{a}{2}$ ta có $N(\frac{a}{2}) = 1 + \frac{1}{a - 1}$.

$$\text{Vậy } \max\{z : (x, y) \in H\} = \max\left\{N(x) = f(2x, x^2) : x \geq \frac{a}{2}\right\} = 1 + \frac{1}{a - 1}.$$

Định lý 3.2.2: Giả sử $f(u, v)$ là hàm của hai biến u, v xác định trên miền $D = \left\{ (u, v) : u \geq 0, v \in \langle a; b \rangle, v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$ và $g(x, y) = f(x+y, xy)$ xác định trên miền $H = \{(x, y) : v = xy \in \langle a; b \rangle\} \subset \mathbf{R}^2$. Đặt $N(x) = f(2x, x^2)$, $x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle$. Khi đó:

1) Nếu trên miền $D = \left\{ (u, v) : u \geq 0, v \in \langle a, b \rangle, v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$ hàm $f(u, v)$ không giảm theo biến u với mỗi v cố định và hàm $N(x)$ có giá trị bé nhất trên miền $\{x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle\}$ thì:

$$\min\{g(x, y) : (x, y) \in H\} = \min\{N(x) : x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle\}.$$

2) Nếu trên miền $D = \left\{ (u, v) : u \geq 0, v \in \langle a, b \rangle, v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$ hàm $f(u, v)$ không tăng theo biến u với mỗi v cố định và hàm $N(x)$ có giá trị lớn nhất trên miền $\{x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle\}$ thì:

$$\max\{g(x, y) : (x, y) \in H\} = \max\{N(x) : x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle\}.$$

Chứng minh. 1) Cố định một giá trị $v \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle$. Với mọi $(x, y) \in H$ thỏa mãn $xy = v$ ta có:

$$v = xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} \rightarrow x + y \geq 2\sqrt{v} \quad (3.9)$$

Vì hàm $f(u,v)$ không giảm theo u , với $(x,y) \in H$ thỏa mãn $xy = v$ ta có:

$$g(x,y) = f(x+y, xy) = f(x+y, v) \geq f(2\sqrt{v}, v) \quad (3.10)$$

Khi $x = y = \sqrt{v}$ ta có $(x,y) \in H$ và:

$$g(x,x) = f(2x, x^2) = N(x) = f(2\sqrt{v}, v) \quad (3.11)$$

Giả sử:

$$\min\{N(x) : x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle\} = N(x^*); (x^* \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle) \quad (3.12)$$

Từ (3.10), (3.11), (3.12) ta suy ra:

$$g(x,y) \geq N(x^*) = f(2x^*, x^{*2}) \text{ với mọi } (x,y) \in H.$$

Lấy $v^* = x^{*2}$ và $x = y = x^*$ ta có $(x^*, x^*) \in H$ và $g(x^*, x^*) = N(x^*)$. Vậy:

$$\min\{g(x,y) : (x,y) \in H\} = \min\{N(x) : x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle\} = N(x^*).$$

2) Nếu $f(u,v)$ là hàm không tăng theo u thì từ (3.9) ta suy ra với mọi (x,y) thỏa mãn $xy = v > 0$ ta có:

$$g(x,y) = f(x+y, xy) = f(x+y, v) \leq f(2\sqrt{v}, v) \quad (3.13)$$

Khi $x = y = \sqrt{v}$ ta có $(x,y) \in H$ và:

$$g(x,x) = f(2x, x^2) = N(x) = f(2\sqrt{v}, v) \quad (3.14)$$

Giả sử :

$$\max\{N(x) : x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle\} = N(x^{**}); (x^{**} \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle) \quad (3.15)$$

Từ (3.13), (3.14), (3.15) ta suy ra:

$$g(x,y) \leq N(x^{**}) = f(2x^{**}, x^{**2}) \text{ với mọi } (x,y) \in H$$

Lấy $v^{**} = x^{**2}$ và $x = y = x^{**}$ ta có $(x^{**}, x^{**}) \in H$ và $g(x^{**}, x^{**}) = N(x^{**})$.

Vậy:

$$\max \{g(x, y) : (x, y) \in H\} = \max \{N(x) : x \in \langle \sqrt{a}; \sqrt{b} \rangle\} = N(x^{**})$$

Định lý 3.2.2 được chứng minh hoàn toàn.

Ta đưa ra một số ví dụ minh họa cho định lý 3.2.2.

Ví dụ 4: Tìm giá trị bé nhất ở trên miền $H = \left\{ (x, y) : xy \geq \frac{1}{9}, x > 0, y > 0 \right\}$ của hàm số:

$$z = \frac{x^3 + y^3 - xy}{x^3 + y^3 + 2xy}$$

Giải. Đặt $u = x + y$, $v = xy$, ta có :

$$z = \frac{(x+y)^3 - 3(x+y)xy - xy}{(x+y)^3 - 3(x+y)xy + 2xy} = \frac{u^3 - 3uv - v}{u^3 - 3uv + 2v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{9(u^2 - v)v}{(u^3 - 3uv + 2v)^2}$$

Trên miền $D = \left\{ (u, v) : \frac{1}{9} \leq v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$ ta có $\frac{\partial z}{\partial u} > 0$ do đó hàm z tăng theo biến u . Theo khẳng định 1 của định lý 3.2.2 ta có:

$$\min\{z : (x, y) \in H\} = \min\left\{N(x) = \frac{2x^3 - x^2}{2x^3 + 2x^2} = \frac{2x - 1}{2(x + 1)} : x \geq \frac{1}{3}\right\}$$

nếu về phải tồn tại. Hàm $N(x)$ có đạo hàm $N'(x) > 0$ trên miền $x \geq \frac{1}{3}$, nên ta có: $\min\left\{N(x) : x \geq \frac{1}{3}\right\} = N\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{8}$. Vậy:

$$\min\left\{Z = \frac{x^3 + y^3 - xy}{x^3 + y^3 + 2xy} : (x, y) \in H\right\} = -\frac{1}{8}.$$

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$z = \frac{x^4 + y^4 + xy(x^2 + y^2)}{2(x^4 + y^4) - xy(x^2 + y^2)}$$

trên miền $H = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Giải. Ta có : $2(x^4 + y^4) - xy(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)\left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] + (x^2 - y^2)^2 > 0$ khi $x > 0, y > 0$ do đó z hoàn toàn được xác định trên miền H . Đặt $u = x + y$, $v = xy$ ta có biểu diễn:

$$z = \frac{u^4 - 3vu^2}{2u^4 - 9vu^2 + 6v^2}$$

Lấy đạo hàm z theo biến u ta được:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{6uv(u^4 - 4vu^2 + 6v^2)}{(2u^4 - 9vu^2 + 6v^2)^2}$$

Trên miền $D = \left\{ (u, v) : u > 0, 0 < v \leq \frac{u^2}{4} \right\}$ ta có $\frac{\partial z}{\partial u} < 0$, do đó z là hàm giảm theo u với mỗi v cố định. Theo khẳng định 2 của định lý 3.2.2 ta có:

$$\begin{aligned} \max \left\{ z = \frac{x^4 + y^4 + xy(x^2 + y^2)}{2(x^4 + y^4) - xy(x^2 + y^2)} : x > 0, y > 0 \right\} \\ = \max \left\{ N(x) = \frac{4x^4}{2x^4} = 2 : x > 0 \right\} = 2. \end{aligned}$$

Kết luận

Bản luận văn “Cực trị của một số hàm nhiều biến có các dạng đặc biệt” đã đưa ra công thức tính giá trị lớn nhất hoặc giá trị bé nhất của một số hàm nhiều biến có dạng đặc biệt. Các hàm nhiều biến có dạng đặc biệt này bao gồm: các phân thức k -chính quy, các hàm có dạng tỷ số của hai phân thức đồng dạng, các hàm biểu diễn qua các hàm nửa cộng tính, các hàm của hai đa thức đối xứng của hai biến. Một số các kết quả được tác giả tổng kết từ các tài liệu tham khảo, các kết quả khác do tác giả tự chứng minh dưới sự hướng dẫn của TS. Hoàng văn Hùng, Viện Khoa học Cơ bản, Đại học Hàng hải Việt nam (các khẳng định về các phân thức k -chính quy khi $k \neq 0$ của định lý 2.1.1, định lý 2.5.2 và các định lý 3.2.1, 3.2.2). Các ví dụ minh họa cho các định lý trong bản luận văn chủ yếu được lấy từ các đề thi tuyển sinh đại học môn Toán của các khối A, B, D từ năm 2002 đến năm 2012 và một số sách tham khảo về bất đẳng thức. Điều này chứng tỏ các kết quả của bản luận văn là hữu ích khi giải một số các bài toán về giá trị bé nhất và lớn nhất trong chương trình phổ thông.

Các kết quả của chương 3 còn có thể mở rộng cho các hàm của các đa thức đối xứng với số biến lớn hơn. Để tiện lợi cho việc diễn đạt, trong bản luận văn tác giả đã sử dụng các thuật ngữ và ký hiệu thuộc phạm vi của chương trình toán cao cấp. Tuy nhiên, các lý luận trong các chứng minh hoàn toàn sơ cấp. Vì vậy bản luận văn này hoàn toàn thuộc chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp và có thể được sử dụng làm tài liệu giảng dạy cho giáo viên cũng như làm tài liệu học tập cho học sinh từ bậc trung học cơ sở trở lên trong các chương trình nâng cao về bất đẳng thức và các bài toán cực trị.

Tài liệu tham khảo

[1]. [H.V.Hùng 1] Hoàng Văn Hùng (2010), "Cực trị của một lớp các hàm có dạng tỉ số của hai hàm đại số", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải (ISSN 1859 -316X)*, số 24-11/2010, trang 92-97.

[2]. [H.V.Hùng 2] Hoàng Văn Hùng (2013), "Phương pháp hàm trội và hàm non tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của một số hàm của hai đa thức đối xứng", *Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải (ISSN 1859 -316X)*, số 33-01/2013, trang 97-101.

[3]. [P.H.Khải 1] Phan Huy Khải (1998), "Cực tiểu của phân thức chính quy", *Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, Nhà xuất bản Giáo dục, (trang 231- 234).

[4]. [P.H.Khải 2] Phan Huy Khải (1998), *10.000 bài toán sơ cấp - Bất đẳng thức hình học*, Nhà xuất bản Hà Nội.

[5]. [Tr.Phương] Trần Phương (1997), *Bất đẳng thức, Tập 1*. Nhà xuất bản thành phố Hồ Chí Minh.

[6]. [Hardy, Littlewood, Polya] .G.H.Hardy, J.E. Littlewood, G.Polya (1981), *Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản đại học và trung học chuyên nghiệp (dịch từ bản tiếng Nga).

[7]. [Kurosh] A.G Kurosh (1975), *Giáo trình Đại số cao cấp*, Nhà xuất bản "Khoa học", Moskva – (tiếng Nga).