

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM QUỐC HIỆU

GIẢI MỘT SỐ DẠNG BÀI TOÁN
THI ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG
BẰNG CÔNG CỤ SỐ PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM QUỐC HIỆU

**GIẢI MỘT SỐ DẠNG BÀI TOÁN
THI ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG
BẰNG CÔNG CỤ SỐ PHỨC**

Chuyên ngành: TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. ĐOÀN QUANG MẠNH

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mục lục	i
Mở đầu	1
Nội dung	4
1 Các kiến thức cơ bản	4
1.1 Số phức	4
1.2 Biểu diễn hình học của số phức trong mặt phẳng tọa độ Oxy. . .	5
1.3 Phép cộng và phép trừ số phức	5
1.4 Phép nhân số phức	6
1.5 Số phức liên hợp và môđun của số phức	7
1.6 Phép chia cho số phức khác 0	8
1.7 Dạng lượng giác của số phức	8
1.8 Phương trình bậc hai	9
2 Ứng dụng số phức giải hệ phương trình đại số	10
2.1 Kiến thức sử dụng	10
2.2 Bài tập áp dụng	11
3 Ứng dụng số phức chứng minh bất đẳng thức.	29
3.1 Kiến thức sử dụng.	29

3.2	Bài tập áp dụng.	30
4	Ứng dụng số phức trong lượng giác.	44
4.1	Phương pháp giải toán.	44
5	Ứng dụng của số phức trong việc tính tổng các số C_n^k	71
5.1	Kiến thức sử dụng.	71
5.2	Phương pháp giải toán.	71
5.3	Phần bài tập áp dụng.	72
	Kết luận	84
	Tài liệu tham khảo	87

LỜI CẢM ƠN

Qua đây tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến TS. Đoàn Quang Mạnh đã tận tình giúp đỡ và ân cần chỉ bảo cho tôi hoàn thành bản luận văn này. Đồng thời tác giả cũng xin chân thành cảm ơn tới các thầy, cô trong hội đồng khoa học thuộc Đại học Thái Nguyên, các thầy, cô giảng dạy trong lớp cao học toán K5B trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi được học tập, nghiên cứu và định hướng cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tuy đã cố gắng nghiên cứu kĩ về vấn đề trong luận văn song khó tránh khỏi những sai sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo, hướng dẫn của các thầy cô và sự đóng góp ý kiến của các bạn bè, đồng nghiệp để bản luận văn của tôi được hoàn chỉnh và ý nghĩa hơn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2013.

Tác giả

Phạm Quốc Hiệu

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan các kết quả nghiên cứu trong luận văn là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

.

Phạm Quốc Hiệu

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài.

Số phức được đưa vào giảng dạy ở lớp 12 trường trung học phổ thông như một điều tất yếu do nó có vai trò rất quan trọng trong thực tiễn cũng như trong toán học.

Những bài toán về số phức thường xuyên có mặt trong các đề thi đại học, cao đẳng trong những năm gần đây.

Số phức có nhiều ứng dụng trong giải toán phổ thông, nó là cầu nối giữa các phân môn đại số - giải tích - lượng giác và hình học. Tuy nhiên chưa có những công trình nghiên cứu một cách sâu sắc và toàn diện về ứng dụng của số phức để giải các dạng toán: Hệ phương trình, bất đẳng thức, tổ hợp, lượng giác trong các đề thi đại học.

Để giúp cho giáo viên và học sinh ở trường trung học phổ thông có cách nhìn sâu rộng hơn về số phức và ứng dụng nó trong việc giải một số dạng toán thường gặp trong các đề thi đại học – cao đẳng, các đề thi học sinh giỏi. Vì vậy tôi chọn đề tài: “Giải một số dạng toán thi đại học, cao đẳng bằng công cụ số phức”.

Đề tài: “Giải một số dạng toán thi đại học, cao đẳng bằng công cụ số phức” nhằm đáp ứng mong muốn của bản thân về một đề tài phù hợp mà sau này có thể phục vụ cho việc giảng dạy của mình ở trường trung học phổ thông.

2. Mục đích nghiên cứu.

Nhằm khai thác ứng dụng của số phức trong việc giải một số dạng toán thường gặp trong các đề thi đại học, cao đẳng cũng như thi học sinh giỏi. Phân tích cách giải có sử dụng số phức và so sánh với những cách giải thông thường (không sử dụng số phức) để rút ra ưu, nhược điểm trong từng cách giải.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.

Nghiên cứu ứng dụng của số phức để giải các dạng toán thường gặp trong chương trình toán trung học phổ thông: giải hệ phương trình, chứng minh bất đẳng thức, tính giá trị biểu thức lượng giác, giải phương trình lượng giác, chứng minh các đẳng thức lượng giác, tính tổng các số C_n^k .

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của các thầy: Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Trần Phương..., các tài liệu ôn thi đại học, bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, tạp chí toán học tuổi trẻ,...

4. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài.

Xây dựng được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông.

Đề tài đóng góp thiết thực cho việc giảng dạy và học tập các chuyên đề toán trong trường trung học phổ thông, đem lại niềm say mê, sáng tạo cho giáo viên và học sinh trong việc dạy học môn Toán ở trường trung học phổ thông

5. Cấu trúc luận văn.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm 5 chương:

Chương 1. Các kiến thức cơ bản về số phức

Chương 2: Ứng dụng số phức giải hệ phương trình đại số

Chương 3: Ứng dụng số phức chứng minh bất đẳng thức

Chương 4: Ứng dụng số phức trong lượng giác

Chương 5: Ứng dụng số phức trong đại số tổ hợp

Chương 1

Các kiến thức cơ bản

1.1 Số phức

Định nghĩa 1

Một số phức là một biểu thức có dạng $a + bi$

trong đó a, b là những số thực và i là số thoả mãn $i^2 = -1$.

Kí hiệu số phức là z và viết $z = a + bi$

i gọi là đơn vị ảo.

a gọi là phần thực, b gọi là phần ảo.

Tập số phức kí hiệu là $\mathbf{C}$.

Đặc biệt:

Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $z = a + 0i = a$.

Số phức $z = 0 + bi$ có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (hay số thuần ảo) và viết là $z = 0 + bi = bi$

$i = 0 + 1i = 1i$.

Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

Định nghĩa 2:

Cho 2 số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in R$), $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

1.2 Biểu diễn hình học của số phức trong mặt phẳng toạ độ Oxy.

Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng toạ độ.

Mỗi điểm $M(a, b)$ biểu diễn một số phức $z = a + bi$ khi đó kí hiệu $M(a; b)$ hoặc $M(z)$.

Mặt phẳng toạ độ với việc biểu diễn số phức được gọi là mặt phẳng phức:

Ox là trục thực, Oy là trục ảo.

1.3 Phép cộng và phép trừ số phức

1. Phép cộng

Định nghĩa:

với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ta định nghĩa $z + z' = a + a' + (b + b')i$.

2. Tính chất

Tính chất kết hợp:

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'') \forall z, z', z'' \in \mathbf{C}$$

Tính chất giao hoán: $z + z' = z' + z; \forall z, z' \in \mathbf{C}$

Cộng với 0: $z + 0 = 0 + z; \forall z \in \mathbf{C}$.

Với mọi số phức $z = a + bi$, ta gọi số đối của z là $-z$, kí hiệu $-z = -a - bi$, khi đó ta có $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

3. Phép trừ.

Định nghĩa 4:

với 2 số phức z, z' ta định nghĩa $z - z' = z + (-z')$ nếu $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i, (a, b, a', b' \in R)$ thì: $z - z' = a - a' + (b - b')i$.

4. Biểu diễn hình học của phép cộng và phép trừ.

Trong mặt phẳng phức ta cũng coi vectơ $\vec{u} = (a, b)$ biểu diễn số phức $z = a + bi$. Như vậy số phức z được biểu diễn bởi điểm M cũng có nghĩa là được biểu diễn bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$.

Nếu vectơ $\vec{u}, \vec{u'}$ lần lượt biểu diễn số phức z, z' thì:

- $\vec{u} + \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z + z'$.
- $\vec{u} - \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z - z'$.

1.4 Phép nhân số phức

1. Tích hai số phức.

Định nghĩa 5:

Với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i, (a, b, a', b' \in R)$,

ta định nghĩa $z \cdot z' = a \cdot a' - b \cdot b' + (a \cdot b' + a' \cdot b)i$.

2. Chú ý.

- với $k \in R$ và $z = a + bi; (a, b \in R)$ thì $k \cdot z = k \cdot a + k \cdot bi$.
- $0z = 0, \forall z \in \mathbf{C}$.

3. Tính chất của phép nhân.

Tính chất giao hoán: $z \cdot z' = z' \cdot z; \forall z, z' \in \mathbf{C}$,

Tính chất kết hợp: $(z \cdot z') \cdot z'' = z \cdot (z' \cdot z''), \forall z, z', z'' \in \mathbf{C}$.

Nhân với 1: $z \cdot 1 = 1 \cdot z \quad \forall z \in \mathbf{C}$,

Như vậy ta có thể thực hiện các phép tính cộng, nhân các số phức như phép cộng, nhân các số thực. Đặc biệt các hằng đẳng thức vẫn đúng trong trường hợp số phức.

1.5 Số phức liên hợp và môđun của số phức

1. Số phức liên hợp

Định nghĩa 6:

Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$; ($a, b \in R$) là số phức $a - bi$ kí hiệu là $\bar{z}$.

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi.$$

Tính chất:

1. $\bar{\bar{z}} = z, \forall z \in \mathbf{C}$.
2. $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in R$.
3. $\bar{z} = -z \Rightarrow z$ là số thuần ảo
4. $\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$.
5. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
6. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \forall z_2 \neq 0$.

2. Môđun của số phức

Định nghĩa 7:

Môđun của số phức $z = a + bi$; ($a, b \in R$) là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$. Kí hiệu mô đun của số phức z là $|z|$.

- Nếu $z = a + bi$; ($a, b \in R$) thì $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.
- Nếu $z = 0$ thì $|z| = 0$.

Tính chất:

1. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
2. $|\bar{z}| = |z|$.
3. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbf{C} : |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
4. $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}; |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_2 \neq 0$.
5. $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}; |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

1.6 Phép chia cho số phức khác 0**Định nghĩa 8:**

Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số phức ký hiệu là z^{-1} xác định bởi $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 : $\frac{z'}{z} = z' \cdot z^{-1} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2}$.

1.7 Dạng lượng giác của số phức

Trong mặt phẳng phức: $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a, b)$.

Góc định hướng $\phi = (Ox, OM)$ gọi là argument của z . Nếu ϕ là một argument của z thì tập hợp các argument của z là $\{\phi + k2\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ta có $a = r \cdot \cos \phi; b = r \cdot \sin \phi$, nên $z = r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z .

Tính chất:

1. $z = r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi); z_1 = r_1 \cdot (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$.
2. $z_2 = r_2 \cdot (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$.
3. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]$.

4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)], z_2 \neq 0.$
5. $z^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi).$
6. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\phi}{n} + \frac{k2\pi}{n} \right) \right], k = \overline{0, n-1}.$
7. $(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi, n \in \mathbb{N}.$

1.8 Phương trình bậc hai

Dạng $AZ^2 + BZ + C = 0$ trong đó $A, B, C \in \mathbb{C}, A \neq 0.$

Cách giải:

- Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-B+\delta}{2A} \\ z_2 = \frac{-B-\delta}{2A} \end{cases}$$

(Trong đó δ là một căn bậc 2 của Δ)

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = \frac{-B}{2A}.$

- Định lý Viet z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình ta có:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-B}{A} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{C}{A} \end{cases}.$$

Chương 2

Ứng dụng số phức giải hệ phương trình đại số

2.1 Kiến thức sử dụng

1. Một phương trình ẩn phức $f(z)=0$ với $z=x+yi$ có thể giải bằng cách tách phần thực, phần ảo .

Nghĩa là ta đưa phương trình về dạng:

$$f(z)=0 \Leftrightarrow h(x,y)+g(x,y)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \quad (*)$$

Như vậy việc giải phương trình ẩn phức ta quy về giải hệ phương trình đại số (*).

Từ nhận định trên , ta có thể tiến hành theo cách ngược lại:

Hệ phương trình

$$\begin{cases} A(x;y) = B(x;y) \\ C(x;y) = D(x;y) \end{cases} \Leftrightarrow A(x;y) + iC(x;y) = B(x;y) + iD(x;y)$$

Trong phần này chúng tôi đưa ra ba dạng toán về giải hệ phương trình có thể giải theo cách thông thường (không sử dụng số phức) và giải bằng cách sử dụng số phức.

2.2 Bài tập áp dụng

Dạng Toán 1: Sử dụng linh hoạt các hằng đẳng thức liên quan đến số phức để giải một số hệ phương trình thường gặp: hệ đẳng cấp, hệ đối xứng.

Bài toán 2.1:

Giải hệ:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -2 & (1) \\ 3x^2y - y^3 = 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

Ta thấy hệ phương trình trên ở dạng hệ đẳng cấp bậc ba. Sử dụng phương pháp giải hệ đẳng cấp:

Từ hệ: $\Rightarrow x^3 - y^3 + 3x^2y - 3xy^2 = 0 \quad (*)$

• Xét $y = 0$ thay vào phương trình $\Rightarrow x = 0$ (không thỏa mãn hệ)

• Với $y \neq 0$ chia cả hai vế của phương trình $(*)$ cho y^3 , ta có:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$$

Đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow$ Phương trình: $t^3 + 3t^2 - 3t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (t^3 - 1) + 3t(t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + 4t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 + \sqrt{3} \\ t = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{thay vào (1)}$$

$$t = 1 \Rightarrow y = x$$

$$\Rightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$t = -2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = (\sqrt{3} - 2)y$$

Thay vào (2):

$$\left[3(\sqrt{3} - 2)^2 - 1\right]y^3 = 2 \Leftrightarrow (1 - \sqrt{3})^3 y^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$t = -2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = (-2 - \sqrt{3})y$$

Thay vào (2) ta có:

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là

$$T = \left\{ (1; 1); \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \right\}$$

Nhận xét 2.1

Ngoài cách giải trên, ta có thể giải hệ phương trình bằng các cách sau:

- Đưa phương trình (*) thành phương trình tích bằng cách phân tích vế trái của (*) thành nhân tử.

- Sử dụng cách giải hệ đối xứng loại II.

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Nhận thấy : $(x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$ và $-2 + 2i = (1 + i)^3$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có:

$$x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - y^3i = -2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^3 = -2 + 2i = (1 + i)^3$$

Đặt $z = x + yi$ ta có $z^3 - (1 + i)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (z - 1 - i) [z^2 + (1 + i)z + 2i] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 + i \\ z = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \\ z = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là

$$T = \left\{ (1; 1); \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \right\}$$

Nhận Xét 2.2

So với các cách giải thông thường, phương pháp sử dụng số phức cũng dễ dàng thực hiện do các phép toán sử dụng tương đối cơ bản. Đồng thời cách giải gọn nhẹ, dùng số phức giúp học sinh có thêm một phương pháp mới, tạo sự linh hoạt, lôi cuốn, hấp dẫn cho người học.

Bài toán 2.2:

Giải hệ:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - 6xy - 3x = 0 & (1) \\ y^3 - 3x^2y - 3x^2 + 3y^2 + 3y + 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

Ta biến đổi hệ phương trình cần giải về dạng
$$\begin{cases} x(x^2 - 3y^2 - 6y - 3) = 0 & (1) \\ (y+1)^3 - 3x^2(y+1) + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 3(y+1)^2 \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ thay vào (2)} \Rightarrow (y+1)^3 = -8 \Leftrightarrow y = -3$$

$x^2 = 3(y+1)^2$ thay vào (2):

$$(y+1)^3 - 9(y+1)^3 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+1)^3 = 1 \Leftrightarrow y+1 = 1 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\text{Với } y = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là:

$$T = \{(0; -3); (\sqrt{3}; 0); (-\sqrt{3}; 0)\}$$

Cách 2: (sử dụng số phức)

Ta nhận thấy:

$$(x+yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i$$

$$(x+yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2$$

Nên nhân 2 vế của (2) với $-i$ rồi cộng với (1) ta có:

$$(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) + 3i(x^2 + 2xyi - y^2) - 3(x+yi) - 9i = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+yi)^3 + 3i(x+yi)^2 - 3(x+yi) - 9i = 0$$

Đặt $z = x + yi$ ta có:

$$z^3 + 3iz^2 - 3z - 9i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+i)^3 = 8i \Leftrightarrow (z+i)^3 + (2i)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+i+2i) [(z+i)^2 - 2i(z+i) - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + 3i = 0 \\ z^2 + 2iz - 1 - 2iz + 2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -3i \\ z^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3i \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(0; -3); (\sqrt{3}; 0); (-\sqrt{3}; 0)\}$$

Bài toán 2.3:

$$\text{Giải hệ: } \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 3x + 3 = 0 \\ y^3 - 3x^2y - 6xy - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Lời giải:**Cách 1:**(Không sử dụng số phức)

$$\text{Ta đưa hệ về dạng: } \begin{cases} (x+1)^3 - 3y^2(x+1) + 2 = 0 \\ y^3 - 3y(x+1)^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $x+1 = a$.

$$\text{Hệ phương trình cần giải có dạng: } \begin{cases} a^3 - 3ay^2 + 2 = 0 \quad (1) \\ y^3 - 3ya^2 + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^3 - y^3 + 3ya^2 - 3ay^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-y)(a^2 + 4ay + y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = y \\ a = (-2 \pm \sqrt{3})y \end{cases}$$

• $a = y$ thay vào (1)

$$\Rightarrow y^3 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$a = (-2 + \sqrt{3})y \Rightarrow y^3(1 - \sqrt{3})^3 = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$a = (-2 - \sqrt{3})y \Rightarrow y^3(\sqrt{3} + 1)^3 = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \left\{ (0; 1); \left(\frac{-3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{-3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right) \right\}$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Hệ cần giải tương đương với hệ

$$\begin{cases} (x+1)^3 - 3y^2(x+1) = -2 \quad (1) \\ 3y(x+1)^2 - y^3 = 2 \quad (2) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có:

$$(x+1)^3 - 3y^2(x+1) + 3y(x+1)^2 i - iy^3 = -2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow (x+1+yi)^3 = (1+i)^3$$

$$\text{Đặt } z = x+1+yi \text{ ta có } z^3 - (1+i)^3 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (z-1-i) [z^2 + (1+i)z + (1+i)^2] = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-1-i) [z^2 + (1+i)z + 2i] = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+i \\ z^2 + (1+i)z + 2i = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1+i \\ z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \\ z = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-3-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \left\{ (0; 1); \left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \right\}$$

Bài toán 2.4:

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x^4 + y^4 - 6x^2y^2 = -7 \quad (1) \\ x^3y - y^3x = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1: (không sử dụng số phức)

Ta dễ dàng nhận ra hệ phương trình ở dạng hệ đẳng cấp bậc 4

• Xét $x = 0$ (l)

• $x \neq 0$ đặt $y = tx$ hệ

$$\begin{cases} x^4 + t^4x^4 - 6t^2x^4 = -7 \\ tx^4 - t^3x^4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t^4 - 6t^2 + 1)x^4 = -7 \quad (1) \\ t(1 - t^2)x^4 = 6 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{t^4 - 6t^2 + 1}{t(1 - t^2)} = \frac{-7}{6} \Leftrightarrow 6t^4 - 7t^3 - 36t^2 + 7t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{-1}{3} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = -2 \end{cases}$$

• $t = 3 \Rightarrow -24x^4 = 6 \Rightarrow$ không tồn tại x

• $t = \frac{-1}{3} \Rightarrow \frac{-1}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot x^4 = 6 \Rightarrow$ không tồn tại x

• $t = -2 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$

$$\bullet t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} x^4 = 6 \Rightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(2; 1); (-2; -1); (-1; 2); (1; -2)\}$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Nhận thấy:

$$(x + yi)^4 = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4x^3yi - 4y^3xi$$

Nhân 2 vế của (2) với $4i$ rồi cộng với (1) ta có:

$$x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4x^3yi - 4y^3xi = -7 + 24i$$

$$\Leftrightarrow (x + yi)^4 = (2 + i)^4$$

Đặt $z = x + yi$ ta có:

$$z^4 - (2 + i)^4 = 0 \Leftrightarrow [z^2 + (2 + i)^2][z^2 - (2 + i)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = (2 + i)^2 \\ z^2 = (-1 + 2i)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = -2 - i \\ z = -1 + 2i \\ z = 1 - 2i \end{cases}$$

Vậy ta có:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(2; 1); (-2; -1); (-1; 2); (1; -2)\}$$

DẠNG TOÁN 2

• **Dạng cơ bản:**

Loại 1:

$$\begin{cases} mx + \frac{ax}{x^2 + y^2} = b(1) \\ my - \frac{ay}{x^2 + y^2} = c(2) \end{cases} \quad (a, b, c, m, n \in R)$$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có: $m(x + yi) + \frac{a(x - yi)}{x^2 + y^2} = b + ci$.

Đặt $z = x + yi$ ta có: $mz + \frac{a}{z} = b + ci$

$\Rightarrow$ phương trình: $mz^2 - (b + ci)z + a = 0$

• **Loại 2:**

$$\begin{cases} mx + \frac{ay}{x^2 + y^2} = b \quad (1) \\ my + \frac{ax}{x^2 + y^2} = c \quad (2) \end{cases} \quad (a, b, c, m, n \in R)$$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có

$$m(x + yi) + \frac{a(y + xi)}{x^2 + y^2} = b + ci$$

$$m(x + yi) + \frac{ai(x - yi)}{x^2 + y^2} = b + ci$$

Đặt $z = x + yi$ ta có: $mz + \frac{ai}{z} = b + ci$

$$\Leftrightarrow mz^2 - (b + ci)z + ai = 0$$

Bài toán 2.5:

Giải hệ: $\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \quad (1) \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (2) \end{cases}$ (Tập chí Kvant)

Lời giải:

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

Đk: $x^2 + y^2 \neq 0$.

Xét $y=0 \Rightarrow x \neq 0$ hệ $\begin{cases} x + \frac{3}{x} = 3 \\ \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại x ; tương tự $x=0$ (loại).

Với $xy \neq 0$ hệ phương trình cần giải tương đương với hệ:

$$\begin{cases} xy + \frac{3xy - y^2}{x^2 + y^2} = 3y \quad (3) \\ yx - \frac{x^2 + 3xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad (4) \end{cases}$$

Lấy (3)+(4) ta được $2xy - 1 = 3y \Rightarrow x = \frac{1}{2y} + \frac{3}{2}$

Thay vào (2) ta có

$$\left(\frac{1}{2y} + \frac{3}{2}\right)^2 y + y^3 - \left(\frac{1}{2y} + \frac{3}{2}\right) - 3y = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{4y} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}y + y^3 - \frac{1}{2y} - \frac{3}{2} - 3y = 0 \\
&\Leftrightarrow 4y^4 - 3y^2 - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (y^2 - 1)(4y^2 + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là :

$$T = \{(2; 1); (1; -1)\}$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

$$\text{Đk : } x^2 + y^2 \neq 0$$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có :

$$\begin{aligned}
&x + yi + \frac{3(x - yi) - (y + xi)}{x^2 + y^2} = 3 \\
&\Leftrightarrow x + yi + \frac{3(x - yi) - i(x - yi)}{x^2 + y^2} = 3
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow z \neq 0$$

Ta được phương trình :

$$\begin{aligned}
&z + \frac{(3 - i)\bar{z}}{|z|^2} - 3 = 0 \Leftrightarrow z + \frac{3 - i}{z} - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i = 0
\end{aligned}$$

$$\Delta = 9 - 12 + 4i = 4i - 3 = (1 + 2i)^2$$

Phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} z = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i \\ z = \frac{3 - 1 - 2i}{2} = 1 - i \end{cases}$$

Ta suy ra:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(2; 1); (1; -1)\}$$

Nhận xét 2.3: Với dạng toán này việc giải hệ phương trình có sử dụng số phức đơn giản, gọn nhẹ và độc đáo hơn rất nhiều, học sinh dễ nắm bắt, dễ biến đổi và dễ nhớ dạng toán hơn các phương pháp biến đổi thông thường.

Bài toán 2.6:

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} \left(1 - \frac{12}{3x+y}\right) \sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{3x+y}\right) \sqrt{y} = 6 \end{cases}$$

Cách 1 : (không sử dụng số phức)

$$\text{Đk : } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ hệ } \Rightarrow x, y \neq 0. \text{ Vậy } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có dạng

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1 - \frac{12}{3x+y} = \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (1) \\ 1 + \frac{12}{3x+y} = \frac{6}{\sqrt{y}} \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} \\ \frac{12}{3x+y} = \frac{3}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \\ & \Rightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{12}{3x+y} \\ & \Leftrightarrow \frac{9}{y} - \frac{1}{x} = \frac{12}{3x+y} \Leftrightarrow 9x(3x+y) - y(3x+y) = 12xy \\ & \Leftrightarrow 27x^2 + 9xy - 3xy - y^2 = 12xy \\ & \Leftrightarrow 27x^2 - 6xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow (3x-y)(9x+y) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y = -9x \end{cases} \end{aligned}$$

 $y = -9x$ loại do $x > 0$ và $y > 0$ $y = 3x$ thay vào (1)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{12}{6x} &= \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ &\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1 - \sqrt{3})(\sqrt{x} - 1 + \sqrt{3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{3} \quad \text{do } (\sqrt{x} + \sqrt{3} - 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 12 + 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})\}$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

$$\text{Đk } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \neq 0 \end{cases}$$

Từ hệ $\Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ Vậy ta xét $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{3x} = a \\ \sqrt{y} = b \end{cases}; (a, b > 0)$

Hệ phương trình cần giải có dạng $\begin{cases} a - \frac{12a}{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3} \quad (1) \\ b + \frac{12b}{a^2 + b^2} = 6 \quad (2) \end{cases}$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta được :

$$a + bi + \frac{12(bi - a)}{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3} + 6i$$

Đặt $z = a + bi \Rightarrow z \neq 0$.

Phương trình :

$$z - \frac{12\bar{z}}{|z|^2} = 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z - \frac{12}{z} = 2\sqrt{3} + 6i$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (2\sqrt{3} + 6i)z - 12 = 0$$

$$\Delta' = (3 + \sqrt{3}i)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} + 3i + 3 + \sqrt{3}i = (\sqrt{3} + 3) + (3 + \sqrt{3})i \\ z_2 = \sqrt{3} + 3i - 3 - \sqrt{3}i = (\sqrt{3} - 3) + (3 - \sqrt{3})i \end{cases}$$

(Loại z_2 do $a > 0, b > 0$)

Từ đó ta có $\begin{cases} a = 3 + \sqrt{3} \\ b = 3 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x} = 3 + \sqrt{3} \\ \sqrt{y} = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1 \\ \sqrt{y} = 3 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 12 + 6\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})\}$$

Bài toán 2.7:

$$\text{Giải hệ PT : } \begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{Đề thi HSG QG năm 1996})$$

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

$$\text{Đk: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \neq 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ $\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Hệ phương trình cần giải có dạng:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} = \frac{2}{\sqrt{3x}} & (1) \\ 1 - \frac{1}{x+y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} = \frac{1}{x+y} \end{cases} \\
& \Rightarrow \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} = \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow 7y(x+y) - 24x(x+y) = 21xy \\
& \Leftrightarrow 7xy + 7y^2 - 24x^2 - 24xy = 21xy \\
& \Leftrightarrow (6x-y)(4x+7y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6x \\ 4x+7y = 0(l) \end{cases}
\end{aligned}$$

. $y = 6x$ thay vào (1)

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{7x} = \frac{2}{\sqrt{3x}} \Leftrightarrow 7\sqrt{3x} - 14\sqrt{x} + \sqrt{3} = 0$$

$$\Delta' = 49 - 21 = 28$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{7+2\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \sqrt{x} = \frac{7-2\sqrt{7}}{7\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}} \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{21} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \Rightarrow y = \frac{22}{7} + \frac{8}{\sqrt{7}} \\ x = \frac{11}{21} - \frac{4}{3\sqrt{7}} \Rightarrow y = \frac{22}{7} - \frac{8}{\sqrt{7}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \left\{ \left(\frac{11}{21} + \frac{4}{3\sqrt{7}}; \frac{22}{7} + \frac{8}{\sqrt{7}} \right); \left(\frac{11}{21} - \frac{4}{3\sqrt{7}}; \frac{22}{7} - \frac{8}{\sqrt{7}} \right) \right\}$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ Đặt } \begin{cases} \sqrt{x} = a \\ \sqrt{y} = b \end{cases} \quad (a, b > 0)$$

Hệ phương trình cần giải có dạng

$$\begin{cases} \sqrt{3}a \left(1 + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) = 2 \\ \sqrt{7}b \left(1 - \frac{1}{a^2 + b^2} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} & (1) \\ b - \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} & (2) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có:

$$a + bi + \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i$$

$$\text{Đặt } z = a + bi \Rightarrow z \neq 0$$

$$\begin{aligned}
z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i \\
\Leftrightarrow z^2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i\right)z + 1 &= 0 \\
\Delta' &= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}}i - \frac{8}{7} - 1 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}}i - \frac{38}{21} = \left(\frac{2}{\sqrt{21}} + \sqrt{2}i\right)^2 \\
\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i + \frac{2}{\sqrt{21}} + \sqrt{2}i = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}\right)i \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i - \frac{2}{\sqrt{21}} - \sqrt{2}i = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}}\right) + \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2}\right)i \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \sqrt{y} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \sqrt{y} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} - \sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{11}{21} + \frac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \frac{22}{7} + \frac{8}{\sqrt{7}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{11}{21} - \frac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \frac{22}{7} - \frac{8}{\sqrt{7}} \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \left\{ \left(\frac{11}{21} + \frac{4}{3\sqrt{7}}; \frac{22}{7} + \frac{8}{\sqrt{7}} \right); \left(\frac{11}{21} - \frac{4}{3\sqrt{7}}; \frac{22}{7} - \frac{8}{\sqrt{7}} \right) \right\}$$

Bài toán 2.8:

$$\text{Giải hệ pt } \begin{cases} \left(3 - \frac{5}{y + 42x} \right) \sqrt{2y} = 4 \\ \left(3 + \frac{5}{y + 42x} \right) \sqrt{x} = 2 \end{cases}$$

(Đề thi Olympic 30-4 lần thứ VI năm 2000)

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

$$\text{Đk } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y + 42x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (loại). Vậy ta xét } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Hệ phương trình cần giải có dạng: } \begin{cases} 3 - \frac{5}{y + 42x} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \\ 3 + \frac{5}{y + 42x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} = 3 & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} = \frac{5}{y+42x} & (2) \end{cases} \\
&\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{15}{y+42x} \Leftrightarrow (y-2x)(y+42x) = 15xy \\
&\Leftrightarrow y^2 - 84x^2 + 25xy = 0 \Leftrightarrow (y-3x)(y+28x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ y + 28x = 0 & (l) \end{cases} \quad (\text{do } x > 0, y > 0)
\end{aligned}$$

• $y = 3x$ thay vào (1)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3x}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3\sqrt{3x} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{5+2\sqrt{6}}{27} \Rightarrow y = \frac{5+2\sqrt{6}}{9}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \left\{ \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{27}; \frac{5+2\sqrt{6}}{9} \right) \right\}$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{42x} = b; \sqrt{y} = a \quad (a, b > 0)$$

Hệ phương trình cần giải có dạng:

$$\begin{cases} 3a - \frac{5a}{a^2+b^2} = 2\sqrt{2} & (1) \\ 3b + \frac{5b}{a^2+b^2} = 2\sqrt{42} & (2) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có:

$$3(a+bi) - 5\frac{a-bi}{a^2+b^2} = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{21}i)$$

Đặt $z = a+bi \Rightarrow z \neq 0$, phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&3z - \frac{5}{z} = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{21}i) \\
&\Leftrightarrow 3z^2 - 2\sqrt{2}(1+\sqrt{21}i)z - 5 = 0 \\
&\Delta' = -25 + 4\sqrt{21}i = (\sqrt{3} + 2\sqrt{7}i)^2 \\
&\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{42}i + \sqrt{3} + 2\sqrt{7}i}{3} \\ z = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{42} - 2\sqrt{7}}{3}i & (l) \end{cases} \quad (\text{do } a, b > 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{42} + 2\sqrt{7}}{3}i \\
\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{\sqrt{42} + 2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{42x} = \frac{\sqrt{42} + 2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{9} \\ x = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{27} \end{cases}
\end{aligned}$$

vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \left\{ \left(\frac{5 + 2\sqrt{6}}{27}; \frac{5 + 2\sqrt{6}}{9} \right) \right\}$$

DẠNG TOÁN 3

Là các hệ phương trình phức tạp hơn, bằng phương pháp tách, nhóm khéo léo ta đưa dần về dạng toán 2. Kết hợp cách giải ở dạng 1 và dạng 2.

Bài toán 2.9:

$$\text{Giải hệ pt: } \begin{cases} x^3 + xy^2 - 7x^2 - 7y^2 + 5x + 7\sqrt{5}y = 0 \\ y^3 + x^2y + 7\sqrt{5}x - 5y = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

$$\text{Hệ phương trình đã cho tương đương với } \begin{cases} x(x^2 + y^2) + 5x + 7\sqrt{5}y = 7(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) + 7\sqrt{5}x - 5y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

• Xét $x = y = 0$ (thỏa mãn)

• Xét $x^2 + y^2 \neq 0$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 \quad (1) \\ y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (**)$$

Xét $x = 0$ ta có

$$\begin{cases} \frac{7\sqrt{5}}{y} = 7 \\ y - \frac{5}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{5} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Xét } y=0 \text{ hệ : } \begin{cases} x + \frac{5}{x} = 7 \\ \frac{7\sqrt{5}}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ vô nghiệm}$$

- Xét $xy \neq 0$ hệ

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + \frac{5xy + 7\sqrt{5}y^2}{x^2 + y^2} = 7y \\ xy + \frac{7\sqrt{5}x^2 - 5xy}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2xy + 7\sqrt{5} = 7y \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} - \frac{7\sqrt{5}}{2y}$$

Thay vào (2) ta có:

$$y \left(\frac{7}{2} - \frac{7\sqrt{5}}{2y} \right)^2 + y^3 + 7\sqrt{5} \left(\frac{7}{2} - \frac{7\sqrt{5}}{2y} \right) - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow 4y^4 + 29y^2 - 245 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 5)(4y^2 + 49) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{5} \Rightarrow x = 0 (l) \\ y = -\sqrt{5} \Rightarrow x = 7 (t/m) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(0; 0); (0; \sqrt{5}); (7; -\sqrt{5})\}$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

- $x = y = 0 (t/m)$

- $x^2 + y^2 \neq 0$ hệ phương trình cần giải có dạng:

$$\begin{cases} x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 (1) \\ y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0 (2) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có

$$x + yi + \frac{5(x - yi) + 7\sqrt{5}(y + xi)}{x^2 + y^2} = 7$$

$$\Leftrightarrow x + yi + \frac{5(x - yi) + 7\sqrt{5}i(x - yi)}{x^2 + y^2} = 7$$

Đặt $z = x + yi \Rightarrow z \neq 0$

Khi đó ta có:

$$z + \frac{5}{z} + \frac{7\sqrt{5}i}{z} = 7$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 7z + 5 + 7\sqrt{5}i = 0$$

$$\Delta' = 49 - 20 - 28\sqrt{5}i = 29 - 28\sqrt{5}i = (7 - 2\sqrt{5}i)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \frac{7 + 7 - 2\sqrt{5}i}{2} = 7 - \sqrt{5}i \\ z = \frac{7 - 7 + 2\sqrt{5}i}{2} = \sqrt{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 7 \\ y = -\sqrt{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(0; 0); (\sqrt{5}; 0); (7; -\sqrt{5})\}$$

Bài toán 2.10:

Giải hệ
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10y & (1) \\ y^3 + x^2y = 10x & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

(1)-(2)

$$\Rightarrow x^3 - y^3 + xy(y - x) = 10(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + xy(y - x) = 10(y - x)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + 10) = 0 \Leftrightarrow y = x$$

Thay vào (1)

$$\Rightarrow 2x^3 = 10x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \sqrt{5} \Rightarrow y = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$T = \{(0; 0); (-\sqrt{5}; -\sqrt{5}); (\sqrt{5}; \sqrt{5})\}$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Xét $x = 0$ thay vào hệ $\Rightarrow y = 0$. Từ đó $(0; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Nếu: $x^2 + y^2 \neq 0$ hệ phương trình cần giải có dạng
$$\begin{cases} x = \frac{10y}{x^2 + y^2} & (1) \\ y = \frac{10x}{x^2 + y^2} & (2) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta có:

$$x + yi = \frac{10(y + xi)}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x + yi = \frac{10i(x - yi)}{x^2 + y^2} \quad (*). \text{ Đặt } z = x + yi \Rightarrow z \neq 0.$$

Phương trình (*) trở thành:

$$z = \frac{10i\bar{z}}{|z|^2} \Leftrightarrow z^2 = 10i \Leftrightarrow z^2 = 5.2i$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 5(1 + i)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{5} + \sqrt{5}i \\ z = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i \end{cases}$$

• Với $z = \sqrt{5} + \sqrt{5}i \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = \sqrt{5} \end{cases}$

• Với $z = -\sqrt{5} - \sqrt{5}i \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \\ y = -\sqrt{5} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ là: $T = \{(0; 0); (-\sqrt{5}; -\sqrt{5}); (\sqrt{5}; \sqrt{5})\}$

Nhận xét 2.4

Trong quá trình giảng dạy ta có thể tự sáng tạo ra nhiều bài tập mới cho học sinh luyện tập.

Ví dụ như khi ta cần một phương trình có 3 nghiệm $z_1 = -3i; z_2 = \sqrt{3}; z_3 = -\sqrt{3}$.

Ta xét $(z + 3i)(z^2 - 3) = 0$

Biến đổi tương đương ta được phương trình: $z^3 + 3iz^2 - 3z - 9i = 0$ (1)

Đặt $z = x + iy$ thay vào (1) và khai triển ra ta được:

$$\begin{aligned} & (x^3 - 3xy^2 + 6xy - 3x) + (3x^2y - y^3 - 3x^2 + 3y^2 - 3y + 2)i = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 6xy - 3x = 0 \\ 3x^2y - y^3 - 3x^2 + 3y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy ta được hai bài toán mới đó là :

1. Giải phương trình $z^3 + 3iz^2 - 3z - 9i = 0$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 6xy - 3x = 0 \\ 3x^2y - y^3 - 3x^2 + 3y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Hoặc muốn có một hệ phương trình có tập nghiệm là:

$$T = \{(1; 0); (3; -1); (-1; 1)\}$$

Ta xuất phát từ các số phức sau:

$$z = 1, z = 3 - i, z = -1 + i$$

Ta xét tích:

$$\begin{aligned} & (z - 1)(z - 3 + i)(z + 1 - i) = 0 \\ \Leftrightarrow & z^3 - 3z^2 + 4iz - 4i + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & z^2 - 3z + 4i + \frac{2 - 4i}{z} = 0 \end{aligned}$$

Đặt $z = x + yi$ ta có:

$$\begin{aligned} & \left(x^2 - y^2 - 3x + \frac{2x - 4y}{x^2 + y^2}\right) + \left(2xy - 3y + 4 - \frac{4x + 2y}{x^2 + y^2}\right)i = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + \frac{2x - 4y}{x^2 + y^2} \\ 2xy - 3y + 4 - \frac{4x + 2y}{x^2 + y^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^4 - y^4 - 3x^3 - 3xy^2 + 2x - 4y = 0 \\ 2x^3y - 3x^2y + 2xy^3 - 3y^3 + (2x - 1)^2 = 1 + 2y - 4y^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ta được hai bài toán mới:

Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + \frac{2x - 4y}{x^2 + y^2} \\ 2xy - 3y + 4 - \frac{4x + 2y}{x^2 + y^2} \end{cases} \\ 2. \quad & \begin{cases} x^4 - y^4 - 3x^3 - 3xy^2 + 2x - 4y = 0 \\ 2x^3y - 3x^2y + 2xy^3 - 3y^3 + (2x - 1)^2 = 1 + 2y - 4y^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy ta có thể sáng tạo được ra rất nhiều hệ phương trình từ đơn giản đến phức tạp, từ các bài dành cho thi Đại học đến các bài tập dành cho thi học sinh giỏi.

Bài tập: (Sử dụng kiến thức về số phức, giải các hệ phương trình sau:)

Giải các hệ phương trình sau :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} \end{cases} & 2. \quad & \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{3} \left(1 + \frac{6}{x+y} \right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{6}{x+y} \right) = 1 \end{cases} \\ 3. \quad & \begin{cases} x + y + 4 = \frac{12x + 11y}{x^2 + y^2} \\ y - x + 3 = \frac{11x - 12y}{x^2 + y^2} \end{cases} & 4. \quad & \begin{cases} x^4 + y^4 - 6x^2y^2 = \sqrt{3} \\ 4x^3y - 4xy^3 = 1 \end{cases} \\ 5. \quad & \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ y^3 - 3x^2y = -\sqrt{3} \end{cases} & 6. \quad & \begin{cases} x(x^2 - 3y^2) = -2\sqrt{3} \\ y(3x^2 - y^2) = 2 \end{cases} \\ 7. \quad & \begin{cases} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 4 \\ x^3y - y^3x = -\sqrt{3} \end{cases} & 8. \quad & \begin{cases} x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4) = \sqrt{3} \\ y(y^4 - 10x^2y^2 + 5x^4) = -1 \end{cases} \\ 9. \quad & \begin{cases} \sqrt{10x} \left(1 + \frac{3}{5x+y} \right) = 3 \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{3}{5x+y} \right) = -1 \end{cases} & 10. \quad & \begin{cases} \sqrt{x} \left(2 + \frac{7}{2x+5y} \right) = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{5y} \left(2 - \frac{7}{2x+5y} \right) = \sqrt{3} \end{cases} \\ 11. \quad & \begin{cases} \sqrt{x} \left(2 - \frac{15}{x+2y} \right) = 2 + \sqrt{3} \\ \sqrt{y} \left(2 + \frac{15}{x+2y} \right) = 3(\sqrt{3} - 1) \end{cases} & 12. \quad & \begin{cases} x + \frac{16x - 11y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y - \frac{11x + 16y}{x^2 + y^2} = -1 \end{cases} \\ 13. \quad & \begin{cases} x + \frac{9x + \sqrt{10}y}{x^2 + y^2} = 3\sqrt{2} \\ y + \frac{\sqrt{10}x + 9y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} & 14. \quad & \begin{cases} x + \frac{78y}{x^2 + y^2} = 20 \\ y + \frac{78x}{x^2 + y^2} = 15 \end{cases} \end{aligned}$$

Chương 3

Ứng dụng số phức chứng minh bất đẳng thức.

3.1 Kiến thức sử dụng.

Cho số $z = a + bi$ ta có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Cho $z_1 = a_1 + b_1i; z_2 = a_2 + b_2i$, ta có: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = ka_1 \\ b_2 = kb_1 \end{cases} \quad (k \geq 0)$

- Tổng quát: cho $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$.

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}$$

Ta xét các số phức, $z_1 = a_1 + b_1i; z_2 = a_2 + b_2i, \dots, z_n = a_n + b_ni$

Ta luôn có

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \geq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}$$

Suy ra điều phải chứng minh. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a_i = k_i a_1 \\ b_i = k_i b_1 \end{cases} \quad ; (k_i \geq 0)$

3.2 Bài tập áp dụng.

I. Chứng minh bất đẳng thức

Bài toán 3.1: CMR $\forall x \in R$ ta có

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \geq 2\sqrt{5}$$

(Phương pháp tọa độ để giải các bài toán sơ cấp - Phan Huy Khải.)

Lời giải:

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

Đặt $P = \sqrt{(x+1)^2 + 4} + \sqrt{(1-x)^2 + 4}$ Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{5}P &= \sqrt{[(x+1)^2 + 2^2][1^2 + 2^2]} + \sqrt{[(1-x)^2 + 2^2][1^2 + 2^2]} \\ &\geq (x+1+4) + (1-x+4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}P \geq 10 \Rightarrow P \geq 2\sqrt{5}$$

$$\text{Dấu "}" \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\sqrt{(x+1)^2 + 2^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 2^2} \geq 2\sqrt{5}$$

Xét các số phức

$$z_1 = (x+1) + 2i; z_2 = (1-x) + 2i$$

$$VT = |z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| = |2 + 4i| = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 1+x = 1-x \Leftrightarrow x = 0$

Nhận xét 3.1: Với học sinh việc sử dụng được bất đẳng thức với việc thêm bớt khéo léo là điều rất khó khăn, song khi đưa về căn bậc hai của tổng các bình phương thì các em dễ dàng nhận ra nó là môđun của một số phức. Chính vì vậy

mà cách sử dụng số phức trong bài toán trên gọn nhẹ và đơn giản hơn rất nhiều.

Bài toán 3.2: CMR $\forall x, y \in R$ ta có

$$\sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} \geq 5$$

(Phương pháp tọa độ để giải các bài toán sơ cấp - Phan Huy Khải.)

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

$$\text{Đặt } T = \sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (2y-3)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5T &= \sqrt{[(x+3)^2 + (2y)^2](4^2 + 3^2)} + \sqrt{[(1-x)^2 + (3-2y)^2](4^2 + 3^2)} \\ &\geq |4x + 12 + 6y| + |4(1-x) + 3(3-2y)| \\ &\geq |4x + 12 + 6y + 4(1-x) + 3(3-2y)| = 25 \\ &\Rightarrow T \geq 5 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{4} = \frac{2y}{3-2y} \\ \frac{x-1}{4} = \frac{3-2y}{3} \\ (4x+6y+12)(13-4x-6y) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8y+9=0 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} \geq 5$$

Xét các số phức:

$$z_1 = (x+3) + (2y)i, \quad z_2 = (1-x) + (3-2y)i$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 4 + 3i \Rightarrow |z_1 + z_2| = 5$$

Có $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| = 5 \Rightarrow$ dpcm

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \quad \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_1 = kz_2 (k > 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k-3}{k+1} \\ y = \frac{3k}{2(k+1)} \end{cases} \quad (k > 0)$$

Nhận xét 3.2: Cũng như bài toán trên việc phải đánh giá qua nhiều bất đẳng thức là rất phức tạp song các em có thể dễ dàng nhận ra vế trái là tổng các môđun của hai số phức nên việc sử dụng số phức đơn giản hơn rất nhiều. Việc sử dụng số phức giúp các em dễ nhận dạng toán và nhớ dạng hơn rất nhiều.

Bài toán 3.3: CMR $\forall x, y \in R$ ta có

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

(Đề thi đại học công đoàn năm 1995)

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

Đặt $a=2\cos x \cos y$, $b=\sin(x-y)$, $c=2\sin x \sin y$, $d=\sin(x-y)$

Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$$

Bất đẳng thức tương đương:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} &\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức bu nhia cốp xki ta có:

$$VT = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq \sqrt{(ac + bd)^2} = |ac + bd| \geq ac + bd$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} a = b = 0 \\ c = d = 0 \\ \begin{cases} a = kc \\ b = kd \end{cases} \quad (k > 0) \end{cases}$$

$$\text{Thay vào ta tìm được } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = n\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \text{ hoặc } x + y = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

$$z_1 = 2 \cos x \cos y + \sin(x - y) i$$

$$z_2 = 2 \sin x \sin y + \sin(x - y) i$$

$$\text{xét: } \Rightarrow z_1 + z_2 = 2 \cos(x - y) + 2 \sin(x - y) i$$

$$VT = |z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| = \sqrt{4 [\cos^2(x - y) + \sin^2(x - y)]} \\ = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow (dpcm)$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_2 = kz_1 \ (k > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \text{ hoặc } x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Bài toán 3.4: CMR $\forall x, y, z \in R$ ta có

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

(500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức - Trần Phương.)

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \\ A &= \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}z^2} \\ A^2 &= \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + \left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}z^2 + \\ &\quad + 2\sqrt{\left[\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2\right] \left[\left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}z^2\right]} \\ \Rightarrow A^2 &\geq \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + \left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}z^2 + \\ &\quad + 2\left[\left(x + \frac{1}{2}y\right)\left(x + \frac{1}{2}z\right) + \frac{3}{4}yz\right] \\ \Rightarrow A^2 &\geq \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}z\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{2}y\right)\left(x + \frac{1}{2}z\right) + \frac{3}{4}(y^2 + z^2 + 2yz) \\ \Rightarrow A^2 &\geq \left(x + \frac{1}{2}y - x - \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{3}{4}(y + z)^2 = y^2 + z^2 + yz \\ \Rightarrow A &\geq \sqrt{y^2 + z^2 + yz} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-k}{k+1}z \\ y = kz \end{cases} \quad (k \geq 0)$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} + \sqrt{\left(-x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Xét số phức

$$z_1 = \left(x + \frac{1}{2}y\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}yi; z_2 = \left(-x - \frac{z}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}zi$$

$$\begin{aligned} VT = |z_1| + |z_2| &\geq |z_1 + z_2| = \left| \frac{1}{2}(y - z) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z)i \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(y - z)^2 + \frac{3}{4}(y + z)^2} \end{aligned}$$

$$VT \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2} = VP \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = k\left(-x - \frac{1}{2}z\right) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = k\frac{\sqrt{3}}{2}z \end{cases} \quad (k \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-k}{k+1}z \\ y = kz \end{cases} \quad (k \geq 0)$$

Bài toán 3.5: Cho a,b,c,d thoả mãn:

$$a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b); c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d)$$

Chứng minh rằng: $(a - c)^2 + (b - d)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^6$

(Các phương pháp giải toán - Nguyễn Thái Hòa - NXB Giáo dục)

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

A(a;b) nằm trên đường tròn(C_1) tâm $I_1(1;1); R_1=1$ B(c;d) nằm trên đường tròn(C_2) tâm $I_2(6;6); R_2=6$ Khi đó :do $I_1I_2 = 5\sqrt{2} > R_1 + R_2 = 7 \Rightarrow (C_1), (C_2)$ không cắt nhau. Với hai điểm A,B bất kỳ trên đường tròn ta luôn có:

$$AB \leq R_1 + R_2 + I_1I_2$$

Vì vậy: $\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = AB \leq R_1 + R_2 + I_1I_2 = 7 + 5\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^3$

$\Rightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^6$ Dấu bằng xảy ra khi A và B lần lượt là các giao điểm ngoài của đường thẳng $I_1 I_2$ lần lượt với $(C_1), (C_2)$. Tìm tọa độ giao

điều ta suy ra:

$$\begin{cases} a = b = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c = d = 3\sqrt{2} + 6 \end{cases}$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Từ giả thiết ta suy ra

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = 1; (c-6)^2 + (d-6)^2 = 36$$

$$\text{Xét : } z_1 = 1 - a + (1 - b)i; z_2 = c - 6 + (d - 6)i; z_3 = 5 + 5i$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = (c - a) + (d - b)i$$

$$\text{Ta có: } |z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3|$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 1 + 6 + 5\sqrt{2} \geq \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} \\ &\Leftrightarrow (c-a)^2 + (d-b)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^6 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 5k_1 \\ 1 - b = 5k_1 \\ c - 6 = 5k_2 \\ d - 6 = 5k_2 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1, (c-6)^2 + (d-6)^2 = 36 \end{cases} \quad (k_1, k_2 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c = d = 3\sqrt{2} + 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài toán 3.6: CMR với $x, y, z > 0$ ta có:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + xz + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$$

(Đại học quan hệ quốc tế năm 1997)

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{(3+1) \left[\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 \right]} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(3+1) \left[\left(y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2 \right]} + \sqrt{(3+1) \left[\left(z + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 \right]} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VT &\geq \frac{1}{2} \left[\sqrt{3} \left(x + \frac{1}{2}y \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \left(y + \frac{1}{2}z \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}z + \sqrt{3} \left(z + \frac{1}{2}x \right) + \frac{\sqrt{3}}{2}x \right] \\
&\Rightarrow VT \geq \frac{1}{2} [2\sqrt{3}(x+y+z)] = \sqrt{3}(x+y+z)
\end{aligned}$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(\frac{z\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(z + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&\geq \sqrt{3}(x+y+x)
\end{aligned}$$

Đặt

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}yi \\ z_2 &= y + \frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}zi \\ z_3 &= z + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}xi \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 = \frac{3}{2}(x+y+z) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y+z)i$$

Khi đó

$$VT = |z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{3(x+y+z)^2} = \sqrt{3}(x+y+z)$$

(đpcm)

II. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài toán 3.7: Cho các số thực a,b,c thoả mãn

$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = abc \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}}$$

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

Giả thiết suy ra

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$$

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} \\
T^2 &= 3 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 + \frac{1}{b^2}\right)} + \\
&\quad + 2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{b^2}\right)\left(1 + \frac{1}{c^2}\right)} + 2\sqrt{\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)\left(1 + \frac{1}{c^2}\right)} \\
&\Rightarrow T^2 \geq 3 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(1 + \frac{1}{ab} + 1 + \frac{1}{bc} + 1 + \frac{1}{ca}\right) \\
&\Rightarrow T^2 \geq 9 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 9 + 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 12 \\
&\Rightarrow T \geq 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Vậy $\text{Min}T = 2\sqrt{3}$ đạt được khi $a = b = c = \sqrt{3}$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Từ giả thiết ta có

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$$

Xét các số phức $z_1 = 1 + \frac{1}{a}i$; $z_2 = 1 + \frac{1}{b}i$; $z_3 = 1 + \frac{1}{c}i$ Ta có:

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} = |z_1| + |z_2| + |z_3| \\
T &\geq |z_1 + z_2 + z_3| = \left| 3 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)i \right| = \sqrt{9 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \\
&\Rightarrow T \geq \sqrt{9 + 3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Vậy $\text{Min}T = 2\sqrt{3}$ đạt được khi $a = b = c = \sqrt{3}$

Bài toán 3.8: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$.

$$\text{Tìm min } F = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}$$

(Đề thi Đại học khối A-2003)

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

Ta có:

$$\begin{aligned}
\sqrt{82}.F &= \sqrt{(1^2 + 9^2) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{(1^2 + 9^2) \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)} + \\
&\quad + \sqrt{(1^2 + 9^2) \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)} \\
&\geq x + \frac{9}{x} + y + \frac{9}{y} + z + \frac{9}{z} \\
&\Rightarrow \sqrt{82}.F \geq \left(\frac{9}{x} + 81x\right) + \left(\frac{9}{y} + 81y\right) + \left(\frac{9}{z} + 81z\right) - 80(x + y + z) \\
&\geq 2\sqrt{9.81} + 2\sqrt{9.81} + 2\sqrt{9.81} - 80 \\
&\Rightarrow \sqrt{82}.F \geq 82 \Rightarrow F \geq \sqrt{82}
\end{aligned}$$

Min $F = \sqrt{82}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Xét các số phức: $z_1 = x + \frac{1}{x}i$; $z_2 = y + \frac{1}{y}i$; $z_3 = z + \frac{1}{z}i$ Khi đó:

$$\begin{aligned}
F &= |z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3| = \left| (x + y + z) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)i \right| \\
&= \sqrt{(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2} \geq \sqrt{9\sqrt[3]{(xyz)^2} + \frac{9}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}} \\
&= \sqrt{9\sqrt[3]{(xyz)^2} + \frac{1}{9\sqrt[3]{(xyz)^2}} + \frac{80}{9\sqrt[3]{(xyz)^2}}} \geq \sqrt{2 + 80} = \sqrt{82}
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$x = y = z = \frac{1}{3}$$

Bài toán 3.9: Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab + bc + ca = abc \end{cases}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{cb} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca}$$

(Đề thi Đại học Quốc Gia Khối D - 2000)

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

Ta có:

$$\sqrt{3(b^2 + 2a^2)} = \sqrt{(1+1+1)(b^2 + a^2 + a^2)} \geq \sqrt{(b+a+a)^2} = b+2a$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{3(c^2 + 2b^2)} &\geq c+2b \\ \sqrt{3(a^2 + 2c^2)} &\geq a+2c \\ \Rightarrow T &\geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{b+2a}{ba} + \frac{c+2b}{bc} + \frac{a+2c}{ca} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3(ab+bc+ca)}{abc} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của $T=\sqrt{3}$ đạt được khi $a=b=c=3$

Cách 2 :(Sử dụng số phức)

Bất đẳng thức tương đương

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{2}{a^2}} \geq \sqrt{3}$$

Xét

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{2}}{b}i; z_2 = \frac{1}{b} + \frac{\sqrt{2}}{c}i; z_3 = \frac{1}{c} + \frac{\sqrt{2}}{a}i \\ \Rightarrow z_1 + z_2 + z_3 &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{b} + \frac{\sqrt{2}}{c} + \frac{\sqrt{2}}{a} \right)i \end{aligned}$$

Có

$$\begin{aligned} T = |z_1| + |z_2| + |z_3| &\geq |z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \\ T &\geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của $T= \sqrt{3}$ đạt được khi $a=b=c=3$

Bài toán 3.10: Cho

$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 8 \end{cases}$$

Tìm min

$$P = \sqrt{\log_2^2 x + 1} + \sqrt{\log_2^2 y + 1} + \sqrt{\log_2^2 z + 1}$$

(Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học Tuổi trẻ)

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

$$a = \log_2 x; b = \log_2 y; c = \log_2 z$$

$$\Rightarrow a + b + c = \log_2 (xyz) = \log_2 8 = 3$$

$$P = \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 4}$$

$$\text{Đặt } \Rightarrow P^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6 + 2\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)} + 2\sqrt{(b^2 + 1)(c^2 + 4)} + 2\sqrt{(c^2 + 4)(a^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow P^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 6 + 2(ab + 1) + 2(bc + 2) + 2(ca + 2)$$

$$\Rightarrow P^2 \geq (a + b + c)^2 + 10 + 6 = 9 + 10 + 6 = 25 \Rightarrow P \geq 5$$

$$\text{Min } P = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{b}{c} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2b \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Thay lại ta tính được: } \begin{cases} x = y = \sqrt[4]{8} \\ z = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Xét các số phức $z_1 = \log_2 x + i; z_2 = \log_2 y + i; z_3 = \log_2 z + 2i;$

Khi đó

$$P = |z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1 + z_2 + z_3| = |(\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z) + (1 + 1 + 2)i|$$

$$\Rightarrow p \geq \sqrt{(\log_2 xyz)^2 + 16} = \sqrt{(\log_2 8)^2 + 16} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\text{Min } P = 5 \text{ khi } \begin{cases} xyz = 8 \\ x, y, z > 0 \\ \log_2 x = \log_2 y = \frac{\log_2 z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \sqrt[4]{8} \\ z = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

III. Ứng dụng giải phương trình

Bài toán 3.11: Giải phương trình:

$$\sqrt{\cos^2 x - 2 \cos x + 3} + \sqrt{\cos^2 x + 4 \cos x + 6} = \sqrt{17}$$

Lời giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{(1 - \cos x)^2 + 2} + \sqrt{(\cos x + 2)^2 + 2} = \sqrt{17}$$

Xét các số phức
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - \cos x + \sqrt{2}i \\ z_2 &= 2 + \cos x + \sqrt{2}i \end{aligned}$$

Khi đó $z_1 + z_2 = 3 + 2\sqrt{2}i \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{17}$

Phương trình trở thành:

$$|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \cos x = k(1 - \cos x) \\ \sqrt{2} = k\sqrt{2} \end{cases} \quad (k \geq 0)$$

Từ đó ta suy ra

$$\cos x + 2 = 1 - \cos x \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + m2\pi$$

Kết luận: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + m2\pi$

Bài toán 3.12: Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2\sqrt{2}$$

Lời giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{(x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x+1)^2 + 1} = 2\sqrt{2}$$

Xét các số phức:
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - x + i \\ z_2 &= 1 + x + i \end{aligned}$$

Khi đó $z_1 + z_2 = 2 + 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$

Phương trình trở thành:

$$|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow 1 - x = 1 + x \Leftrightarrow x = 0$$

Kết luận: $x=0$.

Bài toán 3.13: Tìm những cặp số (x,y) thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{x^2 + 4y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 4y^2 - 2x - 12y + 10} = 5$$

Lời giải

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (2y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (3-2y)^2} = 5$$

Xét các số phức: $z_1 = x + 3 + 2yi$
 $z_2 = 1 - x + (3 - 2y)i$

Khi đó $z_1 + z_2 = 4 + 3i \Rightarrow |z_1 + z_2| = 5$

Phương trình trở thành:

$$|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_2 = kz_1 \ (k > 0) \end{cases}$$

$$z_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$z_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$z_1 = kz_2 \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k-3}{k+1} \\ y = \frac{3k}{2(k+1)} \end{cases} \quad (k > 0)$$

Kết luận: Tập nghiệm

$$T = \left\{ (-3; 0); \left(1; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{k-3}{k+1}; \frac{3k}{2(k+1)}\right) \right\} \text{ với } k \in R_+^*$$

Nhận xét 3.3

Trong quá trình giảng dạy ta có thể tự sáng tạo ra nhiều bài tập mới cho học sinh luyện tập.

Ví dụ : Ta xét số phức $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

Khi đó $z_1 + z_2 = (a + b) + (c + d)i$

Ta luôn có :

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \quad (1) \text{ Từ (1) ta}$$

cho a, b, c, d những giá trị thích hợp, hoặc biến đổi (1) bằng cách lũy thừa, chuyển vế sau đó thay giá trị a, b, c, d bởi những giá trị thích hợp ta được các bài toán mới. Chẳng hạn từ (1) ta cho $b = 3 - a$, $c = 4 - a$, $d = a$

$$\text{Ta được : } \sqrt{2a^2 - 6a + 9} + \sqrt{2a^2 - 8a + 16} \geq 5$$

Khi đó ta được các bài toán:

1. Chứng minh rằng: $\sqrt{2a^2 - 6a + 9} + \sqrt{2a^2 - 8a + 16} \geq 5$, $\forall a \in R$.

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$.

3. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = 5$

Nếu lấy: $a = x + \frac{1}{2}y$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}y$; $c = -x - \frac{z}{2}$; $d = \frac{\sqrt{3}}{2}z$

Ta được bất đẳng thức:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Như vậy ta có thể sáng tạo được ra rất nhiều hệ phương trình từ đơn giản đến phức tạp, từ các bài dành cho thi Đại học đến các bài tập dành cho thi học sinh giỏi.

Bài tập. Sử dụng kiến thức về số phức giải các bài tập sau

Bài 1. Cho $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ ax + by + cz = 6 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{16a^2 + a^2x^2} + \sqrt{16b^2 + b^2y^2} + \sqrt{16c^2 + c^2z^2} \geq 10$$

Bài 2. Cho a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 + 16 = 8a + 6b$

Chứng minh rằng: $7b \leq 24a$

Bài 3. Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + y^2}} + \frac{|y - z|}{\sqrt{1 + y^2} \cdot \sqrt{1 + z^2}} > \frac{|x - z|}{\sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{1 + z^2}}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\forall x, y, z > 0$ ta có:

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} + \sqrt{y^2 - yz + z^2} \geq \sqrt{x^2 + xz + z^2}$$

Bài 5. Cho $x^2 + y^2 = 1$

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{9 - 4(x + y)} + \sqrt{3 + 2(x + y)} \geq 3\sqrt{2}$$

Bài 6. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} = 2$$

Bài 7. Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + |y - 2|$$

Chương 4

Ứng dụng số phức trong lượng giác.

4.1 Phương pháp giải toán.

1. Sử dụng công thức Moa- Vơ.

2. Sử dụng các phép toán thông thường của số phức (cộng, trừ, nhân, chia).

Thực hiện phép so sánh phần thực, phần ảo cho những đẳng thức lượng giác.

Chú ý rằng, các tính chất của số thực được bảo toàn nguyên vẹn cho số phức, đặc biệt các phép toán khai triển lũy thừa, công thức Niu- tơn, cấp số nhân,...

Mặt khác việc sử dụng số phức cùng một số phép biến đổi có thể chứng minh nhiều đẳng thức khác nhau. Sau đây ta xét một số ví dụ áp dụng số phức để chứng minh một số công thức lượng giác thường gặp và tìm ra một số công thức tổng quát của những công thức lượng giác khác, từ đó thấy rõ hơn xuất phát điểm hay gốc rễ của nhiều bài toán quen thuộc trong trường số thực.

Sau đây, chúng tôi sẽ sử dụng những kiến thức của số phức để giải quyết một số dạng toán sau:

- Dạng 1. *Tính giá trị của biểu thức lượng giác*
- Dạng 2. *Giải phương trình lượng giác*
- Dạng 3. *Chứng minh các đẳng thức lượng giác*

C. Phần bài tập áp dụng

I. Ứng dụng tính giá trị biểu thức lượng giác

Bài toán 4.1: Chứng minh rằng

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Lời giải:

Cách 1 :(Không sử dụng số phức)

Ta có :

$$\begin{aligned} \sin \frac{2\pi}{10} &= \cos \frac{3\pi}{10} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} &= 4 \cos^3 \frac{\pi}{10} - 3 \cos \frac{\pi}{10} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{10} &= 4 \cos^2 \frac{\pi}{10} - 3 \quad (\text{do } \cos \frac{\pi}{10} \neq 0) \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{10} &= 4 \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{10}\right) - 3 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{10} &= -4 \sin^2 \frac{\pi}{10} + 1 \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{10} &= -4 \sin^2 \frac{\pi}{10} + 1 \\ \Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{10} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 \left(\sin \frac{\pi}{10} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right) \left(\sin \frac{\pi}{10} + \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad (\text{do } \sin \frac{\pi}{10} > 0) \\ \text{Từ đó } \cos \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{10} &= 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Cách 2 :(Sử dụng số phức)

$$\text{Đặt } x = \cos \frac{\pi}{5}, y = \sin \frac{\pi}{5}; \quad z = x + iy = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$$

$$\text{Ta có: } z^5 = -1 \text{ hay } (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$$

Vì $z \neq -1$ nên $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$ do $z \neq 0$ nên chia hai vế cho z^2 ta được:

$$\begin{aligned} \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ta để ý rằng $x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)$ Từ đẳng thức trên ta có:

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Do $x > 0$ nên $x = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

Bài toán 4.2 : Tính giá trị biểu thức

$$A = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$$

(Đại học phòng cháy chữa cháy năm 2001)

Lời giải:

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \\ \Rightarrow A &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{5\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \\ &= \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } A = \frac{1}{2}$$

Nhận xét 4.1 Nếu ta xét số phức $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ thì ta nhận thấy ngay $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$ là phần thực của số phức $z + z^2 + z^3$ vì vậy ta có thể giải bài toán theo cách sau:

Cách 2: (Sử dụng số phức)

$$\text{Xét số phức } z = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$$

Áp dụng công thức Moa-vơ có:

$$z + z^3 + z^5 = \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} \right) i \quad (1)$$

Mặt khác

$$z + z^3 + z^5 = \frac{z^7 - z}{z^2 - 1} . \text{ Do } z^7 = \cos \pi + i \sin \pi = -1 , \text{ suy ra:}$$

$$z + z^3 + z^5 = \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{14} i \quad (2) \text{ Từ (1) và (2) ta có:}$$

$$A = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

Nhận xét 4.2: Sử dụng cách giải có sử dụng kiến thức số phức ta còn thu được kết quả:

$$\sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{14}$$

Ngoài ra ta nhận thấy sử dụng số phức giúp học sinh tư duy hướng giải theo một cách tự nhiên hơn so với cách giải thông thường.

Bài toán 4.3: Cho $u_n = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos \frac{2\pi}{6}\right)^2 + \dots + \left(\cos \frac{n\pi}{6}\right)^2$

Tính u_{2012}

(Đề thi học sinh giỏi thành phố Hải Phòng - 1998)

Lời giải:

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } U_{2012} &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{3\pi}{3}}{2} + \dots + \frac{1 + \cos \frac{2012\pi}{3}}{2} \\ \Rightarrow U_{2012} &= 1006 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{3} + \dots + \cos \frac{2012\pi}{3} \right) \\ \Rightarrow U_{2012} &= 1006 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2\cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} + 2\cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} \dots + 2\cos \frac{2012\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} \\ \Rightarrow U_{2012} &= 1006 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{2} + \dots + \sin \frac{4025\pi}{6} - \sin \frac{4023\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} \\ \Rightarrow U_{2012} &= 1006 + \frac{1}{4} \cdot \frac{-\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{4025\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} \\ \Rightarrow U_{2012} &= 1006 + \frac{-\sin \frac{\pi}{6} + \sin \left(670\pi + \frac{5\pi}{6} \right)}{4 \sin \frac{\pi}{6}} \\ \Rightarrow U_{2012} &= 1006 + \frac{-\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6}}{4 \sin \frac{\pi}{6}} = 1006 + \frac{-\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}}{4 \sin \frac{\pi}{6}} = 1006 \end{aligned}$$

Vậy : $U_{2012} = 1006$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

$$\text{Ta có: } U_{2012} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{3\pi}{3}}{2} + \dots + \frac{1 + \cos \frac{2012\pi}{3}}{2}$$

$$U_{2012} = 1006 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{3} + \dots + \cos \frac{2012\pi}{3} \right)$$

Xét số phức $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

$$z + z^2 + \dots + z^{2012} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \dots + \cos \frac{2012\pi}{3} \right) + \left(\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \dots + \sin \frac{2012\pi}{3} \right) i \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } 1 + z + z^2 + \dots + z^{2012} = \frac{z^{2013} - 1}{z - 1}$$

$$z^{2013} = \cos \frac{2013\pi}{3} + i \sin \frac{2013\pi}{3} = \cos 671\pi + i \sin 671\pi = -1$$

Suy ra

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{2012} = \frac{2}{1 - z} = \frac{2}{1 - \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{\left(1 - \cos \frac{\pi}{3} \right)^2 + \sin^2 \frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{Nên ta có } z + z^2 + \dots + z^{2012} = \sqrt{3}i \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \dots + \cos \frac{2012\pi}{3} = 0$$

Từ đó suy ra $U_{2012} = 1006$.

Nhận xét 4.3:

Ngoài việc giải được bài toán trên ta còn thu được kết quả:

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \dots + \sin \frac{2012\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Bài toán 4.4: Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}}$

(Tuyển tập các chuyên đề luyện thi Đại học môn Toán - Trần Phương)

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

Nhận thấy $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}$ là ba nghiệm của phương trình $\cos t + \cos 2t + \cos 3t = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 t + 2\cos^2 t - 2\cos t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 t + 4\cos^2 t - 4\cos t - 1 = 0$$

Đặt $x = \cos t$ khi đó ta có $\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{8\pi}{7}$ là ba nghiệm của phương trình:

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$

Theo định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_1x_2x_3 = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Đặt $A = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}$

$B = \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2x_3} + \sqrt[3]{x_3x_1}$

Khi đó :

$$A^3 = (x_1 + x_2 + x_3) - 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} + 3AB = -2 + 3AB$$

$$B^3 = -\frac{1}{2} + 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) (\sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}) (\sqrt[3]{x_3} + \sqrt[3]{x_1})$$

$$\begin{aligned} B^3 &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} [2\sqrt[3]{x_1x_2x_3} + \sqrt[3]{x_1x_2} (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) + \sqrt[3]{x_1x_3} (\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_3}) + \sqrt[3]{x_2x_3} (\sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3})] \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} (AB - \sqrt[3]{x_1x_2x_3}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(AB - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}AB - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Ta có:

$$A^3 = 3AB - 2$$

$$B^3 = \frac{3}{2}AB - \frac{5}{4}$$

Từ đó ta có:

$$4A^3B^3 = (3AB - 2)(6AB - 5)$$

$$\Leftrightarrow 4A^3B^3 = 18A^2B^2 - 27AB + 10$$

$$\Leftrightarrow 8A^3B^3 - 36A^2B^2 + 54AB - 27 = -7$$

$$\Leftrightarrow (2AB - 3)^3 = -7 \Leftrightarrow 2AB - 3 = -\sqrt[3]{7} \Leftrightarrow AB = \frac{3 - \sqrt[3]{7}}{2}$$

Ta có:

$$A = \sqrt[3]{3AB - 2} = \sqrt[3]{\frac{9 - 3\sqrt[3]{7}}{2} - 2} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 - 3\sqrt[3]{7})}$$

$$\text{Vậy: } A = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 - 3\sqrt[3]{7})}$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

$$\text{Tính giá trị biểu thức } T = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}}$$

Xét số phức $x_k = \cos \frac{k2\pi}{7} + i \sin \frac{k2\pi}{7}$ ($k=0,1,2,\dots,6$) là các nghiệm của phương

trình: $x^7 = 1$ từ đó suy ra x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, 6$) là nghiệm của phương trình:

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Phương trình tương đương $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ (Do $x=0$ không là nghiệm)

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$, khi đó $y_k = x_k + \frac{1}{x_k} = x_k + \overline{x_k} = 2 \cos \frac{k2\pi}{7}$ ($k = 1, 2, 3$) là nghiệm của phương trình: $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$.

Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = -1 \\ y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = -2 \\ y_1y_2y_3 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } A = \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3}$$

$$\text{Và } B = \sqrt[3]{y_1y_2} + \sqrt[3]{y_2y_3} + \sqrt[3]{y_3y_1} \text{ Khi đó } T = \frac{A}{\sqrt[3]{2}}$$

Ta có:

$$A^3 = (y_1 + y_2 + y_3) - 3\sqrt[3]{y_1y_2y_3} + 3AB = -4 + 3AB$$

$$B^3 = -2 + 3\sqrt[3]{y_1y_2y_3} (\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}) (\sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3}) (\sqrt[3]{y_3} + \sqrt[3]{y_1})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B^3 &= -2 + 3[2\sqrt[3]{y_1y_2y_3} + \sqrt[3]{y_1y_2}(\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}) + \sqrt[3]{y_1y_3}(\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_3}) + \sqrt[3]{y_2y_3}(\sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3})] \\ &= -2 + 3(AB - \sqrt[3]{y_1y_2y_3}) = -2 + 3(AB - 1) = 3AB - 5 \end{aligned}$$

Ta có:

$$A^3 = 3AB - 4$$

$$B^3 = 3AB - 5 \text{ Từ đó ta có:}$$

$$A^3B^3 = (3AB - 4)(3AB - 5)$$

$$\Leftrightarrow A^3B^3 - 9A^2B^2 + 27AB - 27 = -7 \Leftrightarrow (AB - 3)^3 = -7 \Leftrightarrow AB - 3 = -\sqrt[3]{7} \Leftrightarrow AB =$$

$$3 - \sqrt[3]{7} \text{ Ta có } A = \sqrt[3]{3AB - 4} = \sqrt[3]{9 - 3\sqrt[3]{7} - 4} = \sqrt[3]{5 - 3\sqrt[3]{7}}$$

$$\text{Vậy: } T = \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} = \frac{A}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 - 3\sqrt[3]{7})}$$

Nhận xét 4.4: Qua một số ví dụ trên ta nhận thấy rằng để tính các tổng

$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb)$$

hoặc $\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \dots + \sin(a+nb)$ (Trong đó các góc liên tiếp lập thành cấp số cộng có công sai bằng b) thì việc sử dụng số phức giúp học sinh tư duy theo một cách tự nhiên hơn nhiều so với các cách giải thông thường khác,

đồng thời học sinh cũng dễ nhớ, dễ thực hiện do các phép toán biến đổi đơn giản.

II. Ứng dụng giải phương trình lượng giác

Bài toán 4.5: Giải phương trình :

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6$$

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

ĐK: $x \neq \frac{k\pi}{2}$ Phương trình tương đương: $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 6$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = 6\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 8\sin^2 x \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2\sin^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Kết luận: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Xét $z = \cos x + i \sin x$ ($z \neq 0$)

Khi đó ta có:

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$-\left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right)^2 - \left(\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \right)^2 = 6$$

$$-(z^2 - 1)^4 - (z^2 + 1)^4 = 6(z^4 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow -(z^8 - 4z^6 + 6z^4 - 4z^2 + 1) - (z^8 + 4z^6 + 6z^4 + 4z^2 + 1) = 6(z^8 - 2z^4 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 8z^8 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^8 = -1$$

Lại có : $z^8 = \cos 8x + i \sin 8x$

Từ đó ta có $\cos 8x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$

Bài toán 4.6: Giải phương trình:

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x - 2\sin^2 x - 4\cos^3 x + 3\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos x (1 - \cos^2 x) - 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x (2\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Kết luận: $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Xét số phức $z = \cos x + i.\sin x$ ($z \neq 0$)

Khi đó ta có:

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \cos 2x = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right); \cos 3x = \frac{1}{2} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right)$$

Thay vào phương trình ta có:

$$\frac{z^2 + 1}{2z} + \frac{z^4 + 1}{2z^2} - \frac{z^6 + 1}{2z^3} = 1$$

$$\Leftrightarrow z^4 + z^2 + z^5 + z - z^6 - 1 - 2z^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^6 + z^3) - (z^5 + z^2) - (z^4 + z) + z^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^3 + 1)(z^3 - z^2 - z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^3 + 1)(z - 1)^2(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^3 + 1 = 0 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm 1 \\ z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \pm 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Kết luận : $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

Bài toán 4.7: Giải phương trình:

$$\frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}$$

(Đề thi Đại học Thủy Lợi - 2000)

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } \frac{\sin 3x}{3} &= \frac{\sin 5x}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin x (3 - 4\sin^2 x)}{3} &= \frac{\sin x \cdot [2 \cos 3x \cos x + \cos 2x (3 - 4\sin^2 x)]}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin x (2 \cos 2x + 1)}{3} &= \frac{\sin x \cdot [\cos 4x + \cos 2x + \cos 2x (2 \cos 2x + 1)]}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin x (2 \cos 2x + 1)}{3} &= \frac{\sin x \cdot (4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1)}{5} \\ \Leftrightarrow \sin x \cdot (12\cos^2 2x - 4\cos 2x - 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases} \\ \text{Kết luận: } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Xét số phức $z = \cos x + i \cdot \sin x$ ($z \neq 0$)

Khi đó ta có $\sin 3x = \frac{1}{2i} \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right)$; $\sin 5x = \frac{1}{2i} \left(z^5 - \frac{1}{z^5} \right)$

Thay vào phương trình ta được:

$$\frac{1}{6} \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right) = \frac{1}{10} \left(z^5 - \frac{1}{z^5} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 5z^8 - 5z^2 = 3z^{10} - 3 \\
&\Leftrightarrow 3z^{10} - 5z^8 + 5z^2 - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (z^2 - 1)^3 (3z^4 + 4z^2 + 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 1 \\ z^2 = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i \end{cases}
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có: $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x$ Từ đó ta suy ra :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\frac{2}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết luận: $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases}$

Bài toán 4.8: Giải phương trình:

$$32\cos^6 x - \cos 6x = 1$$

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

$$\begin{aligned}
&32\cos^6 x - \cos 6x = 1 \\
&\Leftrightarrow 32\cos^6 x = 1 + \cos 6x \\
&\Leftrightarrow 16\cos^6 x = \cos^2 3x \\
&\Leftrightarrow 16\cos^6 x - \cos^2 3x = 0 \\
&\Leftrightarrow (4\cos^3 x - \cos 3x)(4\cos^3 x + \cos 3x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos^2 x \cdot (8\cos^2 x - 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos x \cdot (4\cos 2x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{cases} \\
&\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết luận: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases}$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Ta có: $(\cos x + i \sin x)^6 = \cos 6x + i \sin 6x$

Mặt khác ta có: $(\cos x + i.\sin x)^6 = c_6^0 \cos^6 x + c_6^1 \cos^5 x \cdot (i.\sin x) + \dots + c_6^6 (i.\sin x)^6$
 $= (\cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x + 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x) + (6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x) \cdot i$
 vậy ta có:

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x (1 - \cos^2 x) + 15\cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 - (1 - \cos^2 x)^3$$

Thay lại phương trình ta được:

$$32\cos^6 x - 32\cos^6 x + 48\cos^4 x - 18\cos^2 x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 48\cos^4 x - 18\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 x (8\cos^2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (4\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases}$$

Kết luận: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi \end{cases}$

Bài toán 4.9: Giải phương trình:

$$\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

(Đề thi đại học khối B-2011)

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

Phương trình viết lại thành:

$$2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos x = 2\cos^2 x + \cos x + \sin x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x (2\cos x + 1) = (2\cos x + 1) \cos x + \sin x - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot (2\cos x + 1) (\sin x - 1) = \sin x - 1$$

$$\Leftrightarrow (2\cos^2 x + \cos x - 1) (\sin x - 1) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\
\text{Kết luận: } &\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Cách 2: (Sử dụng số phức)

Phương trình viết lại thành: $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 2\cos 2x + 2\cos x$

Xét $z = \cos x + i.\sin x$ ($z \neq 0$)

Ta có:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \cos 2x = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right); \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \\
\sin 2x &= \frac{1}{2i} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right); \sin 3x = \frac{1}{2i} \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right)
\end{aligned}$$

Thay vào phương trình ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i} \left[\left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right) + \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right) - \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] = z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} \right) = z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} \\
&\Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} \right) \left(z - \frac{1}{z} - 2i \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) - 2 \right] (z - i)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z + \frac{1}{z} = 1 \\ z + \frac{1}{z} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = -1 \\ z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta được: } \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Kết luận: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Bài toán 4.10: Giải phương trình:

$$8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$$

(Đề thi đại học QG năm 1999)

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

Đặt $y = x + \frac{\pi}{3}$ khi đó phương trình trở thành:

$$8\cos^3 y = -\cos 3y$$

Phương trình

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 y = -(4\cos^3 y - 3\cos y)$$

$$\Leftrightarrow 12\cos^3 y - 3\cos y = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos y \cdot (4\cos^2 y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos y \cdot (2\cos 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ \cos 2y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Thay vào x ta được: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$

Kết luận: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Đặt $y = x + \frac{\pi}{3}$ khi đó phương trình trở thành: $8\cos^3 y = -\cos 3y$

$$\text{Xét } z = \cos y + i \cdot \sin y \quad (z \neq 0)$$

Thay vào phương trình ta có:

$$\begin{aligned}
& \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = -\frac{1}{2} \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) \\
& \Leftrightarrow 2 \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = - \left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3 \left(z + \frac{1}{z}\right) \right] \\
& \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = \left(z + \frac{1}{z}\right) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} z + \frac{1}{z} = 0 \\ \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + \frac{1}{z} = 0 \\ z^2 + \frac{1}{z^2} = -1 \end{cases} \\
\text{Từ đó ta được: } & \begin{cases} \cos y = 0 \\ \cos 2y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \\
\text{Thay vào x ta được: } & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \\
\text{Kết luận: } & \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Nhận xét 4.5: So với các cách giải thông thường thì việc sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác không mấy khả quan hơn song việc sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác giúp cho học sinh có thêm một cách lựa chọn khi đứng trước một bài toán, đồng thời tạo sự linh hoạt, tìm tòi, sáng tạo, hứng thú trong học tập .

III. Chứng minh các đẳng thức lượng giác lượng giác

Bài toán 4.11: cho $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. CMR:

a. $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c \Leftrightarrow a + b + c = k\pi$.

b. $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a = 1 \Leftrightarrow a + b + c = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

a. Ta có:

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$$

$$\Leftrightarrow \tan b + \tan c = \tan a (\tan b \tan c - 1)$$

$$\Leftrightarrow -\tan a = \frac{\tan b + \tan c}{1 - \tan b \tan c}$$

$$\Leftrightarrow \tan(-a) = \tan(b + c)$$

$$\Leftrightarrow b + c = -a + k\pi$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = k\pi$$

b. Ta có:

$$\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a = 1$$

$$\Leftrightarrow \tan b (\tan a + \tan c) = 1 - \tan a \tan c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan b} = \frac{\tan a + \tan c}{1 - \tan a \tan c}$$

$$\Leftrightarrow \cot b = \tan(a + c)$$

$$\Leftrightarrow \tan(a + c) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

$$\Leftrightarrow a + c = \frac{\pi}{2} - b + k\pi$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Nhận xét 4.6: Ta dễ dàng nhận thấy

$$a + b + c = k\pi \Leftrightarrow \sin(a + b + c) = 0; a + b + c = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos(a + b + c) = 0$$

Mặt khác $\sin(a + b + c); \cos(a + b + c)$ là phần ảo và phần thực của tích $(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c)$ vì vậy ta có cách giải thứ hai.

Cách 2:(Sử dụng số phức)

$$\text{Xét số phức } z = (1 + i \tan a) \cdot (1 + i \tan b) \cdot (1 + i \tan c)$$

Khai triển số phức z trên theo quy tắc nhân 2 số phức ta được:

$$z = (1 - \tan a \cdot \tan b - \tan b \cdot \tan c - \tan c \cdot \tan a)$$

$$+ (\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c) i \quad (1)$$

Mặt khác sử dụng công thức Moa-vơ cho số phức z trên ta được:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\cos a + i \sin a) \cdot (\cos b + i \sin b) \cdot (\cos c + i \sin c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} \\ &= \frac{\cos(a + b + c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(a + b + c)}{\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c} i \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\text{a. } \tan a + \tan b + \tan c = \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c \Leftrightarrow \sin(a+b+c)=0 \Leftrightarrow a+b+c = k\pi \text{ (đpcm).}$$

$$\text{b. } \tan a \cdot \tan b + \tan b \cdot \tan c + \tan c \cdot \tan a = 1 \Leftrightarrow \cos(a+b+c)=0 \Leftrightarrow a+b+c = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét 4.7 Với những bài chứng minh đẳng thức như trên việc sử dụng số phức giúp cho học sinh có hướng đi tự nhiên, đơn giản, gọn nhẹ thu được kết quả tổng quát hơn so với các cách giải thông thường.

Bài toán 4.12: Cho: $a \neq k\pi, b \neq k\pi, c \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. CMR:

$$\text{a. } \cot a \cdot \cot b + \cot b \cdot \cot c + \cot c \cdot \cot a = 1 \Leftrightarrow a+b+c = k\pi$$

$$\text{b. } \cot a \cdot \cot b \cdot \cot c = \cot a + \cot b + \cot c \Leftrightarrow a+b+c = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Lời giải:

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

a. Ta có

$$\cot a \cot b + \cot b \cot c + \cot c \cot a = 1$$

$$\Leftrightarrow \cot a(\cot b + \cot c) = 1 - \cot c \cot a$$

$$\Leftrightarrow \cot a = \frac{1 - \cot c \cot b}{\cot b + \cot c}$$

$$\Leftrightarrow \cot a = \cot(-b - c)$$

$$\Leftrightarrow a = -b - c + k\pi$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = k\pi$$

B. Ta có

$$\cot a \cdot \cot b \cdot \cot c = \cot a + \cot b + \cot c$$

$$\Leftrightarrow \cot a \cdot (\cot b \cdot \cot c - 1) = \cot b + \cot c$$

$$\Leftrightarrow \cot a = \frac{\cot b + \cot c}{\cot b \cot c - 1}$$

$$\Leftrightarrow \cot a = \tan(b + c)$$

$$\Leftrightarrow \cot a = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b - c\right)$$

$$a = \frac{\pi}{2} - b - c + k\pi$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Do dạng lượng giác của số phức là $\cos\alpha + i\sin\alpha$ nên ta xét số phức:

$$z = (\cot a + i).(\cot b + i).(\cot c + i)$$

Khai triển số phức z trên theo quy tắc nhân 2 số phức ta được:

$$z = (\cot a . \cot b . \cot c - \cot a - \cot b - \cot c) + (\cot a . \cot b + \cot b . \cot c + \cot c . \cot a - 1) i \quad (1)$$

Mặt khác sử dụng công thức Moa-vơ cho số phức z trên ta có:

$$z = \frac{(\cos a + i \sin a).(\cos b + i \sin b).(\cos c + i \sin c)}{\sin a . \sin b . \sin c}$$

$$= \frac{\cos(a + b + c)}{\sin a . \sin b . \sin c} + \frac{\sin a . \sin b . \sin c}{\sin(a + b + c)} i \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a. \cot a . \cot b + \cot b . \cot c + \cot c . \cot a = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(a + b + c) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = k\pi \quad (\text{đpcm})$$

$$b. \cot a . \cot b . \cot c = \cot a + \cot b + \cot c \Leftrightarrow \cos(a + b + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{đpcm})$$

Nhận xét 4.8: Từ kết quả của hai bài toán trên ta tìm lại được các đẳng thức quen thuộc trong tam giác: Tam giác ABC có:

$$1. \tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C .$$

$$2. \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$3. \cot A . \cot B + \cot B . \cot C + \cot C . \cot A = 1$$

$$4. \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} . \cot \frac{B}{2} . \cot \frac{C}{2}$$

Bài toán 4.13: $\forall a, b \in R, b \neq k2\pi$.CMR:

$$a. \sum_{k=1}^n \sin(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{n+1}{2}b\right) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

$$b. \sum_{k=1}^n \cos(a + kb) = \frac{\cos\left(a + \frac{n+1}{2}b\right) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

Lời giải

Cách 1 :(Không sử dụng số phức)

$$\begin{aligned} a. \text{ Ta có: } VT &= \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \dots + \sin(a + nb) \\ \Rightarrow VT &= \frac{2 \sin(a + b) \sin \frac{b}{2} + 2 \sin(a + 2b) \sin \frac{b}{2} + \dots + 2 \sin(a + nb) \sin \frac{b}{2}}{2 \sin \frac{b}{2}} \\ &= \frac{\cos\left(a + \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{3b}{2}\right) + \cos\left(a + \frac{5b}{2}\right) - \dots - \cos\left(a + \frac{(2n+1)b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}} \\ &= \frac{\cos\left(a + \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{(2n+1)b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}} \\ &= \frac{2 \sin\left(a + \frac{n+1}{2}b\right) \cdot \sin \frac{nb}{2}}{2 \sin \frac{b}{2}} = \frac{\sin\left(a + \frac{n+1}{2}b\right) \cdot \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \\ \text{Vậy: } \sum_{k=1}^n \sin(a + kb) &= \frac{\sin\left(a + \frac{n+1}{2}b\right) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \dots + \cos(a + nb) \\ \Rightarrow VT &= \frac{2 \cos(a + b) \sin \frac{b}{2} + 2 \cos(a + 2b) \sin \frac{b}{2} + \dots + 2 \cos(a + nb) \sin \frac{b}{2}}{2 \sin \frac{b}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(a + \frac{3b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{b}{2}\right) + \sin\left(a + \frac{5b}{2}\right) - \dots - \sin\left(a + \frac{(2n-1)b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(a + \frac{(2n+1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\cos\left(a + \frac{n+1}{2}b\right) \cdot \sin \frac{nb}{2}}{2\sin \frac{b}{2}} = \frac{\cos\left(a + \frac{n+1}{2}b\right) \cdot \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

$$\text{Vậy: } \sum_{k=1}^n \cos(a + kb) = \frac{\cos\left(a + \frac{n+1}{2}b\right) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}$$

Cách 2:(Sử dụng số phức)

$$\text{Xét số phức } \sum_{k=1}^n \cos(a + kb) + \left(\sum_{k=1}^n \sin(a + kb) \right) i.$$

$$\text{Đặt } z_0 = \cos a + i \sin a, \quad z = \cos b + i \sin b$$

Theo công thức Moa-vơ ta có:

$$z_0 \cdot z^k = (\cos a + i \sin a) (\cos kb + i \sin kb)$$

$$= \cos(a + kb) + i \sin(a + kb), \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Như vậy $\sum_{k=1}^n \cos(a + kb) + \left(\sum_{k=1}^n \sin(a + kb) \right) i$ được biến đổi như sau:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \cos(a + kb) + \left(\sum_{k=1}^n \sin(a + kb) \right) i \\ &= \sum_{k=1}^n [\cos(a + kb) + i \sin(a + kb)] = \sum_{k=1}^n z_0 \cdot z^k \\ &= z_0(z + z^2 + z^3 + \dots + z^n) = z_0 \cdot z \frac{z^n - 1}{z - 1} = z_0 \cdot z \frac{(z^n - 1)(\bar{z} - 1)}{(z - 1) \cdot (\bar{z} - 1)} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } \bullet (z - 1) \cdot (\bar{z} - 1) = z \cdot \bar{z} - (z + \bar{z} - 1) = 2(1 - \cos b) = 4\sin^2 \frac{b}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \bar{z} - 1 &= -2\sin^2 \frac{b}{2} - i2\sin \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \\ &= -2\sin \frac{b}{2} \left(\cos \frac{\pi - b}{2} + i \sin \frac{\pi - b}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet z^n - 1 &= -2\sin^2 \frac{nb}{2} + i2\sin \frac{nb}{2} \cdot \cos \frac{nb}{2} \\ &= 2\sin \frac{nb}{2} \left(\cos \frac{\pi + nb}{2} + i \sin \frac{\pi + nb}{2} \right) \end{aligned}$$

Áp dụng công thức Moa-vơ thu được:

$$\begin{aligned} & z \cdot z_0 \frac{(z^n - 1)(\bar{z} - 1)}{(z - 1)(\bar{z} - 1)} \\ &= \frac{-\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \left[\cos \left(\pi + a + \frac{n+1}{2}b \right) + i \sin \left(\pi + a + \frac{n+1}{2}b \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \cdot \cos \left(a + \frac{n+1}{2}b \right) + i \cdot \frac{\sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \cdot \sin \left(a + \frac{n+1}{2}b \right) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) so sánh phần thực phần ảo của tổng ban đầu ta có:

$$\begin{aligned} \text{a. } \sum_{k=1}^n \sin(a + kb) &= \frac{\sin \left(a + \frac{n+1}{2}b \right) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \\ \text{b. } \sum_{k=1}^n \cos(a + kb) &= \frac{\cos \left(a + \frac{n+1}{2}b \right) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Nhận xét 4.9: Với mỗi giá trị của a, b cho ta một công thức, chẳng hạn cho

$a = -x, b = 2x \neq k2\pi$ ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x &= \frac{\cos \left(-x + \frac{n+1}{2}2x \right) \sin \frac{n2x}{2}}{\sin \frac{2x}{2}} \\ &= \frac{\cos nx \cdot \sin nx}{\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} \end{aligned}$$

Nhận xét 4.10: Với mỗi giá trị của n, x sao cho $\sin 2nx = \sin x \neq 0$ thì ta luôn

$$\text{có: } \sum_{k=1}^n \cos(a + kb) = \frac{1}{2} \quad . \quad \text{Ví dụ ta chọn } x = \frac{\pi}{2n+1}$$

Từ đó ta có một số kết quả quen thuộc như sau: Với $n = 2$ chọn $x = \frac{\pi}{5}$, ta có

$$\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } n = 3 \text{ chọn } x = \frac{\pi}{7}, \text{ ta có } \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } n = 4 \text{ chọn } x = \frac{\pi}{9}, \text{ ta có } \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } n = 5 \text{ chọn } \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = \frac{1}{2}, \text{ ta có}$$

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

Nhận xét 4.11: Thông qua phép lấy đạo hàm hai vế ta được kết quả một công thức mới:

Đó là với $x \neq k2\pi$ ta có:

$$\text{a. } \sum_{k=1}^n k \cos kx = \left[\frac{\sin \left(\frac{n+1}{2}x \right) \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]'$$

$$\text{b. } \sum_{k=1}^n k \sin kx = - \left[\frac{\cos \left(\frac{n+1}{2}x \right) \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right]'$$

Bài toán 4.14: Chứng minh :

$$\forall x \in R, \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x ; \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Lời giải

Cách 1:(Sử dụng số phức)

Sử dụng công thức cộng cung, công thức góc nhân đôi ta có:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(x + 2x) \\ &= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác ta có: } \sin 3x &= \sin(x + 2x) \\ &= \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\ &= \sin x (1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x \cos^2 x \\ &= \sin x - 2\sin^3 x + 2\sin x (1 - \sin^2 x) \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x \end{aligned}$$

Nhận xét 4.12 Ta nhận thấy $z = \cos x + i \sin x$ thì $z^3 = \cos 3x + i \sin 3x$

Nên để chứng minh công thức trên ta có thể sử dụng việc khai triển $(\cos x + i \sin x)^3$ theo hai cách

Cách 2:(Sử dụng số phức)

Xét số phức dưới dạng lượng giác $z = \cos x + i \sin x$.

Theo công thức Moa-vơ ta có:

$$z^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x \quad (1)$$

Mặt khác khai triển:

$$(\cos x + i \sin x)^3 = (4\cos^3 x - 3\cos x) + (3\sin x - 4\sin^3 x)i \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ (đpcm).

Nhận xét 4.13: Nếu vận dụng khai triển Niu-tơn, ta có thể khai triển $\sin nx$, $\cos nx$ theo các góc bội của x . Sau đây ta xét đến công thức hạ bậc.

Bài toán 4.15: Chứng minh:

a. $\forall x \in R, \cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$.

b. $\forall x \in R, \sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$.

Lời giải

Cách 1:(Không sử dụng số phức)

$$\begin{aligned} \text{a. ta có: } \cos^4 x &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } \forall x \in R, \cos^4 x &= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3). \text{ b. } \sin^5 x = \sin x \cdot \sin^4 x = \sin x \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\sin x \cdot (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4}\sin x \cdot \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8}\sin x \cdot (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) \\ &= \frac{1}{16}(6\sin x - 8\cos 2x \sin x + 2\cos 4x \sin x) \\ &= \frac{1}{16}(6\sin x - 4\sin 3x + 4\sin x + \sin 5x - \sin 3x) \\ &= \frac{1}{16}(10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \forall x \in R, \sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x).$$

Nhận xét 4.14: Xét số phức $z = \cos x + i\sin x$ ta có $z^n = \cos nx + i\sin nx$ và $\frac{1}{z^n} = \cos nx - i\sin nx$ nên ta có $\cos^n x = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$; $\sin^n x = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$ do đó ta có suy nghĩ để giải bài toán trên theo số phức.

Cách 2:(Sử dụng số phức) Xét số phức dưới dạng lượng giác: $z = \cos x + i\sin x$. Ta có:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos nx; z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nx.$$

Do vậy:

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^4 = \frac{1}{2^4} \left[z^4 + \frac{1}{z^4} + C_4^1 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + C_4^2 \right] \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) \\ \sin^5 x &= \left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]^5 = \frac{1}{2^5 i} \left[C_5^0 \left(z^5 - \frac{1}{z^5} \right) - C_5^1 \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right) + C_5^2 \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16} (C_5^0 \sin 5x - C_5^1 \sin 3x + C_5^2 \sin x) \\ &= \frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x). \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Một cách tổng quát ta xét ví dụ sau:

Bài toán 4.16 : Chứng minh: $\forall x \in R, \forall m \in N$ ta có:

$$\begin{aligned} \text{a. } \cos^{2m} x &= \frac{1}{2^{2m-1}} \left[C_{2m}^0 \cos 2mx + C_{2m}^1 \cos (2m-2)x + \dots + C_{2m}^m \cos 2x + \frac{1}{2} C_{2m}^m \right] \\ &= \frac{1}{2^{2m-1}} \left[C_{2m}^m + \sum_{k=0}^{m-1} \cos (2m-k)x \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \sin^{2m+1} x &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \left[C_{2m+1}^0 \sin (2m+1)x - C_{2m+1}^1 \sin (2m-1)x + \dots + (-1)^m C_{2m+1}^m \sin x \right] \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k (-1)^k \sin (2m-2k+1)x \end{aligned}$$

Lời giải

Cách 1: (Không sử dụng số phức)

a. Điều cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned} c_{2m}^0 \cos 2mx + c_{2m}^1 \cos (2m-2)x + \dots + c_{2m}^{m-1} \cos 2x + \frac{1}{2} c_{2m}^m &= 2^{2m-1} \cos^{2m} x = 2^{2m-1} (2 \cos^2 x)^m \\ \Leftrightarrow c_{2m}^0 \cos 2mx + c_{2m}^1 \cos (2m-2)x + \dots + c_{2m}^{m-1} \cos 2x + \frac{1}{2} c_{2m}^m &= 2^{2m-1} (\cos 2x + 1)^m \end{aligned}$$

Ta chứng minh đẳng thức trên bằng phương pháp quy nạp Với $n=1$ ta có

$$VT = c_2^0 \cos 2x + \frac{1}{2} c_2^1 = \cos 2x + 1 = VP$$

$$\begin{aligned} \text{Với } n=2 \text{ ta có } VT &= c_4^0 \cos 4x + c_4^1 \cos 2x + \frac{1}{2} c_4^2 = \cos 4x + 4 \cos 2x + 3 \\ &= 2 \cos^2 2x + 4 \cos 2x + 2 = 2(\cos 2x + 1)^2 = VP \end{aligned}$$

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \geq 2$)

Ta có

$$c_{2k}^0 \cos 2kx + c_{2k}^1 \cos (2k-2)x + \dots + c_{2k}^{k-1} \cos 2x + \frac{1}{2} c_{2k}^k = 2^{2k-1} (\cos 2x + 1)^k$$

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức ta cần chứng minh:

$$c_{2k+2}^0 \cos (2k+2)x + c_{2k+2}^1 \cos 2kx + \dots + c_{2k+2}^k \cos 2x + \frac{1}{2} c_{2k+2}^{k+1} = 2^k (\cos 2x + 1)^{k+1}$$

Thật vậy :

$$\begin{aligned} VP &= 2^{k-1} (\cos 2x + 1)^k \cdot 2 (\cos 2x + 1) \\ &= \left(c_{2k}^0 \cos 2kx + c_{2k}^1 \cos (2k-2)x + \dots + \frac{1}{2} c_{2k}^k \right) \cdot 2 (\cos 2x + 1) \\ &= [2c_{2k}^0 \cos 2kx \cdot \cos 2x + 2c_{2k}^1 \cos (2k-2)x \cdot \cos 2x + \dots + c_{2k}^k \cos 2x] \\ &\quad + 2 \left[c_{2k}^0 \cos 2kx + c_{2k}^1 \cos (2k-2)x + \dots + \frac{1}{2} c_{2k}^k \right] \\ &= [c_{2k}^0 (\cos (2k+2)x + \cos (2k-2)x) + \dots + c_{2k}^{k-1} (\cos 4x + 1) + c_{2k}^k \cos 2x] \\ &\quad + 2 \left[c_{2k}^0 \cos 2kx + c_{2k}^1 \cos (2k-2)x + \dots + c_{2k}^{k-1} \cos 2x + \frac{1}{2} c_{2k}^k \right] \\ &= c_{2k}^0 \cos (2k+2)x + (c_{2k}^1 + 2c_{2k}^0) \cos 2kx + (c_{2k}^0 + 2c_{2k}^1 + c_{2k}^2) \cos (2k-2)x + \dots \\ &\quad + (c_{2k}^{k-2} + 2c_{2k}^{k-1} + c_{2k}^k) \cos 2x + c_{2k}^{k-1} + c_{2k}^k \end{aligned}$$

Với $n \in \mathbb{Z}, n \in \{1; 2; 3; 4; \dots; n-2\}$

Ta có:

$$c_{2k}^n + 2c_{2k}^{n+1} + c_{2k}^{n+2} = (c_{2k}^n + c_{2k}^{n+1}) + (c_{2k}^{n+1} + c_{2k}^{n+2}) = c_{2k+1}^{n+2} + c_{2k+1}^{n+2} = c_{2k+2}^{n+2}$$

$$c_{2k}^0 = c_{2k+2}^0 = 1$$

$$c_{2k}^1 + 2c_{2k}^0 = 2k+2 = c_{2k+2}^1$$

$$\begin{aligned} c_{2k}^{k-1} + c_{2k}^k &= c_{2k+1}^k = \frac{(2k+1)!}{k! \cdot (k+1)!} = \frac{(2k+1)! (2k+2)}{2(k+1) \cdot k! \cdot (k+1)!} = \frac{(2k+2)!}{2(k+1)! (k+1)!} = \\ &= \frac{1}{2} c_{2k+2}^{k+1} \end{aligned}$$

Vậy:

$$VP = c_{2k+2}^0 \cos (2k+2)x + c_{2k+2}^1 \cos 2kx + \dots + c_{2k+2}^k \cos 2x + \frac{1}{2} c_{2k+2}^{k+1} = VT$$

Bài toán được chứng minh.

b. Phần b được chứng minh tương tự.

Cách 2:(Sử dụng số phức)

a. Xét số phức dưới dạng lượng giác: $z = \cos x + i \sin x$. Ta có:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos nx; \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nx.$$

Do vậy: $\cos^{2m} x = \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k z^k \left(\frac{1}{z} \right)^{2m-k}$

Vì $C_{2m}^k = C_{2m}^{2m-k}$ nên thu gọn công thức trên ta được:

$$\begin{aligned} \cos^{2m} x &= \frac{1}{2^{2m}} \left[C_{2m}^0 \left(z^{2m} + \frac{1}{z^{2m}} \right) + C_{2m}^1 \left(z^{2m-2} + \frac{1}{z^{2m-2}} \right) + \dots + C_{2m}^m \right] \\ &= \frac{1}{2^{2m-1}} \left[C_{2m}^0 \cos 2mx + C_{2m}^1 \cos (2m-2)x + \dots + C_{2m}^{m-1} \cos 2x + \frac{1}{2} C_{2m}^m \right] \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \left[\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos(2m-2k)x + \frac{1}{2} C_{2m}^m \right]. \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

b. Từ công thức: $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nx$. ta có:

$$\sin^{2m+1} x = \left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]^{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+1} \cdot i} \sum_{k=0}^{2m+1} C_{2m+1}^k z^k \left(\frac{-1}{z} \right)^{2m+1-k}$$

Vì $C_{2m}^k = C_{2m}^{2m-k}$ nên thu gọn công thức trên thu được:

$$\begin{aligned} \sin^{2m+1} x &= \frac{(-1)^m}{2^{2m+1} \cdot i} \left[C_{2m+1}^0 \left(z^{2m+1} - \frac{1}{z^{2m+1}} \right) + \dots + (-1)^m C_{2m+1}^m \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m} \left[C_{2m+1}^0 \sin(2m+1)x + \dots + (-1)^m C_{2m+1}^m \sin x \right] \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k (-1)^k \cos(2m-2k+1)x. \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Nhận xét 4.15: Thay một số giá trị đặc biệt của m : $m=1, m=2, \dots$ cho ta một số kết quả quen thuộc sau:

$$\begin{aligned} \text{Với } m=1: \cos^2 x &= \frac{1}{2} \left(C_2^0 \cos 2x + \frac{1}{2} C_2^1 \right) = \frac{\cos 2x + 1}{2} \\ \sin^3 x &= \frac{(-1)}{2^2} \left[C_3^0 \sin 3x - C_3^1 \sin x \right] = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x) \end{aligned}$$

Với $m=2$:

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \frac{1}{2^3} \left(C_4^0 \cos 4x + C_4^1 \cos 2x + \frac{1}{2} C_4^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) \\ \sin^5 x &= \frac{1}{2^4} (C_5^0 \sin 5x - C_5^1 \sin 3x + C_5^2 \sin x) \end{aligned}$$

Nhận xét 4.16: Để chứng minh một số công thức lượng giác, đặc biệt đối với các công thức tổng quát thì phương pháp sử dụng số phức tỏ ra lợi thế hơn rất nhiều so với các phương pháp khác, học sinh dễ định hướng, dễ biến đổi và dễ nhớ hơn.

BÀI TẬP THỰC HÀNH

Bài 1: Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \cos \frac{\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{7\pi}{13} + \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2} \\ \text{b. } & \sin \frac{9\pi}{26} + \sin \frac{5\pi}{26} + \sin \frac{\pi}{26} - \sin \frac{3\pi}{26} - \sin \frac{7\pi}{26} - \sin \frac{11\pi}{26} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bài 2: Chứng minh rằng:

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

Bài 3: Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} x \right) \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ với } x \neq k2\pi \\ \text{b. } & 1 + \cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos nx = \frac{\sin (2n+1)x}{2 \sin x}, \text{ với } x \neq k\pi \\ \text{c. } & \sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx = \frac{\sin nx \cdot \sin (n+1)x}{\sin x}, \text{ với } x \neq k\pi \end{aligned}$$

Bài 4 : Chứng minh rằng:

$$\sin \frac{\pi}{2m} \cdot \sin \frac{2\pi}{2m} \dots \sin \frac{(m-1)\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$$

Bài 5: Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a. } & 1 + a \cos x + a^2 \cos 2x + \dots + a^n \cos nx \\ &= \frac{a^{n+2} \cos nx - a^{n+1} \cos (n+1)x - a \cos x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1} \\ \text{b. } & a \sin x + a^2 \sin 2x + \dots + a^n \sin nx \\ &= \frac{a^{n+2} \sin nx - a^{n+1} \sin (n+1)x - a \sin x + 1}{a^2 - 2a \cos x + 1} \end{aligned}$$

Bài 6: Sử dụng công thức Moa-vơ biến đổi $\tan 5x$ qua $\tan x$.

Bài 7: Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2} \\ \text{b. } & 2\cos^3 x = \sin 3x \\ \text{c. } & \sin^2 2x + \cos^2 3x = 1 \\ \text{d. } & 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0 \\ \text{e. } & \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x = 0 \end{aligned}$$

Chương 5

Ứng dụng của số phức trong việc tính tổng các số C_n^k

5.1 Kiến thức sử dụng.

- $z = r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z .
- $z^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i \sin n\phi)$.
- $(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi, n \in \mathbb{N}$

. Công thức nhị thức Niu-Tơn

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

. Căn bậc ba của đơn vị Giải phương trình $x^3 - 1 = 0$ ta được các nghiệm là

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ các nghiệm đó là các căn bậc ba của } 1$$

Đặt $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ta có:

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0; \varepsilon^{3k} = 1; \varepsilon^{3k+1} = \varepsilon; \varepsilon^{3k+2} = \varepsilon^2$$

5.2 Phương pháp giải toán.

1. Nhận dạng dạng toán

Thông thường ta sử dụng số phức để tính tổng của các C_n^k ($0 \leq k \leq n; k, n \in \mathbb{N}$)

trong các trường hợp sau:

. Các dấu trong tổng xen kẽ đều nhau

. Khi chia k cho cùng một số ta luôn được cùng một số dư (ví dụ như $k=3l$, $k=3l+1$, $k=3l+2$)

2. Phương pháp giải toán

. Dạng 1: Hệ số của các số C_n^k có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì thông thường ta khai triển $(1+x)^n$ theo hai cách:

- Cách thứ nhất khai triển $(1+x)^n$ theo công thức nhị thức Newton sau đó cho x nhận giá trị thích hợp

- Sử dụng công thức Moa-vơ để tính $(1+x)^n$.

So sánh phần thực , phần ảo của cùng một số phức trong hai cách tính ta sẽ thu được kết quả cần tìm.

. Dạng 2: Hệ số của các số C_n^k có giá trị tuyệt đối tăng dần dưới dạng $1,3,4,7,\dots$ hoặc $2,4,6,8,\dots$ thì ta khai triển $(1+x)^n$ sau đó lấy đạo hàm hai vế rồi tiến hành theo hai cách như trên.

. Dạng 3: Khai triển $(1+x)^n$, cho x nhận lần lượt những giá trị là căn bậc ba của đơn vị , cộng từng vế của ba đẳng thức thu được ta thu được kết quả cần tìm.

5.3 Phần bài tập áp dụng.

Dạng 1: Khai triển $(1+x)^n$, cho x nhận giá trị thích hợp hoặc khai triển trực tiếp số phức $(a+bi)^n$ (a,b là các số thực).

Bài toán 5.1

Tính các tổng sau:

$$A = C_{2012}^0 - C_{2012}^2 + C_{2012}^4 - \dots - C_{2012}^{2010} + C_{2012}^{2012}$$

$$B = C_{2012}^1 - C_{2012}^3 + C_{2012}^5 - \dots - C_{2012}^{2011}$$

Nhận xét 5.1 Nhận thấy trong các tổng A, B :

. Các chỉ số chập của các số tổ hợp cách nhau hai đơn vị

. Hệ số của các số tổ hợp có giá trị tuyệt đối bằng nhau và đan dấu nhau nên ta dễ dàng nhận ra A, B là phần thực và phần ảo khi khai triển $(1+i)^{2012}$

Lời giải

Xét khai triển:

$$(1+x)^{2012} = C_{2012}^0 + C_{2012}^1 x + C_{2012}^2 x^2 + \dots + C_{2012}^{2011} x^{2011} + C_{2012}^{2012} x^{2012} \quad (1)$$

Thay $x=i$ vào khai triển ta được:

$$(1+i)^{2012} = C_{2012}^0 + C_{2012}^1 i + C_{2012}^2 i^2 + \dots + C_{2012}^{2011} i^{2011} + C_{2012}^{2012} i^{2012}$$

Lần lượt thay $i^{4k} = 1; i^{4k+1} = i; i^{4k+2} = -1; i^{4k+3} = -i$ ta được

$$(1+i)^{2012} = (C_{2012}^0 - C_{2012}^2 + C_{2012}^4 - \dots + C_{2012}^{2012}) + (C_{2012}^1 - C_{2012}^3 + \dots - C_{2012}^{2011}) i$$

Mặt khác

$$(1+i)^{2012} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{2012} = 2^{1006} (\cos 503\pi + i \sin 503\pi) = -2^{1006}$$

So sánh phần thực, phần ảo của $(1+i)^{2012}$ trong hai cách khai triển ta được kết quả:

$$A = C_{2012}^0 - C_{2012}^2 + C_{2012}^4 - \dots - C_{2012}^{2010} + C_{2012}^{2012} = -2^{1006}$$

$$B = C_{2012}^1 - C_{2012}^3 + C_{2012}^5 - \dots - C_{2012}^{2011} = 0$$

Nhận xét 5.2:

Ta có thể tính

$$(1+i)^{2012} = [(1+i)^2]^{1006} = (2i)^{1006} = 2^{1006} \cdot (i^2)^{503} = -2^{1006}$$

. Nếu từ khai triển (1) ta thay x lần lượt bởi 1 và -1 ta được:

$$C_{2012}^0 + C_{2012}^1 + C_{2012}^2 + C_{2012}^3 + \dots + C_{2012}^{2011} + C_{2012}^{2012} = 2^{2012} (*)$$

$$C_{2012}^0 - C_{2012}^1 + C_{2012}^2 - C_{2012}^3 + \dots - C_{2012}^{2011} + C_{2012}^{2012} = 0 (**)$$

Từ (*); (**) nếu ta đem cộng hoặc trừ cho nhau ta thu được kết quả

$$C = C_{2012}^0 + C_{2012}^2 + C_{2012}^4 + \dots + C_{2012}^{2010} + C_{2012}^{2012} = 2^{2011}$$

$$D = C_{2012}^1 + C_{2012}^3 + C_{2012}^5 + \dots + C_{2012}^{2011} = 2^{2011}$$

Nếu lấy $A+C$ ta thu được kết quả

$$E = C_{2012}^0 + C_{2012}^4 + C_{2012}^8 + \dots + C_{2012}^{2008} + C_{2012}^{2012} = 2^{2010} - 2^{1005}$$

Nếu lấy $B+D$ ta thu được kết quả

$$F = C_{2012}^1 + C_{2012}^5 + C_{2012}^9 + \dots + C_{2012}^{2009} = 2^{2010}$$

Từ đó ta có thể sáng tạo ra nhiều bài toán mới ví dụ như yêu cầu tính các tổng C, D, E, F .

Bài toán 5.2

Tính các tổng sau:

$$A = C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \dots + (-1)^n C_{2n}^{2n}$$

$$B = C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + C_{2n}^5 - \dots + (-1)^{n-1} C_{2n}^{2n-1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

Cho $x = i$ ta được

$$(1+i)^{2n} = [C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + \dots + (-1)^n C_{2n}^{2n}] + [C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + \dots + (-1)^{n-1} C_{2n}^{2n-1}] i \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow (1+i)^{2n} = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\ \Rightarrow (1+i)^{2n} &= 2^n \cos \frac{n\pi}{2} + i 2^n \sin \frac{n\pi}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta được

$$A = C_{2n}^0 - C_{2n}^2 + C_{2n}^4 - \dots + (-1)^n C_{2n}^{2n} = 2^n \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$B = C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + C_{2n}^5 - \dots + (-1)^{n-1} C_{2n}^{2n-1} = 2^n \sin \frac{n\pi}{2}$$

Nhận xét 5.3:

Từ kết quả trên nếu ta cho n những giá trị cụ thể ta được kết quả các tổng tương ứng

. $n=1000$ ta có

$$A = C_{2000}^0 - C_{2000}^2 + C_{2000}^4 - \dots + C_{2000}^{2000} = 2^{1000}$$

$$B = C_{2000}^1 - C_{2000}^3 + C_{2000}^5 - \dots - C_{2000}^{1999} = 0$$

. $n=1006$ ta có:

$$A = C_{2012}^0 - C_{2012}^2 + C_{2012}^4 - \dots - C_{2012}^{2010} + C_{2012}^{2012} = -2^{1006}$$

$$B = C_{2012}^1 - C_{2012}^3 + C_{2012}^5 - \dots - C_{2012}^{2011} = 0$$

Bài toán 5.3 Tính tổng:

$$A = 3^{10}C_{20}^0 - 3^9C_{20}^2 + 3^8C_{20}^4 - 3^7C_{20}^6 + \dots - 3^2C_{20}^{16} - 3C_{20}^{18} + C_{20}^{20}$$

Nhận xét 5.4

Trong tổng A Các chỉ số chập của các số tổ hợp cách nhau hai đơn vị Và các số tổ hợp đan dấu nhau, đồng thời số hạng đầu tiên là $c_{20}^0(\sqrt{3})^{20}$ nên ta khai triển số phức: $(\sqrt{3} + i)^{20}$

Lời giải Xét khai triển:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^{20} &= (\sqrt{3})^{20}C_{20}^0 + i(\sqrt{3})^{19}C_{20}^1 - (\sqrt{3})^{18}C_{20}^2 - \dots - i\sqrt{3}C_{20}^{19} + C_{20}^{20} \\ &= (3^{10}C_{20}^0 - 3^9C_{20}^2 + 3^8C_{20}^4 - 3^7C_{20}^6 + \dots + 3^2C_{20}^{16} - 3C_{20}^{18} + C_{20}^{20}) + \\ &+ \left[(\sqrt{3})^{19}C_{20}^1 - (\sqrt{3})^{17}C_{20}^3 + \dots + (\sqrt{3})^3C_{20}^{17} - \sqrt{3}C_{20}^{19} \right] i \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^{20} &= 2^{20} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)^{20} \\ &= 2^{20} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{20} = 2^{20} \left(\cos \frac{20\pi}{6} + i \sin \frac{20\pi}{6} \right) \\ &= 2^{20} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2^{20} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -2^{19} - 2^{19}\sqrt{3}i \end{aligned}$$

So sánh phần thực của $(\sqrt{3} + i)^{20}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$3^{10}C_{20}^0 - 3^9C_{20}^2 + 3^8C_{20}^4 - 3^7C_{20}^6 + \dots + 3^2C_{20}^{16} - 3C_{20}^{18} + C_{20}^{20} = -2^{19}$$

Nhận xét 5.5:

Ngoài kết quả trên ta còn thu được kết quả của tổng

$$(\sqrt{3})^{19}C_{20}^1 - (\sqrt{3})^{17}C_{20}^3 + \dots + (\sqrt{3})^3C_{20}^{17} - \sqrt{3}C_{20}^{19} = -2^{19}.\sqrt{3}$$

Dạng 2: Khai triển $(1+x)^n$, tính đạo hàm và cho x nhận giá trị thích hợp .

Bài toán 5.4: Tính các tổng sau

$$A = C_{2013}^1 - 3C_{2013}^3 + 5C_{2013}^5 - 7C_{2013}^7 + \dots + 2013C_{2013}^{2013}$$

$$B = 2C_{2013}^2 - 4C_{2013}^4 + 6C_{2013}^6 - 8C_{2013}^8 + \dots - 2012C_{2013}^{2012}$$

Nhận xét 5.6

Để tạo ra các hệ số tăng dần 1,3,5,7... hay 2,4,6,8..., là hệ số mà sau khi ta khai triển một nhị thức Niu-Tơn sau đó lấy đạo hàm hai vế.

Lời giải:

$$(1+x)^{2013} = C_{2013}^0 + C_{2013}^1 x + C_{2013}^2 x^2 + C_{2013}^3 x^3 + \dots + C_{2013}^{2012} x^{2012} + C_{2013}^{2013} x^{2013}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$2013(1+x)^{2012} = C_{2013}^1 + 2C_{2013}^2 x + 3C_{2013}^3 x^2 + \dots + 2012C_{2013}^{2012} x^{2011} + 2013C_{2013}^{2013} x^{2012}$$

Thay x=i vào 2 vế ta có:

$$2013.(1+i)^{2012} = C_{2013}^1 + 2C_{2013}^2 i + 3C_{2013}^3 i^2 + \dots + 2012.C_{2013}^{2012} i^{2011} + 2013.C_{2013}^{2013} i^{2012}$$

$$= (C_{2013}^1 - 3C_{2013}^3 + \dots + 2013C_{2013}^{2013}) + (2C_{2013}^2 - 4C_{2013}^4 + \dots - 2012C_{2013}^{2012}) i$$

Lại có:

$$2013(1+i)^{2012} = 2013 \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{2012}$$

$$= 2013.2^{1006} (\cos 503\pi + i \sin 503\pi) = -2013.2^{1006}$$

So sánh phần thực và phần ảo của $2013(1+i)^{2012}$ trong hai cách khai triển ta được:

$$A = C_{2013}^1 - 3C_{2013}^3 + 5C_{2013}^5 - 7C_{2013}^7 + \dots + 2013C_{2013}^{2013} = -2013.2^{1006}$$

$$B = 2C_{2013}^2 - 4C_{2013}^4 + 6C_{2013}^6 - 8C_{2013}^8 + \dots - 2012C_{2013}^{2012} = 0$$

Nhận xét 5.7:

Ta có thể tính

$$2013.(1+i)^{2012} = 2013.[(1+i)^2]^{1006} = 2013(2i)^{1006} = 2013.2^{1006}.(i^2)^{503} = -2013.2^{1006}$$

. Nếu từ khai triển (1) ta thay x lần lượt bởi 1 và -1 ta được:

$$C_{2013}^1 + 2C_{2013}^2 + 3C_{2013}^3 + \dots + 2012C_{2013}^{2012} + 2013C_{2013}^{2013} = 2013.2^{2012} (*)$$

$$C_{2013}^1 - 2C_{2013}^2 + 3C_{2013}^3 - \dots - 2012C_{2013}^{2012} + 2013C_{2013}^{2013} = 0 (**)$$

Từ (*); (**) nếu ta đem cộng hoặc trừ cho nhau ta thu được kết quả

$$C = C_{2012}^1 + 3C_{2012}^3 + 5C_{2012}^5 + \dots + 2013C_{2013}^{2013} = 2013.2^{2011}$$

$$D = C_{2013}^2 + 2C_{2013}^4 + 3C_{2013}^6 + \dots + 1006C_{2013}^{2012} = 2013.2^{2011}$$

Nếu lấy $A+C$ ta thu được kết quả

$$E = C_{2013}^1 + 5C_{2013}^5 + 9C_{2013}^9 + \dots + 2013C_{2013}^{2013} = 2013(2^{2010} - 2^{1005})$$

Nếu lấy $B+D$ ta thu được kết quả

$$F = C_{2013}^2 + 6C_{2012}^6 + 10C_{2013}^{10} + \dots + 2012C_{2013}^{2012} = 2013.2^{2010}$$

Qua đó ta có thể sáng tạo ra nhiều bài toán mới đó là tính các tổng C, D, E, F

Bài toán 5.5 Tính tổng

$$A = 2.3.C_{2012}^2 - 4.3^2.C_{2012}^4 + 6.3^3.C_{2012}^6 - 2012.3^{1006}.C_{2012}^{2012}$$

Nhận xét 5.8: Trong tổng A

. Các chỉ số chập của các số tổ hợp cách nhau hai đơn vị

. Các số hạng trong tổng đan dấu nhau

. Hệ số của các hạng tử có giá trị tuyệt đối tăng dần 2,4,6...

. Trong tổng chứa số hạng $c_{2012}^{2k}(\sqrt{3})^{2k}$ Từ các nhận xét trên nên để giải bài toán ta có thể xuất phát từ khai triển $(1 + \sqrt{3}x)^{2012}$

Lấy đạo hàm hai vế rồi thay $x = i$, hoặc xuất phát từ khai triển $(1 + x)^{2012}$ Lấy đạo hàm hai vế rồi thay $x = \sqrt{3}.i$

Lời giải

$$(1 + \sqrt{3}x)^{2012} = C_{2012}^0 + C_{2012}^1\sqrt{3}x + C_{2012}^2(\sqrt{3}x)^2 + C_{2012}^3(\sqrt{3}x)^3 + \dots + C_{2012}^{2011}(\sqrt{3}x)^{2011} + C_{2012}^{2012}(\sqrt{3}x)^{2012}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$2012.\sqrt{3}.(1 + \sqrt{3}x)^{2011} = C_{2012}^1.\sqrt{3} + 2C_{2012}^2(\sqrt{3})^2x + 3C_{2012}^3(\sqrt{3})^3x^2 + \dots + 2012C_{2012}^{2012}(\sqrt{3})^{2012}x^{2011}$$

Thay $x=i$ vào 2 vế ta có:

$$\begin{aligned} 2012.\sqrt{3}.(1 + \sqrt{3}i)^{2011} &= C_{2012}^1(\sqrt{3}) + 2C_{2012}^2(\sqrt{3})^2i + 3C_{2012}^3(\sqrt{3})^3i^2 + \dots + 2012.C_{2012}^{2012}(\sqrt{3})^{2012}i^{2011} \\ &= \left[c_{2012}^1\sqrt{3} - 3c_{2012}^3(\sqrt{3})^2 + \dots - 2011.(\sqrt{3})^{2011}c_{2012}^{2011} \right] \\ &+ \left[2.3c_{2012}^2 - 4.3^2.c_{2012}^4 + 6.3^3c_{2012}^6 - \dots - 2012.3^{1006}c_{2012}^{2012} \right] i \end{aligned}$$

Lại có:

$$2012.\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)^{2011} = 2012.\sqrt{3}\left[2.\left(\cos \frac{\pi}{3} + i.\sin \frac{\pi}{3}\right)\right]^{2011} = 503.\sqrt{3}.2^{2012} + 1539.2^{2012}i$$

So sánh phần thực và phần ảo của $2012.\sqrt{3}.(1 + \sqrt{3}i)^{2011}$ trong hai cách khai triển ta được:

$$A = 2.3.C_{2012}^2 - 4.3^2.C_{2012}^4 + 6.3^3.C_{2012}^6 - 2012.3^{1006}.C_{2012}^{2012} = 1539.2^{2012}$$

Bài toán 5.6 Tính các tổng sau

$$A = C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14}$$

$$B = 2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15}$$

Lời giải

Xét khai triển:

$$(1 + x)^{15} = C_{15}^0 + xC_{15}^1 + x^2C_{15}^2 + x^3C_{15}^3 + \dots + x^{13}C_{15}^{13} + x^{14}C_{15}^{14} + x^{15}C_{15}^{15}$$

Nhân hai vế với x ta được:

$$x.(1 + x)^{15} = c_{15}^0.x + c_{15}^1.x^2 + c_{15}^2.x^3 + c_{15}^3.x^4 + \dots + c_{15}^{15}x^{16}$$

Đạo hàm hai vế ta có:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{15} + 15x(1 + x)^{14} &= \\ &= C_{15}^0 + 2xC_{15}^1 + 3x^2C_{15}^2 + 4x^3C_{15}^3 + \dots + 14x^{13}C_{15}^{13} + 15x^{14}C_{15}^{14} + 16x^{15}C_{15}^{15} \end{aligned}$$

Với $x=i$ ta có :

$$\begin{aligned} (1 + i)^{15} + 15i(1 + i)^{14} &= (C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14}) + \\ &+ (2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15})i \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} (1 + i)^{15} + 15i(1 + i)^{14} &= (\sqrt{2})^{15} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{15} + 15i(\sqrt{2})^{14} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{14} \\ &= (\sqrt{2})^{15} \left(\cos \frac{15\pi}{4} + i \sin \frac{15\pi}{4}\right) + 15.2^7i \left(\cos \frac{14\pi}{4} + i \sin \frac{14\pi}{4}\right) \\ &= (\sqrt{2})^{15} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + 15.2^7 \\ &= -2^7 - 2^7i + 15.2^7 = 14.2^7 - 2^7i = 7.2^8 - 2^7i \end{aligned}$$

So sánh phần thực và phần ảo của $(1 + i)^{15} + 15i(1 + i)^{14}$ trong hai cách tính trên ta có:

$$A = C_{15}^0 - 3C_{15}^2 + 5C_{15}^4 - 7C_{15}^6 + \dots + 13C_{15}^{12} - 15C_{15}^{14} = 7.2^8$$

$$B = 2C_{15}^1 - 4C_{15}^3 + 6C_{15}^5 - 8C_{15}^7 + \dots + 14C_{15}^{13} - 16C_{15}^{15} = -2^7$$

Dạng 3: Khai triển $(1 + x)^n$, cho x nhận những giá trị là căn bậc ba của đơn vị

Bài toán 5.7 Tính tổng:

$$T = c_{2011}^0 + c_{2011}^3 + c_{2011}^6 + \dots + c_{2011}^{2010}$$

Nhận xét 5.9: Nhận thấy các chỉ số tổ hợp cách nhau ba đơn vị nên ta dựa vào các căn bậc ba của đơn vị $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: ta có: $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$; $\varepsilon^{3k} = 1$; $\varepsilon^{3k+1} = \varepsilon$; $\varepsilon^{3k+2} = \varepsilon^2$

Từ đó khai triển nhị thức $(1+x)^{2011}$ sau đó thay x lần lượt các căn bậc ba của 1, cộng từng vế của ba đẳng thức thu được ta có kết quả cần tìm.

Lời giải

Xét $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$

Khi đó ta có :

$$1 + z + z^2 = 0$$

và $\begin{cases} z^{3n} = 1 \\ z^{3n+1} = z \\ z^{3n+2} = z^2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

Khai triển nhị thức Newton $(1+1)^{2011}$; $(1+z)^{2011}$; $(1+z^2)^{2011}$ ta được:

$$(1+1)^{2011} = c_{2011}^0 + c_{2011}^1 + c_{2011}^2 + \dots + c_{2011}^{2010} + c_{2011}^{2011}$$

$$(1+z)^{2011} = c_{2011}^0 + c_{2011}^1 z + c_{2011}^2 z^2 + \dots + c_{2011}^{2010} z^{2010} + c_{2011}^{2011} z^{2011}$$

$$= c_{2011}^0 + c_{2011}^1 z + c_{2011}^2 z^2 + \dots + c_{2011}^{2010} + c_{2011}^{2011} z$$

$$(1+z^2)^{2011} = c_{2011}^0 + c_{2011}^1 z^2 + c_{2011}^2 z^4 + \dots + c_{2011}^{2010} z^{4020} + c_{2011}^{2011} z^{4022}$$

$$= c_{2011}^0 + c_{2011}^1 z^2 + c_{2011}^2 z + \dots + c_{2011}^{2010} + c_{2011}^{2011} z^2$$

Cộng ba đẳng thức trên vế với vế ta được:

$$3(c_{2011}^0 + c_{2011}^3 + c_{2011}^6 + \dots + c_{2011}^{2010}) = (1+1)^{2011} + (1+z)^{2011} + (1+z^2)^{2011}$$

Ngoài ra

$$\cdot (1+1)^{2011} = 2^{2011}$$

$$\begin{aligned} \cdot (1+z)^{2011} &= \left(1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{2011} = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right)^{2011} \\ &= \cos \frac{2011\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2011\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot (1+z^2)^{2011} &= \left(1 + \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)^{2011} = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^{2011} \\ &= \cos \frac{2011\pi}{3} - i \sin \frac{2011\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Do đó

$$(1+1)^{2011} + (1+z)^{2011} + (1+z^2)^{2011} = 2^{2011} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = 2^{2011} + 1$$

Từ đó ta suy ra :

$$T = c_{2011}^0 + c_{2011}^3 + c_{2011}^6 + \dots + c_{2011}^{2010} = \frac{2^{2011} + 1}{3}$$

Bài toán 5.8 Chứng minh rằng:

$$1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + C_n^{3k} = \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}\right) \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n-2 \leq 3k \leq n)$$

Lời giải:

$$\text{Xét: } z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z^3 = 1$$

Từ khai triển:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

Lần lượt thay $x=1; x=z; x=z^2$ vào khai triển trên ta được

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + C_n^5 + C_n^6 + \dots + C_n^n$$

$$(1+z)^n = C_n^0 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + C_n^3 z^3 + C_n^4 z^4 + C_n^5 z^5 + C_n^6 z^6 + \dots + C_n^n z^n$$

$$C_n^0 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + C_n^3 + C_n^4 z + C_n^5 z^2 + C_n^6 + \dots + C_n^{3k} + \dots$$

$$(1+z^2)^n = C_n^0 + C_n^1 z^2 + C_n^2 z^4 + C_n^3 z^6 + C_n^4 z^8 + C_n^5 z^{10} + C_n^6 z^{12} + \dots + C_n^n z^{2n}$$

$$= C_n^0 + C_n^1 z^2 + C_n^2 z + C_n^3 + C_n^4 z^2 + C_n^5 z + C_n^6 + \dots + C_n^{3k} + \dots$$

Cộng ba đẳng thức trên ta được:

$$3(C_{2011}^0 + C_{2011}^3 + C_{2011}^6 + \dots + C_n^{3k}) = (1+1)^n + (1+z)^n + (1+z^2)^n$$

Ngoài ra

$$\cdot (1+1)^n = 2^n$$

$$\cdot (1+z)^n = \left(1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^n = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$= \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$$

$$\cdot (1+z^2)^n = \left(1 + \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)^n = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)^n$$

$$= \cos \frac{n\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{n\pi}{3}$$

$$\text{Do đó } (1+1)^n + (1+z)^n + (1+z^2)^n = 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} 2^n + (1+z)^n + (1+z^2)^n &= 3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + c_n^{3k}) \\ \Leftrightarrow 2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} &= 3(C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + c_n^{3k}) \\ \Leftrightarrow 1 + C_n^3 + C_n^6 + \dots + c_n^{3k} &= \frac{1}{3} \left(2^n + 2 \cos \frac{n\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Nhận xét 5.10:

Bài toán trên là bài toán tổng quát, với mỗi giá trị n cho trước ta được kết quả của một tổng: Cho $n=20$ ta có $S = C_{20}^0 + C_{20}^3 + C_{20}^6 + \dots + C_{20}^{3k} + \dots + C_{20}^{15} + C_{20}^{18} = \frac{2^{20} - 1}{3}$

$$n=2011 \text{ ta có: } S = c_{2011}^0 + c_{2011}^3 + c_{2011}^6 + \dots + c_{2011}^{2010} = \frac{2^{2011} - 1}{3}$$

$$n=2012 \text{ ta có: } S = c_{2012}^0 + c_{2012}^3 + c_{2012}^6 + \dots + c_{2012}^{2010} = \frac{2^{2012} - 1}{3}$$

$$n=2013 \text{ ta có: } S = c_{2013}^0 + c_{2013}^3 + c_{2013}^6 + \dots + c_{2013}^{2013} = \frac{2^{2012} - 2}{3}$$

Từ trên với mỗi giá trị của n ta lại tạo ra một bài toán mới.

Bài toán 5.9 Tính tổng:

$$S = c_{30}^1 + c_{30}^4 + c_{30}^7 + \dots + c_{30}^{3k+1} + \dots + c_{30}^{28}$$

Lời giải

Xét khai triển:

$$(1+x)^{30} = C_{30}^0 + C_{30}^1 x + C_{30}^2 x^2 + C_{30}^3 x^3 + \dots + C_{30}^{30} x^{30}$$

Nhân hai vế với x^2 ta được:

$$x^2 \cdot (1+x)^{30} = c_{30}^0 \cdot x^2 + c_{30}^1 \cdot x^3 + c_{30}^2 \cdot x^4 + c_{30}^3 \cdot x^5 + \dots + c_{30}^{30} x^{32}$$

$$\text{Xét: } z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z^3 = 1$$

Lần lượt thay $x = 1; x = z; x = z^2$ vào khai triển trên ta được

$$(1+1)^{30} = c_{30}^0 + c_{30}^1 + c_{30}^2 + c_{30}^3 + c_{30}^4 + c_{30}^5 + c_{30}^6 + \dots + c_{30}^{30}$$

$$z^2(1+z)^{30} = c_{30}^0 z^2 + c_{30}^1 z^3 + c_{30}^2 z^4 + c_{30}^3 z^5 + c_{30}^4 z^6 + c_{30}^5 z^7 + c_{30}^6 z^8 + \dots + c_{30}^{30} z^{32}$$

$$= c_{30}^0 z^2 + c_{30}^1 + c_{30}^2 z + c_{30}^3 z^2 + c_{30}^4 + c_{30}^5 z + c_{30}^6 z^2 + \dots + c_{30}^{30} z^2$$

$$z^4(1+z^2)^{30} = c_{30}^0 z^4 + c_{30}^1 z^6 + c_{30}^2 z^8 + c_{30}^3 z^{10} + c_{30}^4 z^{12} + c_{30}^5 z^{14} + c_{30}^6 z^{16} + \dots + c_{30}^{30} z^{64}$$

$$z(1+z^2)^{30} = c_{30}^0 z + c_{30}^1 + c_{30}^2 z^2 + c_{30}^3 z + c_{30}^4 + c_{30}^5 z^2 + c_{30}^6 z + \dots + c_{30}^{30} z$$

Cộng ba đẳng thức trên về với về ta được:

$$3(c_{30}^1 + c_{30}^4 + c_{30}^7 + \dots + c_{30}^{28}) = (1+1)^{30} + z^2(1+z)^{30} + z(1+z^2)^{30}$$

Lại có

$$\begin{aligned} z^2(1+z)^{30} &= z^{62} = z^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \\ z(1+z^2)^{30} &= z(-z)^{30} = z^{31} = z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Vậy :

$$3(c_{30}^1 + c_{30}^4 + c_{30}^7 + \dots + c_{30}^{28}) = (1+1)^{30} + z^2(1+z)^{30} + z(1+z^2)^{30} = 2^{30} - 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2^{30} - 1$$

Suy ra :

$$S = c_{30}^1 + c_{30}^4 + c_{30}^7 + \dots + c_{30}^{3k+1} + \dots + c_{30}^{28} = \frac{2^{30} - 1}{3}$$

Bài toán 5.10 Tính tổng :

$$S = c_{20}^0 + 3c_{20}^3 + 6c_{20}^6 + \dots + 3kc_{20}^{3k} + \dots + 18c_{20}^{18}$$

Nhận xét 5.11:

Do trong tổng S các số tổ hợp có các hệ số tăng dần 1,3,6,... nên khi khai triển nhị thức Niu-Tơn ta lấy đạo hàm hai vế .các chỉ số tổ hợp cách nhau ba đơn vị nên ta sử dụng ba căn bậc ba của đơn vị như hai bài toán trên.

Lời giải

$$(1+x)^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1 x + C_{20}^2 x^2 + C_{20}^3 x^3 + \dots + C_{20}^{20} x^{20}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$20(1+x)^{19} = C_{20}^1 + 2C_{20}^2 x + 3C_{20}^3 x^2 + \dots + 20C_{20}^{20} x^{19}$$

Nhân hai vế với x ta có :

$$20.x.(1+x)^{19} = C_{20}^1 x + 2C_{20}^2 x^2 + 3C_{20}^3 x^3 + \dots + 20C_{20}^{20} x^{20}$$

$$\text{Xét: } z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z^3 = 1$$

Lần lượt thay $x = 1; x = z; x = z^2$ vào khai triển trên ta được

$$20.2^{19} = c_{20}^1 + 2c_{20}^2 + 3c_{20}^3 + 4c_{20}^4 + 5c_{20}^5 + 6c_{20}^6 + \dots + 20c_{20}^{20}$$

$$20.z.(1+z)^{19} = C_{20}^1 z + 2C_{20}^2 z^2 + 3C_{20}^3 z^3 + \dots + 20C_{20}^{20} z^{20}$$

$$= C_{20}^1 z + 2C_{20}^2 z^2 + 3C_{20}^3 z^3 + \dots + 20C_{20}^{20} z^{20}$$

$$20.z^2.(1+z^2)^{19} = C_{20}^1 z^2 + 2C_{20}^2 z^4 + 3C_{20}^3 z^6 + \dots + 20C_{20}^{20} z^{40}$$

$$= C_{20}^1 z^2 + 2C_{20}^2 z^4 + 3C_{20}^3 z^6 + \dots + 20C_{20}^{20} z^{40}$$

Cộng từng vế của ba đẳng thức trên ta được:

$$3(3c_{20}^3 + 6c_{2011}^6 + \dots + 18c_{20}^{18}) = 20.2^{19} + 20.z(1+z)^{19} + 20.z^2.(1+z^2)^{19}$$

Có:

$$z(1+z)^{19} = z.(-z^2)^{19} = -z^{39} = -1$$

$$z^2(1+z^2)^{19} = z^2.(-z)^{19} = -z^{21} = -1$$

Từ đó ta có :

$$3(3c_{20}^3 + 6c_{2011}^6 + \dots + 18c_{20}^{18}) = 20.2^{19} - 40$$

Suy ra :

$$3c_{20}^3 + 6c_{2011}^6 + \dots + 18c_{20}^{18} = \frac{40.(2^{18} - 1)}{3}$$

$$\text{Vậy: } S = c_{20}^0 + 3c_{20}^3 + 6c_{20}^6 + \dots + 3kc_{20}^{3k} + \dots + 18c_{20}^{18} = \frac{40(2^{18} - 1)}{3} + 1$$

BÀI TẬP:

Bài 1: Tính tổng: $S = C_{8n}^1 - 3C_{8n}^3 + \dots - (8n-1)C_{8n}^{8n-1}$

Bài 2: Chứng minh đẳng thức :

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n .$$

Bài 3: Tính tổng:

$$A = \frac{1}{2^{50}} (C_{50}^0 - 3C_{50}^2 + 3^2C_{50}^4 - \dots - 3^{23}C_{50}^{46} + 3^{24}C_{50}^{48} - 3^{25}C_{50}^{50})$$

Bài 4 : Tính tổng:

$$T = C_{20}^1 + C_{20}^4 + C_{20}^7 + \dots + C_{20}^{3k+1} + \dots + C_{20}^{16} + C_{20}^{19}$$

Bài 5. Tính tổng:

$$A = C_{2009}^0 - C_{2009}^2 + C_{2009}^4 - \dots + C_{2009}^{2008}$$

$$B = -C_{2009}^1 + C_{2009}^3 - C_{2009}^5 + \dots - C_{2009}^{2009}$$

Bài 6. Tính tổng $A = C_{40}^1 + 4^2 C_{40}^4 + 7^2 C_{40}^7 + \dots + 37^2 C_{40}^{37} + 40^2 C_{40}^{40}$

Hướng dẫn: Khai triển $(1+x)^{40}$, đạo hàm hai vế, nhân hai vế với x , sau đó lấy đạo hàm hai vế tiếp, cho x nhận các giá trị lần lượt là $1; \varepsilon; \varepsilon^2$

Bài 7: Tính tổng $A = 2C_{25}^2 + 5C_{25}^5 + 8C_{25}^8 + \dots + 20C_{25}^{20} + 23C_{25}^{23}$

Hướng dẫn: Khai triển $(1+x)^{25}$, đạo hàm hai vế, nhân hai vế với x^2 , cho x nhận các giá trị lần lượt là $1; \varepsilon; \varepsilon^2$

Bài 8: Tính tổng $A = C_{40}^0 + 4C_{40}^3 + 7C_{40}^6 + \dots + 37C_{40}^{36} + 40C_{40}^{39}$

Hướng dẫn: Khai triển $(1+x)^{40}$, nhân hai vế với x , đạo hàm hai vế, cho x nhận các giá trị lần lượt là $1; \varepsilon; \varepsilon^2$

Kết luận

Từ những vấn đề đã trình bày có thể rút ra một số kết luận như sau:

Số phức là một trong những chủ đề toán học mới trong chương trình toán trung học phổ thông, đồng thời các dạng toán về số phức và ứng dụng của nó cũng rất đa dạng. Tuy nhiên trong khuôn khổ của luận văn này chỉ nghiên cứu về một mảng nhỏ trong các dạng toán ứng dụng của số phức, đó là ứng dụng số phức để giải một số dạng toán trong đề thi đại học (hệ phương trình, bất đẳng thức, tính giá trị biểu thức lượng giác, giải phương trình lượng giác, chứng minh đẳng thức lượng giác, tính các tổng liên quan đến C_n^k). Luận văn đã hệ thống được một số dạng toán thường gặp trong các đề thi đại học mà có thể giải nhờ công cụ số phức, đồng thời so sánh với cách giải thông thường (không sử dụng số phức) để rút ra ưu, nhược điểm trong từng cách giải. Các ví dụ minh họa trong luận văn chủ yếu được lấy từ các đề thi tuyển sinh đại học môn toán của Bộ GDĐT và một số sách tham khảo ôn thi đại học. Điều này chứng tỏ các kết quả của luận văn là hữu ích cho việc giảng dạy của giáo viên cũng như việc ôn luyện của học sinh để chuẩn bị cho kỳ thi đại học. Sau mỗi chương tác giả cũng đưa ra phương pháp sáng tạo bài tập mới giúp giáo viên có thể tự ra nhiều bài tập mới theo mức độ từ dễ đến khó cho học sinh luyện tập. Luận văn có thể làm tài liệu giảng dạy cho giáo viên, tài liệu học tập cho học sinh trong quá trình giảng dạy, học tập ôn thi đại học. Qua luận văn cũng cho thấy được mối quan hệ giữa số phức với đại số, giải tích, lượng giác. Qua luận văn, ta thấy được việc

khai thác định nghĩa và các tính chất cơ bản của số phức , đã giúp cho người học sử dụng số phức như một công cụ đắc lực , giải quyết hiệu quả nhiều bài toán trong đại số , giải tích, lượng giác, từ đó giúp người học có thêm phương pháp mới trong giải toán, có sự linh hoạt hơn trong tư duy và nâng cao chất lượng dạy học, đáp ứng được yêu cầu đổi mới trong dạy học.

Tài liệu tham khảo

- [1] *Biến phức và định lý*, Tác giả Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Đinh Công Hướng, Nguyễn Đăng Phát, Tạ Duy Phương, Nguyễn Thủy Thanh - NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009
- [2] *Tuyển tập các đề thi Olympic 30-4 lần thứ V, VI, VII, VIII*, NXB Giáo dục, 2012
- [3] *Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn toán* - Trần Phương - NXB Hà Nội, 2010
- [4] *Toán nâng cao giải tích 12* - Phan Huy Khải - NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 1997
- [5] *Tuyển tập các đề thi Đại học* - NXB Giáo dục, 2012
- [6] *Tuyển chọn theo chuyên đề toán học và tuổi trẻ* - NXB Giáo dục, 2006
- [7] *500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức* - Phan Huy Khải - NXB Hà Nội, 1997
- [8] *Phương pháp tọa độ để giải các bài toán sơ cấp* - Phan Huy Khải - NXB TP. Hồ Chí Minh, 1996
- [9] *Tuyển chọn và giải hệ phương trình, phương trình không mẫu mực* - Hà Văn Chương - NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2003