

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Nguyễn Anh Hải

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ ĐA GIÁC

Chuyên ngành: Phương Pháp Toán Sơ Cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. Hà Huy Khoái

Thái Nguyên - 2012

Mục lục

Lời cảm ơn	3
Mở đầu	4
1 Số phức và các dạng biểu diễn của số phức	6
1.1 Định nghĩa số phức	6
1.2 Các tính chất liên quan đến phép cộng	7
1.3 Các tính chất liên quan đến phép nhân	7
1.4 Dạng đại số của số phức	8
1.4.1 Định nghĩa và tính chất	8
1.4.2 Giải phương trình bậc hai	13
1.4.3 Ý nghĩa hình học của các số phức và modun	14
1.4.4 Ý nghĩa hình học của các phép toán đại số	15
1.5 Dạng lượng giác của số phức	16
1.5.1 Tọa độ cực trong mặt phẳng	16
1.5.2 Tọa độ cực của số phức	17
1.5.3 Các phép toán số phức trong tọa độ cực	18
1.5.4 Ý nghĩa hình học của phép nhân	19
1.5.5 Các căn bậc n của đơn vị	19
2 Số phức và hình học	24
2.1 Một vài khái niệm và tính chất	24
2.2 Điều kiện thẳng hàng, vuông góc và cùng thuộc một đường tròn	30
2.3 Tam giác đồng dạng	31
2.4 Tam giác đều	33
2.5 Diện tích tam giác	36

3	Tích thực, tích phức và các ứng dụng trong đa giác	40
3.1	Tích thực của hai số phức	40
3.2	Tích phức của hai số phức	44
3.3	Diện tích đa giác lồi	48
3.4	Bài tập	50
	Tài liệu tham khảo	57

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH Hà Huy Khoái. Từ khi được nhận đề tài cho đến nay, tác giả luôn nhận được sự giúp đỡ, sự chỉ bảo ân cần của Giáo sư. Với định hướng rõ ràng và phương pháp làm việc khoa học, nghiêm túc, Giáo sư đã giúp tác giả hoàn thành luận văn này. Không những thế, Giáo sư còn cho chúng tôi nhiều bài học về tinh thần chủ động sáng tạo trong công việc, về tính phối hợp, tính kiên trì và khoa học trong khi làm việc, về lòng bao dung, về tình cảm thầy trò. Qua đây, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH Hà Huy Khoái, người đã giúp tác giả hoàn thành luận văn này. Xin trân trọng cảm ơn các thầy giáo, cô giáo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã nhiệt tình giảng dạy và tạo những điều kiện tốt nhất cho chúng em học tập, nghiên cứu trong suốt 2 năm vừa qua. Xin trân trọng cảm ơn các thầy giáo, cô giáo trong Hội đồng khoa học Đại học Thái Nguyên, các thầy giáo, cô giáo trong Ban Giám hiệu, trong tổ Toán trường THPT Trung Giã, các bạn học viên lớp cao học toán K4C đã đóng góp nhiều ý kiến quý báu giúp tác giả hoàn thành luận văn này.

Mặc dù đã rất cố gắng nghiên cứu đề tài và viết luận văn, nhưng vì thời gian có hạn, kiến thức và kinh nghiệm còn hạn chế nên khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự chỉ bảo, hướng dẫn của các thầy, các cô, sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp để luận văn được hoàn chỉnh và thiết thực hơn.

Tác giả

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài.

Các bài toán về đa giác rất thường gặp trong chương trình toán phổ thông. Với nhiều bài toán hay, dạng toán phong phú nên đa giác là đề tài hấp dẫn nhiều người, đặc biệt là đối với các giáo viên và các em học sinh đang giảng dạy và học tập trong các trường phổ thông. Các bài toán về đa giác nói riêng và môn Hình học nói chung thường là rất khó đối với các em học sinh, bởi môn học đòi hỏi trí tưởng tượng cao, một tư duy logic, chặt chẽ và sáng tạo. Vì vậy đã có nhiều phương pháp tiếp cận và nghiên cứu như phương pháp véc tơ, phương pháp tọa độ, ... để bài toán trở nên đơn giản hơn. Đến nay, Số phức đã được đưa vào giảng dạy trong chương trình toán phổ thông, một mặt cho học sinh thấy được ý nghĩa ra đời và sự phát triển của các tập hợp số, một mặt cũng cần gợi ý cho học sinh thấy được những ứng dụng to lớn của Số phức trong việc nghiên cứu và học tập môn Toán, đặc biệt là những ứng dụng trong Hình học. Tuy nhiên, Số phức là môn học mới đối với các em học sinh, thời lượng cho môn học lại rất hạn chế. Cho nên để thực hiện những yêu cầu trên, người giáo viên phải tìm hiểu kỹ lưỡng nội dung chương trình. Hiện nay tôi đang là một giáo viên giảng dạy ở một trường THPT, để thực hiện nhiệm vụ của mình thì việc nghiên cứu đề tài là rất cần thiết. Với trách nhiệm, với sự đam mê nghiên cứu khoa học và sáng tạo tôi đã lựa chọn đề tài này. Vì thời gian có hạn, trong đề tài này tác giả chỉ xin được trình bày một số ứng dụng của số phức trong việc nghiên cứu và giải quyết một số bài toán về đa giác. Cũng chính vì thế nội dung trong đề tài này gồm các kiến thức về số phức, một số kiến thức về hình học và một số ứng dụng của số phức trong việc nghiên cứu giải một số bài toán về đa giác.

2. Mục đích nghiên cứu:

Hệ thống và tổng quát các bài toán về đa giác bằng phương pháp số phức và các ứng dụng khác nhau trong trường phổ thông. Đồng thời nắm được một số kĩ thuật tính toán biến đổi hình học liên quan đến số phức.

3. Nhiệm vụ của đề tài: Đưa ra định nghĩa và các phép toán về số phức một cách tổng quát có ví dụ minh họa kèm theo, ngoài ra đề tài đi sâu mở rộng các mảng kiến thức về số phức áp dụng trong hình học, đặc biệt là các bài toán về đa giác.

Bên cạnh đó, qua việc nghiên cứu đề tài trang bị cho bản thân thêm một số nguồn tư liệu trong quá trình giảng dạy và nghiên cứu.

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu:

Nghiên cứu các bài toán hình học, đặc biệt là phần đa giác trên tập hợp số phức và xét các ứng dụng liên quan.

Nghiên cứu từ các tài liệu, giáo trình của GS – TSKH Hà Huy Khoái, các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, tủ sách chuyên toán, Tạp chí toán học và tuổi trẻ, Tuyển tập Số phức từ A tới Z của Titu Andreescu và Dorin Andrica,...

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Tạo được một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy, bồi dưỡng học sinh Trung học phổ thông. Đóng góp thiết thực cho việc dạy và học các chuyên đề toán trong trường THPT, đem lại niềm đam mê sáng tạo trong việc dạy và học toán.

6. Cấu trúc của luận văn:

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Số phức và các dạng biểu diễn

Chương 2: Số phức và hình học

Chương 3: Tích thực, tích phức và các ứng dụng trong đa giác.

Thái Nguyên, 2012

Chương 1

Số phức và các dạng biểu diễn của số phức

1.1 Định nghĩa số phức

Giả thiết ta đã biết định nghĩa và các tính chất cơ bản của tập số thực $\mathbb{R}$. Ta xét tập hợp

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

Hai phần tử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Các phép toán cộng và nhân được định nghĩa trên $\mathbb{R}^2$ như sau :

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

và

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{R}^2$$

với mọi $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Phần tử $z_1 + z_2$ gọi là tổng của z_1, z_2 , phần tử $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}^2$ gọi là tích của z_1, z_2 .

Nhận xét

- 1) Nếu $z_1 = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (x_2, 0) \in \mathbb{R}^2$ thì $z_1 z_2 = (x_1 x_2, 0)$.
- 2) Nếu $z_1 = (0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ và $z_2 = (0, y_2) \in \mathbb{R}^2$ thì $z_1 z_2 = (-y_1 y_2, 0)$.

Định nghĩa

Tập hợp $\mathbb{R}^2$ cùng với phép cộng và nhân gọi là tập số phức, kí hiệu $\mathbb{C}$. Mỗi phần tử $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ được gọi là một số phức.

Kí hiệu $\mathbb{C}^*$ để chỉ tập hợp $\mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$.

1.2 Các tính chất liên quan đến phép cộng

Phép cộng các số phức thỏa mãn các điều kiện sau đây:

Tính giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

Tính kết hợp: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;

Phần tử đơn vị: Với mọi $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, Có duy nhất một số phức $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$ để $z + 0 = 0 + z$. Số phức $0 = (0, 0) \in \mathbb{C}$ được gọi là phần tử đơn vị của phép cộng các số phức.

Phần tử đối: Mỗi số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ có duy nhất số phức $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ sao cho $z + (-z) = (-z) + z = 0$

1.3 Các tính chất liên quan đến phép nhân

Phép nhân các số phức thỏa mãn các điều kiện sau đây:

Tính giao hoán: $z_1 z_2 = z_2 z_1$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

Tính kết hợp: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;

Phần tử đơn vị: Với mọi $z \in \mathbb{C}$, có duy nhất số phức $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $z.1 = 1.z = z$. Số phức $1 = (1, 0)$, gọi là phần tử đơn vị của phép nhân các số phức.

Phần tử nghịch đảo: Mỗi số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ có duy nhất số phức $z^{-1} = (x', y') \in \mathbb{C}$ sao cho $z.z^{-1} = z^{-1}z = 1$ số phức $z^{-1} = (x', y')$ gọi là phần tử nghịch đảo của số phức $z = (x, y) \in \mathbb{C}$.

Lũy thừa với số mũ nguyên của số phức $z \in \mathbb{C}^*$ được định nghĩa như sau:

$z^0 = 1$; $z^1 = z$; $z^2 = z.z$, và $z^n = \underbrace{z.z \dots z}_{n \text{ lần}}$ với mọi số nguyên dương n

và $z^n = (z^{-1})^{-n}$ với mọi số nguyên âm n .

Mọi số phức $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ và mọi số nguyên m, n ta có các tính chất sau:

- 1) $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$;
- 2) $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$;
- 3) $(z^m)^n = z^{mn}$;
- 4) $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$;
- 5) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n}$;

Khi $z = 0$ ta định nghĩa $0^n = 0$ với mọi số nguyên $n > 0$.

Tính phân phối: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ với mọi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$.

Trên đây là những tính chất của phép cộng và phép nhân. Tập hợp $\mathbb{C}$ các số phức cùng với các phép toán trên lập thành một trường.

1.4 Dạng đại số của số phức

1.4.1 Định nghĩa và tính chất

Mỗi số phức được biểu diễn như một cặp số sắp thứ tự, nên khi thực hiện các biến đổi đại số thường không được thuận lợi. Đó là lí do để ta đi tìm dạng khác khi viết.

Ta sẽ đưa vào dạng biểu diễn đại số mới. Xét tập hợp $\mathbb{R} \times \{0\}$ cùng với phép toán cộng và nhân được định nghĩa trên $\mathbb{R}^2$.

Hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$, $f(x) = (x, 0)$ là một song ánh; ngoài ra $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ và $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$.

Người đọc sẽ không sai lầm nếu chú ý rằng các phép toán đại số trên $\mathbb{R} \times \{0\}$ đồng nhất với các phép toán trên $\mathbb{R}$; vì thế chúng ta có thể đồng nhất cặp số $(x, 0)$ với số x , với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta sử dụng song ánh trên và kí hiệu $(x, 0) = x$.

Xét $i = (0, 1)$ ta có

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \\ &= x + yi = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \end{aligned}$$

Từ trên ta có mệnh đề

Mệnh đề 1.4.1. *Mỗi số phức $z = (x, y)$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng*

$$z = x + yi,$$

với $x, y \in \mathbb{R}$.

Hệ thức $i^2 = -1$ được suy ra từ định nghĩa phép nhân $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

Định nghĩa

Biểu thức $x + yi$ được gọi là biểu diễn đại số của số phức $z = (x, y)$. Vì thế ta có thể viết $\mathbb{C} = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Từ giờ ta kí hiệu $z = (x, y)$ bởi $z = x + yi$. Số thực $x = \text{Re}(z)$ được gọi là phần thực của số phức z , $y = \text{Im}(z)$ được gọi là phần ảo của z . Số phức có dạng yi , $y \in \mathbb{R}$ gọi là số **ảo**. Số phức có dạng yi , $y \in \mathbb{R}^*$ gọi là số **thuần ảo**, số phức i gọi là số **đơn vị ảo**

Từ các hệ thức trên ta dễ dàng có các kết quả sau:

- a) $z_1 = z_2$ khi và chỉ khi $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ và $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$;
- b) $z \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\text{Im}(z) = 0$;
- c) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\text{Im}(z) \neq 0$.

Sử dụng dạng đại số, các phép toán về số phức được thực hiện như sau:

Phép cộng

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \in \mathbb{C}.$$

Dễ thấy tổng hai số phức là một số phức có phần thực là tổng các phần thực, có phần ảo là tổng các phần ảo:

$$\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2)$$

$$\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im}(z_1) + \text{Im}(z_2).$$

Phép trừ

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \in \mathbb{C}.$$

Ta có

$$\text{Re}(z_1 - z_2) = \text{Re}(z_1) - \text{Re}(z_2)$$

$$\text{Im}(z_1 - z_2) = \text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2).$$

Phép nhân

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \in \mathbb{C}$$

Ta có

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$$

$$\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Im}(z_2) \operatorname{Re}(z_1)$$

Mỗi số thực λ , số phức $z = x + yi$, $\lambda z = \lambda(x + yi) = \lambda x + \lambda yi \in \mathbb{C}$ là tích của một số thực với một số phức. Ta có các tính chất sau

$$1) \lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2;$$

$$2) \lambda_1(\lambda_2 z) = (\lambda_1 \lambda_2) z;$$

$$3) (\lambda_1 + \lambda_2) z = \lambda_1 z + \lambda_2 z.$$

Lũy thừa của số i Các công thức cho số phức với lũy thừa là số nguyên được bảo toàn đối với dạng đại số $z = x + yi$. Xét $z = i$, ta thu được:

$$i^0 = 1; \quad i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = 1; \quad i^5 = i^4 \cdot i = i; \quad i^6 = i^5 \cdot i = -1; \quad i^7 = i^6 \cdot i = -i$$

Ta có thể tổng quát các công thức trên đối với số mũ nguyên dương n

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i$$

Vì thế $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$ với mọi số nguyên $n \geq 0$. Nếu n là số nguyên âm ta có:

$$i^n = (i^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{i}\right)^{-n} = (-i)^{-n}$$

Số phức liên hợp

Mỗi số phức $z = x + yi$ đều có số phức $\bar{z} = x - yi$, số phức đó được gọi là số phức liên hợp của số phức z .

Mệnh đề 1.4.2. 1) Hệ thức $z = \bar{\bar{z}}$ đúng khi và chỉ khi $z \in \mathbb{R}$;

2) Mỗi số phức z ta luôn có đẳng thức $z = \bar{\bar{z}}$;

3) Mỗi số phức z ta luôn có $z \cdot \bar{z}$ là một số thực không âm;

4) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (số phức liên hợp của một tổng bằng tổng các số phức liên hợp);

5) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (số phức liên hợp của một tích bằng tích các số phức liên hợp);

6) Mỗi số phức z khác 0 đẳng thức sau luôn đúng $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$;

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2 \neq 0$ (liên hợp của một thương bằng thương các liên hợp);

8) Công thức $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ và $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, đúng với mọi số phức $z \in \mathbb{C}$.

Ghi chú

a) phần tử nghịch đảo của số phức $z \in \mathbb{C}^*$ có thể được tính như sau:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

b) Số phức liên hợp được sử dụng trong việc tìm thương của hai số phức như sau:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Modun của số phức

Số $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ được gọi là *modun* của số phức $z = x + yi$.

Mệnh đề 1.4.3. 1) $-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ và $-|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$;

2) $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, ngoài ra $|z| = 0$ khi và chỉ khi $z = 0$;

3) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$;

4) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

5) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (mô đun của một tích bằng tích các mô đun);

6) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

7) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $z \neq 0$;

8) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$ (mô đun của một tích bằng tích các mô đun);

9) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Bài toán 1 Chứng minh rằng với mọi số phức z_1, z_2 ta luôn có:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Giải

Sử dụng tính chất 4) của mệnh đề trên ta có:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

Bài toán 2 Chứng minh rằng nếu $|z_1| = |z_2| = 1$ và $z_1z_2 \neq -1$ thì $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$ là một số thực.

Giải

Sử dụng tính chất 4) ta có : $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$ và $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$. Tương tự $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$. Đặt $A = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2}$, xét $\overline{A} = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_2}}{1 + \overline{z_1}\overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1z_2} = A$. Vì thế A là số thực.

Bài toán 3 Cho a là số thực dương và $M_a = \left\{ z \in \mathbb{C}^* : \left| z + \frac{1}{z} \right| = a \right\}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của giá trị $|z|$.

Giải

Bình phương hai vế đẳng thức $\left| z + \frac{1}{z} \right| = a$ ta được

$$\begin{aligned} a^2 &= \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} \right) = |z|^2 + \frac{z^2 + (\overline{z})^2}{|z|^2} + \frac{1}{z^2} \\ &= \frac{|z|^4 + (z + \overline{z})^2 - 2|z|^2 + 1}{|z|^2}. \end{aligned}$$

Do đó $|z|^4 - (a^2 + 2)|z|^2 + 1 = -(z + \overline{z})^2 \leq 0$;

Suy ra $|z|^2 \in \left[\frac{a^2 + 2 - \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}, \frac{a^2 + 2 + \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2} \right]$

Vì thế $|z| \in \left[\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right]$

$$\max |z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, \quad \min |z| = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

Giá trị cực trị đạt được khi số phức z thuộc M_a thỏa mãn $z = -\overline{z}$.

1.4.2 Giải phương trình bậc hai

a) Xét phương trình bậc hai với hệ số thực $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.
Ta có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

Khi $\Delta = b^2 - 4ac$ không âm thì ta đã biết rằng phương trình có hai nghiệm thực $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Bây giờ ta xét trường hợp biệt thức Δ âm:

$$\begin{aligned} \text{Ta có phương trình tương đương } a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - i^2 \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Vì thế, phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
Các nghiệm trên là các số phức liên hợp của nhau và ta có thể phân tích thành thừa số như sau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

b) Bây giờ chúng ta xét phương trình bậc hai tổng quát với hệ số phức

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0$$

Sử dụng các biến đổi đại số như trường hợp phương trình bậc hai với hệ số thực ta được:

$$a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right] = 0$$

Đẳng thức trên tương đương với

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\text{hoặc } (2az + b)^2 = \Delta$$

Với $\Delta = b^2 - 4ac$ cũng được gọi là biệt thức của phương trình bậc hai.
Đặt $y = 2az + b$ phương trình trên được rút gọn về dạng

$$y^2 = \Delta = u + vi,$$

với u, v là các số thực

Phương trình trên có lời giải

$$y_{1,2} = \pm \left(\sqrt{\frac{r+u}{2}} + (\operatorname{sgn} v) \sqrt{\frac{r-u}{2}} i \right),$$

Với $r = |\Delta|$, và $\operatorname{sgn} v$ là dấu của số thực v .

Nghiệm ban đầu của phương trình là:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2a} (-b + y_{1,2})$$

Ta có mối liên hệ giữa các nghiệm và hệ số: (Hệ thức Vi-ét)

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

1.4.3 Ý nghĩa hình học của các số phức và modun

Ý nghĩa hình học của số phức

Chúng ta định nghĩa số phức $z = (x, y) = x + yi$ là một cặp số thực sắp thứ tự $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, vì thế hoàn toàn tự nhiên khi xem mỗi số phức $z = x + yi$ là một điểm $M(x, y)$ trong không gian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Xét P là tập hợp các điểm của không gian $\prod$ với hệ trục tọa độ xOy và song ánh

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow P, \quad \phi(z) = M(x, y)$$

Điểm $M(x, y)$ được gọi là dạng hình học của số phức $z = x + yi$. Số phức $z = x + yi$ được gọi là *tọa độ phức* (hay là *nhân*) của điểm $M(x, y)$. Chúng ta kí hiệu $M(z)$ để chỉ tọa độ phức của điểm M là số phức z .

Dạng hình học của số phức liên hợp $\bar{z}$ của số phức $z = x + yi$ là điểm $M'(x, -y)$ đối xứng với $M(x, y)$ qua trục tọa độ Ox .

Dạng hình học của số đối $-z$ của số phức $z = x + yi$ là điểm $M''(-x, -y)$ đối xứng với $M(x, y)$ qua gốc tọa độ.

Song ánh ϕ từ tập $\mathbb{R}$ lên trục Ox ta gọi là *trục thực*, lên trục Oy ta gọi là *trục ảo*.

Không gian $\prod$ cùng với các điểm được đồng nhất với số phức gọi là *không gian phức*.

Ta cũng có thể đồng nhất các số phức $z = x + yi$ với véc tơ $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$, với $M(x, y)$ là dạng hình học của số phức z .

Gọi V_0 là tập hợp các véc tơ có điểm gốc là gốc tọa độ O . Ta có thể định nghĩa song ánh

$\phi' : \mathbb{C} \rightarrow V_0$, $\phi'(z) = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, với $\vec{i}$, $\vec{j}$ là các véc tơ đơn vị trên trục tọa độ Ox , Oy .

Ý nghĩa hình học của modun

Xét số phức $z = x + yi$, biểu diễn hình học trong mặt phẳng là $M(x, y)$. Khoảng cách Ôclit OM cho bởi công thức

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2}.$$

Vì thế $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{v}|$ mô đun $|z|$ của số phức $z = x + yi$ là độ dài của đoạn thẳng OM hoặc là độ lớn của véc tơ $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Chú ý

a) Mỗi số thực dương r , tập hợp các số phức có mô đun r tương đương với đường tròn $C(O; r)$ tâm O bán kính r trong mặt phẳng.

b) Các số phức z với $|z| < r$ là các điểm nằm bên trong đường tròn $C(O; r)$. Các số phức z với $|z| > r$ là các điểm nằm bên ngoài đường tròn $C(O; r)$.

1.4.4 Ý nghĩa hình học của các phép toán đại số

a) Phép cộng và phép trừ

Xét hai số phức $z_1 = x_1 + y_1i$ và $z_2 = x_2 + y_2i$ tương đương với hai véc tơ $\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ và $\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$.

Tổng của hai số phức là

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

Tổng hai véc tơ

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Vì thế $z_1 + z_2$ tương đương với $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Hoàn toàn tương tự đối với phép trừ

Hiệu của hai số phức là

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i,$$

Hiệu hai véc tơ

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j};$$

Vì thế $z_1 - z_2$ tương đương với $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Chú ý

Khoảng cách giữa $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ bằng mô đun của số phức $z_1 - z_2$ hoặc độ dài của véc tơ $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Vậy:

$$M_1 M_2 = |z_1 - z_2| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Tích của số thực và số phức

Xét số phức $z = x + yi$ tương đương với véc tơ $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Nếu λ là số thực, thì tích của số phức z và số thực λ là $\lambda z = \lambda x + \lambda yi$ tương đương với tích của véc tơ $\vec{v}$ với số thực λ là $\lambda \vec{v} = \lambda x \vec{i} + \lambda y \vec{j}$.

Chú ý

Nếu $\lambda > 0$ thì véc tơ $\lambda \vec{v}$ và $\vec{v}$ cùng hướng và $|\lambda \vec{v}| = \lambda |\vec{v}|$, nếu $\lambda < 0$ thì véc tơ $\lambda \vec{v}$ và $\vec{v}$ ngược hướng và $|\lambda \vec{v}| = -\lambda |\vec{v}|$. Tất nhiên $\lambda = 0$ thì $\lambda \vec{v} = \vec{0}$.

1.5 Dạng lượng giác của số phức

1.5.1 Tọa độ cực trong mặt phẳng

Xét mặt phẳng tọa độ với $M(x, y)$ không trùng gốc tọa độ. Số thực $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là *bán kính cực* của điểm M . Góc định hướng $t^* \in [0, 2\pi)$ giữa véc tơ $\vec{OM}$ với chiều dương của trục tọa độ Ox gọi là *argumen cực* của điểm M . Cặp số (r, t^*) gọi là tọa độ cực của điểm M . Ta sẽ viết $M(r, t^*)$.

Chú ý

Hàm số

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, \infty) \times [0, 2\pi) \quad , \quad h((x, y)) = (r, t^*)$$

là song ánh.

Gốc tọa độ O là điểm duy nhất sao cho $r = 0$, argumen t^* của gốc không được định nghĩa.

Mỗi điểm M trong mặt phẳng, có duy nhất giao điểm P của tia (OM với đường tròn đơn vị gốc O). Điểm P giống như argument cực t^* . Sử dụng định nghĩa hàm sin và cosin ta có

$$x = r \cos t^* , \quad y = r \sin t^*$$

Vì thế ta dễ dàng có tọa độ Đề các của một điểm từ tọa độ cực.

Ngược lại, xét điểm $M(x, y)$. Bán kính cực là $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta xác định argument cực trong các trường hợp sau

a) Nếu $x \neq 0$, từ $\tan t^* = \frac{y}{x}$ ta suy ra

$$t^* = \arctan \frac{y}{x} + k\pi$$

Với

$$k = \begin{cases} 0 & \text{khi } x > 0, y \geq 0 \\ 1 & \text{khi } x < 0, y \in \mathbb{R} \\ 2 & \text{khi } x > 0, y < 0 \end{cases}$$

b) Nếu $x = 0$ và $y \neq 0$ thì

$$t^* = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{khi } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{khi } y < 0 \end{cases}$$

1.5.2 Tọa độ cực của số phức

Mỗi số phức $z = x + yi$ ta có thể viết dưới dạng cực $z = r (\cos t^* + i \sin t^*)$ với $r \in [0, \infty)$ và $t^* \in [0, 2\pi)$.

Đó là tọa độ cực dạng hình học của số phức z .

Argument cực của dạng hình học của số phức z được gọi là argument của z , kí hiệu là $\arg z$. Bán kính cực của dạng hình học của số phức z bằng mô đun của z . Khi $z \neq 0$ mô đun và argument của z được xác định một cách duy nhất.

Xét $z = r (\cos t^* + i \sin t^*)$ và $t = t^* + 2k\pi$ với k là số nguyên thì

$$z = r (\cos (t - 2k\pi) + i \sin (t - 2k\pi)) = r (\cos t + i \sin t)$$

Mỗi số phức z có thể biểu diễn như $z = r (\cos t + i \sin t)$ với $r \geq 0$ và $t \in \mathbb{R}$. Tập hợp $\text{Arg } z = \{t = t^* + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ được gọi là *arguent mở rộng* của số phức z

Vì thế, hai số phức $z_1, z_2 \neq 0$ có dạng

$$z_1 = r_1 (\cos t_1 + i \sin t_1) \quad \text{và} \quad z_2 = r_2 (\cos t_2 + i \sin t_2)$$

bằng nhau khi và chỉ khi $r_1 = r_2$ và $t_1 - t_2 = 2k\pi$, với k là số nguyên.

Chú ý

Một số dạng đặc biệt:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 + i \sin 0, & i &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ -1 &= \cos \pi + i \sin \pi, & -i &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

1.5.3 Các phép toán số phức trong tọa độ cực

Phép nhân *Giả sử rằng*

$$z_1 = r_1 (\cos t_1 + i \sin t_1) \quad \text{và} \quad z_2 = r_2 (\cos t_2 + i \sin t_2)$$

thì

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (t_1 + t_2) + i \sin (t_1 + t_2)).$$

Lũy thừa của một số phức (De moirve) Cho $z = r (\cos t + i \sin t)$ và $n \in \mathbb{N}$, ta có

$$z^n = r^n (\cos nt + i \sin nt).$$

phép chia *Giả sử rằng*

$$z_1 = r_1 (\cos t_1 + i \sin t_1) \quad \text{và} \quad z_2 = r_2 (\cos t_2 + i \sin t_2)$$

thì

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (t_1 - t_2) + i \sin (t_1 - t_2))$$

1.5.4 Ý nghĩa hình học của phép nhân

Xét hai số phức $z_1 = r_1 (\cos t_1^* + i \sin t_1^*)$ và $z_2 = r_2 (\cos t_2^* + i \sin t_2^*)$.

Giả sử biểu diễn hình học của chúng là $M_1(r_1, t_1^*)$, $M_2(r_2, t_2^*)$. Gọi P_1 , P_2 lần lượt là giao điểm của $C(O, 1)$ với các tia (OM_1) và (OM_2) . Lấy $P_3 \in C(O, 1)$ với argument cực là $t_1^* + t_2^*$ và chọn $M_3 \in (OP_3)$ sao cho $OM_3 = OM_1 \cdot OM_2$. Lấy z_3 có tọa độ M_3 . Điểm $M_3(r_1 r_2, t_1^* + t_2^*)$ là dạng hình học $z_1 z_2$.

Lấy A là dạng hình học của số phức 1. Vì

$$\frac{OM_3}{OM_1} = \frac{OM_2}{1} \Leftrightarrow \frac{OM_3}{OM_2} = \frac{OM_1}{OA}$$

và $\widehat{M_2 O M_3} = \widehat{A O M_1}$ nên hai tam giác $M_2 O M_3$ và $A O M_1$ đồng dạng.

Khi biểu diễn dạng hình học của một thương chú ý rằng dạng hình học của $\frac{z_3}{z_2}$ là điểm M_1 .

1.5.5 Các căn bậc n của đơn vị

Cho số nguyên dương $n \geq 2$ và số phức $z_0 \neq 0$, giống như trên trường số thực, phương trình

$$Z^n - z_0 = 0$$

được sử dụng định nghĩa căn bậc n của số z_0 . Vì vậy mỗi một giá trị Z thỏa mãn phương trình trên là một căn bậc n của z_0 .

Định lý 1.5.1. Cho $z_0 = r (\cos t^* + i \sin t^*)$ là số phức với $r > 0$ và $t^* \in [0, 2\pi)$. Số phức z_0 có n căn bậc n phân biệt cho bởi công thức

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t^* + 2k\pi}{n} \right)$$

với $k = \overline{0, n-1}$.

Chứng minh

Sử dụng dạng cực của số phức với argument xác định

$$Z = \rho (\cos \phi + i \sin \phi).$$

Theo định nghĩa $Z^n = z_0$ hay

$$\rho^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) = r (\cos t^* + i \sin t^*).$$

Ta có $\rho^n = r$ và $n\phi = t^* + 2k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Vì thế $\rho = \sqrt[n]{r}$ và $\phi_k = \frac{t^*}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Do đó nghiệm của (1) là

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{t^* + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{t^* + 2k\pi}{n} \right),$$

với $k \in \mathbb{Z}$.

Nhận thấy rằng $0 \leq \phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_{n-1}$.

Vì thế các số ϕ_k với $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ chính là các argument và $\phi_k^* = \phi_k$. Ta có n giá trị căn phân biệt của $z_0 : Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$.

Cho k là số nguyên và $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, thì r đồng dư với k theo $\text{mod } n$. Khi đó $k = nq + r \in \mathbb{Z}$ và

$$\phi_k = \frac{t^*}{n} + (nq + r) \frac{2\pi}{n} = \frac{t^*}{n} + r \frac{2\pi}{n} + 2q\pi = \phi_r + 2q\pi.$$

Nhận thấy $Z_k = Z_r$ do đó

$$\{Z_k : k \in \mathbb{Z}\} = \{Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}\}.$$

Vậy có chính xác n giá trị phân biệt của căn bậc n của z .

Biểu diễn hình học các giá trị của căn bậc n là các đỉnh của một n giác đều nội tiếp trong đường tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính là $\sqrt[n]{r}$.

Ta chứng minh điều trên như sau, kí hiệu $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ là các điểm có tọa độ phức $Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$.

Vì $OM_k = |Z_k| = \sqrt[n]{r}$ với $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ nên các điểm M_k nằm trên đường tròn $C(O, \sqrt[n]{r})$. Bên cạnh đó, số đo của cung $M_k M_{k+1}$ bằng

$$\arg Z_{k+1} - \arg Z_k = \frac{t^* + 2(k+1)\pi - (t^* + 2k\pi)}{n} = \frac{2\pi}{n},$$

với $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ và số đo cung $M_{n-1} M_0$ là

$$\frac{2\pi}{n} = 2\pi - (n-1) \frac{2\pi}{n}.$$

Vì tất cả các cung $M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_0$ đều bằng nhau nên đa giác $M_0M_1\dots M_{n-1}$ là đa giác đều.

Căn bậc n của đơn vị

Các nghiệm phương trình $Z^n - 1 = 0$ được gọi là các căn bậc n của đơn vị. Vì $1 = \cos 0 + i \sin 0$.

Nên từ công thức căn bậc n của số phức ta có căn bậc n của đơn vị

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Cụ thể ta có

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\ \varepsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = \varepsilon \\ \varepsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} = \varepsilon^2 \\ &\dots \\ \varepsilon_{n-1} &= \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = \varepsilon^{n-1} \end{aligned}$$

Tập hợp $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$ kí hiệu U_n . Ta có tập hợp U_n được sinh bởi ε , mỗi phần tử của U_n là một lũy thừa của ε .

Giống như trước, biểu diễn hình học các căn bậc n của một số phức là các đỉnh của một đa giác đều n cạnh, nội tiếp trong đường tròn đơn vị mà có một đỉnh là 1. Ta xét một vài giá trị của n

i) với $n = 2$, phương trình $Z^2 - 1 = 0$ có các nghiệm 1 và -1 đây là các căn bậc hai của đơn vị.

ii) với $n = 3$, phương trình $Z^3 - 1 = 0$ có các nghiệm cho bởi công thức

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3};$$

với $k \in \{0, 1, 2\}$.

Vì thế

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

và

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Đây là các đỉnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn $C(O, 1)$.

iii) với $n = 4$, các căn bậc 4 là

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4},$$

với $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Cụ thể như sau

$$\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\varepsilon_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \varepsilon_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

Ta có

$$U_4 = \{1, i, i^2, i^3\} = \{1, i, -1, -i\}$$

Biểu diễn hình học của các căn bậc bốn là các đỉnh của hình vuông nội tiếp đường tròn $C(O, 1)$ có một đỉnh là 1.

Căn $\varepsilon_k \in U_n$ được gọi là *căn nguyên thủy* nếu mọi số nguyên dương $m < n$ ta có $\varepsilon_k^m \neq 1$.

Mệnh đề 1.5.2. a) Nếu n/q , mọi nghiệm của phương trình $Z^n - 1 = 0$ là nghiệm của phương trình $Z^q - 1 = 0$.

b) Nghiệm chung của phương trình $Z^m - 1 = 0$ và $Z^n - 1 = 0$ là các nghiệm của phương trình $Z^d - 1 = 0$, với $d = \gcd(m, n)$ (d: ước chung lớn nhất), $U_m \cap U_n = U_d$

c) Các nghiệm nguyên thủy của phương trình $Z^m - 1 = 0$ là:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}, \text{ với } 0 \leq k \leq m \text{ và } \gcd(k, m) = 1$$

Mệnh đề 1.5.3. Nếu $\varepsilon \in U_n$ là một căn nguyên thủy của đơn vị thì tất cả các nghiệm của phương trình $Z^n - 1 = 0$ là $\varepsilon^r, \varepsilon^{r+1}, \dots, \varepsilon^{r+n-1}$ với n là số nguyên dương tùy ý.

Mệnh đề 1.5.4. Cho $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ là các căn bậc n của đơn vị. Với mỗi số nguyên dương n ta luôn có hệ thức

$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^k = \begin{cases} n, & \text{khi } n \text{ là ước của } k \\ 0, & \text{khi } n \text{ không là ước của } k. \end{cases}$$

Mệnh đề 1.5.5. Cho p là số nguyên tố và $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$. Nếu $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ là các số nguyên khác không, hệ thức

$$a_0 + a_1\varepsilon + \dots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$$

đúng khi và chỉ khi $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1}$.

Bài toán 1 Hai đa giác đều cùng nội tiếp trong một đường tròn. Đa giác thứ nhất có 1982 cạnh và đa giác thứ hai có 2973 cạnh. Nếu các đa giác đó có đỉnh chung, hỏi sẽ có bao nhiêu đỉnh chung?

Giải

Số đỉnh chung chính là số các nghiệm chung của hai phương trình $z^{1982} - 1 = 0$ và $z^{2973} - 1 = 0$. Áp dụng mệnh đề 1.5.2, số nghiệm chung là $d = \gcd(1982, 2973) = 991$. Vậy có 991 đỉnh chung

Bài toán 2 Cho $P_0P_1\dots P_n$ là các đỉnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn bán kính bằng 1. Chứng minh rằng:

- a) $P_0P_1.P_1P_2\dots P_0P_{n-1} = n$;
 b) $\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Giải

a) Không mất tính tổng quát ta giả sử các đỉnh của đa giác đều là biểu diễn hình học của căn bậc n của đơn vị, và $P_0 = 1$.

Xét đa thức $f = z^n - 1 = (z - 1)(z - \varepsilon) \dots (z - \varepsilon^{n-1})$,
 với $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

Ta có $n = f'(1) = z^n - 1 = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) \dots (z - \varepsilon^{n-1})$.

Lấy mô đun của hai vế ta có đẳng thức phải chứng minh.

b) Ta có

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon^k &= 1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} = 2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} - 2i \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \\ &= 2 \sin \frac{k\pi}{n} \left(\sin \frac{k\pi}{n} - i \cos \frac{k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Vì thế $|1 - \varepsilon^k| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, n-1$. Kết hợp câu a), dễ thấy đẳng thức lượng giác cần chứng minh.

Chương 2

Số phức và hình học

2.1 Một vài khái niệm và tính chất

Khoảng cách giữa hai điểm

Giả sử các số phức z_1 và z_2 có biểu diễn hình học là các điểm M_1 và M_2 khi đó khoảng cách giữa hai điểm M_1 và M_2 được cho bởi công thức

$$M_1M_2 = |z_1 - z_2|.$$

Đoạn thẳng, tia, đường thẳng

Cho A và B là hai điểm phân biệt, trong mặt phẳng phức có tọa độ là a và b . Ta nói điểm M có tọa độ z nằm giữa A và B nếu $z \neq a$, $z \neq b$ và hệ thức sau thỏa mãn

$$|a - z| + |z - b| = |a - b|$$

Ta sử dụng kí hiệu $A - M - B$.

Tập hợp $(AB) = \{M : A - M - B\}$ được gọi là *đoạn thẳng mở* xác định bởi điểm A và B .

Tập hợp $[AB] = (AB) \cup \{A, B\}$ được gọi là *đoạn thẳng đóng* xác định bởi điểm A và B .

Định lý 2.1.1. *Giả sử $A(a), B(b)$ là hai điểm phân biệt. Khi đó các trình bày dưới đây là tương đương*

- 1) $M \in (AB)$;
- 2) Có số thực dương k sao cho $z - a = b(k - z)$;
- 3) Có số thực $t \in (0, 1)$ sao cho $z = (1 - t)a + tb$, với z là nhân của M .

Định lý 2.1.2. Giả sử $A(a), B(b)$ là hai điểm phân biệt. Khi đó các trình bày dưới đây là tương đương

- 1) $M \in (AB)$;
- 2) Có số thực dương t sao cho $z = (1 - t)a + tb$, với z là nhân của M ;
- 3) $\arg(z - a) = \arg(z - b)$;
- 4) $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}^+$.

Định lý 2.1.3. Giả sử $A(a), B(b)$ là hai điểm phân biệt. Khi đó các trình bày dưới đây là tương đương

- 1) M nằm trên đường thẳng AB ;
- 2) $\frac{z - a}{b - a} \in \mathbb{R}$;
- 3) Có số thực t sao cho $z = (1 - t)a + tb$;
- 4) $\begin{vmatrix} z - a & \bar{z} - \bar{a} \\ b - a & \bar{b} - \bar{a} \end{vmatrix} = 0$;
- 5) $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Chia đoạn thẳng theo một tỉ số

Cho hai điểm $A(a), B(b)$ phân biệt. Một điểm $M(z)$ nằm trên đường thẳng AB chia đoạn AB theo tỉ số $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ khi hệ thức véc tơ sau thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}.$$

Sử dụng tọa độ hệ thức trên có thể viết $a - z = k(b - z)$ hoặc $(1 - k) \cdot z = a - kb$. Vì thế ta có

$$z = \frac{a - kb}{1 - k}$$

Khi $k < 0$ điểm M nằm trên đoạn thẳng nối A và B . Nếu $k \in (0, 1)$, thì $M \in (BA \setminus [AB])$.

Trường hợp còn lại $k > 1$ thì $M \in (AB \setminus [AB])$

Góc định hướng

Ta biết rằng, một tam giác được định hướng nếu như các đỉnh của nó được chỉ rõ thứ tự. Tam giác có hướng dương nếu hướng các đỉnh ngược chiều kim đồng hồ, hướng ngược lại là hướng âm. Lấy $M_1(z_1)$ và $M_2(z_2)$ là hai điểm phân biệt khác gốc tọa độ trong mặt phẳng phức. Góc $\widehat{M_1OM_2}$

được gọi là định hướng nếu các điểm M_1 và M_2 có thứ tự thuận chiều kim đồng hồ.

Mệnh đề 2.1.4. Số đo góc định hướng $\widehat{M_1OM_2}$ bằng

$$\arg \frac{z_2}{z_1}.$$

Định lý 2.1.5. Cho ba điểm phân biệt $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$. Số đo góc định hướng $\widehat{M_2M_1M_3}$ là

$$\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Chứng minh

Tính tiến theo véc tơ $-z_1$, ảnh của các điểm M_1 , M_2 , M_3 biến thành O , M'_2 , M'_3 có tọa độ phức là O , $z_2 - z_1$, $z_3 - z_1$. Ngoài ra $\widehat{M_2M_1M_3} = \widehat{M'_2OM'_3}$.

Sử dụng lại kết quả trên ta có $\widehat{M'_2OM'_3} = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$. Đó là điều phải chứng minh.

Chú ý

1) Sử dụng biểu diễn cực, từ trên ta có kết quả sau:

$$\begin{aligned} \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| \left(\cos \left(\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) + i \sin \left(\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) \right) \\ &= \left| \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right| \left(\cos \widehat{M_2M_1M_3} + i \sin \widehat{M_2M_1M_3} \right) \end{aligned}$$

2) $V(z_3, z_2, z_1) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ gọi là tỉ số đơn của các số phức z_1 , z_2 , z_3 (viết theo thứ tự đã chỉ ra). Do đó argumen của $V(z_3, z_2, z_1)$ chính là góc định hướng giữa các véc tơ $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ và $\overrightarrow{Z_1Z_3}$

Bài toán 1 Cho hình vuông $ABCD$. Điểm M là trung điểm của CD , điểm P nằm trên đường chéo AC sao cho $|PC| = 3|PA|$. Chứng minh rằng: $\widehat{MPB} = 90^\circ$.

Giải

Đặt hệ tọa độ vuông góc sao cho A là gốc tọa độ và véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là véc tơ đơn vị của trục hoành, véc tơ $\overrightarrow{AD}$ là véc tơ đơn vị của trục tung. Như vậy,

nhân của những điểm A, B, C, D tương ứng là $a = 0, b = 1, c = 1+i, d = i$.
Suy ra điểm M có nhân $m = \frac{1}{2}(c + d) = \frac{1}{2}(1 + 2i)$

Vì $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, Nên P có nhân $p = \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}(1 + i)$.

Từ đó ta tính được

$$V(m, b, p) = \frac{m - p}{b - p} = \frac{\frac{1}{2}(1 + 2i) - \frac{1}{4}(1 + i)}{1 - \frac{1}{4}(1 + i)} = \frac{1 + 3i}{3 - i} = i$$

vì $\arg i = \frac{\pi}{2}$ nên $\widehat{MPB} = 90^\circ$.

Hơn nữa, do $|i| = 1$, chúng ta nhận được $|PB| = |PM|$, nên tam giác MPB vuông cân tại P .

Bài toán 2 Cho ba hình vuông bằng nhau $ABCD, BEFC, EPQF$.
Chứng minh rằng: $\widehat{ACD} + \widehat{AFD} + \widehat{AQD} = \frac{\pi}{2}$.

Giải

Dựng hệ tọa độ vuông góc với A là gốc tọa độ và $\overrightarrow{AB}$ là vectơ đơn vị theo chiều dương của trục hoành. Suy ra, nhân của A, B, C, D, E, F, P, Q lần lượt là: $a = 0, b = 1, c = 1 + i, d = i, e = 2, f = 2 + i, p = 3, q = 3 + i$.
Vì $\widehat{ACD} = \widehat{BAC} = \arg(1 + i)$, $\widehat{AFD} = \widehat{EAF} = \arg(2 + i)$

và $\widehat{AQD} = \widehat{PAQ} = \arg(3 + i)$ nên

$$\widehat{ACD} + \widehat{AFD} + \widehat{AQD} = \arg(1 + i) + \arg(2 + i) + \arg(3 + i) = \arg(10i) = \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 3 Cho tam giác ABC . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C , dựng hình vuông $ABDE$. Trong nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A , dựng hình vuông $BCFG$. Chứng minh rằng: GA vuông góc với CD và $GA = CD$.

Giải

Lấy hệ tọa độ vuông góc có gốc là B , hướng của vectơ $\overrightarrow{BC}$ là chiều dương của trục hoành. Ký hiệu nhân của A, B, C lần lượt là a, b, c . Khi đó, ta tính được nhân của G, D lần lượt là $g = ic, d = -ia$. Gọi là góc giữa GA và DC thì:

$$\alpha = \arg \frac{-ia - c}{a - ic} : \left| \frac{-ia - c}{a - ic} \right| = \arg i = \frac{\pi}{2}$$

Vậy GA vuông góc với DC . Mặt khác, $|GA| = |a - ic| = |-ia - c| = |CD|$ nên ta có điều phải chứng minh.

Góc giữa hai đường thẳng

Cho bốn điểm $M_i(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Số đo góc xác định bởi đường thẳng M_1M_3 và M_2M_4 bằng

$$\arg \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2}$$

hoặc

$$\arg \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$$

Phép quay một điểm

Xét góc α và số phức cho bởi $\varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$.

Lấy $z = r(\cos t + i \sin t)$ là số phức và M là biểu diễn hình học của nó.

Ta có, tích $z\varepsilon = r(\cos(t + \alpha) + i \sin(t + \alpha))$, $|r\varepsilon| = r$ và $\arg(z\varepsilon) = \arg z + \alpha$.

Nên nếu gọi M' là biểu diễn hình học của $z\varepsilon$, ta thấy rằng điểm M' là ảnh của M qua phép quay tâm O (gốc tọa độ) góc quay là α .

Mệnh đề 2.1.6. Giả sử điểm C là ảnh của B qua phép quay tâm A góc quay α . Nếu a, b, c là các tọa độ của A, B, C phân biệt thì:

$$c = a + (b - a)\varepsilon \text{ với } \varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Bài toán 1 Cho $ABCD$ và $BNMK$ là hai hình vuông không trùng nhau. E là trung điểm của AN , F là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng CK . Chứng minh rằng E, F, B thẳng hàng.

Giải

Xét không gian phức gốc F các trục tọa độ CK và FB với FB là trục ảo. Lấy c, k, bi là tọa độ các điểm C, B, K với $c, k, b \in \mathbb{R}$. Phép quay tâm B góc quay $\theta = \frac{\pi}{2}$ biến điểm C thành điểm A vì thế A có tọa độ là $a = b(1 - i) + ci$. Tương tự N là ảnh của điểm B góc quay $\theta = -\frac{\pi}{2}$ và có tọa độ phức là

$$n = b(1 + i) - ki$$

Trung điểm E của đoạn thẳng AN có tọa độ phức là

$$e = \frac{a + n}{2} = b + \frac{c - k}{2}i.$$

Vậy E nằm trên đường thẳng FB , ta có đpcm.

Bài toán 2

Cho tứ giác $ABCD$, trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lần lượt dựng về phía ngoài của tứ giác các hình vuông có tâm O_1, O_2, O_3, O_4 phân biệt. Chứng minh rằng $O_1O_3 \perp O_2O_4$ và $O_1O_3 = O_2O_4$.

Giải

Lấy $ABMM', BCNN', CDPP', DAQQ'$ lần lượt là các hình vuông có tâm O_1, O_2, O_3, O_4 .

Điểm M là ảnh của A qua phép quay tâm B góc quay $\theta = \frac{\pi}{2}$; vì thế $m = b + (a - b)i$

Tương tự

$$n = c + (b - c)i, \quad p = (c - d)i, \quad q = a + (d - a)i.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} o_1 &= \frac{a + m}{2} = \frac{a + b + (a - b)i}{2}, & o_2 &= \frac{b + c + (b - c)i}{2} \\ o_3 &= \frac{c + d + (c - d)i}{2}, & o_4 &= \frac{d + a + (d - a)i}{2}. \end{aligned}$$

Vì

$$\frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} = \frac{c + d - a - b + i(c - d - a + b)}{a + d - b - c + i(d - a - b + c)} = -i \in i\mathbb{R}^*,$$

nên $O_1O_3 \perp O_2O_4$

Ngoài ra

$$\left| \frac{o_3 - o_1}{o_4 - o_2} \right| = |-i| = 1,$$

nên $O_1O_3 = O_2O_4$.

Bài toán 3 Về phía ngoài tam giác ABC ta dựng các tam giác ABR, BCP, CAQ sao cho

$$\begin{aligned} \widehat{PBC} &= \widehat{CAQ} = 45^\circ \\ \widehat{BCP} &= \widehat{QCA} = 30^\circ \\ \widehat{ABR} &= \widehat{RAB} = 15^\circ \end{aligned}$$

Chứng minh rằng $\widehat{QRP} = 90^\circ$ và $RQ = RP$.

Giải

Xét mặt phẳng phức với gốc tọa độ là R , gọi M là hình chiếu vuông góc của P lên BC

Từ $MP = MB$ và $\frac{MC}{MP} = \sqrt{3}$ ta có

$$\frac{p-m}{b-m} = i \quad \text{và} \quad \frac{c-m}{p-m} = i\sqrt{3}.$$

Vì thế

$$p = \frac{c + \sqrt{3}b}{1 + \sqrt{3}} + \frac{b-c}{1 + \sqrt{3}}i.$$

Tương tự

$$q = \frac{c + \sqrt{3}a}{1 + \sqrt{3}} + \frac{a-c}{1 + \sqrt{3}}i.$$

Điểm B có được từ điểm A bằng cách quay quanh R một góc $\theta = 150^\circ$ vì thế

$$b = a \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right).$$

Sử dụng biến đổi đại số ta có $\frac{p}{q} = i \in i\mathbb{R}^*$, vì thế $QR \perp PR$. Ngoài ra $|p| = |iq| = |q|$ nên $QR = PR$. Dpcm

2.2 Điều kiện thẳng hàng, vuông góc và cùng thuộc một đường tròn

Xét bốn điểm phân biệt $M_i(z_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Mệnh đề 2.2.1. Các điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*.$$

Mệnh đề 2.2.2. Đường thẳng M_1M_2 và M_3M_4 vuông góc khi và chỉ khi

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R}^*.$$

Mệnh đề 2.2.3. Bốn điểm phân biệt $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ thẳng hàng hoặc cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*.$$

Số k được gọi là tỉ số kép của bốn điểm $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$.

Chú ý

1) các điểm $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R}^* \quad \text{và} \quad \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*.$$

2) Các điểm $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi

$$k = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*,$$

với

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \notin \mathbb{R} \quad \text{và} \quad \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}.$$

2.3 Tam giác đồng dạng

Xét sáu điểm $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$ trong mặt phẳng phức. Ta nói rằng tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$ đồng dạng với nhau nếu góc A_k bằng góc B_k , $k \in \{1, 2, 3\}$

Mệnh đề 2.3.1. Tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$ đồng dạng và có cùng hướng khi và chỉ khi

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}.$$

Mệnh đề 2.3.2. Tam giác $A_1A_2A_3$ và $B_1B_2B_3$ đồng dạng và ngược hướng khi và chỉ khi

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\overline{b_2 - b_1}}{\overline{b_3 - b_1}}.$$

Bài toán 1 Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC ta dựng các tam giác đồng dạng và có cùng hướng ADB, BEC, CFA . Chứng minh rằng tam giác ABC và tam giác DEF có cùng trọng tâm.

Giải

Vì các tam giác ADB, BEC, CFA đồng dạng và có cùng hướng nên

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{e-b}{c-b} = \frac{f-c}{a-c} = z$$

Từ đây ta có

$$d = a + (b-a)z, \quad e = b + (c-b)z, \quad f = c + (a-c)z.$$

Suy ra

$$\frac{d+e+f}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Vậy các tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

Bài toán 2 Cho tam giác ABC trung điểm các cạnh AB, BC, CA lần lượt là M, N, P . Trên đường trung trực của các đoạn thẳng $[AB], [BC], [CA]$ các điểm A', B', C' được chọn phía trong tam giác sao cho

$$\frac{MC'}{AB} = \frac{NA'}{BC} = \frac{PB'}{CA}.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Giải

Từ

$$\frac{MC'}{AB} = \frac{NA'}{BC} = \frac{PB'}{CA}.$$

Ta có $\tan(\widehat{C'AB}) = \tan(\widehat{A'BC}) = \tan(\widehat{CB'A})$. Vì thế các tam giác $AC'B, BA'C, CB'A$ đồng dạng với nhau. Áp dụng kết quả bài trên ta có lời giải.

Bài toán 3 Cho tam giác ABO đều với tâm S , tam giác đều khác $A'B'O$ có cùng hướng với tam giác ABO và $S \neq A', S \neq B'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm $A'B$ và AB' . Chứng minh rằng hai tam giác $SB'M, SA'N$ đồng dạng.

(30th IMO-Shortlist)

Giải

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABO và

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

Xét mặt phẳng phức với gốc S sao cho O nằm trên chiều dương của trục thực. Tọa độ của các điểm O, A, B là $R, R\varepsilon, R\varepsilon^2$

Xét $R + z$ là tọa độ của B' khi đó tọa độ A' là $R - z\varepsilon$. Tọa độ trung điểm M, N là

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{z_B + z_{A'}}{2} = \frac{R\varepsilon^2 + R - z\varepsilon}{2} \\ &= \frac{R(\varepsilon^2 + \varepsilon) - z\varepsilon}{2} = \frac{-R\varepsilon - z\varepsilon}{2} = \frac{-\varepsilon(R + z)}{2} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} z_N &= \frac{z_A + z_{B'}}{2} = \frac{R\varepsilon + R + z}{2} = \frac{R(\varepsilon + 1) + z}{2} \\ &= \frac{-R\varepsilon^2 + z}{2} = \frac{z - \frac{R}{\varepsilon}}{2} = \frac{R - z\varepsilon}{-2\varepsilon} \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\frac{z_{B'} - z_S}{z_M - z_S} = \frac{\overline{z_{A'}} - \overline{z_S}}{\overline{z_N} - \overline{z_S}} \Leftrightarrow \frac{R + z}{\frac{-\varepsilon(R + z)}{2}} = \frac{\overline{R - z\varepsilon}}{\frac{\overline{R - z\varepsilon}}{-2\bar{\varepsilon}}} \Leftrightarrow \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = 1 \Leftrightarrow |\varepsilon|^2 = 1.$$

Vậy giác $SB'M$ và $SA'N$ đồng dạng và ngược hướng.

2.4 Tam giác đều

Mệnh đề 2.4.1. Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác $A_1A_2A_3$. Khi đó các khẳng định sau tương đương

- 1) $A_1A_2A_3$ là tam giác đều;
- 2) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$;
- 3) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$;
- 4) $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_3}$;
- 5) $\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0$ với $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$;

$$6) (z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3) (z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3) = 0 \text{ với } \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mệnh đề 2.4.2. Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác có hướng dương $A_1 A_2 A_3$. Khi đó các khẳng định sau tương đương

- 1) $A_1 A_2 A_3$ là tam giác đều;
- 2) $z_3 - z_1 = \varepsilon (z_2 - z_1)$ với $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$;
- 3) $z_2 - z_1 = \varepsilon (z_3 - z_1)$ với $\varepsilon = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$;
- 4) $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ với $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Mệnh đề 2.4.3. Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác có hướng âm $A_1 A_2 A_3$. Khi đó các khẳng định sau tương đương

- 1) $A_1 A_2 A_3$ là tam giác đều;
- 2) $z_3 - z_1 = \varepsilon (z_2 - z_1)$ với $\varepsilon = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$;
- 3) $z_2 - z_1 = \varepsilon (z_3 - z_1)$ với $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$;
- 4) $z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3 = 0$ với $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Mệnh đề 2.4.4. Giả sử z_1, z_2, z_3 là tọa độ các đỉnh của tam giác đều $A_1 A_2 A_3$. Khi đó các khẳng định sau tương đương

- 1) $A_1 A_2 A_3$ là tam giác đều;
- 2) $z_1 \overline{z_2} = z_2 \overline{z_3} = z_3 \overline{z_1}$;
- 3) $z_1^2 = z_2 z_3$ và $z_2^2 = z_1 z_3$.

Bài toán 1 Về phía ngoài tam giác ABC dựng ba tam giác đều có hướng dương AC'B, BA'C, CB'A. Chứng minh rằng các trọng tâm của ba tam giác là các đỉnh của một tam giác đều

(Napoleon's problem)

Giải

Gọi a, b, c là tọa độ ba đỉnh A, B, C . Sử dụng mệnh đề 2.4.2 ta có

$$a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2 = 0, \quad b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, \quad c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2 = 0 \quad (1)$$

Với a', b', c' , là tọa độ các điểm A', B', C' . Trọng tâm các tam giác $A'CB, B'AC, C'B'A$ có tọa độ là

$$a'' = \frac{1}{3}(a' + b + c), \quad b'' = \frac{1}{3}(a + b' + c), \quad c'' = \frac{1}{3}(a + b + c').$$

Ta sẽ kiểm tra $c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2 = 0$. Thật vậy

$$\begin{aligned} (c'' + a''\varepsilon + b''\varepsilon^2) &= (a + b + c') + (a' + b + c)\varepsilon + (a + b' + c)\varepsilon^2 \\ &= (b + a'\varepsilon + c\varepsilon^2) + (a + c'\varepsilon + b\varepsilon^2) + (c + b'\varepsilon + a\varepsilon^2) = 0. \end{aligned}$$

Bài toán 2 Trên các cạnh của tam giác, về phía ngoài ta dựng ba đa giác đều n cạnh. Tìm tất cả các giá trị của n sao cho tâm của các hình n giác đó là các đỉnh của một tam giác đều.

(*Balkan Mathematical Olympiad-Shortlist*)

Giải

Xét A_0, B_0, C_0 là trọng tâm của các n giác trên các cạnh BC, CA, AB . Số đo các góc $\widehat{AC_0B}$, $\widehat{BA_0C}$, $\widehat{AB_0C}$ là $\frac{2\pi}{n}$. Kí hiệu a, b, c, a_0, b_0, c_0 là tọa độ các điểm A, B, C, A_0, B_0, C_0 . Sử dụng các công thức phép quay ta có

$$\begin{aligned} a &= c_0 + (b - c_0)\varepsilon; \\ b &= a_0 + (c - a_0)\varepsilon; \\ c &= b_0 + (a - b_0)\varepsilon. \end{aligned}$$

Suy ra

$$a_0 = \frac{b - c\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad b_0 = \frac{c - a\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad c_0 = \frac{a - b\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Tam giác $A_0B_0C_0$ đều khi và chỉ khi

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0.$$

Thay các giá trị a_0, b_0, c_0 ta có

$$\begin{aligned} & (b - c\varepsilon)^2 + (c - a\varepsilon)^2 + (a - b\varepsilon)^2 = \\ & = (b - c\varepsilon)(c - a\varepsilon) + (c - a\varepsilon)(a - b\varepsilon) + (a - b\varepsilon)(b - c\varepsilon). \end{aligned}$$

Đẳng thức trên tương đương với

$$(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] = 0.$$

Suy ra $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{3}$ ta có $n = 3$. Vậy $n = 3$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

2.5 Diện tích tam giác

Định lí Diện tích tam giác $A_1A_2A_3$ với các đỉnh có tọa độ z_1, z_2, z_3 bằng mô đun của số

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Chứng minh

Sử dụng hệ tọa độ Đề Các, diện tích tam giác có các đỉnh $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ bằng giá trị tuyệt đối của định thức sau

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Vì } x_k = \frac{z_k + \overline{z_k}}{2}, \quad y_k = \frac{z_k - \overline{z_k}}{2i}, \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

Ta có

$$\frac{1}{8i} \begin{vmatrix} z_1 + \overline{z_1} & z_1 - \overline{z_1} & 1 \\ z_2 + \overline{z_2} & z_2 - \overline{z_2} & 1 \\ z + \overline{z} & z - \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}. \quad \text{Đpcm}$$

Dễ thấy rằng nếu tam giác $A_1A_2A_3$ có hướng dương với các đỉnh có tọa độ z_1, z_2, z_3 thì ta có

$$\frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Hệ quả Diện tích tam giác định hướng $A_1A_2A_3$ với các đỉnh có tọa độ z_1, z_2, z_3 là $\text{area}[A_1A_2A_3] = \frac{1}{2} \text{Im}(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1})$

Bài toán 1 Cho tam giác $A_1A_2A_3$ và điểm M_1, M_2, M_3 nằm trên đường thẳng A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 . Giả sử rằng M_1, M_2, M_3 chia đoạn thẳng $[A_2A_3], [A_3A_1], [A_1A_2]$ theo tỉ số $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\text{area}[M_1M_2M_3]}{\text{area}[A_1A_2A_3]} = \frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)}.$$

Giải

Tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 là

$$m_1 = \frac{a_2 - \lambda_1 a_1}{1 - \lambda_1}, m_2 = \frac{a_3 - \lambda_2 a_1}{1 - \lambda_2}, m_3 = \frac{a_1 - \lambda_3 a_2}{1 - \lambda_3}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \text{area}[M_1M_2M_3] &= \frac{1}{2} (\overline{m_1}m_2 + \overline{m_2}m_3 + \overline{m_3}m_1) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\overline{a_2} - \lambda_1 \overline{a_3})(a_3 - \lambda_2 a_1)}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)} + \frac{(\overline{a_3} - \lambda_2 \overline{a_1})(a_1 - \lambda_3 a_2)}{(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\overline{a_1} - \lambda_3 \overline{a_2})(a_2 - \lambda_1 a_3)}{(1 - \lambda_3)(1 - \lambda_1)} \right] \\ &= \frac{1 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)} \text{area}[A_1A_2A_3]. \end{aligned}$$

Chú ý

Từ đây ta có định lý Menelaus : Các điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng khi và chỉ khi $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ tương đương với:

$$\frac{M_1A_2}{M_1A_3} \cdot \frac{M_2A_3}{M_2A_1} \cdot \frac{M_3A_1}{M_3A_2} = 1.$$

Bài toán 2 Cho a, b, c là tọa độ các đỉnh A, B, C của một tam giác. Biết rằng $|a| = |b| = |c| = 1$ và tồn tại góc $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho: $a + b \cos \alpha + c \sin \alpha = 0$. Chứng minh rằng

$$1 < \text{area}[ABC] \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Giải

Ta có

$$\begin{aligned} 1 &= |a|^2 = |b \cos \alpha + c \sin \alpha|^2 = (b \cos \alpha + c \sin \alpha)(\overline{b} \cos \alpha + \overline{c} \sin \alpha) \\ &= |b|^2 \cos^2 \alpha + |c|^2 \sin^2 \alpha + (b\overline{c} + \overline{b}c) \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 1 + \frac{b^2 + c^2}{bc} \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Từ trên ta có $b^2 + c^2 = 0$ nên $b = \pm ic$. Áp dụng hệ thức trong hệ quả

trên, ta có

$$\begin{aligned}
 \text{area}[ABC] &= \frac{1}{2} |\text{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)| \\
 &= \frac{1}{2} |\text{Im}[(-\bar{b}\cos\alpha - \bar{c}\sin\alpha)b + \bar{b}c - \bar{c}(b\cos\alpha + c\sin\alpha)]| \\
 &= \frac{1}{2} |\text{Im}(-\cos\alpha - \sin\alpha - b\bar{c}\sin\alpha - b\bar{c}\cos\alpha + \bar{b}c)| \\
 &= \frac{1}{2} |\text{Im}[\bar{b}c - (\sin\alpha + \cos\alpha)b\bar{c}]| = \frac{1}{2} |\text{Im}[(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)\bar{b}c]| \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \text{Im}(\bar{b}c) = \frac{1}{2} (1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \text{Im}(\pm ic\bar{c}) \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \text{Im}(\pm i) = \frac{1}{2} (1 + \sin\alpha + \cos\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\alpha \right) \right] = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Ta thấy rằng $\frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$. Vì thế $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$. Như vậy $1 < \text{area}[ABC] \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 3 Cho tam giác $A_1A_2A_3$ và điểm O. Ký hiệu M_1, M_2, M_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác $OA_2A_3, OA_3A_1, OA_1A_2$. Chứng minh rằng diện tích tam giác $M_1M_2M_3$ bằng $\frac{1}{9}$ diện tích của tam giác $A_1A_2A_3$.

Giải

Chọn hệ tọa độ gốc O. Khi đó ta có

$$m_1 = \frac{1}{3}(a_2 + a_3), \quad m_2 = \frac{1}{3}(a_3 + a_1), \quad m_3 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2).$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
 S_{M_1M_2M_3} &= \frac{1}{2} \text{Im}(m_2\bar{m}_1 + m_3\bar{m}_2 + m_1\bar{m}_3) \\
 &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(\frac{a_3 + a_1}{3} \cdot \frac{\bar{a}_2 + \bar{a}_3}{3} + \frac{a_1 + a_2}{3} \cdot \frac{\bar{a}_3 + \bar{a}_1}{3} + \frac{a_2 + a_3}{3} \cdot \frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{2} \text{Im}(a_3\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_3 + a_2\bar{a}_1) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{Im}(a_1\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_3 + a_2\bar{a}_3 + a_2\bar{a}_1 + a_3\bar{a}_1 + a_3\bar{a}_2) + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{Im}(|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2) \right].
 \end{aligned}$$

Vì những số $a_1\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_3 + a_2\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_3 + a_3\bar{a}_1 + a_3\bar{a}_2$ và $|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2$ là các số thực, vậy nên $S_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{9} \frac{1}{2} \text{Im} (a_3\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_3 + a_2\bar{a}_1) = \frac{1}{9} S_{A_1A_2A_3}$.

Bài toán 4 Cho một điểm P trên đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của P qua OA, OB, OC. Chứng minh rằng diện tích của tam giác $A_1B_1C_1$ không phụ thuộc vào vị trí điểm P trên đường tròn đó.

Giải

Chọn hệ tọa độ gốc tại O. Ký hiệu P' là giao điểm của PC_1 và OC. Ta có

$$p' = \frac{1}{2}(c - c + p - c^2\bar{p}) = \frac{1}{2}(p - c^2\bar{p}).$$

$$p' = \frac{1}{2}(c_1 + p) \text{ suy ra } c_1 = 2p' - p \text{ hay là } c_1 = -c^2\bar{p}.$$

Tương tự ta cũng có $a_1 = -a^2\bar{p}$, $b_1 = -b^2\bar{p}$.

Áp dụng công thức ta có:

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= \frac{1}{2} \text{Im} (a^2\bar{p}b^2\bar{p} + b^2\bar{p}c^2\bar{p} + c^2\bar{p}a^2\bar{p}) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} ((a\bar{b})^2 + (b\bar{c})^2 + (c\bar{a})^2). \end{aligned}$$

Rõ ràng là diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ không phụ thuộc vào vị trí của P trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chương 3

Tích thực, tích phức và các ứng dụng trong đa giác

3.1 Tích thực của hai số phức

Khái niệm tích vô hướng của hai véc tơ đã trở thành kinh điển. Ta sẽ giới thiệu khái niệm đó đối với các số phức. Trong nhiều trường hợp sử dụng tích này làm cho lời giải bài toán đơn giản đi đáng kể. Xét a và b là các số phức

Định nghĩa

Ta gọi tích thực của hai số phức là số cho bởi công thức

$$a.b = \frac{1}{2} (\bar{a}b + a\bar{b}).$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\overline{a.b} = \frac{1}{2} (a\bar{b} + \bar{a}b) = a.b;$$

Vì thế $a.b$ là số thực, nó thể đã được thể hiện trong tên gọi.

Những tính chất dưới đây ta dễ dàng kiểm tra.

Mệnh đề 3.1.1. Mọi số phức a, b, c, z ta có các hệ thức sau

1) $a.a = |a|^2$.

- 2) $a.b = b.a$ (tích thực có tính chất giao hoán)
 3) $a.(b+c) = a.b + a.c$ (tích thực phân phối đối với phép cộng)
 4) $(\alpha a).b = \alpha(a.b) = a.(\alpha b)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
 5) $a.b = 0$ khi và chỉ khi $OA \perp OB$, với A có tọa độ a , B có tọa độ b .
 6) $(az).(bz) = |z|^2(a.b)$.

Mệnh đề 3.1.2. Giả sử $A(a), B(b), C(c), D(d)$ là bốn điểm phân biệt. Khi đó các khẳng định dưới đây là tương đương:

- 1) $AB \perp CD$;
 2) $(b-a)(c-d) = 0$;
 3) $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}^*$ (hoặc là $\operatorname{Re}\left(\frac{b-a}{d-c}\right) = 0$);

Mệnh đề 3.1.3. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là gốc tọa độ trong mặt phẳng phức. Nếu a, b, c là tọa độ của A, B, C thì trực tâm H có tọa độ là $h = a + b + c$.

Bài toán 1 Cho $ABCD$ là các đỉnh của một tứ giác. Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

khi và chỉ khi $AC \perp BD$.

Giải

Sử dụng tính chất tích thực của số phức ta có

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} (b-a).(b-a) + (d-c).(d-c) &= (c-b).(c-b) + (a-d).(a-d) \\ \Leftrightarrow a.b + c.d &= b.c + d.a \\ \Leftrightarrow (c-a).(d-b) &= 0 \end{aligned}$$

Tương đương với $AC \perp BD$. Điều phải chứng minh.

Bài toán 2 Cho M, N, P, Q, R, S là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA của một lục giác. Chứng minh rằng

$$RN^2 = MQ^2 + PS^2$$

khi và chỉ khi $MQ \perp PS$

Giải

Gọi a, b, c, d, e, f là tọa độ các đỉnh của lục giác.

Các điểm M, N, P, Q, R, S có tọa độ là

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad n = \frac{b+c}{2}, \quad p = \frac{c+d}{2},$$

$$q = \frac{d+e}{2}, \quad r = \frac{e+f}{2}, \quad s = \frac{f+a}{2}$$

Sử dụng tính chất tích thực của số phức ta có

$$(e+f-b-c) \cdot (f+a-c-d)$$

$$= (d+e-a-b) \cdot (d+e-a-b) + (f+a-c-d) \cdot (f+a-c-d)$$

hay

$$(d+e-a-b) \cdot (f+a-c-d) = 0.$$

Vì thế $MQ \perp PS$, đpcm.

Bài toán 3 Cho $A_1 A_2 \dots A_n$ là một đa giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Chứng minh rằng mọi điểm M trong mặt phẳng ta đều có hệ thức

$$\sum_{k=1}^n MA_k^2 = n(OM^2 + R^2).$$

Giải

Xét mặt phẳng phức với O là gốc và $R\varepsilon_k$ là tọa độ đỉnh A_k , với ε_k là các căn bậc n của đơn vị. Lấy m là tọa độ điểm M
Sử dụng các tính chất tích thực của các số phức ta có

$$\sum_{k=1}^n MA_k^2 = \sum_{k=1}^n (m - R\varepsilon_k) \cdot (m - R\varepsilon_k).$$

$$= \sum_{k=1}^n (m \cdot m - 2R\varepsilon_k \cdot m + R^2 \varepsilon_k \cdot \varepsilon_k)$$

$$= n|m|^2 - 2R \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \right) \cdot m + R^2 \sum_{k=1}^n |\varepsilon_k|^2$$

$$= n \cdot OM^2 + nR^2 = n(OM^2 + R^2), \text{ vì } \sum_{k=1}^n \varepsilon_k = 0.$$

Chú ý

Nếu M nằm trên đường tròn ngoại tiếp đa giác thì $\sum_{k=1}^n MA_k^2 = 2nR^2$.

Bài toán 4 Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , gọi D là trung điểm của đoạn thẳng AB , và E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh rằng CD và OE vuông góc khi và chỉ khi $AB = AC$.

Giải

Lấy O là gốc tọa độ của mặt phẳng phức và a, b, c, d, e là tọa độ các điểm A, B, C, D, E . Khi đó

$$d = \frac{a+b}{2}, \quad e = \frac{a+c+d}{3} = \frac{3a+b+2c}{3}.$$

Sử dụng tích thực của các số phức, nếu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $a \cdot \bar{a} = b \cdot \bar{b} = c \cdot \bar{c} = R^2$.

Đường thẳng CD và OE vuông góc khi và chỉ khi $(d-c) \cdot \bar{e} = 0$ vì thế

$$(a+b-2c) \cdot (3a+b+2c) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 3a \cdot \bar{a} + a \cdot \bar{b} + 2a \cdot \bar{c} + 3a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{b} + 2b \cdot \bar{c} - 6a \cdot \bar{c} - 2b \cdot \bar{c} - 4c \cdot \bar{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \bar{b} = a \cdot \bar{c} \quad (1)$$

Mặt khác, $AB = AC$ tương đương với

$$|b-a|^2 = |c-a|^2$$

$$\Leftrightarrow (b-a) \cdot (b-a) = (c-a) \cdot (c-a)$$

$$\Leftrightarrow b \cdot \bar{b} - a \cdot \bar{b} - a \cdot \bar{b} + a \cdot \bar{a} = c \cdot \bar{c} - a \cdot \bar{c} - a \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{a}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \bar{b} = a \cdot \bar{c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thấy rằng CD vuông góc với OE khi và chỉ khi $AB = AC$.

Bài toán 5 Cho E, F, G, H là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng đường thẳng AB và CD vuông góc khi và chỉ khi

$$BC^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2).$$

Giải

Kí hiệu chữ thường là tọa độ của các điểm chữ hoa tương ứng, ta có

$$e = \frac{a+b}{2}, \quad f = \frac{b+c}{2}, \quad g = \frac{c+d}{2}, \quad h = \frac{d+a}{2}.$$

Sử dụng tích thực của số phức, hệ thức

$$BC^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2).$$

trở thành

$$\begin{aligned} & (c-b) \cdot (c-b) + (d-a) \cdot (d-a) = \\ &= \frac{1}{2}(c+d-a-b) \cdot (c+d-a-b) + \frac{1}{2}(a+d-b-c) \cdot (a+d-b-c) \\ &\Leftrightarrow c.c + b.b + d.d + a.a - 2b.c - 2a.d = a.a + b.b + c.c + d.d - 2a.c - 2b.d \\ &\Leftrightarrow a.d + b.c = a.c + b.d \\ &\Leftrightarrow (a-b) \cdot (d-c) = 0 \text{ khi và chỉ khi đường thẳng AB và CD vuông góc.} \end{aligned}$$

3.2 Tích phức của hai số phức

Tích có hướng của hai vectơ là khái niệm trung tâm của đại số vectơ, với nhiều ứng dụng vào nhiều ngành khác nhau của toán học và khoa học. Chúng ta sẽ nói về vấn đề này theo cách mới, thuận lợi hơn trong việc giải quyết những bài toán phức tạp về diện tích hoặc thẳng hàng.

Cho a và b là hai số phức.

Định nghĩa Số phức

$$a \times b = \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b})$$

được gọi là tích phức của a và b .

Chú ý rằng

$$a \times b + \overline{a \times b} = \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b}) + \frac{1}{2}(a\overline{b} - \overline{a}b) = 0$$

Vì thế $\operatorname{Re}(a \times b) = 0$, nên nó đã thể hiện ngay trong tên gọi.

Dễ dàng kiểm tra các tính chất dưới đây

Mệnh đề 3.2.1. 1) $a \times b = 0$ khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $a = \lambda b$, với λ là số thực.

2) $a \times b = -b \times a$ (tích phức không có tính chất giao hoán).

3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (tích phức phân phối đối với phép cộng).

4) $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

5) Nếu $A(a)$ và $B(b)$ là hai điểm phân biệt khác gốc tọa độ thì $a \times b = 0$ khi và chỉ khi O, A, B thẳng hàng.

Chú ý

a) Giả sử $A(a), B(b)$ là hai điểm phân biệt trong mặt phẳng phức khác gốc tọa độ. Tích phức của a và b được sử dụng trong hình học như sau

+ Nếu tam giác ABC có hướng dương $a \times b = 2i \cdot \text{area}[ABC]$

+ Nếu tam giác ABC có hướng âm thì $a \times b = -2i \cdot \text{area}[ABC]$

Thật vậy, nếu tam giác OAB có hướng dương thì

$$\begin{aligned} 2i \cdot \text{area}[ABC] &= i \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(\widehat{AOB}) = i |a| \cdot |b| \cdot \sin\left(\arg \frac{b}{a}\right) \\ &= i |a| \cdot |b| \cdot \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{2} |a|^2 \left(\frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{a}b - a\bar{b}) = a \times b \end{aligned}$$

Trong trường hợp khác, tam giác OBA có hướng dương thì

$$2i \cdot \text{area}[ABC] = b \times a = -a \times b$$

b) Giả sử $A(a), B(b), C(c)$ là ba điểm phân biệt trong mặt phẳng phức. Tích phức cho ta công thức diện tích như sau:

+ Nếu tam giác ABC có hướng dương

$$\text{area}[ABC] = \frac{1}{2i} (a \times b + b \times c + c \times a)$$

+ Nếu tam giác ABC có hướng âm:

$$\text{area}[ABC] = -\frac{1}{2i} (a \times b + b \times c + c \times a)$$

Ngoài ra, sử dụng biến đổi đại số ta có

$$\text{area}[ABC] = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)$$

nếu tam giác ABC có hướng dương.

Ta chứng minh công thức trên. Tịnh tiến theo véc tơ $-c$, ảnh của A, B, C là A', B', O với tọa độ là $a - c, b - c, 0$. Tam giác ABC và $A'B'O$ bằng nhau và có cùng hướng. Nếu tam giác ABC có hướng dương thì

$$\begin{aligned} \text{area}[ABC] &= \text{area}[OA'B'] = \frac{1}{2i}((a - c) \times (b - c)) \\ &= \frac{1}{2i}((a - c) \times b - (a - c) \times c) = \frac{1}{2i}(c \times (a - c) - b \times (a - c)) \\ &= \frac{1}{2i}(c \times a - c \times c - b \times a + b \times c) = \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a). \end{aligned}$$

Đpcm

Mệnh đề 3.2.2. Giả sử $A(a), B(b), C(c)$ là ba điểm phân biệt, các khẳng định dưới đây là tương đương

- 1) A, B, C thẳng hàng.
- 2) $(b - a) \times (c - a) = 0$.
- 3) $a \times b + b \times c + c \times a = 0$.

Chứng minh

A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\text{area}[ABC] = 0 \Leftrightarrow a \times b + b \times c + c \times a = 0$$

Phương trình trên có thể viết về dạng $(b - a) \times (c - a) = 0$. ĐPCM

Mệnh đề 3.2.3. Cho bốn điểm $A(a), B(b), C(c), D(d)$ trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng AB song song với CD khi và chỉ khi $(b - a) \times (d - c) = 0$.

Chứng minh

Chọn điểm $M(m), N(n)$ sao cho $OABM$ và $OCDN$ là các hình bình hành khi đó $m = b - a, n = d - c$. Đường thẳng AB và CD song song khi và chỉ khi O, M, N thẳng hàng, theo tính chất 5 ta có

$$0 = m \times n = (b - a) \times (d - c).$$

Bài toán 1 Cho các điểm D và E nằm trên các cạnh AB và AC của tam giác ABC sao cho

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4}.$$

Gọi E' và D' nằm trên các tia $(B$ và $(C$ sao cho $EE' = 3BE$ và $DD' = 3CD'$. Chứng minh rằng

- 1) D', A, E' thẳng hàng.
- 2) $AD' = AE'$.

Giải

Các điểm D, E, D', E' có tọa độ là

$$d = \frac{a+3b}{4}, e = \frac{a+3c}{4}, e' = 4e - 3b = a + 3c - b, d' = a + 3b - 3c$$

$$\begin{aligned} 1) & \text{ Vì } (a - d') \times (e' - d') \\ &= (3c - 3b) \times (6c - 6b) \\ &= 18(c - b) \times (c - b) = 0, \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất 2 ta có D', A, E' thẳng hàng

$$2) \text{ Chú ý rằng } \frac{AD'}{D'E'} = \left| \frac{a - d'}{e' - d'} \right| = \frac{1}{2}.$$

Vậy A là trung điểm đoạn thẳng $D'E'$

Bài toán 2 Cho ngũ giác lồi $ABCDE$, gọi M, N, P, Q, X, Y lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CD, DE, EA, MP, NQ . Chứng minh rằng XY song song với AB .

Giải

Gọi a, b, c, d, e là tọa độ các đỉnh A, B, C, D, E . Các điểm M, N, P, Q, X, Y có tọa độ là

$$\begin{aligned} m &= \frac{b+c}{2}, n = \frac{c+d}{2}, p = \frac{d+e}{2}, q = \frac{e+a}{2}, \\ x &= \frac{b+c+d+e}{4}, y = \frac{c+d+e+a}{4}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\frac{y-x}{b-a} = \frac{\frac{a-b}{4}}{b-a} = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}$$

vì thế $(y - x) \times (b - a) = -\frac{1}{4}(b - a) \times (a - b) = 0$

Vậy XY song song với AB .

3.3 Diện tích đa giác lồi

Ta nói rằng đa giác $A_1A_2...A_n$ có hướng dương (âm) nếu mọi điểm M nằm trong đa giác các tam giác MA_kA_{k+1} , $k = 1, 2...n$ đều có hướng dương (âm), với $A_{n+1} = A_1$.

Định lý 3.3.1. Đa giác $A_1A_2...A_n$ lồi và có hướng dương, với tọa độ các đỉnh là $a_1, a_2, ..., a_n$. Khi đó

$$\text{area}[A_1A_2...A_n] = \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + ... + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1).$$

Chứng minh

Ta dùng phương pháp quy nạp.

Với $n = 3$, trường hợp này đã được chứng minh bằng cách sử dụng tích phức. Giả sử mệnh đề đã đúng với $n = k$.

Ta có

$$\begin{aligned} \text{area}[A_1A_2...A_kA_{k+1}] &= \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + ... + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1) \\ &= \text{area}[A_1A_2...A_k] + \text{area}[A_kA_{k+1}A_1] \\ &= \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + ... + \overline{a_{k-1}}a_k + \overline{a_k}a_1) + \frac{1}{2}(\overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1 + \overline{a_1}a_k) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + ... + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1) + \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{a_k}a_1 + \overline{a_1}a_k) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + ... + \overline{a_k}a_{k+1} + \overline{a_{k+1}}a_1) \\ &\text{vì } \text{Im}(\overline{a_k}a_1 + \overline{a_1}a_k) = 0. \end{aligned}$$

Chú ý

Từ hệ thức trên ta thấy rằng các điểm $A_1(a_1), A_2(a_2), ..., A_n(a_n)$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\text{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + ... + \overline{a_{n-1}}a_n + \overline{a_n}a_1) = 0$.

Bài toán 1 Cho $P_0P_1, ..., P_{n-1}$ là một đa giác có các đỉnh có tọa độ là $1, \varepsilon, ..., \varepsilon^{n-1}$ và $Q_0Q_1...Q_{n-1}$ là đa giác có tọa độ các đỉnh là $1, 1 + \varepsilon, ..., 1 + \varepsilon + ... + \varepsilon^{n-1}$, với $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Tìm tỉ số diện tích của hai đa giác đó.

Giải

Đặt $a_k = 1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^{n-1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, ta có

$$\begin{aligned} \text{area}[Q_0 Q_1 \dots Q_{n-1}] &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Im}(\bar{a}_k a_{k+1}) \frac{1}{2} \text{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\bar{\varepsilon})^{k+1} - 1}{\bar{\varepsilon} - 1} \cdot \frac{\varepsilon^{k+2} - 1}{\varepsilon - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2|\varepsilon - 1|^2} \text{Im} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\varepsilon - (\bar{\varepsilon})^{k+1} - \varepsilon^{k+2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2|\varepsilon - 1|^2} \text{Im}(n\varepsilon + n) = \frac{1}{2|\varepsilon - 1|^2} n \sin \frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{n}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} 2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} = \frac{n}{4} \cot \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

vì $\sum_{k=0}^{n-1} \bar{\varepsilon}^{k+1} = 0$ và $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k+2} = 0$.

mặt khác ta có

$$\text{area}[P_0 P_1 \dots P_n] = n \text{area}[P_0 O P_1] = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}$$

nên ta có

$$\frac{\text{area}[P_0 P_1 \dots P_n]}{\text{area}[Q_0 Q_1 \dots Q_n]} = \frac{n \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{n}{4} \cot \frac{\pi}{n}} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Chú ý

Ta có $Q_k Q_{k+1} = |a_{k+1} - a_k| = |\varepsilon^{k+1}| = 1$ và $P_k P_{k+1} = |\varepsilon^{k+1} - \varepsilon^k| = |\varepsilon^k(\varepsilon - 1)| = |\varepsilon^k| |1 - \varepsilon| = |1 - \varepsilon| = 2 \sin \frac{\pi}{n}$ với $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Từ đó

$$\frac{P_k P_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}} = 2 \sin \frac{\pi}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Do đó hai đa giác $P_0 P_1 \dots P_{n-1}$ và $Q_0 Q_1 \dots Q_{n-1}$ đồng dạng.

Bài toán 2 Cho $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 5$) là một đa giác lồi và B_k là trung điểm các đoạn thẳng $[A_k A_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots, n$ với $A_{n+1} = A_1$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau: $\text{area}[B_1 B_2 \dots B_k] \geq \frac{1}{2} \text{area}[A_1 A_2 \dots A_n]$.

Giải

Đặt a_k, b_k là tọa độ các đỉnh $A_k, B_k, k = 1, 2, \dots, n$. Ta thấy rằng đa giác $B_1 B_2 \dots B_k$ là lồi. Giả sử đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$ có hướng dương thì $B_1 B_2 \dots B_k$ cũng có cùng tính chất. Chọn gốc tọa độ mặt phẳng phức là điểm nằm trong đa giác $A_1 A_2 \dots A_n$.

Ta có $b_k = \frac{1}{2}(a_k + a_{k+1}), k = 1, 2, \dots, n$ và

$$\begin{aligned} \text{area}[B_1 B_2 \dots B_n] &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n \overline{b_k} b_{k+1} \right) = \frac{1}{8} \text{Im} (\overline{a_k} + \overline{a_{k+1}}) (a_{k+1} + a_{k+2}) \\ &= \frac{1}{8} \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_k} a_{k+1} \right) + \frac{1}{8} \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{k+1}} a_{k+2} \right) + \frac{1}{8} \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_k} a_{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{area}[A_1 A_2 \dots A_n] + \frac{1}{8} \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_k} a_{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{area}[A_1 A_2 \dots A_n] + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \text{Im} (\overline{a_k} a_{k+2}) \\ &= \frac{1}{2} \text{area}[A_1 A_2 \dots A_n] + \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n OA_k \cdot OA_{k+2} \sin \widehat{A_k O A_{k+2}} \geq \frac{1}{2} \text{area}[A_1 A_2 \dots A_n]. \end{aligned}$$

Chúng ta đã sử dụng các hệ thức

$$\text{Im} \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_k} a_{k+1} \right) = \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n \overline{a_{k+1}} a_{k+2} \right) = 2 \text{area}[A_1 A_2 \dots A_n]$$

và $\sin \widehat{A_k O A_{k+2}} \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$; với $A_{n+2} = A_2$

3.4 Bài tập

Bài 1 Trên mỗi cạnh, về phía ngoài của một hình bình hành ta dựng các hình vuông. Chứng minh rằng tâm các hình vuông này tạo thành một hình vuông.

Giải

Chọn gốc tọa độ mặt phẳng phức trùng với giao điểm hai đường chéo và $a, b, -a, -b$ lần lượt là tọa độ các đỉnh A, B, C, D .

Sử dụng công thức về phép quay ta có:

$$b = z_{O_1} + (a - z_{O_1})(-i) \text{ hay } z_{O_1} = \frac{b + ai}{1 + i}.$$

Tương tự

$$z_{O_2} = \frac{a - bi}{1 + i}, \quad z_{O_3} = \frac{-b - ai}{1 + i}, \quad z_{O_4} = \frac{-a + bi}{1 + i}.$$

Ta có $\widehat{O_4O_1O_2} = \arg \frac{z_{O_2} - z_{O_1}}{z_{O_4} - z_{O_1}} = \arg \frac{a - bi - b - ai}{-a + bi - b - ai} = \arg i = \frac{\pi}{2}$,
 đồng thời $O_1O_2 = O_1O_4$ và
 $\widehat{O_2O_3O_4} = \arg \frac{z_{O_4} - z_{O_3}}{z_{O_2} - z_{O_3}} = \arg \frac{-a + bi + b + ai}{a - bi + b + ai} = \arg i = \frac{\pi}{2}$,
 đồng thời $O_3O_4 = O_3O_2$.

Vậy $O_1O_2O_3O_4$ là một hình vuông.

Bài 2 Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O, M là một điểm nằm trên đường tròn. Hãy chứng minh:

$$d(M, AB) \cdot d(M, CD) = d(M, BC) \cdot d(M, DA) = d(M, AC) \cdot d(M, BD).$$

(Định lý Pappu)

Giải

Gọi a, b, c, d lần lượt là tọa độ các đỉnh A, B, C, D và chọn gốc tọa độ mặt phẳng phức trùng với O.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

phương trình này tương đương với:

$$z(\bar{a} - \bar{b}) - \bar{z}(a - b) = \bar{a}b - a\bar{b} \Leftrightarrow z + ab\bar{z} = a + b.$$

Gọi M_1 là hình chiếu của M lên đường thẳng AB. Nếu m là tọa độ M thì

$$z_{M_1} = \frac{m - ab\bar{m} + a + b}{2}$$

và

$$d(M, AB) = |m - m_1| = \left| m - \frac{m - ab\bar{m} + a + b}{2} \right| = \left| \frac{(m - a)(m - b)}{2m} \right|,$$

Tương tự

$$\begin{aligned} d(M, BC) &= \left| \frac{(m-b)(m-c)}{2m} \right|, \quad d(M, CD) = \left| \frac{(m-c)(m-d)}{2m} \right| \\ d(M, DA) &= \left| \frac{(m-d)(m-a)}{2m} \right|, \quad d(M, AC) = \left| \frac{(m-a)(m-c)}{2m} \right| \end{aligned}$$

và

$$d(M, BD) = \left| \frac{(m-b)(m-d)}{2m} \right|.$$

dễ thấy

$$d(M, AB) \cdot d(M, CD) = d(M, BC) \cdot d(M, DA) = d(M, AC) \cdot d(M, BD).$$

Đpcm.

Bài 3 Trên các cạnh AB, AC của tam giác ABC, ta dựng về phía ngoài các tam giác đều ABM và CAN. Gọi P, Q, R là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AM, AN. Chứng minh tam giác PQR là tam giác đều.

Giải

Chọn gốc tọa độ trùng với điểm A và kí hiệu chữ thường là tọa độ của điểm có chữ in hoa tương ứng.

Phép quay tâm A góc quay 60° biến N và C thành B và M.

Đặt $\varepsilon = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ ta có $b = n \cdot \varepsilon$ và $m = c \cdot \varepsilon$. Suy ra

$$p = \frac{b+c}{2}, \quad q = \frac{m}{2} = \frac{c \cdot \varepsilon}{2}, \quad r = \frac{n}{2} = \frac{b}{2\varepsilon} = \frac{b\varepsilon^5}{2} = -\frac{b\varepsilon^2}{2}.$$

Để chứng minh tam giác PQR đều, sử dụng mệnh đề 2.4.1, ta thu được $p^2 + q^2 + r^2 = pq + qr + rp$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4 Cho hình vuông ABCD, dựng về phía trong hình vuông các tam giác đều ABK, BCL, CDM và DAN. Chứng minh rằng trung điểm các đoạn thẳng KL, LM, MN, NK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AK và AN là các đỉnh của một thập nhị giác đều.

(IMO-1977)

Giải

Gọi $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, S_1, S_2, S_3, S_4$ lần lượt là trung điểm của KL, LM, MN, NK, DM, AN, BK, CN, AK, BL, CM, DN.

Giả sử hình vuông ABCD định hướng dương. Chọn tâm O của hình vuông làm gốc tọa độ. Gọi các chữ in thường là nhãn của các điểm in hoa tương ứng.

Khi đó ta có $a = ib, c = -a, d = -ia$.

Đặt $e^{i\frac{\pi}{3}} = \omega$ ta có:

$$\begin{aligned} k &= (i\omega + \bar{\omega})a, \quad l = (-\omega + i\bar{\omega})a, \\ m &= (-i\omega - \bar{\omega})a, \quad n = (\omega - i\bar{\omega})a. \end{aligned}$$

Ta thấy rằng đa giác $P_1Q_1S_1P_2Q_2S_2P_3Q_3S_3P_4Q_4S_4$ nhận O làm tâm đối xứng, do đó với f là phép quay tâm O, góc quay $+\frac{\pi}{6}$ thì ta cần chứng minh

$f(p_k) = q_k, f(q_k) = s_k, f(s_k) = p_{k+1}$, với $(k = 1, 2)$ là đủ.

Ta có

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2}(k + l) = \frac{a}{2}[(i - 1)\omega + (i + 1)\bar{\omega}], \\ p_2 &= \frac{a}{2}[-(i + 1)\omega + (i - 1)\bar{\omega}], \\ q_1 &= -\frac{a}{2}[i(1 + \omega) + \bar{\omega}], \quad s_1 = \frac{a}{2}[1 + i\omega + \bar{\omega}]. \end{aligned}$$

Khi đó, với $\varepsilon = e^{i\frac{\pi}{6}}$ thì

$$\begin{aligned} f(p_1) &= \varepsilon p_1 = \frac{a}{2}[(i - 1)\varepsilon\omega + (i + 1)\varepsilon\bar{\omega}] = q_1, \\ f(q_1) &= \varepsilon q_1 = \frac{a}{2}[i\varepsilon + i\varepsilon\omega + \varepsilon\bar{\omega}] = s_1, \\ f(s_1) &= \varepsilon s_1 = \frac{a}{2}(\varepsilon + i\varepsilon\omega + \varepsilon\bar{\omega}) = p_2. \end{aligned}$$

Một cách tương tự ta cũng tìm được:

$$f(p_2) = q_2, \quad f(q_2) = s_2, \quad f(s_2) = p_3.$$

Điều phải chứng minh.

Bài 5 Cho tam giác ABC. Lấy điểm P khác phía đối với C đối với đường thẳng AB, điểm Q khác phía B đối với đường thẳng CA và điểm R

cùng phía với A đối với đường thẳng BC sao cho tam giác BCR, ACQ và BAP đồng dạng. Chứng minh rằng tứ giác APRQ là hình bình hành.

(SEA-MO 1998)

Giải

Giả sử tam giác ABC định hướng dương và gọi các chữ in thường là nhân của các điểm in hoa tương ứng.

Đặt $\frac{BP}{BA} = \frac{AQ}{AC} = \frac{BR}{BC} = t$, $\angle ABP = \angle CQA = \angle CBR = \phi$, $\omega = e^{i\phi}$.

Khi đó, từ giả thiết suy ra:

$$\begin{aligned} p &= (t\omega + 1)b - t\omega a, \\ q &= (t\omega + 1)a - t\omega c, \\ \text{và } r &= (t\omega + 1)b - t\omega c. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$p + q = (t\omega + 1)(a + b) - t\omega(a + c) = (t\omega + 1)b - t\omega c + (t\omega + 1)a - t\omega a = a + r.$$

Điều phải chứng minh.

Cách khác:

Từ giả thiết suy ra các tam giác BCR, ACQ, BAP đồng dạng và cùng hướng. Vậy

$$\frac{r - b}{r - c} = \frac{q - a}{q - c} = \frac{p - b}{p - a} = z \in \mathbb{C}.$$

Từ đó,

$$p = \frac{b - za}{1 - z}; \quad q = \frac{a - zc}{1 - z}; \quad r = \frac{b - zc}{1 - z}.$$

Suy ra

$$p + q = \frac{b - zc + (1 - z)a}{1 - z} = a + r.$$

Điều phải chứng minh.

Bài 6 Cho P_1, P_2, P_3 là trung điểm của những đường chéo A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 của lục giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Gọi S_1, S_2 là diện tích của tam giác $P_1P_2P_3$, diện tích lục giác với các đỉnh là những trung điểm của các cạnh của lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. và S là diện tích của lục giác đã cho. Chứng minh rằng $S_1 + S_2 = \frac{3}{4}S$.

Giải

Áp dụng công thức tính diện tích ta có:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{2} \text{Im} (p_2 \overline{p_1} + p_3 \overline{p_2} + p_1 \overline{p_3}) \\
 &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(\frac{a_2 + a_5}{2} \frac{\overline{a_1 + a_4}}{2} + \frac{a_3 + a_6}{2} \frac{\overline{a_2 + a_5}}{2} + \frac{a_1 + a_4}{2} \frac{\overline{a_3 + a_6}}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{2} \text{Im} (a_2 \overline{a_1} + a_3 \overline{a_2} + a_4 \overline{a_3} + a_5 \overline{a_4} + a_6 \overline{a_5} + a_1 \overline{a_6}) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \text{Im} (a_2 \overline{a_4} + a_3 \overline{a_5} + a_4 \overline{a_6} + a_5 \overline{a_1} + a_6 \overline{a_2} + a_1 \overline{a_3}) \\
 &= \frac{1}{4} S + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \text{Im} (a_2 \overline{a_4} + a_3 \overline{a_5} + a_4 \overline{a_6} + a_5 \overline{a_1} + a_6 \overline{a_2} + a_1 \overline{a_3}) . \\
 S_2 &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(\frac{a_2 + a_3}{2} \frac{\overline{a_1 + a_2}}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} \frac{\overline{a_2 + a_3}}{2} + \dots + \frac{a_1 + a_2}{2} \frac{\overline{a_6 + a_1}}{2} \right) \\
 &= \frac{2}{4} \frac{1}{2} \text{Im} (a_2 \overline{a_1} + a_3 \overline{a_2} + a_4 \overline{a_3} + a_5 \overline{a_4} + a_6 \overline{a_5} + a_1 \overline{a_6}) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \text{Im} (a_3 \overline{a_1} + a_4 \overline{a_2} + a_5 \overline{a_3} + a_6 \overline{a_4} + a_1 \overline{a_5} + a_2 \overline{a_6}) \\
 &= \frac{2}{4} S + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \text{Im} (a_3 \overline{a_1} + a_4 \overline{a_2} + a_5 \overline{a_3} + a_6 \overline{a_4} + a_1 \overline{a_5} + a_2 \overline{a_6}) .
 \end{aligned}$$

Vì các số $(a_3 \overline{a_1} + a_4 \overline{a_2} + a_5 \overline{a_3} + a_6 \overline{a_4} + a_1 \overline{a_5} + a_2 \overline{a_6})$
và $(a_2 \overline{a_4} + a_3 \overline{a_5} + a_4 \overline{a_6} + a_5 \overline{a_1} + a_6 \overline{a_2} + a_1 \overline{a_3})$ liên hợp cùng nhau
suy ra:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{4} S + \frac{2}{4} S = \frac{3}{4} S.$$

Kết luận

Luận văn đã trình bày được một số vấn đề cơ bản về số phức và các vấn đề liên quan đến hình học. Từ sự liên quan đó, luận văn tập trung đi sâu vào một số ứng dụng của số phức trong việc nghiên cứu giải các bài toán về đa giác. Đặc biệt là các bài toán liên quan đến tam giác đồng dạng, tam giác đều, đa giác đều và diện tích tam giác.

Nội dung đề tài được thể hiện ở 3 chương:

Chương 1. Số phức và các dạng biểu diễn. Trong chương này, luận văn đưa ra định nghĩa số phức và các dạng biểu diễn của số phức. Cùng với nó là các phép toán, các tính chất và ý nghĩa hình học của nó.

Chương 2. Số phức và hình học. Luận văn đưa ra sự liên hệ giữa Số phức và Hình học. Đồng thời cũng có những bài toán để minh họa.

Chương 3. Tích thực, tích phức và các ứng dụng trong đa giác. Luận văn cho thấy sự liên hệ giữa tích vô hướng của hai véc tơ, tích có hướng của hai véc tơ với tích thực và tích phức của hai số phức. Qua đó cũng muốn thể hiện mặt mạnh của số phức trong việc nghiên cứu giải một số bài toán về đa giác.

Thực tế một phần nhỏ của luận văn đã được thực hiện qua một số tiết giảng dạy chuyên đề đối với học sinh lớp 12 trường THPT Trung Giã, nơi tác giả đang công tác. Các đồng nghiệp và bản thân nhận thấy rằng học sinh rất thích thú với chuyên đề; nắm và hiểu được các nội dung kiến thức về số phức trong chương trình, đồng thời rất say sưa tìm hiểu các ứng dụng của nó trong toán học nói chung và hình học nói riêng.

Vì điều kiện thời gian có hạn, kiến thức và kinh nghiệm còn hạn chế nên chắc chắn luận văn còn có nhiều thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của các thầy, các cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn hoàn chỉnh và thiết thực hơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Titu Andreescu, Dorin Adrica, *Complexnumbers from A to ... Z*, Birkäuser, 2006.
- [2] Nguyễn Hữu Diễn, *Phương pháp số phức và hình học phẳng*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, năm 2000.
- [3] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc Số phức và áp dụng*, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2009.
- [4] G.Polya, G.Szege, *Các định lý và bài tập giải tích*, NXB Mir, Moscow, 1973.
- [5] Đoàn Quỳnh, *Số phức với Hình học phẳng*, NXB Giáo dục, 1998.
- [6] S.I.Xvarcburd, *Lzbrannye voproksy matematiki Fakultativnyi kurs 10*, Moskva, 1963.