

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN THƯỜNG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI
HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG
GIÁC HAI ẨN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC HAI ẨN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60.46.01.13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS. TSKH NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - 2013

Mục lục

1	Một số hệ thức và công thức lượng giác cơ bản	6
1.1	Các hệ thức lượng giác cơ bản	6
1.1.1	Các hệ thức lượng giác cơ bản của một góc a	6
1.1.2	Ví dụ minh họa	6
1.2	Các hệ thức lượng giác của 2 góc có liên quan đặc biệt	8
1.2.1	Hai góc đối nhau: a và $(-a)$	8
1.2.2	Hai góc bù nhau: a và $(\pi - a)$	8
1.2.3	Hai góc phụ nhau: a và $(\frac{\pi}{2} - a)$	9
1.2.4	Hai góc khác π : a và $(\pi + a)$	9
1.2.5	Hai góc có trung bình cộng là $\frac{\pi}{4}$: $(\frac{\pi}{4} + a)$ và $(\frac{\pi}{4} - a)$	9
1.2.6	Hai góc hơn kém $k2\pi$ và $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$	9
1.2.7	Ví dụ minh họa	10
1.3	Các công thức lượng giác	11
1.3.1	Công thức cộng	11
1.3.2	Công thức góc nhân đôi	12
1.3.3	Công thức nhân ba	12
1.3.4	Công thức hạ bậc	12
1.3.5	Biểu diễn theo $t = \tan \frac{a}{2} (\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$	12
1.3.6	Công thức biến đổi tổng thành tích	13
1.3.7	Công thức biến đổi tích thành tổng	14
1.3.8	Ví dụ minh họa	14
2	Hệ nửa lượng giác hai ẩn	20
2.1	Hệ nửa lượng giác hai ẩn	20
2.2	Bài tập	34

3	Các phương pháp giải hệ phương trình lượng giác hai ẩn không mẫu mực	40
3.1	Các phương pháp giải hệ phương trình	40
3.2	Các bài toán chọn lọc	72
3.3	Bài tập	75
	Kết luận	79
	Tài liệu tham khảo	80

MỞ ĐẦU

Lượng giác là một phần không thể thiếu được trong chương trình toán học ở các trường phổ thông trung học. Chúng ta có thể thấy trong bất cứ một đề thi nào vào các trường Đại học và Cao đẳng, cũng có ít nhất một câu riêng về lượng giác mà chủ yếu là về “Phương trình lượng giác” và “Bài toán xung quanh tam giác”. Trong vấn đề này, các bài toán về hệ thức lượng trong tam giác thường là khó hơn cả, còn trong các kỳ thi học sinh giỏi thường có một câu riêng về lượng giác hai ẩn. Tuy nhiên, sách giáo khoa cải cách hiện nay không đưa phần kiến thức về hệ lượng giác hai ẩn để giảng dạy trực tiếp(trừ các trường chuyên). Vì vậy, để giúp các em học sinh học tốt và luyện thi tốt cho kỳ thi học sinh giỏi, chúng ta cần trang bị cho các em kiến thức sâu hơn về lượng giác, ví dụ như kiến thức về hệ phương trình lượng giác hai ẩn. Trong luận văn này tác giả được Thầy hướng dẫn giao nhiệm vụ xây dựng phương pháp, giải hệ lượng giác hai ẩn trong chương trình toán sơ cấp ở phổ thông, nêu ra các ví dụ minh họa cho từng phương pháp. Hy vọng luận văn sẽ là một nguồn tài liệu tham khảo cho các thầy, cô giáo quan tâm đến lĩnh vực này.

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1: Trình bày một số hệ thức lượng giác cơ bản trong chương trình phổ thông.

Chương 2: Trình bày những phương pháp giải hệ nửa lượng giác hai ẩn trong chương trình phổ thông.

Chương 3: Trình bày những phương pháp giải hệ lượng giác hai ẩn trong chương trình phổ thông.

Mỗi phương pháp đưa ra, bao gồm cơ sở lý thuyết của phương pháp, các ví dụ minh họa và một số bài tập áp dụng phương pháp đã nêu.

Luận văn gồm nhiều thí dụ và bài tập được lựa chọn từ nhiều nguồn khác nhau. Từ các đề thi học sinh giỏi toán quốc gia, của khu vực, các nước và thi học sinh giỏi toán quốc tế. Ngoài ra còn có một số bài tập do tác giả tự sáng tác. Trong từng phần, tác giả đã cố gắng để có thể đưa ra một hệ thống thí dụ nhằm minh họa cho mỗi phương pháp đã nêu.

Ngoài ra còn có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau, hay tổng hợp các cách giải để giải một bài toán, điều này sẽ giúp cho các em học sinh trở nên linh hoạt hơn trong việc lựa chọn phương pháp giải. Luận văn được chuẩn bị với sự chỉ bảo nhiệt tình và chu đáo của thầy GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu. Tác giả xin được trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình với thầy về tất cả những gì thầy đã dạy bảo trong cuộc sống và trong nghiên cứu khoa học.

Trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn tác giả đã được sự quan tâm giúp đỡ của các thầy cô và phòng đào tạo sau Đại học của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Sở GD-ĐT Hà Nội và bạn bè đồng nghiệp của tác giả. Tác giả xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ quý báu đó.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 8 năm 2013

Người thực hiện

Nguyễn Văn Thương

Chương 1

Một số hệ thức và công thức lượng giác cơ bản

1.1 Các hệ thức lượng giác cơ bản

1.1.1 Các hệ thức lượng giác cơ bản của một góc a

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ tương đương $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ hoặc $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$

$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ (với $\cos a \neq 0$) suy ra $\sin a = \tan a \cdot \cos a$

$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ (với $\sin a \neq 0$) suy ra $\cos a = \cot a \cdot \sin a$

$\tan a \cdot \cot a = 1$ suy ra $\tan a = \frac{1}{\cot a}$ hoặc $\cot a = \frac{1}{\tan a}$

$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a$ (với $\cos a \neq 0$) suy ra $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a}$

$\frac{1}{\sin^2 a} = 1 + \cot^2 a$ (với $\sin a \neq 0$) suy ra $\sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a}$

1.1.2 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.1.1. Cho $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos a + \sin a}{\cos^3 a} = \tan^3 a + \tan^2 a + \tan a + 1 \quad (1)$$

Lời giải: VT: $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nên $\cos a \neq 0$. Do đó vế trái và vế phải của (1) có nghĩa.

Ta có VT(1):

$$\begin{aligned}\frac{\cos a + \sin a}{\cos^3 a} &= \frac{1}{\cos^2 a} \frac{\sin a + \cos a}{\cos a} \\ &= (1 + \tan^2 a)(1 + \tan a) \\ &= 1 + \tan a + \tan^2 a + \tan^3 a = \text{VP (1)}\end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.2. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào a :

$$A = \frac{\tan a}{1 - \tan^2 a} \frac{\cot^2 a - 1}{\cot a} \quad (2)$$

(giả sử các điều kiện xác định đều được thỏa mãn)

Lời giải: Từ (2) ta có $A = \frac{\tan a \cdot \cot^2 a - \tan a}{\cot a - \tan^2 a \cdot \cot a} = \frac{\cot a - \tan a}{\cot a - \tan a} = 1$
(đpcm)

Ví dụ 1.1.3. Cho $\sin a = \frac{3}{5}$, với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\cos a$, $\tan a$ và $\cot a$.

Lời giải: Ta có: $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, do đó $\cos a = \pm \frac{4}{5}$
với: $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$. Vậy

$$\cos a = -\frac{4}{5}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{3}{4}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{4}{3}.$$

Ví dụ 1.1.4. Cho $\tan a = -\frac{4}{5}$, với $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$. Tính $\cos a$, $\sin a$ và $\cot a$.

Lời giải: Ta có $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{1 + \frac{16}{25}} = \frac{25}{41}$.

Suy ra $\cos a = \pm \frac{5}{\sqrt{41}}$.

Với $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ nên $\cos a > 0$, do đó $\cos a = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

$$\text{Từ đó } \sin a = \tan a \cdot \cos a = -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{41} = -\frac{4}{41} = -\frac{4\sqrt{41}}{41}; \cot a = \frac{1}{\tan a} = \frac{1}{-\frac{4}{41}} = -\frac{41}{4}$$

Ví dụ 1.1.5. Đơn giản biểu thức:

$$B = \sqrt{\sin^4 a + \sin^2 a \cdot \cos^2 a} \quad (3)$$

Lời giải : Ta có: $\sin^4 a + \sin^2 a \cdot \cos^2 a = \sin^2 a \cdot (\sin^2 a + \cos^2 a) = \sin^2 a$
 Từ (3) ta có: $B = \sqrt{\sin^2 a} = |\sin a|$.

Ví dụ 1.1.6. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\frac{1 + \sin^2 a}{1 - \sin^2 a} = 1 + 2 \tan^2 a \quad (4) \text{ (nếu } \sin a \neq \pm 1)$$

Lời giải : Ta có VT (4) = $\frac{1 + \sin^2 a}{1 - \sin^2 a} = \frac{1 + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a + \tan^2 a = 1 + 2 \tan^2 a =$ VP (4) (đpcm).

1.2 Các hệ thức lượng giác của 2 góc có liên quan đặc biệt

1.2.1 Hai góc đối nhau: a và $(-a)$

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\tan(-a) = -\tan a$$

$$\cot(-a) = -\cot a$$

1.2.2 Hai góc bù nhau: a và $(\pi - a)$

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

$$\tan(\pi - a) = -\tan a$$

$$\cot(\pi - a) = -\cot a.$$

1.2.3 Hai góc phụ nhau: a và $(\frac{\pi}{2} - a)$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - a) = \cot a$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} - a) = \tan a$$

1.2.4 Hai góc khác π : a và $(\pi + a)$

$$\tan(\pi + a) = \tan a$$

$$\cot(\pi + a) = \cot a$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos a.$$

1.2.5 Hai góc có trung bình cộng là $\frac{\pi}{4}$: $(\frac{\pi}{4} + a)$ và $(\frac{\pi}{4} - a)$

$$\sin(\frac{\pi}{4} + a) = \cos(\frac{\pi}{4} - a)$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + a) = \sin(\frac{\pi}{4} - a)$$

$$\tan(\frac{\pi}{4} + a) = \cot(\frac{\pi}{4} - a)$$

$$\cot(\frac{\pi}{4} + a) = \tan(\frac{\pi}{4} - a)$$

1.2.6 Hai góc hơn kém $k2\pi$ và $k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin(a + k2\pi) = \sin a$$

$$\cos(a + k2\pi) = \cos a$$

$$\tan(a + k\pi) = \tan a$$

$$\cot(a + k\pi) = \cot a$$

1.2.7 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.2.1. Đơn giản biểu thức sau:

$$A = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(a - \pi) \quad (5)$$

Lời giải: Từ (5) ta có

$$\begin{aligned} A &= \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] + \sin[-(\pi - a)] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \sin(\pi - a) \\ &= \sin a - \sin a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.2. Đơn giản biểu thức sau

$$B = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \quad (6)$$

Lời giải : Từ (6) ta có:

$$\begin{aligned} B &= \cos\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] + \cos a - \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-a)\right] - \sin\left[\frac{\pi}{2} - (-a)\right] \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \cos a - \sin(-a) - \cos(-a) \\ &= -\sin a + \cos a + \sin a - \cos a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ví dụ 1.2.3. Đơn giản biểu thức sau

$$C = \cos(5\pi + a) - 2\sin\left(\frac{11\pi}{2} - a\right) - \sin\left(\frac{11\pi}{2} + a\right) \quad (7)$$

Lời giải: Từ (7) ta có:

$$\begin{aligned}
 C &= \cos[\pi + (a + 4\pi)] - 2 \sin[5\pi + \frac{\pi}{2} - a] - \sin[\frac{\pi}{2} + 5\pi + a] \\
 &= -\cos(a + 4\pi) - 2 \sin[\frac{\pi}{2} - (a - 5\pi)] - \sin[\frac{\pi}{2} - (-5\pi - a)] \\
 &= -\cos a - 2 \cos(a - 5\pi) - \cos(-5\pi - a) \\
 &= -\cos a - 2 \cos[\pi - 6\pi + a] - \cos(\pi + a + 4\pi) \\
 &= -\cos a - 2 \cos[\pi - (6\pi - a)] + \cos(a + 4\pi) \\
 &= -\cos a + 2 \cos(6\pi - a) + \cos a \\
 &= -\cos a + 2 \cos[-(a - 6\pi)] + \cos a \\
 &= 2 \cos(a - 6\pi) \\
 &= 2 \cos a
 \end{aligned}$$

1.3 Các công thức lượng giác

1.3.1 Công thức cộng

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} (a, b, a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} (a, b, a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot(a + b) = \frac{1}{\tan(a + b)} = \frac{1 - \tan a \tan b}{\tan a + \tan b} = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b} (a, b, a + b \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot(a - b) = \frac{1}{\tan(a - b)} = \frac{1 + \tan a \tan b}{\tan a - \tan b} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a} (a, b, a - b \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

1.3.2 Công thức góc nhân đôi

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\cot 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{2 \tan a} = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} \left(a, 2a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

1.3.3 Công thức nhân ba

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$$

1.3.4 Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\cos^3 a = \frac{\cos 3a + 3 \cos a}{4}$$

$$\sin^3 a = \frac{3 \sin a - \sin 3a}{4}$$

1.3.5 Biểu diễn theo $t = \tan \frac{a}{2} \left(\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cot a = \frac{1 + t^2}{2t}$$

1.3.6 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} (a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} (a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin(a + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - a) = \sqrt{2} \cos(a - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin(a - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + a) = -\sqrt{2} \cos(a + \frac{\pi}{4})$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a + \sin b} (a, b \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b} (a, b \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos(a + \frac{\pi}{4}).$$

1.3.7 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(b-a)]$$

1.3.8 Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.3.1. Tính $\tan \frac{13\pi}{12}$

Lời giải: Ta có $\tan \frac{13\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{12} + \pi) = \tan \frac{\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}.$$

Ví dụ 1.3.2. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b} \quad (8)$$

Lời giải: Ta có VT(8): $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b} \quad (9)$

chia cả tử và mẫu của VP (9) cho $\cos a \cdot \cos b$ ta có:

$$\frac{\frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b} = VP(8)$$

(đpcm)

Ví dụ 1.3.3. Tính $\cos \frac{\pi}{8}$

Ta có $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$. Suy ra $2\cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. Với $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ nên suy ra $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

Ví dụ 1.3.4. Tính các giá trị của biểu thức

$$A = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} \qquad B = \sin \frac{13\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{2\pi}{8} \right) + \sin \frac{4\pi}{8} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} B &= \sin \frac{13\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{13\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) - \cos \left(\frac{13\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.5. Cho $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ Tính giá trị của biểu thức

a. $A = \cos 4a$ b. $B = \tan \frac{a}{2}$

Lời giải : Ta có $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ tương đương

$$\frac{7}{4} = (\sin a + \cos a)^2 = \sin^2 a + \cos^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a = 1 + \sin 2a.$$

Suy ra $\sin 2a = \frac{3}{4}$.

Từ đó $A = \cos 4a = 1 - 2 \sin^2 2a = 1 - 2 \left(\frac{3}{4} \right)^2 = -\frac{1}{8}$.

b. Ta đặt $t = \tan \frac{a}{2}$

Ta có: $\sin a + \cos a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ tương đương $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Tương đương: $(\sqrt{7}+2)t^2 - 4t + \sqrt{7}-2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{7}+2}$.

Vậy $B = \frac{3}{\sqrt{7}+2}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{7}+2}$

Ví dụ 1.3.6. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sin 5^\circ \sin 15^\circ \sin 25^\circ \dots \sin 85^\circ$$

Lời giải: Biến đổi A về dạng

$$\begin{aligned} A &= (\sin 5^\circ \sin 85^\circ) \cdot (\sin 15^\circ \sin 75^\circ) \dots (\sin 35^\circ \sin 55^\circ) \cdot \sin 45^\circ \\ &= (\sin 5^\circ \cos 5^\circ) (\sin 15^\circ \cos 15^\circ) \dots (\sin 35^\circ \cos 35^\circ) \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{16} \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{64} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \end{aligned} \quad (9)$$

Nhân cả 2 vế của (9) với $\sin 20^\circ$, ta được:

$$\begin{aligned} A \cdot \sin 20^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2^6} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^6} \cdot \frac{1}{8} \sin 160^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2^9} \sin 20^\circ. \end{aligned}$$

Tương đương $A = \frac{\sqrt{2}}{2^9}$

Ví dụ 1.3.7. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x

$$A = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= (\sin^4 x + \cos^4 x) + [\sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)] \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + [\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)]^2 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + 1 - \frac{1}{2}\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{2}(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.8. Chứng minh đẳng thức sau:

$$8 \cos 4a - 4 \cos 2a - \cos 4a = 3 \quad (10)$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} VT(10) &= 8 \cos 4a - 4 \cos 2a - \cos 4a = 8(\cos^2 a)^2 - 4 \cos 2a - \cos 4a \\ &= 2(1 + \cos 2a)^2 - 4 \cos 2a - \cos 4a \\ &= 2(1 + 2 \cos 2a + \cos^2 2a) - 4 \cos 2a - \cos 4a \\ &= 2 + 4 \cos 2a + 2 \frac{1 + \cos 4a}{2} - \cos 4a - 4 \cos 2a \\ &= 2 + 1 + \cos 4a - \cos 4a \\ &= 3 = VP \quad (10) \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.9. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}, \quad (11)$$

biết $a + b = c$.

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} VT(11) &= \sin a + \sin b + \sin c = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} \\ &= 2 \sin \frac{c}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = VP(11) \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.10. Chứng minh đẳng thức sau, biết $a + b + c + d = 2\pi$

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b+c}{2} \sin \frac{c+a}{2} \quad (12)$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{VT}(12) &= \sin a + \sin b + \sin c + \sin d \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin(\pi - \frac{a+b}{2}) \cos \frac{c-d}{2} \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} (\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{c-d}{2}) \\ &= 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b+c-d}{4} \cos \frac{a-b-c+d}{4} \\ &= 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b+c-(2\pi-a-b-c)}{4} \cos \frac{a-b-c+(2\pi-a-b-c)}{4} \\ &= 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{c+a}{2} \sin \frac{b+c}{2} = \text{VP (12) (đpcm)} \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.11. Biến đổi biểu thức sau thành tổng

$$A = \sin a. \sin 2a. \sin 3a$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin a. \sin 2a. \sin 3a = \frac{1}{2}(\cos a - \cos 3a) \sin 3a \\ &= \frac{1}{2}(\cos a. \sin 3a - \cos 3a. \sin 3a) \\ &= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\sin 2a + \sin 4a) - \frac{1}{2} \sin 6a] \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2a + \sin 4a - \sin 6a) \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.12. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \cos 10x + 2 \cos^2 4x + 6 \cos 3x. \cos x - \cos x - 8 \cos x. \cos^3 3x$$

Lời giải: Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= \cos 10x + 1 + \cos 8x - 2(4 \cos^3 3x - 3 \cos 3x) \cos x - \cos x \\ &= 2 \cos 9x. \cos x + 1 - \cos x - 2 \cos 9x. \cos x \\ &= 1 - \cos x \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3.13. Rút gọn biểu thức sau:

$$A = \frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}$$

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right]} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 4x. \end{aligned}$$

Chương 2

Hệ nửa lượng giác hai ẩn

2.1 Hệ nửa lượng giác hai ẩn

Hệ phương trình lượng giác hai ẩn được xét ở đây là hệ phương trình gồm các phương trình lượng giác cơ bản hoặc hệ gồm các phương trình lượng giác cơ bản và phương trình đại số dạng đơn giản. Tùy theo cấu trúc từng hệ phương trình lượng giác mà ta có cách giải phù hợp. Có thể chia hệ phương trình lượng giác thành 2 dạng: Dạng nửa lượng giác và dạng thuần túy lượng giác.

Hệ phương trình nửa lượng giác cơ bản gồm có một số dạng chuẩn sau:

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} x \pm y = \phi \\ \sin x \pm \sin y = m \end{cases} & b) \begin{cases} x \pm y = \phi \\ \cos x \pm \cos y = m \end{cases} \\ c) \begin{cases} x \pm y = \phi \\ \tan x \pm \tan y = m \end{cases} & d) \begin{cases} x \pm y = \phi \\ \cot x \pm \cot y = m \end{cases} \\ e) \begin{cases} x \pm y = \phi \\ \sin x \cdot \sin y = n \end{cases} & f) \begin{cases} x \pm y = \phi \\ \cos x \cdot \cos y = n \end{cases} \\ g) \begin{cases} x \pm y = \phi \\ \tan x \cdot \tan y = n \end{cases} & h) \begin{cases} x \pm y = \phi \\ \tan x \cdot \cot y = n \end{cases} \end{array}$$

Các hệ trên đều có thể biến đổi thành hệ phương trình lượng giác đơn giản theo x hoặc theo y .

Bài toán 2.1. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} f(x) \pm f(y) = m \\ x \pm y = a \end{cases}$$

Với $f(x)$, $f(y)$ là các hàm số lượng giác của x và y .

Phương pháp chung

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = m \\ x \pm y = a \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = m \\ x \pm y = a \end{cases}$$
$$\begin{cases} \tan x \pm \tan y = m \\ x \pm y = a \end{cases} \quad \begin{cases} \cot x \pm \cot y = m \\ x \pm y = a \end{cases}$$

Ta chuyển tổng $f(x) \pm f(y) = m$ thành tích bằng một trong các công thức:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \tan x \pm \tan y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y} \\ \cot x \pm \cot y &= \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y} \end{aligned}$$

Chú ý: Phương pháp chung là nếu biết tổng $x + y$ thì cần tìm $x - y$ hay ngược lại, bằng các công thức biến đổi, tức là:

Ta biến đổi phương trình:

$$f(x) \pm f(y) = m \Leftrightarrow g_1(x+y) \cdot g_2(x-y) = m_1 \quad (*)$$

Từ đó thay phương trình $x \pm y = a$ và (*) để tìm biểu thức còn lại.

Ví dụ 2.1.1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = m(1) \\ x + y = \frac{\pi}{3}(2) \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình với $m = 1$
- Tìm m để hệ có nghiệm.

Lời giải: Biến đổi (1) về dạng:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = m \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = m \Leftrightarrow \cos \frac{x-y}{2} = m(3)$$

a. Với $m=1$ ta được:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2k\pi \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 4k\pi \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

b. Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $\Leftrightarrow |m| \leq 1$

Vậy với $|m| \leq 1$ hệ có nghiệm

Ví dụ 2.1.2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x - y = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải: Biến đổi (1) về dạng:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= \cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} = \cos \frac{\pi}{8} \\ &\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{8} + 2k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi \\ x+y = \frac{\pi}{4} + 4k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{3\pi}{4} + 4k\pi \\ x - y = -\frac{\pi}{4} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \right], k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2.1.3. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = m(1) \\ x + y = \frac{3\pi}{4}(2) \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình với $m = 2$
- Tìm m để hệ có nghiệm

Lời giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y} = m &\Leftrightarrow \sin(x - y) = \frac{m}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\ &\Leftrightarrow 2 \sin(x - y) - m \cos(x - y) = -\frac{m\sqrt{2}}{2} (3) \end{aligned}$$

- Với $m = 2$ ta được:

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \sin(x - y) - \cos(x - y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin(x - y - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin(x - y - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x - y - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x - y = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x + y = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{3} - k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \\ x + y = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13\pi}{12} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} - k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b, Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 4 + m^2 \geq \frac{m^2}{2}$
 $\Leftrightarrow 8 + m^2 \geq 0$ luôn đúng.

Vậy hệ có nghiệm với mọi m .

Ví dụ 2.1.4. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 2m + 1 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = \frac{\sqrt{2}}{8}$

b) Xác định m để hệ phương trình có nghiệm

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \cos^2 y = 2m + 1 &\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} = 2m + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) = 2m \Leftrightarrow \cos(x + y) \cos(x - y) = 2m \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = 2m \end{cases}$$

Thế $x - y = \frac{\pi}{3}$ vào phương trình thứ hai ta nhận được

$$\cos(x + y) = 4m \quad (1)$$

a) Với $m = \frac{\sqrt{2}}{8}$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \cos(x + y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + y = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với điều kiện $x - y = \frac{\pi}{3}$, ta nhận được:

$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{24} + k\pi \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + k\pi \\ y = -\frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Hệ phương trình có nghiệm khi phương trình (1) có nghiệm, tức là:

$$-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 2.1.5. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \tan x + \tan y = b \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $a = \frac{5\pi}{12}$ và $b = 2$

b) Xác định điều kiện giữa a và b để hệ phương trình có nghiệm.

Lời giải: Ta có:

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos(x-y)}$$

Ta viết hệ phương trình đó cho dưới dạng

$$\begin{cases} x + y = a(2) \\ \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos(x-y)} = b(3) \end{cases}$$

a) Với $a = \frac{5\pi}{12}$ và $b = 2$ ta có

$$\cos(x-y) = \sin \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12}$$

Suy ra

$$\cos(x-y) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x-y = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với (2), ta có nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{12} - k\pi \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Ta có:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} b \cos(x - y) = 2 \sin a - b \cos a \\ \cos(x - y) \neq -\cos a. \end{cases}$$

- Nếu $b = 0$ thì hệ phương trình đó có dạng

$$\begin{cases} x + y = a \\ \tan x + \tan y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x + y = l\pi \\ x, y \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \quad (m, l \in \mathbb{Z})$$

Hệ phương trình có nghiệm khi $a = l\pi (l \in \mathbb{Z})$.

- Nếu $b \neq 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = \frac{2 \sin a}{b} - \cos a \\ \sin a \neq 0 \end{cases} \quad (4)$$

Hệ phương trình có nghiệm khi (4) có nghiệm. Do đó

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{2 \sin a}{b} - \cos a \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \sin^2 \frac{a}{2} \leq \frac{2 \sin a}{b} \leq 2 \cos^2 \frac{a}{2} \\ &\Leftrightarrow -\sin^2 \frac{a}{2} \leq \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{b} \leq \cos^2 \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Với } b > 0 \text{ thì } &\begin{cases} \tan \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \\ \cot \frac{a}{2} \geq -\frac{b}{2} \end{cases} \\ \text{- Với } b < 0 \text{ thì } &\begin{cases} \tan \frac{a}{2} \geq \frac{b}{2} \\ \cot \frac{a}{2} \leq -\frac{b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 2.1.6. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = a \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \end{cases} \quad (13)$$

Lời giải :

$$(13) \Leftrightarrow 4 \cos(x + y) \cos(x - y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \quad (14)$$

Thế $x - y = a$ vào (14) ta được

$$\begin{aligned} 4 \cos(x + y) \cos a &= 1 + 4 \cos^2 a \\ \Leftrightarrow [2 \cos a - \cos(x + y)]^2 + \sin^2(x + y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ 2 \cos a = \cos(x + y) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó, ta nhận được hai hệ

$$\begin{cases} x + y = k2\pi \\ \cos a = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x + y = \pi + k2\pi \\ \cos a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $a = \pm \frac{\pi}{3} + l2\pi$ thì

$$\begin{cases} x - y = \pm \frac{\pi}{3} + l2\pi \\ x + y = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + (k + l)\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + (k - l)\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Với $a = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi$ thì

$$\begin{cases} x - y = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi \\ x + y = \pi + k2\pi \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (k + n)\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + (k - n)\pi \end{cases}$$

$$\text{và} \quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + (k + n)\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + (k - n)\pi \end{cases} \quad (k, n \in \mathbb{Z})$$

Với $a \neq \pm \frac{\pi}{3} + l2\pi$ và $a \neq \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Bài toán 2.2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x).g(y) = m \\ x \pm y = a \end{cases}$$

Với $f(x), g(y)$ là các hàm số lượng giác của x và y .

Phương pháp chung

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x . \sin y = m \\ x \pm y = a \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x . \cos y = m \\ x \pm y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = m \\ x \pm y = a \end{cases} \quad \begin{cases} \tan x \cdot \tan y = m \\ x \pm y = a \end{cases}$$

Ta chuyển tích

$$f(x) \cdot g(y) = m$$

thành tổng bằng một trong các công thức:

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] \\ \sin x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)] \\ \cos x \cdot \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\ \cos x \cdot \sin y &= \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)] \end{aligned}$$

Ví dụ 2.1.7. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = m(1) \\ x + y = \frac{\pi}{3}(2) \end{cases}$$

- Giải hệ với $m=3$
- Tìm m để hệ có nghiệm

Lời giải Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi (1) về dạng: $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = m$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)] = \frac{m}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] \\ &\Leftrightarrow \cos(x - y) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{m+1}{2(1-m)} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy với $m \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 2.1.8. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = m(1) \\ x - y = \frac{\pi}{3}(2) \end{cases}$$

- a. Giải hệ với $m = \frac{1}{2}$
 b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Lời giải: Biến đổi (1) về dạng:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)] &= m \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} - \cos(x + y) = 2m \\ \Leftrightarrow \cos(x + y) &= \frac{1 - 4m}{2}(3) \end{aligned}$$

- a. Với $m = \frac{1}{2}$, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x + y) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left[\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x - y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \right], k \in \mathbb{Z}.$$

- b. Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left| \frac{1 - 4m}{2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$

Vậy với $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$ hệ có nghiệm.

Bài toán 2.3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{f(x)}{f(y)} = m(1) \\ x \pm y = a(2) \end{cases}$$

Với $f(x), g(y)$ là các hàm số lượng giác của x và y .

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước:

- Bước 1: Đặt điều kiện cho $f(y)$
- Bước 2: Biến đổi (1) dựa vào phương pháp luận hệ số làm xuất hiện (2) và biểu thức còn lại.
- Bước 3: Tìm nghiệm của hệ.

Ví dụ 2.1.9. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = 2(1) \\ 3(x + y) = 2\pi(2) \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện $\sin y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi (1) về dạng:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin y \Leftrightarrow 2 \sin x = 4 \sin y \Leftrightarrow 3(\sin x - \sin y) = \sin x + \sin y \\ &\Leftrightarrow 6 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\ &\Leftrightarrow 3 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\ &\Leftrightarrow \tan \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x-y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x-y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x+y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} - k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2.1.10. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}(1) \\ x+y = \frac{\pi}{4}(2) \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \\ \tan y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{l\pi}{2} \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\begin{aligned} \frac{\sin x \cdot \cos y}{\sin y \cdot \cos x} &= \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x \\ &= -\sqrt{2}(\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x) \\ &\Leftrightarrow \sin(x - y) = -\sqrt{2} \sin(x + y) \Leftrightarrow \sin(x - y) \\ &= -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sin(x - y) = -1 \\ &\Leftrightarrow x - y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ y = \frac{3\pi}{8} - k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2.1.11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} & (10) \\ \frac{\sin x}{\sin y} = -2 & (11) \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện: $y \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$(11) \Leftrightarrow \sin x = -2 \sin y \Leftrightarrow 3(\sin x + \sin y) = \sin x - \sin y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\frac{x+y}{2}) \cos(\frac{x-y}{2})}{\cos(\frac{x+y}{2}) \sin(\frac{x-y}{2})} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan(\frac{x+y}{2}) \cot(\frac{x-y}{2}) = \frac{1}{3} \quad (12)$$

Thế (10) và (12), ta nhận được

$$\cot\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x-y = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Kết hợp với (10), ta được nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} - k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 2.1.12. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1) \\ x - y = -\frac{1}{4} (2) \end{cases}$$

Lời giải: Biến đổi (1) về dạng:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\cos[\pi(x+y)] + \cos[\pi(x-y)]) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos[\pi(x+y) + \cos(-\frac{\pi}{4})] = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \cos[\pi(x+y)] &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \pi(x+y) = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x+y = \pm\frac{1}{4} + 2k \end{aligned}$$

Do đó hệ tương đương với:

$$\left\{ \begin{cases} \begin{cases} x+y = \frac{1}{4} + 2k \\ x-y = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = -\frac{1}{4} + 2k \\ x-y = -\frac{1}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{4} + k \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{4} + k \\ y = k \end{cases} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2.1.13. Giải và biện luận theo a để hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x-y) (1) \\ x-y = a (2) \end{cases}$$

Lời giải Biến đổi (1) về dạng:

$$\begin{aligned} 4\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) &= 1 + 4\cos^2(x-y) \Leftrightarrow 4\cos(x+y) \cdot \cos a \\ &= 1 + 4\cos^2 a (3) \\ \Leftrightarrow [\cos(x+y) - 2\cos a]^2 + \sin^2(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y) - 2\cos a = 0 \\ \sin^2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \cos(x+y) = 1 \\ 2\cos a = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(x+y) = -1 \\ 2\cos a = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y = 2k\pi \\ a = \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = \pi + 2k\pi \\ a = \pm \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \end{cases}$$

- Với $a = \frac{\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$. hệ có dạng:

$$\begin{cases} x+y = 2k\pi \\ x-y = \frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (k+l)\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + (k-l)\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

- Với $a = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$. hệ có dạng:

$$\begin{cases} x+y = 2k\pi \\ x-y = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

- Với $a = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$. hệ có dạng:

$$\begin{cases} x+y = 2k\pi \\ x-y = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + (k+l)\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + (k-l)\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

- Với $a = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$. hệ có dạng

$$\begin{cases} x+y = 2k\pi \\ x-y = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + (k+l)\pi \\ y = \frac{\pi}{3} + (k-l)\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

- Ngoài ra hệ vô nghiệm.

Ví dụ 2.1.14. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y = a(5) \\ \sin x \cdot \sin y = b(6) \end{cases}$$

a) Với giá trị nào của b thì hệ phương trình có nghiệm với mọi a .

b) Giải phương trình trong trường hợp đó.

Lời giải a) Ta có

$$(6) \Leftrightarrow \cos(x - y) - \cos(x + y) = 2b(7)$$

Thế (5) vào (7), ta nhận được

$$\cos(x - y) = 2b + \cos a \quad (8)$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (8) có nghiệm, tức là

$$|2b + \cos a| \leq 1 \Leftrightarrow -1 - 2b \leq \cos a \leq 1 - 2b \quad (9)$$

Hệ phương trình có nghiệm với mọi a khi và chỉ khi (9) thoả mãn với mọi a , tức là:

$$\begin{cases} -1 - 2b \leq -1 \\ 1 - 2b \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 0$$

b) Thay $b = 0$ vào (6), ta có

$$\sin x \cdot \sin y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ y = l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Khi đó hệ phương trình đó có nghiệm:

$$\begin{cases} x = k\pi \\ y = a - k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ và } \begin{cases} x = a - l\pi \\ y = l\pi \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

2.2 Bài tập

Bài 1: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = m \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) - 1 - 4\cos^2 m = 0 \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm và tìm nghiệm đó. **Bài 2:** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \\ x - y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

‘ **Bài 3:** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases}$$

Bài 4: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y - x = \frac{1}{4} \\ \cos(\pi x) \cos(\pi y) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a. \end{cases}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y = \frac{\pi}{3} \\ \sin 2x \cos 3y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Bài 7: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sin^2 x + \cos^2 y = m + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bài 8:

$$\text{ĐHSPHN:} \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{ĐHBK:} \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{ĐHSPHN96:} \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ĐKQTS:} \begin{cases} \tan x \cdot \tan y = 1 \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{CĐBKQTKQ 98:} \begin{cases} \cot x \cdot \cot y = 1 \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad \text{ĐHYHN:} \begin{cases} \tan x \cdot \tan y = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{ĐHSPQN:} \begin{cases} \cot x \cdot \cot y = 0 \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{ĐHMĐC:} \begin{cases} \cot x - \cot y = -1 \\ x - y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{ĐHTN97:} \begin{cases} \cot x + \cot y = 1 \\ x + y = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ĐHDHN 99:} \begin{cases} \cot x + \tan y = 1 \\ x + y = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Bài 9: a) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ ta có: $a \sin B \sin C = h \sin A$ (h kẻ từ A)

b) Cho $\frac{a}{h} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$; $A = 60^\circ$. Tìm góc B và góc C ? **Bài 10:** Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \text{CĐSPHY 97:} & \begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = a \end{cases} & \text{CĐSPBN 97:} & \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \\ \text{CĐHC 99:} & \begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x - y = \frac{\pi}{3} \end{cases} & \text{ĐHDLĐĐ :} & \begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 11: Số đo 3 góc tạo thành cặp số cộng và thỏa mãn đẳng thức:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

Tính A, B, C ? **Bài 12:**

$$\text{QGTPHCM:} \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ 2\sin^2 x + \cos^2 y = 2m + 1 \end{cases}$$

a) Giải hệ $m = 0$

b) $m = ?$ hệ có nghiệm **Bài 13:** $P = 50$ (đơn vị dài) tính cạnh $\triangle ABC$

$$\text{TCAN 97:} \begin{cases} \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \\ x - y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{CĐBK 200:} \begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{1}{4} \\ x - y = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{Đề 119:} \begin{cases} \sin x - 7 \cos y = 0 \\ 5 \sin y - \cos x + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{ĐHSPV 98:} \begin{cases} \cos x = 1 + \cos y \\ \sin x - \sin y = 0 \end{cases}$$

Bài 15: Giải hệ phương trình

$$a. \begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad b. \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = -2 \end{cases}$$

Bài 16: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 2m \\ x - y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m=1$

b. Tìm m để hệ có nghiệm. **Bài 17:** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 2m \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m=1$

b. Tìm m để hệ có nghiệm **Bài 18:** Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \tan x \tan y = m \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m=3$

b. Tìm m để hệ có nghiệm. **Bài 19:** Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 2m + 1 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình khi $m = \frac{\sqrt{2}}{8}$

b. Xác định m để hệ có nghiệm. **Bài 20:** Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \tan x + \tan y = b \end{cases}$$

a. Giải hệ trình khi $a = \frac{5\pi}{12}; b = 2$

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm. **Bài 21:** Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2 \cos 6x - \cos 2y = a \\ 3x - 2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a. Giải hệ khi $a = -3$

b. Xác định a để hệ có nghiệm. **Bài 22:** Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x \cdot \sin y = b \end{cases}$$

Tìm b để hệ có nghiệm với mọi a . Tìm nghiệm đó. **Bài 23:** Giải và biện luận hệ phương trình:

a.

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = m \\ x + y = 2\pi \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a \\ x + y = a \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = m \\ x + y = a \end{cases}$$

d.

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2(\sin^2 x + \sin^2 y) = 2 - \sin 2a \end{cases}$$

e.

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = m \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

f.

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan z = 3 \\ \tan y \cdot \tan z = 6 \\ x + y + z = \pi \end{cases}$$

Bài 24: Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin^2 x \cdot \sin^2 y = b \end{cases}$$

Bài 25: Xác định a để hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

Bài 26: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ 2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 2m + 1 \end{cases}$$

- a. Giải hệ với $m = 0$
b. Tìm m để hệ có nghiệm. **Bài 27:**

$$\text{ĐHYTPHCM 99: } \begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} \end{cases}$$

$$\text{ĐHNT 91: } \begin{cases} \sin x + \cos x = \frac{1}{2} + \sin y - \cos x \\ 2 \sin x = \frac{3}{2} + \sin 2y \end{cases}$$

$$\text{SQTT 97: } \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos 2x + \sin 2x = m \end{cases}$$

- 1) Giải hệ khi $m = 1$
2) Tìm m để hệ có nghiệm **Bài 28:** Cho hệ

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = m + \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- a) $m = ?$ thì hệ có nghiệm
b) Giải hệ khi $m = 0$ **Bài 29:** Giải và biện luận phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a \end{cases}$$

ĐHKTTTPHCM 2000: Giải và biện luận phương trình:

$$\begin{cases} \tan x + \sin y = 2a \\ \tan x \cdot \sin y = a^2 - 1 \end{cases}$$

Bài 30: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{4} \\ \cos(\pi x) \cdot \cos(\pi y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Chương 3

Các phương pháp giải hệ phương trình lượng giác hai ẩn không mẫu mực

3.1 Các phương pháp giải hệ phương trình

Bài toán 3.1. *Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp cộng*

Phương pháp chung

Với hệ dạng:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Ta sử dụng phép biến đổi tương đương:

$$\begin{cases} f(x, y) + g(x, y) = 0 \\ f(x, y) - g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Từ đó sử dụng được các công thức lượng giác, thông thường là công thức cộng

Ví dụ 3.1.1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lời giải: Biến đổi tương đương hệ bằng cách cộng và trừ vế với vế hai phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = 0 \\ \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ \sin(x-y) = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = k\pi \\ x-y = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + (\frac{k}{2} + 1)\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + (\frac{k}{2} - 1)\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin^4 x = \cos x \cdot \cos y \\ \cos^4 x = \sin x \cdot \sin y \end{cases}$$

Lời giải : Biến đổi hệ về dạng

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \\ \sin^4 x - \cos^4 x = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos(x-y) \\ -\cos 2x = \cos(x+y) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \cos 4x = 4\cos(x-y) \quad (1) \\ \cos 2x = \cos(\pi - x - y) \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải (2) ta được

$$\begin{cases} 2x = \pi - x - y + k2\pi \\ 2x = -\pi + x + y + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4x - \pi - 2k\pi \\ x - y = -\pi + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Với $x - y = 4x - \pi - 2k\pi$, thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} 3 + \cos 4x &= 4\cos(4x - \pi - 2k\pi) \Leftrightarrow 3 + \cos 4x = -4\cos 4x \\ \Leftrightarrow \cos 4x &= -\frac{3}{5} = \cos 4a \Leftrightarrow 4x = \pm 4a + 2l\pi \Leftrightarrow x = \pm a + \frac{l\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \frac{l\pi}{2} \\ x = -a + \frac{l\pi}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y = \pi - 3a + (2k - \frac{3l}{2})\pi \\ y = \pi + 3a + (2k - \frac{3l}{2})\pi \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$$

Với $x - y = \pi + 2k\pi$, thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} 3 + \cos 4x &= 4\cos(\pi + 2k\pi) \Leftrightarrow 3 + \cos 4x = -4 \\ \Leftrightarrow \cos 4x &= -7 \text{ vô nghiệm} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x = a + \frac{l\pi}{2} \\ x = -a + \frac{l\pi}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y = \pi - 3a + (2k - \frac{3l}{2})\pi \\ y = \pi + 3a + (2k - \frac{3l}{2})\pi \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3.1.3. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = m \\ 3 \tan x = \tan y \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $m = \frac{1}{4}$

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Lời giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -2m \end{cases} \quad (I)$$

a. Với $m = \frac{1}{4}$, ta được:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = k\pi \\ \begin{cases} x-y = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi \\ x-y = \frac{7\pi}{6} + l\pi \end{cases} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{(k+2l)\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{(k+2l)\pi}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{12} + \frac{(k-2l)\pi}{2} \\ y = -\frac{7\pi}{12} + \frac{(k-2l)\pi}{2} \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z} \text{ thỏa} \\ & \text{mãn } (*) \end{aligned}$$

b. Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (I) \text{ có nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ |4m| \leq 1 \\ |-2m| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \setminus \{0\}.$$

Vậy với $m \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \setminus \{0\}$ hệ có nghiệm.

Ví dụ 3.1.4. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = m + 1 \\ \sin x \sin y = 4m^2 + 2m \end{cases} \quad (11)$$

- a) Giải hệ phương trình với $m = -\frac{1}{4}$
 b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned} (11) &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y - \sin x \sin y = -4m^2 - m + 1 \\ \cos x \cos y + \sin x \sin y = 4m^2 + 3m + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y) = -4m^2 - m + 1 \\ \cos(x-y) = 4m^2 + 3m + 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

- a) Với $m = -\frac{1}{4}$ thì (12)

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y) = 1 \\ \cos(x-y) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = k2\pi \\ x-y = \pm\frac{\pi}{3} + l2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (k+l)\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + (k-l)\pi \end{cases} ; \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi \end{cases} \quad (k, l) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

; b) Hệ (11) có nghiệm khi và chỉ khi hệ (12) có nghiệm, tức là

$$\begin{cases} -1 \leq -4m^2 - m + 1 \leq 1 \\ -1 \leq 4m^2 + 3m + 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4} \leq m \leq -\frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3.1.5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin^4 x = \cos x \cos y \\ \cos^4 x = \sin x \sin y. \end{cases}$$

Lời giải. Ta viết hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin^4 x - \cos^4 x = \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \cos(x-y) \\ -(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos(x+y) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos(x - y) & (13) \\ -\cos 2x = \cos(x + y) & (14) \end{cases}$$

Ta có

$$(14) \Leftrightarrow \cos(x + y) = \cos(\pi - 2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \pi - 2x + k2\pi \\ x + y = 2x - \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pi - 3x + k2\pi & (15) \\ y = x - \pi + k2\pi & (16) \end{cases}$$

- Thế (15) vào (13), ta có

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos(4x - \pi) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = -\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow 4x = \pm \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + l2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{l\pi}{2} (l \in \mathbb{Z}) \quad (17)$$

- Thế (17) vào (15), ta có

$$y = \pi \mp \frac{3}{4} \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + (4k - 3l)\frac{\pi}{2}.$$

- Thế (16) vào (13), ta được

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \cos(\pi - k2\pi) \Leftrightarrow \sin^2 2x = 4 \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{l\pi}{2} \\ y = \pi - \frac{3}{4} \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + (4k - 3l)\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Và

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{l\pi}{2} \\ y = \pi + \frac{3}{4} \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + (4k - 3l)\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3.1.6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

Lời giải : Viết hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin x \cos y - \sin y \cos x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin x \cos y + \sin y \cos x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - y) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \sin a \\ \sin(x + y) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \sin \beta \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - y = a + k2\pi \\ x - y = \pi - a + k2\pi \\ x + y = \beta + l2\pi \\ x + y = \pi - \beta + l2\pi \end{cases} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ta có bốn hệ

$$\begin{aligned} i) \quad & \begin{cases} x - y = a + k2\pi \\ x + y = \beta + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a + \beta}{2} + (k + l)\pi \\ y = \frac{-a + \beta}{2} + (l - k)\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \\ ii) \quad & \begin{cases} x - y = a + k2\pi \\ x + y = \pi - \beta + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a - \beta}{2} + \frac{\pi}{2} + (k + l)\pi \\ y = \frac{\pi}{2} - \frac{a + \beta}{2} + (l - k)\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \\ iii) \quad & \begin{cases} x - y = \pi - a + k2\pi \\ x + y = \beta + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{-a + \beta}{2} + (k + l)\pi \\ y = \frac{a + \beta}{2} - \frac{\pi}{2} + (l - k)\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \\ iv) \quad & \begin{cases} x - y = \pi - a + k2\pi \\ x + y = \pi - \beta + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi - \frac{a + \beta}{2} + (k + l)\pi \\ y = \frac{a - \beta}{2} + (l - k)\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$$

Lời giải: Viết hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = -\cos 2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = \cos(\pi-2x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y = k2\pi \\ \begin{cases} x+y = \pi-2x+l2\pi \\ x+y = 2x-\pi+l2\pi \end{cases} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ta được 2 hệ

$$\begin{aligned} i) \begin{cases} x-y = k2\pi \\ x+y = \pi-2x+l2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y = k2\pi \\ 3x+y = \pi+l2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + (k+l)\frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + (l-3k)\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \\ ii) \begin{cases} x-y = k2\pi \\ x+y = 2x-\pi+l2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y = k2\pi \\ x-y = \pi-l2\pi \end{cases} \quad (\text{hệ vô nghiệm}). \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4\sqrt{2} \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin y - \cos y \\ 4\sqrt{2} \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin y + \cos y \end{cases}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4\sqrt{2} \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin y - \cos y \\ 4\sqrt{2} \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin y + \cos y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \sin 2x \cos 2x = \sqrt{2} \sin \left(y - \frac{\pi}{4}\right) \\ 2\sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2} \cos \left(y - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} - y\right) & (18) \\ 2 \sin 2x = \cos \left(y - \frac{\pi}{4}\right). & (19) \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra

$$(18) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - 4x + k2\pi & (19) \\ y = 4x - \frac{3\pi}{4} - k2\pi & (20) \end{cases}$$

Thế (20) vào (19) ta nhận được

$$2 \sin 2x = \cos 4x \Leftrightarrow 2 \sin^2 2x + 2 \sin 2x - 1 = 0 \quad (22)$$

Giải (22) tìm được x và thay vào (20), ta thu được y. Tương tự, khi thay (21) vào (19), ta thu được y.

Ví dụ 3.1.9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin^2 x - 2 \sin x \cos 2y = \cos \frac{x+y}{2} + \cos \frac{x-y}{2} - 2 \\ \cos^2 2y + \frac{1}{2}(\cos x + \cos y) - 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải: Hệ đó cho tương đương với

$$\begin{cases} \sin^2 x - 2 \sin x \cos 2y = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} - 2 \\ \cos^2 2y + \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$$

Suy ra

$$(\sin x - \cos 2y)^2 + \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{y}{2} \right)^2 = 0$$

Hay

$$\begin{cases} \sin x - \cos 2y = 0 & (26) \\ \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{y}{2} = 0 & (27) \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (27) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{2} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{y}{2} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + k4\pi \\ x = -y + k4\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Với

$$x = y + k4\pi$$

thay vào (26), ta được

$$\begin{aligned}\cos 2y = \sin y &\Leftrightarrow \cos 2y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} \\ y = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

- Với $x = -y + k4\pi$ thay vào (26), ta được $y = -\frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \left(\frac{l}{3} + 2k\right) 2\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \left(\frac{-l}{3} + 2k\right) 2\pi \\ y = \frac{-\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài toán 3.2. Giải hệ phương trình lượng giác bằng phép khử sau khi bình phương.

Phương pháp chung

1. Với hệ dạng:

$$\begin{cases} \sin x = f(y) (1) \\ \cos x = g(y) (2) \end{cases}$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bình phương (1) và (2) rồi cộng lại để thu được phương trình hệ quả:

$$f^2(y) + g^2(y) = 1 \quad (3)$$

Bước 2: Giải (3) để nhận được y, rồi thay vào (1) và (2) để thu được x.

Chú ý: Nếu ta chỉ dùng (1) hoặc (2) để tính x, ta có thể thu được nghiệm ngoại lai, vì ở bước 1 ta đã thực hiện một phép biến đổi không tương đương.

2. Với hệ dạng:

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} = f(y) (1) \\ \tan x = g(y) (2) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sin x} = f(y) (1) \\ \cot x = g(y) (2) \end{cases}$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Bình phương (1) và (2) rồi trừ theo vế để thu được phương trình hệ quả:

$$f^2(y) - g^2(y) = 1 \quad (3)$$

Bước 2: Giải (3) để nhận được y, rồi thay vào (1) và (2) để thu được x

Ví dụ 3.1.10. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2 \sin x = \sin y(1) \\ 2 \cos x + \cos y = 1(2) \end{cases}$$

Lời giải: Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2 \sin x = \sin y \\ 2 \cos x = 1 - \cos y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin^2 x = \sin^2 y \\ 4 \cos^2 x = (1 - \cos y)^2 \end{cases} \\ \Rightarrow 4 = 2 - 2 \cos y \Leftrightarrow \cos y = -1 \Leftrightarrow y = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. (3)$$

Thay (3) vào hệ ta được:

$$\begin{cases} 2 \sin x = \sin(\pi + k2\pi) \\ 2 \cos x + \cos(\pi + 2k\pi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin x = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x = 2l\pi \\ y = \pi + 2k\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3.1.11. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} \sin x = m \sin^3 y(1) \\ \cos x = m \cos^3 y(2) \end{cases}$$

Lời giải: Bình phương (1) và (2) rồi cộng lại thu được:

$$\begin{aligned} 1 &= (m \sin^3 y)^2 + (m \cos^3 y)^2 (*) \\ \Leftrightarrow 1 &= m^2[(\sin^2 y + \cos^2 y)^3 - 3(\sin^2 y + \cos^2 y)\sin^2 y \cos^2 y] \\ &= m^2(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2y) = m^2[1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4y)] = m^2(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4y) \\ \Leftrightarrow \cos 4y &= \frac{8 - 5m^2}{3m^2} (3) \end{aligned}$$

Để hệ có nghiệm trước hết (3) phải có nghiệm, ta được:

$$\left| \frac{8 - 5m^2}{3m^2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq |m| \leq 2$$

Với điều kiện đó (3) có nghiệm y_0 thỏa mãn (*), tức là tồn tại x_0 sao cho:

$$\begin{cases} \sin x_0 = m \cdot \sin^3 y_0 \\ \cos x_0 = m \cdot \cos^3 y_0 \end{cases}$$

Tức là (x_0, y_0) là nghiệm của hệ đã cho

Vậy với $1 \leq |m| \leq 2$ hệ có nghiệm

Ví dụ 3.1.12. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos x} = \sqrt{5\cos^5 y} (1) \\ \tan x = \sqrt{4 - \sin^3 y} (2) \end{cases}$$

Lời giải: Bình phương (1) và (2) rồi trừ theo vế, thu được:

$$1 = 5\cos^5 y - 4 + \sin^3 y \Leftrightarrow 5\cos^5 y + \sin^3 y = 5 \quad (3)$$

Ta có nhận xét:

$$\begin{aligned} 5\cos^5 y + \sin^3 y &\leq 5|\cos^5 y| + |\sin^3 y| = 4|\cos^5 y| + (|\cos^5 y| + |\sin^3 y|) \\ &\leq 4.1 + (|\cos^2 y| + |\sin^2 y|) = 5 \end{aligned}$$

Do đó (3) có nghiệm khi

$$\begin{cases} 5\cos^5 y + \sin^3 y = 5|\cos^5 y| + |\sin^3 y| \\ |\cos^5 y| = 1 \\ |\cos^5 y| + |\sin^3 y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos y = 1 \Leftrightarrow y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Thay (4) vào hệ ta được:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{\cos x} = \sqrt{5} \\ \tan x = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos a, 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = a + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x = a + 2l\pi \\ y = 2k\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3.1.13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x - 7 \cos y = 0 \\ 5 \sin y - \cos x - 6 = 0. \end{cases}$$

Lời giải: Ta viết hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} \sin x = 7 \cos y \\ \cos x = 5 \sin y - 6 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 49 \cos^2 y + 25 \sin^2 y - 60 \sin y + 36 \\ &\Leftrightarrow 49 \cos^2 y + 25 \sin^2 y - 60 \sin y + 35 = 0 \\ &\Leftrightarrow 24 \sin^2 y + 60 \sin y - 84 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = 1 \\ \sin y = -\frac{84}{24} \end{cases} \quad (\text{Loại}) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Thế y vào hệ, ta nhận được

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = (2l + 1)\pi (l \in \mathbb{Z})$$

Vậy

$$\begin{cases} x = (2l + 1)\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Nhận xét: Ta cũng có thể giải hệ phương trình trên bằng cách sau: Từ phương trình thứ hai của hệ $\cos x = 5 \sin y - 6$, ta thấy $\cos x \geq -1$; $5 \sin y - 6 \leq 5 - 6 = -1$ nên dẫn đến

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin y = 1 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn phương trình thứ nhất}).$$

Vậy

$$\begin{cases} x = (2l + 1)\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3.1.14. Tìm giá trị của a để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos x = a \cos^3 y \\ \sin x = a \sin^3 y \end{cases}$$

Lời giải: Bình phương hai vế của từng phương trình rồi cộng lại, ta được

$$(a\cos^3 y)^2 + (a\sin^3 y)^2 = 1 \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow a^2(1 - 3\sin^2 y \cos^2 y) = 1 \Leftrightarrow a^2 - 1 = \frac{3a^2}{4}\sin^2 2y$$

$$\Leftrightarrow 3a^2\sin^2 2y = 4(a^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2y = \frac{4(a^2 - 1)}{3a^2} (a \neq 0) \quad (24)$$

Với $0 \leq \sin^2 2y \leq 1$ nên (24) có nghiệm khi và chỉ khi

$$0 \leq \frac{4(a^2 - 1)}{3a^2} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq a^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq |a| \leq 2 \quad (25)$$

Với điều kiện (25), thì (24) có nghiệm y_0 thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \cos x = a\cos^3 y_0 \\ \sin x = a\sin^3 y_0 \end{cases}$$

Do đó y_0 thỏa mãn (23) và tồn tại x_0 để

$$\begin{cases} \cos x_0 = a\cos^3 y_0 \\ \sin x_0 = a\sin^3 y_0 \end{cases}$$

Nên (x_0, y_0) là nghiệm của hệ đó cho.

Vậy hệ phương trình đó có nghiệm khi $1 \leq |a| \leq 2$.

Ví dụ 3.1.15. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6\cos x + 4\cos y = 5 \\ 3\sin x + 2\sin y = 0. \end{cases}$$

Lời giải: Viết hệ phương trình dưới dạng

$$\begin{cases} 3\cos x + 2\cos y = \frac{5}{2} \\ 3\sin x + 2\sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cos x = \frac{5}{2} - 2\cos y \\ 3\sin x = -2\sin y. \end{cases}$$

Bình phương hai vế của từng phương trình của hệ rồi cộng lại. Ta được

$$9 = \left(\frac{5}{2} - 2\cos y\right)^2 + 4\sin^2 y \Leftrightarrow 9 = \frac{25}{4} - 10\cos y + 4(\cos^2 y + \sin^2 y)$$

$$\Leftrightarrow 10 \cos y = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{8} \Leftrightarrow y = \pm \arccos \frac{1}{8} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Thế vào các phương trình hệ trên, ta được

* Với $y = \arccos \frac{1}{8} + k2\pi$ thì

$$\begin{cases} 3 \cos x = \frac{9}{4} \\ 3 \sin x = -\frac{\sqrt{63}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{4} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{63}}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow x = -\arccos \frac{3}{4} + l2\pi (l \in \mathbb{Z}).$$

* Với $y = -\arccos \frac{1}{8} + k2\pi$ thì

$$\begin{cases} \cos x = \frac{3}{4} \\ \sin x = \frac{\sqrt{63}}{12} \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\Rightarrow x = \arccos \frac{3}{4} + l2\pi (l \in \mathbb{Z}).$$

Vậy hệ phương trình đó có nghiệm

$$\begin{cases} x = \arccos \frac{3}{4} + l2\pi \\ y = -\arccos \frac{1}{8} + k2\pi \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = -\arccos \frac{3}{4} + l2\pi \\ y = \arccos \frac{1}{8} + k2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Bài toán 3.3. Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Phương pháp chung

Bằng phép đặt ẩn phụ thích hợp ta sẽ chuyển hệ phương trình lượng giác về hệ đại số quen thuộc.

Ví dụ 3.1.16. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 3m \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{5m}{2} \end{cases}$$

a. Giải hệ với $m = \frac{1}{2}$

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Lời giải: Đặt: $\begin{cases} u = \sin x \\ v = \sin y \end{cases}$, điều kiện $|u| \leq 1, |v| \leq 1$ (*)

Khi đó hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} u + v = 3m \\ u^2 + v^2 = \frac{5m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3m \\ (u + v)^2 - 2uv = \frac{5m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3m \\ uv = \frac{18m^2 - 5m}{4} \end{cases}$$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 3mt + \frac{18m^2 - 5m}{4} = 0 \Leftrightarrow f(t) = 4t^2 - 12mt + 18m^2 - 5m = 0 \quad (1)$$

a. với $m = \frac{1}{2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + 2l\pi \vee y = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \end{cases}$$

b. Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm thỏa mãn $-1 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ af(-1) \geq 0 \\ af(1) \geq 0 \\ -1 \leq \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -36m^2 + 20m \geq 0 \\ 18m^2 + 7m + 4 \geq 0 \\ 18m^2 - 17m + 4 \geq 0 \\ -1 \leq \frac{3m}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq \frac{5}{9} \\ \begin{cases} m \geq \frac{1}{2} \\ m \leq \frac{4}{9} \end{cases} \\ -\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{5}{9} \end{cases}$$

Vậy với

$$m \in \left[0, \frac{4}{9}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{9}\right]$$

hệ có nghiệm.

Ví dụ 3.1.17. Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} \tan x + \sin y = 2a \\ \tan x \cdot \sin y = a^2 - 1 \end{cases}$$

Lời giải:

Đặt: $\begin{cases} u = \tan x \\ v = \sin y \end{cases}$, điều kiện $|v| \leq 1$. (*)

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + v = 2a \\ uv = a^2 - 1 \end{cases}$$

Suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta' = a^2 - a^2 + 1 = 1$ do đó (1) luôn có 2 nghiệm:

$$\begin{cases} t_1 = a - 1 \\ t_2 = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = a - 1 \\ v = a + 1 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} u = a + 1 \\ v = a - 1 \end{cases} \quad (II) \end{cases}$$

Giải (I): Với điều kiện (*) ta được:

$$\begin{cases} \tan x = a + 1 \\ \sin y = a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = a + 1 = \tan a_1 \\ \sin y = a - 1 = \sin \beta_1 \\ |a - 1| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 + k\pi \\ \begin{cases} y = \beta_1 + 2l\pi \\ y = \pi - \beta_1 + 2l\pi \end{cases} \\ 0 \leq a \leq 2 \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Giải (II): Với điều kiện (*) ta được:

$$\begin{cases} \tan x = a - 1 \\ \sin y = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = a - 1 = \tan a_2 \\ \sin y = a + 1 = \sin \beta_2 \\ |a + 1| \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a_2 + k\pi \\ \begin{cases} y = \beta_2 + 2l\pi \\ y = \pi - \beta_2 + 2l\pi \end{cases} \\ -2 \leq a \leq 0 \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3.1.18. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 - \tan y \\ \tan^2 y = 1 - \sin x \end{cases}$$

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sin x \\ v = \tan y \end{cases}, \text{ Điều kiện } |u| \leq 1 \quad (*)$$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u^2 = 1 - v \\ v^2 = 1 - u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 0 \\ u + v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ v = 1 - u \end{cases}$$

Với $u = v$, ta được:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = v \\ u^2 = 1 - u \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u = v \\ u = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sin a \\ \tan y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \tan \beta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \\ y = \beta + l\pi \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Với $v = 1 - u$, ta được:

$$\begin{aligned} \begin{cases} v = 1 - u \\ (1 - u)^2 = 1 - u \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u \\ u = 1 \\ u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \\ u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \tan y = 0 \\ \sin x = 0 \\ \tan y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = l\pi \\ x = k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.19. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9^{2 \cot x + \sin y} = 3 \\ 9^{\sin y} - 81^{\cot x} = 2 \end{cases}$$

Lời giải: Biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} 9^{2 \cot x} \cdot 9^{\sin y} = 3 \\ 9^{\sin y} - 9^{2 \cot x} = 2 \end{cases}$$

Đặt

$$\begin{cases} u = 9^{\sin y} \\ v = -9^{2 \cot x} \end{cases}$$

Điều kiện $u > 0$ và $v < 0$ Hệ có dạng

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u \cdot v = -3 \end{cases}$$

Khi đó u, v là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

với

$$u > 0 \& v < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{\sin y} = 3 \\ -9^{2 \cot x} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin y = \frac{1}{2} \\ \cot x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + l\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + l\pi \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3.1.20. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos a + \cos(x + a) + \cos(y + a) = 0 \\ \sin a + \sin(x + a) + \sin(y + a) = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

viết hệ đó cho dưới dạng

$$\begin{cases} \cos a + \cos x \cos a - \sin x \sin a + \cos y \cos a - \sin y \sin a = 0 \\ \sin a + \sin x \cos a + \sin a \cos x + \sin y \cos a + \sin a \cos y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \cos x + \cos y) \cos a - (\sin x + \sin y) \sin a = 0 \\ (1 + \cos x + \cos y) \sin a + (\sin x + \sin y) \cos a = 0 \end{cases}$$

Đặt

$$u = 1 + \cos x + \cos y$$

và

$$v = \sin x + \sin y$$

.Ta thu được hệ phương trình bậc nhất theo u, v

$$\begin{cases} u \cos a - v \sin a = 0 \\ u \sin a + v \cos a = 0 \end{cases}$$

Ta có $D = \begin{vmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{vmatrix} = 1$ và $D_u = D_v = 0$. Suy ra $u = v = 0$.

Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} 1 + \cos x + \cos y = 0 \\ \sin x + \sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 + \cos x)^2 = \cos^2 y \\ \sin^2 x = \sin^2 y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + \cos x)^2 + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra

$$\begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2} \\ \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2} \\ \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ y = -\frac{2\pi}{3} + l2\pi \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ y = \frac{2\pi}{3} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3.1.21. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = m. \end{cases}$$

Lời giải: Viết hệ đó cho dưới dạng

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \frac{m}{2}. \end{cases}$$

Đặt $X = \sin x, Y = \sin y$ với $|X|, |Y| \leq 1$. Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} X + Y = \frac{1}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 - \frac{m}{2}. \end{cases}$$

Đặt $S = X + Y, P = XY$ ta được hệ

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} \\ S^2 - 2P = 1 - \frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \frac{1}{2} \\ P = \frac{2m - 3}{8} \end{cases}$$

X, Y là nghiệm của phương trình bậc hai $t^2 - St + P = 0$ (ẩn t). Xét tam thức $f(t) = 8t^2 - 4t + 2m - 3 = 0$.

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi có nghiệm thỏa mãn điều kiện hay $-1 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ hay

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ a.f(1) \geq 0 \\ a.f(-1) \geq 0 \\ -1 \leq \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{4}.$$

Khi đó (1) có nghiệm $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7 - 4m}}{4}$ và hệ đó cho có nghiệm

$$\begin{cases} x = (-1)^k \arcsin t_1 + k\pi \\ y = (-1)^k \arcsin t_2 + k\pi \end{cases} \quad \forall \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin t_2 + k\pi \\ y = (-1)^k \arcsin t_1 + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy, với $m > \frac{7}{4}$ hoặc $m < -\frac{1}{2}$ thì hệ đó cho vô nghiệm.

Bài toán 3.4. Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp điều kiện cần và đủ.

Phương pháp chung

Đối với hệ này câu hỏi thường được đặt ra là “Tìm điều kiện của tham số để hệ có nghiệm duy nhất”. Khi đó ta sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để giải:

Bước 1: Điều kiện cần

- Dựa vào tính chất nghiệm của các hàm số lượng giác trong hệ ta có nhận

xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 \\ y_0 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases} \\ x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0(*)$$

- Thay vào hệ ta được giá trị của tham số. Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ

Ví dụ 3.1.22. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m - 5 \\ y + \cos x = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải:

Điều kiện cần

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất là:

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \quad (*)$$

Với $x_0 = 0$ ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y_0^2 = m - 5 \\ y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 6$$

Điều kiện đủ

Với $m=6$ ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1(1) \\ y + \cos x = 2(2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \rightarrow y = \cos x \leq 2$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi: $\begin{cases} y = 1 \\ \cos x = 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ là nghiệm duy nhất.

Vậy, với $m = 6$ hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3.1.23. Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + |\sin 2x| + a = y + 1 \\ |\tan 6x| + 2y^2 = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải: Điều kiện cần

Nhận xét rằng: Nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì $(-x_0, y_0)$ cũng là nghiệm của hệ:

Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì: $x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Với $x_0 = 0$ ta suy ra

$$\begin{cases} a = y + 1 \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Điều kiện đủ

Với $a = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} |\sin 2x| = y + 1 \\ |\tan 6x| + 2y^2 = 2 \end{cases} \quad (I)$$

Nhận xét rằng $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $y = -1$ luôn là nghiệm của hệ (I). vậy hệ có vô số nghiệm. Do đó $a = 0$ không thỏa mãn.

Với $a = 2$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 + |\sin 2x| = y - 1(1) \\ |\tan 6x| = 2(1 - y^2)(2) \end{cases} \quad (II)$$

Từ (1) $\Rightarrow y \geq 1$

Từ (2) $\Rightarrow -1 \leq y \leq 1$

Vậy hệ (II) tương đương với:

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 + |\sin 2x| = 0 \\ |\tan 6x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy với $a = 2$ hệ có nghiệm duy nhất.

Bài toán 3.5. Giải hệ phương trình bằng phương pháp hàm số

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ.

Bước 2: Xét một phương trình nhận được từ hệ (có thể là phương trình hệ quả), sử dụng phương pháp hàm số giải phương trình này.

Bước 3: Chuyển hệ về dạng mới để xác định nghiệm.

Ví dụ 3.1.24. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + 8y = 2\pi, 0 < x, y < \pi(1) \\ \cot x - \cot y = x - y(2) \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ y \neq l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$$

Viết lại phương trình (2) dưới dạng:

$$x - \cot x = y - \cot y \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t - \cot t$, với $t \in (0; \pi)$

Đạo hàm:

$$f' = 1 + \frac{1}{\sin^2 t} > 0 \Rightarrow \text{hàm số luôn đồng biến trên } (0; \pi) \quad (*)$$

Do đó từ (3) ta được:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Khi đó hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 2\pi \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x = 2\pi \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2\pi}{13}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 3.1.25. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x - \cos 2y = x - 2y(1) \\ \tan x = 3 \tan y(2) \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Viết lại phương trình (1) dưới dạng:

$$x - \cos x = 2y - \cos 2y \quad (3)$$

xét hàm số $f(t) = t - \cos t$, với $t \in [0; 2\pi)$

Đạo hàm:

$f' = 1 + \sin t \geq$ hàm số luôn đồng biến trên $[0; 2\pi)$

Do đó từ (3), ta được:

$$f(x) = f(2y) \Leftrightarrow x = 2y$$

Khi đó (2) có dạng:

$$\begin{aligned} \tan 2y = 3 \tan y &\Leftrightarrow \frac{2 \tan y}{1 - \tan^2 y} = \tan y \Leftrightarrow 3 \tan^2 y - \tan y = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan y = 0 \\ \tan y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

-Với $\tan y = 0$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ \tan y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2l\pi \\ y = l\pi \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$$

-Với $\tan y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ \tan y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2l\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$$

-Với $\tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = 2y \\ \tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \\ y = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}, l \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3.1.26. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x = y \\ \sin y = x \end{cases} \quad (15)$$

Lời giải: Trừ hai vế của phương trình ta có

$$\sin x - \sin y = y - x \Leftrightarrow \sin x + x = \sin y + y$$

Xét hàm số $f(t) = \sin t + t$ xác định trên $\mathbb{R}$ ta có

$$f'(t) = 1 + \cos t \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

nên $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Thay vào (15) ta được $\sin x = x$ kéo theo $x = 0$ là nghiệm. Ta chứng minh $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $\sin x = x$.

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = x - \sin x$. Ta có $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \forall x$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- Nếu $x < 0$ thì $f(x) < f(0) = 0$ nên $x < 0$ không là nghiệm.

- Nếu $x > 0$ thì $f(x) > f(0) = 0$ nên $x > 0$ không là nghiệm.

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất.

Kết luận: Hệ phương trình đó cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (0, 0)$.

Ví dụ 3.1.27. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x - \cos 2y = x - 2y \\ \tan x = 3 \tan y \end{cases} \quad (16) \quad (17)$$

Lời giải: Viết phương trình (16) dưới dạng $\cos x - x = \cos 2y - 2y$
Xét hàm số $f(t) = \cos t - t$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = -\sin t - 1 \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

nên $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $f(x) = f(2y) \Leftrightarrow x = 2y$. Thay vào (17), ta được:

$$\tan 2y = 3 \tan y \Leftrightarrow \frac{2 \tan y}{1 - \tan^2 y} = 3 \tan y$$

$$\Leftrightarrow \tan y(1 - 3 \tan^2 y) = 0 (\tan y \neq \pm 1)$$

$$\begin{cases} \tan y = 0 \\ \tan y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = k\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x = k2\pi \\ y = k\pi \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + l2\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài toán 3.6. Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá

Phương pháp chung

Ta đánh giá một phương trình nhận được từ hệ dựa trên các dạng:

Dạng 1: Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác.

Dạng 2: Phương trình lượng giác Pitago.

Dạng 3: Sử dụng đẳng thức CôSi

Dạng 4: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacupski.

Ví dụ 3.1.28. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \tan x + \cot y = 2 \sin(y + \frac{\pi}{4}) \\ \tan x + \cot y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Lời giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq k\pi \\ 2y \neq l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ y \neq \frac{l\pi}{2} \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ta có: } \tan a + \cot a = \frac{1}{\sin a \cdot \cos a} = \frac{2}{\sin 2a}$$

Do đó hệ được biến đổi về dạng:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sin(y + \frac{\pi}{4}) \sin 2x = 1 \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sin 2y = 1 \\ |\sin a| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(y + \frac{\pi}{4}) = \sin 2x = 1 \\ \sin(y + \frac{\pi}{4}) = \sin 2x = -1 \\ \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sin 2y = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi & y = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi & y = \frac{-3\pi}{4} + 2l\pi \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sin 2y = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi & y = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ \sin k\pi \sin 2(\frac{\pi}{4} + 2l\pi) = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi & y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \\ \sin(-\frac{\pi}{4} + k\pi) \sin 2(-\frac{3\pi}{4} + 2l\pi) = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ k = 2n \end{cases} \& y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ y = -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{cases} \quad n, l \in \mathbb{Z}.$$

Vậy hệ có một họ cặp nghiệm.

Ví dụ 3.1.29. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^{\sin(x+y)\pi} = 1(1) \\ 2(x^2 + y^2) = 1(2) \end{cases}$$

Lời giải: Từ (2) ta có điều kiện:

$$\begin{cases} |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ |y| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Giải (1) ta được

$$\sin(x+y)\pi = 0 \Leftrightarrow (x+y)\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+y = k, k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Giải (2) ta được:

$$1 = 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2 = k^2 \Leftrightarrow |k| \leq 1 \Leftrightarrow k = 0$$

Vậy hệ được biến đổi thành:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2(x^2+y^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2(x^2+x^2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x=\pm\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \& y=-\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \& y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

Ví dụ 3.1.30. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = 2 \sin \left(y + \frac{\pi}{4} \right) \\ \tan y + \cot y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad (28)$$

$$(29)$$

Lời giải: ta có

$$|\tan x + \cot x| = |\tan x| + |\cot x| \geq 2$$

(với $\tan x$ và $\cot x$ luôn cùng dấu). Mặt khác, $\left| 2 \sin \left(y + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 2$.

Do đó (28)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x + \cot x = 2 \\ \sin \left(y + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \tan x + \cot x = -2 \\ \sin \left(y + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Thử lại, ta chọn được nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài toán 3.7. Giải hệ phương trình lượng giác bằng phương pháp biến đổi hỗn hợp

Phương pháp chung

Ta thực hiện theo bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho hệ

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác tương ứng, biến đổi hệ hoặc một phương trình trong các hệ đó từ đó thu được một phương trình hệ quả. Giải phương trình hệ quả bằng những phương pháp:

- - Tổng bình phương
- - Hàm số
- - Đánh giá...

Bước 3: Thay kết quả ở bước 2 vào hệ ta sẽ nhận được nghiệm.

Ví dụ 3.1.31. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Lời giải: Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan \frac{x+y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x+y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ \sin x + \sin(\frac{\pi}{3} - x + 2k\pi) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ \sin x + \sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos(\frac{\pi}{6} + x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ \cos(\frac{\pi}{6} + x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} + x = \pm \frac{\pi}{6} + 2l\pi \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ x = \frac{2l\pi}{3} \\ y = \frac{\pi}{3} - x + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} + 2(k-l)\pi \\ x = \frac{2l\pi}{3} \\ y = \frac{2\pi}{3} + 2(k-l)\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \right] \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3.1.32. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \tan x + \tan y + \tan x \cdot \tan y = 1(1) \\ 3 \sin 2y = \cos 4x + 2(2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\cos x \cdot \cos y \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq -1, \cos 2y \neq -1$

$$(1) \Leftrightarrow \tan x + \tan y = 1 - \tan x \tan y$$

- Nếu $\tan x \cdot \tan y = 1$ thì

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \tan x + \tan y = 0 \end{cases}$$

Suy ra $\tan^2 x + 1 = 0$ (Vô lí)

- Nếu $\tan x \cdot \tan y \neq 1$ thì

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = 1 \Leftrightarrow \tan(x + y) = 1 \Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

Hay

$$y = \frac{\pi}{4} - x + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 4x + 2 \Leftrightarrow 3 \cos 2x = 2 \cos^2 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - 3 \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Với $\cos 2x = 1$ thì $x = l\pi (l \in \mathbb{Z})$. Thế vào (3), ta được $y = \frac{\pi}{4} + (k - l)\pi$

+ Với $\cos 2x = \frac{1}{2}$ thì $x = \pm \frac{\pi}{6} + l\pi$. Thế vào (3) ta thu được

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{12} + (k - l)\pi \\ y = \frac{5\pi}{12} + (k - l)\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Vậy, hệ phương trình có các nghiệm

$$\begin{cases} x = l\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + (k - l)\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + l\pi \\ y = \frac{\pi}{12} + (k - l)\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + l\pi \\ y = \frac{5\pi}{12} + (k - l)\pi \end{cases}$$

Ví dụ 3.1.33. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2} - \cos \frac{z}{2} = 0(4) \\ \cos(x - y - z) = \frac{1}{2}(5) \\ x + y + z = \pi(6) \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} x \neq (2m + 1)\pi \\ y \neq (2m + 1)\pi \\ z \neq 2p\pi \end{cases} \quad (m, n, p \in \mathbb{Z}) \quad (7)$$

Khi đó

$$(5) \Leftrightarrow x - y - z = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (8)$$

Cộng (8) và (6) ta được

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi & (9) \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi & (10) \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện (7))

Từ (6) suy ra

$$z = \pi - (x + y) \Leftrightarrow \frac{z}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x + y}{2}$$

Thay vào (4) ta được

$$\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + y}{2}\right) \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2} = \tan \frac{x + y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2} = \frac{\tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2} \tan \frac{y}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2} = 0 \\ \tan \frac{x}{2} \tan \frac{y}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan \frac{y}{2} = 0 \\ \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2} = 0 \end{cases}$$

(Do (9) và (10) nên $\tan \frac{x}{2} \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2l\pi \\ y = -x + 2l\pi \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

Từ đó ta nhận được các nghiệm sau đều thỏa mãn điều kiện (7):

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ y = 2l\pi \\ z = \frac{\pi}{3} - (2l + k)\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ y = -\frac{2\pi}{3} + (2l - k)\pi \\ z = (1 - 2l)\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ y = 2l\pi \\ z = \frac{2\pi}{3} - (2l + k)\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ y = -\frac{\pi}{3} + (2l - k)\pi \\ z = (1 - 2l)\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3.1.34. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \tan x - \tan y + \tan x + \tan y = -1(1) \\ \sqrt{3} \cos 2x + \cos 2y = -1(2) \end{cases}$$

Lời giải: Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin y &= -\cos x \cdot \cos y \\ \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x &= -(\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y) \\ \Leftrightarrow \sin(x - y) &= -\cos(x - y) \\ \Leftrightarrow \tan(x - y) &= -1 \\ \Leftrightarrow x - y &= \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{4} + y + k\pi (k \in \mathbb{Z})(3) \end{aligned}$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2y + 2k\pi\right) + \cos 2y &= -1 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \sin 2y + \cos 2y = -1 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2y - \frac{1}{2} \cos 2y &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2y - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2l\pi \\ 2y - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{6} + l\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + (k+l)\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + l\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + (k+l)\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Chú ý: Rất nhiều tài liệu biến đổi (1) như sau:

$$\begin{aligned} \tan x - \tan y &= -1 - \tan x \cdot \tan y \Leftrightarrow \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} = -1 \\ \Leftrightarrow \tan(x - y) &= -1 \Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Nhưng để có được biến đổi như vậy nhất thiết phải xét hai trường hợp

$$\begin{cases} 1 + \tan x \cdot \tan y = 0 \\ 1 + \tan x \cdot \tan y \neq 0 \end{cases}$$

3.2 Các bài toán chọn lọc

Bài toán 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$$

Lời giải: Bằng cách cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Thử lại nghiệm trên vào hệ ta thấy luôn đúng.

Vậy hệ có một họ cặp nghiệm.

Bài toán 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Lời giải: Đặt: $\begin{cases} u = \sin x \\ v = \sin y \end{cases}$ điều kiện: $|u|, |v| \leq 1$

Khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases} u + v = \frac{3}{2} \\ u^2 + v^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \frac{3}{2} \\ (u + v)^2 - 2uv = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \frac{3}{2} \\ uv = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Khi đó u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin y = 1 \end{cases} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \right]$$

Vậy hệ có bốn cặp họ nghiệm.

Bài toán 3. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x = a.\cos^3 y \\ \sin x = a.\sin^3 y \end{cases} \quad (1)$$

a. Giải hệ với $a = \frac{1}{2}$

b. Tìm a để hệ có nghiệm.

Lời giải: Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{cases} \cos^2 x = a^2.\cos^6 y \\ \sin^2 x = a^2.\sin^6 y \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = a^2(\sin^6 y + \cos^6 y) \\ \Leftrightarrow 1 = a^2[(\sin^2 y + \cos^2 y)^3 - 3(\sin^2 y + \cos^2 y)\sin^2 y.\cos^2 y]$$

$$\Leftrightarrow 1 = a^2(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2y) \Leftrightarrow 3a^2\sin^2 2y = 4(a^2 - 1)(1)$$

a. với $a = \frac{1}{2}$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4}\sin^2 2y = -3 \text{ vô nghiệm}$$

Vậy với $a = \frac{1}{2}$, hệ vô nghiệm

b. Để hệ có nghiệm trước hết (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \left| \frac{4(a^2 - 1)}{3a^2} \right| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq |a| \leq 2$$

Với $1 \leq |a| \leq 2$, giả sử (1) có nghiệm y_0 tức là:

$$3a^2.\sin^2 2y_0 = 4(a^2 - 1) \Leftrightarrow a^2(\sin^6 y_0 + \cos^6 y_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a.\sin^3 y_0)^2 + (a.\cos^3 y_0)^2 = 1$$

Tức là hệ (I) luôn có nghiệm x_0 .

Vậy với $1 \leq |a| \leq 2$ hệ đã cho có nghiệm.

Bài toán 4. Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| \\ \tan^2 x + y^2 = 1 \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải: *Điều kiện cần:*

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$ khi đó hệ có nghiệm duy nhất là

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0(*)$$

Với $x_0 = 0$ ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = y_0 \\ y_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Điều kiện đủ

a. với $a = 0$ hệ có dạng:

$$\begin{cases} -1 = y - |\sin x| \\ \tan^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

Hệ có vô số nghiệm dạng:

$$\begin{cases} x = k\pi \\ y = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $a = 0$ không thỏa mãn.

b. Với $a = 2$ hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = y - |\sin x| & (1) \\ \tan^2 x + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $y \geq 1$ và từ (2) ta có:

$$-1 \leq y \leq 1 \Rightarrow y = 1$$

Vậy hệ có dạng:

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x^2 = -|\sin x| \\ \tan^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Là nghiệm duy nhất của hệ. Vậy, với $a = 2$ hệ có nghiệm duy nhất.

3.3 Bài tập

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

$$a. \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad b. \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Bài 2: Giải các hệ phương trình sau:

$$a. \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad b. \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Bài 3: Giải các hệ phương trình sau:

$$a. \begin{cases} 3 \sin x + 2 \sin y = 0 \\ 3 \cos x + 2 \cos y = \frac{5}{2} \end{cases} \quad b. \begin{cases} \sin y = 5 \sin x \\ 3 \cos x + \cos y = 2 \end{cases}$$

Bài 4: Giải các hệ phương trình:

$$a. \begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} + a \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} - a \end{cases} \quad b. \begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{y}{2} = 2 \end{cases}$$

Bài 5: Giải các hệ phương trình:

$$a. \begin{cases} 3(\sin x - \sin y) = 4(\sin 2x - \sin 2y) \\ 3(\cos x - \cos y) = 4(\cos 2x - \cos 2y) \end{cases}$$
$$b. \begin{cases} \tan x + \sin 2y = \sin 2x \\ 2 \sin y \cdot \cos(x - y) = \sin x \end{cases}$$

Bài 6: Giải các hệ phương trình sau:

$$a. \begin{cases} \cos 2y + \frac{1}{2} = (\cos y - \frac{1}{2})(1 + 2 \sin 2x) \\ \sin y(\tan x + \cot y) = \frac{2}{2} \cot y \end{cases}$$
$$b. \begin{cases} \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos 2y = \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \\ \cos^2 2y + \frac{1}{2}(\cos x + \cos y) - 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 7: Giải các hệ phương trình:

$$a. \begin{cases} \sin \pi x \cdot \cos \pi y = \frac{1}{4} \\ 3 \tan \pi x = \tan \pi y \end{cases}, 0 < x + y < 2 \quad b. \begin{cases} \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \frac{3}{4} \\ \tan \pi x \cdot \tan \pi y = 3 \end{cases}$$

Bài 8: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = m + 1 \\ \sin x \cdot \sin y = 4m^2 + 2m \end{cases}$$

- a. Giải hệ trên khi $m = -\frac{1}{4}$
b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài 9: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x \cdot \cos y = b \end{cases}$$

- a. Giải hệ khi $a = 1, b = \frac{1}{3}$
b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

Bài 10: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = a \\ \tan(x + y) = b \end{cases}$$

- a. Giải hệ phương trình khi $a = \sqrt{3} + 1, b = -(2 + \sqrt{3})$
b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

Bài 11: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \sin^2 x + 2\sin^2 y = m \end{cases}$$

- a. Giải hệ phương trình khi $m = \frac{3}{2}$
b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài 12: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos x + m \cos y = 1 \\ \sin x + m \sin y = 1 \end{cases}$$

Bài 13: Xác định m để hệ có nghiệm

$$\begin{cases} \sin 2x + 2y = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y = m \end{cases}$$

Bài 14: Xác định m để hệ phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2y = 1 \\ \cos x = m(\sin y + \cos y) \end{cases}$$

Bài 15: Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos x = m \cos^3 y \\ \sin x = m \sin^3 y \end{cases}$$

Bài 16: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{2} \\ \tan x \cot y = 1. \end{cases}$$

Bài 17: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \tan y - \tan x - \tan x \tan y = 1 \\ \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1. \end{cases}$$

Bài 18: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a \\ \tan x = \tan y. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}$.

b) Tìm điều kiện giữa a và b để hệ phương trình có nghiệm.

Bài 19: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos a \end{cases}$$

Bài 20: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Bài 21: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos x + 3 \sin x = 2 \cos y \\ \cos y + 3 \sin y = 2 \cos x. \end{cases}$$

Bài 22: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos x = 1 + \cos y \\ \sqrt{2} \sin x = \sin y. \end{cases}$$

Bài 23: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \cos^3 x - \cos x + \sin y = 0 \\ \sin^3 y - \sin y + \cos x = 0 \end{cases}$$

Kết luận

Với mục tiêu là trình bày các phương pháp giải hệ nửa lượng giác và hệ phương trình lượng giác. Trong luận văn này, chúng tôi đã trình bày được những vấn đề cơ bản sau đây:

- Kiến thức cơ bản về công thức và hàm số lượng giác.
- Những phương pháp giải hệ nửa lượng giác hai ẩn trong chương trình phổ thông.
- Những phương pháp giải hệ lượng giác hai ẩn trong chương trình phổ thông.

Mỗi phương pháp được trình bày các bước gồm cơ sở lý thuyết của phương pháp, các ví dụ minh họa và một số bài tập áp dụng phương pháp đã nêu, bên cạnh đó tôi đã đưa ra các bài toán chọn lọc qua các kỳ thi để làm phong phú hơn cho luận văn.

Luận văn gồm nhiều thí dụ và bài tập được lựa chọn từ nhiều nguồn khác nhau. Từ các đề thi học sinh giỏi toán quốc gia, của khu vực, các nước và thi học sinh giỏi toán quốc tế. Ngoài ra còn có một số bài tập do tác giả tự sáng tác. Trong từng phần, tác giả đã cố gắng để có thể đưa ra một hệ thống thí dụ nhằm minh học cho mỗi phương pháp đã nêu.

Ngoài ra còn có rất nhiều bài toán được giải bằng nhiều cách khác nhau, hay tổng hợp các cách giải để giải một bài toán, điều này sẽ giúp cho các em học sinh trở nên linh hoạt hơn trong việc lựa chọn phương pháp giải.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục, 1993.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, Nguyễn Văn Ngọc, *Chuyên đề chọn lọc, đa thức đối xứng và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2008.
- [3] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo Dục, 2008.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, Phạm Thị Bạch Ngọc, *Một số bài toán chọn lọc về lượng giác*, NXB Giáo Dục, 2002.
- [5] Nguyễn Thượng Võ, *Tuyển tập 300 bài toán chọn lọc về hệ thức lượng trong tam giác*, NXB Trẻ, 1998.
- [6] Bùi Quang Trường, *Những dạng toán điển hình trong các đề thi tuyển sinh Đại Học và Cao Đẳng. Hàm số mũ và hàm số lượng giác*, NXB Hà Nội, 2006.
- [7] Trần Văn Thương, Phạm Đình, Lê Văn Đỗ, *Phân loại giải toán lượng giác 11*, NXB Trẻ.
- [8] Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXBGD Hà Nội, 1997.
- [9] Lê Hai Châu, *Các bài thi chọn học sinh giỏi toán PTTH toàn quốc*, NXB Giáo Dục, 1995.
- [10] Tuyển các đề đề nghị IMO các năm từ 1984 đến 2000
- [11] Đề thi vô địch 19 nước, NXB Hải Phòng.

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn ngày 27 tháng 9 năm 2013 và đã chỉnh sửa với các ý kiến đóng góp của các thầy, cô trong hội đồng.

Thái Nguyên, ngày 3 tháng 10 năm 2013
Xác nhận của cán bộ hướng dẫn khoa học
GS. TSKH Nguyễn Văn Mậu