

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ BÍCH HỒNG

MỘT SỐ ỨNG DỤNG
CỦA LÝ THUYẾT TỔ HỢP
TRONG TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ BÍCH HỒNG

MỘT SỐ ỨNG DỤNG
CỦA LÝ THUYẾT TỔ HỢP
TRONG TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS NÔNG QUỐC CHÍNH

THÁI NGUYÊN - 2013

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Nông Quốc Chính. Em xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới thầy về sự giúp đỡ nhiệt tình từ khi xây dựng đề cương, viết và hoàn thành luận văn. Tiếp theo em xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo phản biện đã đọc và góp ý để em hoàn thiện luận văn của mình. Em xin được cảm ơn chân thành nhất tới khoa Toán - Tin, phòng ĐT – KH – QHQT, Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, nơi em đã được một học vấn căn bản. Xin cảm ơn gia đình, đồng nghiệp đã cảm thông chia sẻ, ủng hộ và giúp đỡ trong thời gian em học cao học và viết luận văn.

Mục lục

1	KIẾN THỨC CƠ BẢN	7
1.1	Những nguyên lý đếm cơ bản:	7
1.2	Nguyên lý Dirichlet	10
1.3	Hoán vị:	13
1.4	Chỉnh hợp:	14
1.4.1	Chỉnh hợp:	14
1.4.2	Chỉnh hợp có lặp:	15
1.5	Tổ hợp	15
1.5.1	Tổ hợp :	15
1.5.2	Tổ hợp lặp:	16
2	ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT TỔ HỢP TRONG ĐẠI SỐ SƠ CẤP	18
2.1	Bài toán 1	18
2.2	Bài toán 2	18
2.3	Bài toán 3	20
2.4	Bài toán 4	20
2.5	Bài toán 5	21
2.6	Bài toán 6	22
2.7	Bài toán 7	24
3	ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT TỔ HỢP TRONG HÌNH HỌC	28
3.1	Bài toán 1	28
3.2	Bài toán 2	29
3.3	Bài toán 3	30
3.4	Bài toán 4	31
3.5	Bài toán 5	32

4	ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET	34
4.1	Bài toán 1	34
4.2	Bài toán 2	35
4.3	Bài toán 3	36
4.4	Bài toán 4	37
4.5	Bài toán 5	38
4.6	Bài toán 6	38
4.7	Bài toán 7	39
4.8	Bài toán 8	39
4.9	Bài toán 9	40
4.10	Bài toán 10	41
4.11	Bài toán 11	41
4.12	Bài toán 12	42
4.13	Bài toán 13	43
4.14	Bài toán 14	44
4.15	Bài toán 15	45
	4.15.1 Bài toán tương tự	48
4.16	Bài toán 16	49
	Kết luận	51
	Tài liệu tham khảo	52

MỞ ĐẦU

Lý do chọn đề tài

Lý thuyết tổ hợp được hình thành như một ngành toán học mới, nửa đầu thế kỷ 17 một loạt các công trình nghiên cứu về vấn đề này đã được công bố bởi các nhà toán học xuất sắc như Pascal, Fermat, Leibnitz, Euler... Mặc dù vậy, trong suốt hai thế kỷ rưỡi tổ hợp không có vai trò nhiều trong lĩnh vực nghiên cứu tự nhiên. Đến nay, với sự hỗ trợ đắc lực của máy tính, tổ hợp đã chuyển sang lĩnh vực toán ứng dụng với sự phát triển mạnh mẽ, có nhiều kết quả có ích cho con người. Do tầm quan trọng và được ứng dụng rộng rãi trong đời sống hiện tại, lý thuyết tổ hợp đã được đưa vào chương trình học phổ thông và đã có rất nhiều bài thi học sinh giỏi toán quốc tế và các kỳ thi toán quốc gia có ứng dụng lý thuyết tổ hợp. Luận văn “Một số ứng dụng của lý thuyết tổ hợp trong toán sơ cấp” sẽ là một tài liệu cho học sinh phổ thông; đặc biệt là dành cho những em học sinh có năng khiếu môn toán. Chúng tôi hy vọng luận văn này sẽ phần nào đáp ứng được lòng yêu thích khám phá toán học của các em.

Mục đích của luận văn

Tìm hiểu một số ứng dụng của lý thuyết tổ hợp thông qua các bài toán sơ cấp của toán trung học phổ thông.

Nhiệm vụ

Hệ thống các khái niệm cơ bản về lý thuyết tổ hợp. Sưu tầm và trình bày các bài toán có ứng dụng của lý thuyết tổ hợp để giải trong đại số và hình học ở phổ thông.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu các bài toán đại số và hình học dùng lý thuyết tổ hợp để giải

Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần mở đầu và kết luận nội dung của luận văn gồm bốn chương:

Chương 1: Kiến thức cơ bản

Chương 2: Ứng dụng của lý thuyết tổ hợp trong đại số sơ cấp

Chương 3: Ứng dụng của lý thuyết tổ hợp trong hình học

Chương 4: Ứng dụng của nguyên lý Dirichlet

Dù đã rất cố gắng, nhưng chắc chắn nội dung được trình bày trong luận văn không tránh khỏi thiếu sót nhất định, em rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp để em tiếp tục hoàn thiện luận văn.

Thái Nguyên, năm 2013

Người thực hiện

Chương 1

KIẾN THỨC CƠ BẢN

Lý thuyết tổ hợp là một phần quan trọng của toán học rời rạc, chuyên nghiên cứu sự phân bố các phần tử vào các tập hợp. Thông thường số các phần tử này là hữu hạn và việc phân bố chúng phải thoả mãn những điều kiện nhất định nào đó, tùy theo yêu cầu của bài toán cần nghiên cứu. Mỗi cách phân bố như vậy gọi là một cấu hình tổ hợp. Chủ đề này đã được nghiên cứu từ thế kỷ 17, khi những câu hỏi về tổ hợp được nêu ra trong những công trình nghiên cứu các trò chơi may rủi. Liệt kê, đếm các đối tượng có những tính chất nào đó là một phần quan trọng của lý thuyết tổ hợp. Chúng ta cần phải đếm các đối tượng để giải nhiều bài toán khác nhau. Hơn nữa các kỹ thuật đếm được dùng rất nhiều khi tính xác suất của các biến cố.

1.1 Những nguyên lý đếm cơ bản:

1) Quy tắc cộng:

Giả sử có k công việc $T_1, T_2, \dots, T_k$. Các việc này có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2, \dots, n_k$ cách và giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong k việc đó là $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Thí dụ 1: Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15 và 19 bài. Vì vậy, theo quy tắc cộng có $23 + 15 + 19 = 57$ cách chọn bài thực hành.

Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp như sau: Nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các tập hợp đôi một rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập hợp này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần. Giả sử T_i là việc chọn một phần tử từ tập A_i với $i = 1, 2, \dots, k$. Có $|A_i|$ cách làm T_i và không có hai việc nào có thể được làm cùng một lúc. Số cách chọn một

phần tử của hợp các tập hợp này, một mặt bằng số phần tử của nó, mặt khác theo quy tắc cộng nó bằng $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$. Do đó ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|.$$

2) Quy tắc nhân:

Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra thành k việc $T_1, T_2, \dots, T_k$. Nếu việc T_i có thể làm bằng n_i cách sau khi các việc $T_1, T_2, \dots, T_{i-1}$ đã được làm, khi đó có $n_1.n_2.\dots.n_k$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho.

Ví dụ 1.1.1. Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?

Việc ghi nhãn cho một chiếc ghế gồm hai việc, gán một trong 26 chữ cái và sau đó gán một trong 100 số nguyên dương. Quy tắc nhân chỉ ra rằng có $26.100=2600$ cách khác nhau để gán nhãn cho một chiếc ghế. Như vậy nhiều nhất ta có thể gán nhãn cho 2600 chiếc ghế.

Ví dụ 1.1.2. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài n .

Mỗi một trong n bit của xâu nhị phân có thể chọn bằng hai cách vì mỗi bit hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Bởi vậy theo quy tắc nhân có tổng cộng $2n$ xâu nhị phân khác nhau có độ dài bằng n .

Ví dụ 1.1.3. Có thể tạo được bao nhiêu ánh xạ từ tập A có m phần tử vào tập B có n phần tử?

Theo định nghĩa, một ánh xạ xác định trên A có giá trị trên B là một phép tương ứng mỗi phần tử của A với một phần tử nào đó của B . Rõ ràng sau khi đã chọn được ảnh của $i - 1$ phần tử đầu, để chọn ảnh của phần tử thứ i của A ta có n cách. Vì vậy theo quy tắc nhân, ta có $n.n.\dots.n = nm$ ánh xạ xác định trên A nhận giá trị trên B .

Ví dụ 1.1.4. Có bao nhiêu đơn ánh xác định trên tập A có m phần tử và nhận giá trị trên tập B có n phần tử?

Nếu $m > n$ thì với mọi ánh xạ, ít nhất có hai phần tử của A có cùng một ảnh, điều đó có nghĩa là không có đơn ánh từ A đến B . Bây giờ giả sử $m \leq n$ và gọi các phần tử của A là $a_1, a_2, \dots, a_m$. Rõ ràng có n cách chọn ảnh cho phần tử a_1 . Vì ánh xạ là đơn ánh nên ảnh của phần tử a_2 phải khác ảnh của

a_1 nên chỉ có $n - 1$ cách chọn ảnh cho phần tử a_2 . Nói chung, để chọn ảnh của a_k ta có $n - k + 1$ cách. Theo quy tắc nhân, ta có

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

đơn ánh từ tập A đến tập B. Nguyên lý nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau. Nếu $A_1, A_2, \dots, A_k$ là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Descartes của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Ta biết rằng việc chọn một phần tử của tích Descartes $A_1 x A_2 x \dots x A_k$ được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử của A_1 , một phần tử của $A_2, \dots$, một phần tử của A_k . Theo quy tắc nhân ta có:

$$|A_1 x A_2 x \dots x A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_k|.$$

3) Nguyên lý bù trừ:

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho A_1, A_2 là hai tập hữu hạn, khi đó

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Từ đó với ba tập hợp hữu hạn A_1, A_2, A_3 , ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|,$$

và bằng quy nạp, với k tập hữu hạn $A_1, A_2, \dots, A_k$ ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - \dots + (-1)^{k-1} N_k,$$

trong đó $N_m (1 \leq m \leq k)$ là tổng phần tử của tất cả các giao m tập lấy từ k tập đã cho, nghĩa là

$$N_m = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}|$$

Bây giờ ta đồng nhất tập $A_m (1 \leq m \leq k)$ với tính chất A_m cho trên tập vũ trụ hữu hạn U nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của U sao cho

không thỏa mãn bất kỳ một tính chất A_m nào. Gọi $\overline{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của U . Ta có:

$$\overline{N} = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = N - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^k N_k,$$

trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho. Công thức này được gọi là nguyên lý bù trừ. Nó cho phép tính $\overline{N}$ qua các N_m trong trường hợp các số này dễ tính toán hơn.

Ví dụ 1.1.5. Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ.

Mỗi phong bì có n cách bỏ thư vào, nên có tất cả $n!$ cách bỏ thư. Vấn đề còn lại là đếm số cách bỏ thư sao cho không lá thư nào đúng địa chỉ. Gọi U là tập hợp các cách bỏ thư và A_m là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ. Khi đó theo công thức về nguyên lý bù trừ ta có:

$$\overline{N} = n! - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^n N_n,$$

trong đó $N_m (1 \leq m \leq n)$ là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có m lá thư đúng địa chỉ. Nhận xét rằng, N_m là tổng theo mọi cách lấy m lá thư từ n lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có $(n-m)!$ cách bỏ để m lá thư này đúng địa chỉ, ta nhận được:

$$N_m = c_n^m \cdot (n-m)! = \frac{n!}{m!}$$

và

$$\overline{N} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right),$$

trong đó $c_n^m \frac{n!}{m!(n-m)!}$ là tổ hợp chập m của tập n phần tử (số cách chọn m đối tượng trong n đối tượng được cho). Từ đó xác suất cần tìm là: $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$. Một điều lý thú là xác suất này dần đến $e - 1$ (nghĩa là còn $> \frac{1}{3}$) khi n khá lớn.

1.2 Nguyên lý Dirichlet

Nguyên lý Dirichlet – ở dạng đơn giản nhất – được phát biểu đầu tiên bởi G.Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), một nhà toán học Đức gốc Pháp, như

sau: “Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái chuồng $n \in \mathbb{N}$ thì luôn có (ít nhất là) hai con thỏ bị nhốt trong cùng một chuồng”.

Một cách tổng quát, ta có nguyên lý Dirichlet mở rộng:

“Nếu nhốt m con thỏ vào n cái chuồng $m, n \in \mathbb{N}$ thì luôn tồn tại một chuồng chứa ít nhất là $1 + \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ con thỏ”.

Mệnh đề 1.2.1. (Nguyên lý): Nếu có $k + 1$ (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp có ít nhất hai đồ vật.

Chứng minh. Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều hơn một đồ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là bằng k . Điều này trái giả thiết là có ít nhất $k + 1$ vật. $\square$

Nguyên lý này thường được gọi là nguyên lý Dirichlet, mang tên nhà toán học người Đức ở thế kỷ 19. Ông thường xuyên sử dụng nguyên lý này trong công việc của mình.

Mệnh đề 1.2.2. (Nguyên lý Dirichlet cho diện tích) Nếu K là một hình phẳng, còn $K_1, K_2, \dots, K_n$ là các hình phẳng sao cho với $i = 1, 2, \dots, n$ và

$$|K| < |K_1| + |K_2| + \dots + |K_n|$$

Ở đây, $|K|$ là diện tích của hình phẳng K , còn $|K_i|$ là diện tích của hình phẳng $K_i, i = 1, 2, \dots, n$, thì tồn tại ít nhất hai hình phẳng $H_i, H_j, (1 \leq i < j \leq n)$ sao cho H_i và H_j có điểm trong chung. (Ở đây, ta rói rằng P là điểm trong của tập hợp A trên mặt phẳng, nếu như tồn tại hình tròn tâm P bán kính đủ bé sao cho hình tròn này nằm trong A).

Mệnh đề 1.2.3. (Nguyên lý Dirichlet vô hạn): Nếu chia một tập hợp vô hạn các quả táo vào hữu hạn các ngăn kéo, thì phải có ít nhất một ngăn kéo chứa vô hạn quả táo.

Ví dụ 1.2.4. 1) Trong 100 người, có ít nhất 9 người sinh cùng một tháng.

Xếp những người sinh cùng tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một nhóm có ít nhất $100/12 = 9$ người.

2) Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau. Gọi N là số sinh viên, khi đó $N/5 = 6$ khi và chỉ khi $5 < N/5 \leq 6$ hay $25 < N \leq 30$. Vậy số N cần tìm là 26.

3) Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng $0XX - 8XXXXXX$ với X nhận các giá trị từ 0 đến 9). Có $107 = 10.000.000$ số điện thoại khác nhau có dạng $0XX - 8XXXXXX$. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có $25.000.000 / 10.000.000 = 3$ có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã vùng.

Nguyên lý Dirichlet tổng quát:

Mệnh đề 1.2.5. Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\lceil N/k \rceil$ đồ vật.

(Ở đây, $\lceil x \rceil$ là giá trị của hàm trần tại số thực x , đó là số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng x . Khái niệm này đối ngẫu với $\lfloor x \rfloor$ - giá trị của hàm sàn hay hàm phần nguyên tại x - là số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x .)

Chứng minh. Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\lceil N/k \rceil$ vật. Khi đó tổng số đồ vật là

$$0 \leq k(\lceil \frac{N}{k} \rceil - 1) < k \frac{N}{k} = N.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có N đồ vật cần xếp. □

Ví dụ 1.2.6. 1) Trong 100 người, có ít nhất 9 người sinh cùng một tháng.

Xếp những người sinh cùng tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một nhóm có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người.

2) Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau.

Gọi N là số sinh viên, khi đó $\lceil N/5 \rceil = 6$ khi và chỉ khi $5 < N/5 \leq 6$ hay $25 < N \leq 30$. Vậy số N cần tìm là 26.

3) Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng $0XX - 8XXXXXX$ với X nhận các giá trị từ 0 đến 9).

Có $107 = 10.000.000$ số điện thoại khác nhau có dạng $0XX - 8XXXXXX$. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có $\lceil 25.000.000 / 10.000.000 \rceil = 3$ có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã vùng.

1.3 Hoán vị:

Định nghĩa 1.3.1. Cho một tập hợp gồm $n(n \geq 1)$ phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó (mỗi phần tử có mặt đúng một lần) được gọi là một hoán vị của n phần tử đã cho. Kí hiệu số hoán vị của n phần tử bằng P_n .

Ta có công thức:

$$P_n = n!$$

Ví dụ 1.3.2. Với năm chữ số 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số gồm năm chữ số không trùng nhau?

Lời giải: Vì mỗi số cần lập gồm năm chữ số không trùng nhau, mỗi chữ số xuất hiện trong từng số cần lập đúng một lần, nên mỗi số cần lập là một hoán vị của năm số đã cho. Bởi vậy, số có thể lập bằng đúng số hoán vị của năm phần tử, tức là $P_5 = 5! = 120$

$$S = \frac{9!}{2!3!} = 30240$$

Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau.

Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó cần phải cẩn thận, tránh đếm chúng hơn một lần. Ta xét thí dụ sau.

Ví dụ 1.3.3. Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?

Vì một số chữ cái của từ SUCCESS là như nhau nên câu trả lời không phải là số hoán vị của 7 chữ cái được. Từ này chứa 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E. Để xác định số xâu khác nhau có thể tạo ra được ta nhận thấy có C_7^3 cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ S, còn lại 4 chỗ trống. Có C_4^2 cách chọn 2 chỗ cho 2 chữ C, còn lại 2 chỗ trống. Có thể đặt chữ U bằng C_2^1 cách và C_1^1 cách đặt chữ E vào xâu. Theo nguyên lý nhân, số các xâu khác nhau có thể tạo được là:

$$c_7^3 \cdot c_4^2 \cdot c_2^1 \cdot c_1^1 = \frac{7!4!2!1!}{3!4!2!1!1!1!0!} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420.$$

Mệnh đề 1.3.4. Số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., và n_k phần tử như nhau

thuộc loại k , bằng

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Chứng minh. Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy có $C_N^{N_1}$ cách giữ n_1 chỗ cho n_1 phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ chỗ trống. Sau đó có $C_{N=N_1}^{N_2}$ cách đặt n_2 phần tử loại 2 vào hoán vị, còn lại $n - n_1 - n_2$ chỗ trống. Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4, ..., loại $k - 1$ vào chỗ trống trong hoán vị. Cuối cùng có $C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k}$ cách đặt n_k phần tử loại k vào hoán vị. Theo quy tắc nhân tất cả các hoán vị có thể là:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \dots C_{n-n_1-\dots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

□

1.4 Chỉnh hợp:

1.4.1 Chỉnh hợp:

Định nghĩa 1.4.1. Cho tập hợp X gồm n phần tử. Mỗi bộ gồm phần tử được sắp thứ tự của tập hợp X được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử thuộc X . Kí hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử bằng A_n^k .

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử được tính bởi công thức:

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ví dụ 1.4.2. Một cuộc khiêu vũ có 10 nam và 6 nữ tham gia. Đạo diễn chọn có thứ tự 4 nam và 4 nữ để ghép thành 4 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải: Chọn có thứ tự 4 nam trong 10 nam là chỉnh hợp chập 4 của 10. Số chỉnh hợp này là $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$. Vậy có 5040 cách chọn nam.

Chọn có thứ tự 4 nữ là chỉnh hợp chập 4 của 6, nên có $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$ cách chọn.

Mỗi cách chọn nam lại tương ứng với tất cả các cách chọn nữ, nên số cách chọn có thứ tự 4 nam, 4 nữ trong số nam, nữ tham gia hội diễn sẽ là $5040 \times 360 = 1814400$ cách chọn.

1.4.2 Chỉnh hợp có lặp:

Định nghĩa 1.4.3. Cho X là tập có n phần tử. Mỗi dãy có độ dài k sắp xếp theo một thứ tự nhất định các “bản sao” các phần tử của tập hợp X , trong đó mỗi bản sao có thể được lặp lại nhiều lần được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử thuộc tập X . Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử, kí hiệu là $\overline{A}_n^k$, bằng số ánh xạ từ tập k phần tử đến tập n phần tử và bằng n^k :

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Ví dụ 1.4.4. Từ 4 chữ số 1, 2, 3, 5 có thể thành lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số?

Lời giải: Vì tập $\{1, 2, 3, 5\}$ chỉ có duy nhất một chữ số chẵn là 2, nên $x = \overline{abcd}$ với $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 5\}$ là số chẵn khi và chỉ khi $d = 2$. Mặt khác a, b, c có thể bằng nhau, nên $y = \overline{abc}$ là một chỉnh hợp lặp chập 3 của 4 phần tử 1, 2, 3, 5.

Để thành lập số x ta chỉ cần lấy một số y nào đó rồi thêm 2 vào cuối. Bởi vậy, các số $x = \overline{abc}2$ bằng các số $y = \overline{abc}$ và bằng $\overline{A}_4^3 = 4^3 = 64$.

Chẳng hạn: 1112, 1122, 1132, 1152, ..., 5532, 5552.

Ví dụ 1.4.5. Có thể lập được bao nhiêu biến số xe với hai chữ số đầu thuộc tập A, B, C, D, E, tiếp theo là một số nguyên dương gồm năm chữ số chia hết cho 5?

Lời giải: Giả sử một biến số xe nào đó có dạng $XY\overline{abcdf}$. Vì X, Y có thể trùng nhau nên X, Y là chỉnh hợp lặp chập 2 của 5 phần tử A, B, C, D, E , nên số cách chọn XY bằng $\overline{A}_5^2 = 5^2 = 25$.

Do $a \neq 0$, nên có 9 cách chọn a là các chữ số thập phân khác 0.

Vì $\overline{abcdf}:5 \Leftrightarrow f = 0$ hoặc $f = 5$ nên có 2 cách chọn chữ số f .

Do b, c, d có thể trùng nhau, nên mỗi số $\overline{bcd}$ là một chỉnh hợp chập 3 của 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Bởi vậy, số cách chọn số $\overline{bcd}$ là $\overline{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$.

Vậy số biến số xe có thể thành lập theo yêu cầu là: $25 \times 2 \times 1000 = 50000$

1.5 Tổ hợp

1.5.1 Tổ hợp :

Định nghĩa 1.5.1. Cho tập X gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k ($0 \leq k \leq n$) phần tử thuộc X được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử

đã cho. Số tổ hợp chập k ($0 \leq k \leq n$) của n phần tử, được kí hiệu là C_n^k và được tính theo công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ví dụ 1.5.2. Có bao nhiêu cách chia một lớp 40 học sinh thành 4 tổ, sao cho mỗi tổ có đúng 10 học sinh?

Lời giải: đầu tiên lập tổ 1 bằng cách chọn tùy ý 10 học sinh trong 40 học sinh của lớp, nên số cách chọn bằng đúng tổ hợp chập 10 của 40 phần tử, tức bằng:

$$C_{40}^{10} = \frac{40!}{10!30!}$$

Tổ 2 có thể chọn tùy ý 10 em trong 30 em còn lại, nên số cách chọn bằng đúng tổ hợp chập 10 của 30 phần tử, tức bằng:

$$C_{30}^{10} = \frac{30!}{10!20!}$$

Tổ 3 có thể chọn tùy ý 10 em trong 20 em còn lại, nên số cách chọn bằng đúng tổ hợp chập 10 của 20 phần tử, tức bằng:

$$C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!10!}$$

Tổ 4 gồm 10 em còn lại nên chỉ có 1 cách chọn. Vậy số cách chia lớp sẽ là:

$$C_{40}^{10} \times C_{30}^{10} \times C_{20}^{10} \times C_{10}^{10} = \frac{40! \times 30! \times 20!}{10!30!20!10!10!10!} = \frac{40!}{(10!)^4}$$

1.5.2 Tổ hợp lặp:

Một tổ hợp lặp chập k của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự k phần tử có thể lặp lại của tập đã cho. Như vậy một tổ hợp lặp kiểu này là một dãy không kể thứ tự gồm k thành phần lấy từ tập n phần tử. Do đó có thể là $k > n$.

Định nghĩa 1.5.3. Cho X là một tập hợp có n phần tử. Mỗi tổ hợp lặp chập m của tập X là một bộ gồm m “ký hiệu” các phần tử của tập hợp X (mỗi ký hiệu có thể lặp lại nhiều lần).

(Nhận xét: m nhất thiết phải nhỏ hơn n). Ta sử dụng $\overline{C_n^m}$ để kí hiệu số tổ hợp lặp chập m của n phần tử. Khi đó:

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$$

Mệnh đề 1.5.4. Số tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử bằng C_{n+k-1}^k .

Chứng minh. Mỗi tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n - 1$ thanh đứng và k ngôi sao. Ta dùng $n - 1$ thanh đứng để phân cách các ngăn. Ngăn thứ i chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ i của tập xuất hiện trong tổ hợp. Chẳng hạn, tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử được biểu thị bởi:

$$* * \mid \quad * \quad \mid \quad \mid * **$$

mô tả tổ hợp chứa đúng 2 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ hai, không có phần tử thứ 3 và 3 phần tử thứ tư của tập hợp.

Mỗi dãy $n - 1$ thanh và k ngôi sao ứng với một xâu nhị phân độ dài $n + k - 1$ với k số 1. Do đó số các dãy $n - 1$ thanh đứng và k ngôi sao chính là số tổ hợp chập k từ tập $n + k - 1$ phần tử. Đó là điều cần chứng minh. $\square$

Ví dụ 1.5.5. Giả sử có 4 loại bóng màu: Xanh, Đỏ, Tím, Vàng, với số lượng mỗi loại không hạn chế. Hai bộ bóng được xem là khác nhau, nếu có ít nhất một màu với số lượng thuộc hai bộ khác nhau.

Liệu có bao nhiêu cách chọn ra các bộ 6 (quả bóng) khác nhau?

Lời giải: Vì trong mỗi bộ sáu có thể có các quả bóng cùng màu và không phân biệt thứ tự chọn, nên số cách chọn khác nhau bằng số tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử (tập hợp bóng cùng màu được coi là một phần tử) và được tính bằng công thức:

$$\overline{C_4^6} = C_{4+6-1}^6 = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

Chương 2

ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT TỔ HỢP TRONG ĐẠI SỐ SƠ CẤP

2.1 Bài toán 1

Bài toán 1. (IMO-1974) Với mọi số nguyên không âm n , chứng minh rằng $\sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$ không chia hết cho 5.

Hướng dẫn:

Đặt $x = \sqrt{8}$ dùng khai triển nhị thức Newton để biến đổi:

$$(1+x)^{2n+1} = A + Bx \quad (2.1)$$

Trong đó $B = \sum_{k=0}^n C_{2n+1}^{2k+1} \cdot 2^{3k}$. Tương tự:

$$(1-x)^{2n+1} = A - Bx \quad (2.2)$$

Nhân vế theo vế (2.1) và (2.2) ta được: $7^{2n+1} = 8B^2 - A^2$

Mặt khác, $7^{2n+1} \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Do vậy, nếu B là bội của 5 thì $A^2 \equiv \pm 2 \pmod{5}$, điều này không thể xảy ra.

2.2 Bài toán 2

Bài toán 2. (VMO 2001- bảng A) Cho số nguyên $n \geq 1$. Xét hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ của $2n$ số nguyên dương đầu tiên sao cho các số $|a_{i+1} - a_i|$, $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$a_1 - a_{2n} = n \Leftrightarrow 1 \leq a_{2k} \leq n, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Chứng minh. a) Điều kiện đủ:

Vì $1 \leq a_{2k} \leq n$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$ nên:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{2n-1} |a_{i+1} - a_i| = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= 2(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) - 2(a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) + a_{2n} - a_1 \\ &= 2|(n+1) + (n+2) + \dots + 2n| - 2(1 + 2 + \dots + n) + a_{2n} - a_1 \\ &= 2n^2 + a_{2n} - a_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mặt khác, dễ thấy $1 \leq |a_{i+1} - a_i| \leq 2n - 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, 2n - 1$. Và do $|a_{i+1} - a_i|$, đôi một khác nhau nên:

$$T = 1 + 2 + \dots + (2n - 1) = 2n^2 - n \quad (2.4)$$

Từ (2.3) và (2.4) ta được: $a_1 - a_{2n} = n$.

b) Điều kiện cần:

Từ các giả thiết ta có:

$$T_0 = \sum_{i=1}^{2n-1} |a_{i+1} - a_i| + a_1 - a_{2n} = n(2n - 1) + n = 2n^2 \quad (2.5)$$

Mặt khác, sau khi khai triển dấu giá trị tuyệt đối ở các số hạng của T_0 ta có thể viết T_0 dưới dạng: $T_0 = \sum_{i=1}^{2n} \delta_i a_i$, trong đó $\delta_i \in \{-2; 0; 2\}$, $\forall i = 1, 2, \dots, 2n$.

Dễ thấy dãy: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2n}$, có các tính chất:

$$\text{i) } \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{2n} = 0$$

ii) Nếu trong dãy ta xóa đi tất cả các số 0 và đồng thời giữ nguyên vị trí của các số khác 0 thì sẽ nhận được một dãy mà ở đó các số -2 và 2 xen kẽ nhau.

Kí hiệu $b_1, b_2, \dots, b_n$ (tương ứng $t_1, t_2, \dots, t_n$) lần lượt, theo thứ tự xuất hiện trong hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, là các số không vượt quá n (tương ứng, vượt quá n) trong hoán vị ấy.

Từ i) ta được:

$$\begin{aligned} T_0 &= \sum_{i=1}^{2n} \delta_i (a_i - n) \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^n (t_i - n) - 2 \cdot \sum_{i=1}^n (b_i - n) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i - 2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i \\ &= 2n^2 = T_0 \quad (\text{theo (2.5)}) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra ta phải có $\delta_i = 2$ với mọi i mà $a_i > n$ và đồng thời $\delta_i = -2$ với mọi i mà

$$a_i \leq n \quad (2.6)$$

Do $a_1 - a_{2n} = n$ nên $a_{2n} \leq n$. Suy ra $\delta_{2n} = -2$

Vì thế, theo ii) ta có $\delta_{2k} = -2, \forall k = 1, 2, \dots, n$

Do vậy, theo (2.6), ta phải có: $1 \leq a_{2k} \leq n, \forall k = 1, 2, \dots, n$ $\square$

2.3 Bài toán 3

Bài toán 3. (VMO 2002-bảng B)

Cho tập S gồm tất cả các số nguyên trong đoạn $[1; 2002]$. Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập con không rỗng của S . Với mỗi tập X thuộc T , kí hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X . Đặt $m = \frac{\sum m(x)}{|T|}$ ở đây tổng lấy theo tất cả các phần tử X thuộc T . Hãy tính giá trị của m .

Lời giải:

Với mỗi $k \in \{1, 2, \dots, 2002\}$ đặt $m_k = \sum m(X)$ ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T mà $|X| = k$.

Xét số a bất kì thuộc tập S . Dễ thấy a có mặt trong C_{2001}^{k-1} tập X thuộc T mà $|X| = k$.

Suy ra: $k.m_k = (1 + 2 + \dots + 2002).C_{2001}^{k-1} = 1001.2003.C_{2001}^{k-1}$. Do đó:

$$\begin{aligned} \sum m(X) &= \sum_{k=1}^{2002} m_k = 1001.2003. \sum_{k=1}^{2002} \frac{C_{2001}^{k-1}}{k} \\ &= \left(\frac{2003}{2}\right) \cdot \sum_{k=1}^{2002} C_{2002}^k = \frac{2003(2^{2002} - 1)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dễ thấy: } |T| = 2^{2002} - 1. \text{ Vì vậy: } m = \left(\frac{\sum m(X)}{|T|}\right) = \frac{2003}{2}.$$

2.4 Bài toán 4

Bài toán 4. Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện: $C_{2n}^n = (2n)^k$, trong đó k là số các ước nguyên tố của C_{2n}^n .

Lời giải:

Giả sử p là một ước nguyên tố của C_{2n}^n . Gọi m là số mũ của p trong phân tích chuẩn của C_{2n}^n . ta sẽ chứng minh $p^m \leq 2n$.

Giả sử ngược lại, $p^m > 2n$. Khi đó $\left[\frac{2n}{p^m} \right] = 0$. Suy ra:

$$m = \left(\left[\frac{2n}{p} \right] - 2 \cdot \left[\frac{n}{p} \right] \right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2} \right] - 2 \cdot \left[\frac{n}{p^2} \right] \right) + \dots + \left(\left[\frac{2n}{p^{m-1}} \right] - 2 \cdot \left[\frac{n}{p^{m-1}} \right] \right) \quad (2.7)$$

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $2|x| + 2 > 2x \geq |2x| \Rightarrow |2x| - 2|x| \leq 1$.

Do đó, từ (2.7) suy ra $m \leq m - 1$. Mâu thuẫn. Suy ra đpcm

Từ kết quả vừa chứng minh ở trên ta được $C_{2n}^n = (2n)^k \Leftrightarrow k = 1$ và $\mathbb{N} \cap [1; n] \ni k \neq j_i$

2.5 Bài toán 5**Bài toán 5. (VMO 2003- Bảng B)**

Xét số nguyên $n > 1$. Người ta muốn tô màu tất cả các số tự nhiên bởi hai màu xanh, đỏ sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

i/ Mỗi số được tô bởi 1 màu, và mỗi màu đều được để dùng tô vô số số.

ii/ Tổng của n số đôi một khác nhau cùng màu là số có cùng màu đó.

Hỏi có thể thực hiện được phép tô màu nói trên hay không, nếu:

1/ $n = 2002$?

2/ $n = 2003$?

Lời giải:

1/ Xét $n = 2002$, ta sẽ chứng minh rằng câu trả lời trong trường hợp này là “không”.

Thật vậy: Giả sử ngược lại, ta có thể tô tất cả các số tự nhiên bằng 2 màu xanh, đỏ sao cho mỗi số được tô bởi một màu, mỗi màu đều được dùng để tô vô số số, và tổng của 2002 số đôi một khác nhau cùng màu là số có cùng màu đó. Khi đó, do có vô số số được tô bởi màu xanh và có vô số số được tô bởi màu đỏ nên:

+ Tồn tại số a_1 mà a_1 được tô bởi màu xanh và số $b_1 = a_1 + 1$ được tô bởi màu đỏ.

+ Tồn tại số $b_2 > b_1$ mà b_2 được tô bởi màu đỏ và số $a_2 = b_2 + 1$ được tô bởi

màu xanh.

+ Tồn tại số $a_3 > a_2$ mà a_3 được tô bởi màu xanh và số $b_3 = a_3 + 1$ được tô bởi màu đỏ.

+ Tồn tại số $b_4 > b_3$ mà b_4 được tô bởi màu đỏ và số $a_4 = b_4 + 1$ được tô bởi màu xanh.

...

+ Tồn tại số $a_{2001} > a_{2000}$ mà a_{2001} được tô bởi màu xanh và số $b_{2001} = a_{2001} + 1$ được tô bởi màu đỏ.

+ Tồn tại số $b_{2002} > b_{2001}$ mà b_{2002} được tô bởi màu đỏ và số $a_{2002} = b_{2002} + 1$ được tô bởi màu xanh.

Tóm lại, tồn tại 2002 số $a_1, a_2, \dots, a_{2001}, a_{2002}$ đôi một khác nhau và 2002 số $b_1, b_2, \dots, b_{2001}, b_{2002}$ đôi một khác nhau thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

(i) 2002 số $a_1, a_2, \dots, a_{2001}, a_{2002}$ được tô bởi màu xanh; và 2002 số $b_1, b_2, \dots, b_{2001}, b_{2002}$ được tô bởi màu đỏ.

(ii) $b_{2k-1} = a_{2k-1} + 1$ và $b_{2k} = a_{2k} - 1$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 1001$

- Từ điều kiện (i) suy ra số $a = a_1 + a_2 + \dots + a_{2001} + a_{2002}$ được tô bởi màu xanh và số $b = b_1 + b_2 + \dots + b_{2001} + b_{2002}$ được tô bởi màu đỏ.

- Từ điều kiện (ii) dễ dàng suy ra $a = b$. Do đó a và b phải được tô cùng màu, mâu thuẫn với điều vừa nhận được ở trên. Từ đó suy ra đpcm.

2/ Với $n = 2003$, xét cách tô màu sau: Tô tất cả các số chẵn bởi màu xanh và tô tất cả các số lẻ bởi màu đỏ. Dễ thấy cách tô màu vừa nêu thỏa mãn tất cả các yêu cầu bài toán. Vậy, trong trường hợp này, câu trả lời cho câu hỏi bài ra là "có".

2.6 Bài toán 6

Bài toán 6. (VMO 2003 – Bảng A)

Với mỗi số nguyên $n > 1$, kí hiệu S_n là số các hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ đều có tính chất: $1 \leq |a_k - k| \leq 2$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh rằng: $1,75.S_{n-1} < S_n < 2.S_{n-1}$.

Lời giải:

Trước hết ta sẽ xây dựng một hệ thức truy hồi cho S_n .

Với mỗi số tự nhiên n khác 0, kí hiệu S_n là tập hợp tất cả các hoán vị

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Giả sử $n > 4$. Xét hoán vị $A = (a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ bất kì thuộc S_{n+1} . Từ các giả thiết suy ra $a_{n-1} = n + 1$ hoặc $a_n = n + 1$.

- Trường hợp 1: $a_{n-1} = n + 1$, khi đó phải có $a_n = n - 1$ hoặc $a_n = n - 2$.
- Nếu $a_n = n - 1$ thì phải có $a_{n+1} = n$. Do đó trong TH này A có dạng:

$$A_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n + 1, n - 1, n)$$

với $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in S_{n-2}$.

- Nếu $a_n = n - 2$ thì phải có $a_{n+1} = n - 1$ hoặc $a_{n+1} = n$

+ Nếu $a_{n+1} = n - 1$ thì phải có $a_{n-2} = n$. Do đó trong TH này A có dạng:

$$A_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, n + 1, n - 2, n - 1) \text{ với } (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \in S_{n-3} \quad (2.8)$$

+ Nếu $a_{n+1} = n$ thì A có dạng:

$$A_3 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n + 1, n - 2, n)$$

với

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n - 2, n\} \quad (2.9)$$

- Trường hợp 2: $a_n = n + 1$. Khi đó ta có: $a_n + 1 = n$ hoặc $a_{n+1} = n - 1$
- Nếu $a_{n+1} = n$ thì A có dạng:

$$A_4 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n + 1, n) \text{ với } (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S_{n-1} \quad (2.10)$$

- Nếu $a_{n+1} = n - 1$ thì A có dạng:

$$A_5 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n + 1, n - 1) \text{ với } \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{n - 1\} \quad (2.11)$$

Từ (2.8)–(2.11) suy ra phép đặt tương ứng f :

$$\begin{aligned} f : A_1 &\in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}) \in S_{n-2} \\ f : A_2 &\in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-3}) \in S_{n-3} \\ f : A_3 &\in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, n, n - 2) \in S_n \\ f : A_4 &\in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S_{n-1} \\ f : A_5 &\in S_{n+1} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, n - 1) \in S_n \end{aligned}$$

Xác lập một đơn ánh: $f : S_{n+1} \mapsto S_n \cup S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup S_{n-3}$

Dễ thấy: $B \notin f(S_{n+1}) \Leftrightarrow B = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, n - 2) \in S_n$ với $b_{n-1} \neq n$
 $\Leftrightarrow B = (b_1, b_2, \dots, b_{n-4}, n - 1, n, n - 3, n - 2) \in S_n$ với $(b_1, b_2, \dots, b_{n-4}) \in S_{n-4}$.

- Từ đó suy ra f là một song ánh từ S_{n+1} đến

$$(S_n \cup S_{n-1} \cup S_{n-2} \cup S_{n-3}) \setminus (S_{n-4} \cup \{(n-1, n, n-3, n-2)\})$$

Vì thế:

$$S_{n+1} = S_n + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} - S_{n-4}, \quad \forall n > 4 \quad (2.12)$$

Suy ra:

$$S_{n+1} - S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} - S_{n-4}, \quad \forall n > 4 \quad (2.13)$$

Do đó:

$$S_{n+2} - S_{n+1} = S_n + S_{n-1} + S_{n-2} - S_{n-3}, \quad \forall n > 4 \quad (2.14)$$

- Lấy (2.14) - (2.13) về theo vế, ta có: $S_{n+2} - 2.S_{n+1} = S_{n-4} - 2.S_{n-3}, \quad \forall n > 4$

Hay:

$$S_n - 2.S_{n-1} = S_{n-6} - 2.S_{n-5}, \quad \forall n > 6 \quad (2.15)$$

- Dễ chứng minh: $S_{n-5} > S_{n-6}, \quad \forall n > 6$

Vì thế từ (2.15) ta có:

$$S_n < 2.S_{n-1}, \quad \forall n > 6 \quad (2.16)$$

Hơn nữa, từ (2.12) ta có:

$$S_n > S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}, \quad \forall n > 5 \quad (2.17)$$

Từ (2.16) và (2.17) suy ra $\forall n > 8$ ta có:

$$S_n > S_{n-1} + (S_{n-1}/2) + (S_{n-2}/2) > S_{n-1} + (S_{n-1}/2) + (S_{n-1}/4) = 1,75.S_{n-1}$$

Bằng cách đếm trực tiếp, ta được: $S_1 = 0; S_2 = 1; S_3 = 2; S_4 = 4$. Từ đó, dựa vào (2.12) ta tính được: $S_5 = 6; S_6 = 13; S_7 = 24; S_8 = 45$. Các kết quả này cho thấy $S_1 > 1,75.S_0$ và $S_8 > 1,75.S_7$.

Vì thế, ta có: $S_n > 1,75.S_{n-1}, \quad \forall n > 6$

Vậy tóm lại: $1,75.S_{n-1} < S_n < 2.S_{n-1}, \quad \forall n > 6$

2.7 Bài toán 7

Bài toán 7. (VMO 2009):

Cho số nguyên dương n . Kí hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con S của T có tính chất trong S không tồn tại các số a, b mà $|a - b| \in \{1; n\}$?

(Lưu ý: Tập rỗng được coi là tập con có tính chất nêu trên)

Lời giải:

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu d_n là số cần tìm theo yêu cầu của đề bài. Xét bảng ô vuông kích thước $2 \times n$. Điền vào các ô vuông con của bảng, lần lượt từ trên xuống dưới, từ trái qua phải, các số từ 1 đến $2n$.

1	2	...	$n-1$	n
$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$	$2n$

Bảng 1

Gọi ô thứ n của hàng 1 và ô thứ 1 của hàng 2 là hai ô đặc biệt. Khi đó, hai số $a, b \in T$ thỏa mãn $|a - b| \in \{1; n\}$ khi và chỉ khi chúng nằm ở hai ô kế nhau hoặc ở hai ô đặc biệt.

Vì thế, d_n chính bằng số cách chọn 1 số ô của bảng (kể cả số ô được chọn bằng 0) mà ở mỗi cách không có 2 ô kề nhau hoặc 2 ô đặc biệt được chọn.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu:

- + k_n là số cách chọn mà ở mỗi cách không có 2 ô kề nhau được chọn.
- + s_n là số cách chọn mà trong các ô được chọn ở mỗi cách có 2 ô đặc biệt và không có 2 ô kề nhau.

Ta có: $d_n = k_n - s_n$

• Tính k_n :

Dễ thấy, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) bao gồm:

- + k_{n+1} cách chọn mà ở mỗi cách không có ô nào thuộc cột thứ 1 của bảng được chọn.
- + $2.t_{n-1}$ cách chọn mà ở mỗi cách đều có ô thuộc cột thứ 1 của bảng được chọn; trong đó t_n là số cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn $2 \times n$ (Bảng 2)

Xóa		...		
x		...		

Bảng 2

Do đó,

$$k_n = k_{n-1} + 2.t_{n-1} \quad (2.18)$$

Lại có, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn $2 \times n$ bao gồm:

+ k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi ô đánh dấu “+” không được chọn.

+ t_{n-1} cách chọn mà ở mỗi ô đánh dấu “×” đều được chọn.

Vì thế, $t_n = k_{n-1} + t_{n-1}$.

Từ đó và (2.18) suy ra:

$$k_n = k_{n-1} + 2.(k_{n-2} + t_{n-2}) = 2k_{n-1} + k_{n-2}, \quad \forall n \geq 3 \quad (2.19)$$

Bằng cách đếm trực tiếp, ta có:

$$k_1 = 3 \text{ và } k_2 = 7 \quad (2.20)$$

Hệ thức truy hồi (2.18) có PT đặc trưng: $x^2 - 2x - 1 = 0$

Suy ra:

$$k_n = C_1(1 + \sqrt{2})^n + C_2(1 - \sqrt{2})^n, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.21)$$

Theo (2.20) ta tìm được: $C_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$; $C_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

$$\text{Vậy: } k = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

• Tính S_n :

Dễ thấy, $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ và với $n \geq 4$ ta có: $s_n = h_{n-2}$, trong đó h_n là số cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kép $2 \times n$ (Bảng 3)

A			Xóa ô
Xóa ô		...	B

Bảng 3

Do $s_3 = 1$, đặt $h_1 = 1$. Bằng cách đếm trực tiếp, ta có $h_2 = 4$.

Xét $n \geq 3$, dễ thấy, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kép $2 \times n$ bao gồm:

+ k_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B đều không được chọn;

+ $2.t_{n-2}$ cách chọn mà ở mỗi cách có đúng 1 trong 2 ô A và B được chọn;

+ h_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B cùng được chọn;

Do đó:

$$h_n = k_{n-2} + 2.t_{n-2} + h_{n-2} = k_{n-1} + h_{n-2}, \quad \forall n \geq 3 \quad (2.22)$$

Từ (2.19) và (2.22) suy ra: $2.h_n - k_n = 2.h_{n-2} - k_{n-2}, \quad \forall n \geq 3$

Dẫn tới: $2.h_n - k_n = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1$

Vì thế: $s_n = h_{n-2} = \frac{k_{n-2} + (-1)^{n-2}}{2}, \forall n \geq 3$

Vậy: $d_1 = 3, d_2 = 6$ và $d_n = \frac{2.k_n - k_{n-2} + (-1)^{n-3}}{2}, \forall n \geq 3$ (k_n tính theo (2.22))

Chương 3

ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT TỔ HỢP TRONG HÌNH HỌC

3.1 Bài toán 1

Bài toán 8. (IMO-1964): Cho 5 điểm trong một mặt phẳng sao cho trong số tất cả những đường thẳng nối hai điểm bất kì, không có hai đường thẳng nào trùng nhau. Qua mỗi điểm, vẽ các đường thẳng vuông góc với các đường thẳng xác định hai trong số 4 điểm còn lại. Hãy xác định số lớn nhất các giao điểm mà những đường vuông góc này có thể giao nhau.

Hướng dẫn:

Gọi 5 điểm thỏa mãn yêu cầu của đề toán là A, B, C, D, E. Xét cố định một điểm, thế thì 4 điểm còn lại sẽ cho ta 6 đường thẳng. Do đó có cả thảy 6 đường vuông góc đi qua điểm cố định đó. Như thế, tổng cộng có 30 đường thẳng vuông góc.

Tính nôm na, cứ hai đường thì cắt nhau tại một điểm, do vậy nhiều lắm là có cả thảy $C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$ giao điểm.

Thế nhưng, lại có một số giao điểm trùng nhau.

Có ba nhóm điểm trùng nhau.

Đầu tiên, 6 đường thẳng qua A (chẳng hạn) giao nhau tại một điểm (đó là điểm A), trong khi tính theo kiểu trên là $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ giao điểm. Như vậy ta mất đi $5 \cdot 14 = 70$ điểm.

Tiếp đến, các đường thẳng qua C, D và E cùng vuông góc với AB sẽ song song với nhau, điều này loại thêm 3 giao điểm. Như thế ta mất thêm $C_3^2 \times 3 = \frac{3 \cdot 2}{2} \times 3 = 3$ điểm.

Thứ ba, đường thẳng qua A vuông góc với BC là đường cao trong $\triangle ABC$; cũng thế với đường thẳng qua B vuông góc với AC, đường thẳng qua C vuông góc với AB, chúng đồng quy tại trực tâm của $\triangle ABC$. Với $\triangle ABC$ này ta phải loại đi 2 giao điểm. Như thế phải loại thêm tất cả $C_5^3 \times 2 = 10 \cdot 2 = 20$ giao điểm.

Rõ ràng, các giao điểm trùng lặp nói trên đều phân biệt nhau (do ba miền điểm vừa xét rời nhau), do vậy, giá trị lớn nhất có thể có của số các giao điểm là $435 - 120 = 315$.

Bài toán đến đây vẫn chưa thực sự được giải quyết nếu chúng ta không chỉ ra được một trật tự đặc biệt về cách sắp xếp 5 điểm đã cho sao cho số giao điểm thực sự là 315, nghĩa là cách sắp xếp các điểm đó bảo đảm được rằng không còn một giao điểm trùng lặp nào ngoài các trùng lặp kể trên.

3.2 Bài toán 2

Bài toán 9. (IMO-1969): Cho n điểm trong mặt phẳng, với $n > 4$, trong số đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi tạo thành có đỉnh nằm trong số n điểm đó.

Hướng dẫn:

Trước tiên, ta xét 5 điểm bất kì, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Ta vạch một bao lồi từ 5 điểm đó. Nếu bao lồi này có hơn 3 điểm thì hiển nhiên có ít nhất một tứ giác lồi. Nếu chỉ gồm 3 điểm, chẳng hạn A, B, C, thì hai điểm D, E, còn lại ắt phải nằm trong $\triangle ABC$. Khi đó, có hai đỉnh của $\triangle ABC$ nằm cùng phía đối với đường thẳng DE, và cùng với D, E, hai đỉnh đó tạo thành một tứ giác lồi. Như vậy, mệnh đề cần chứng minh đúng với $n = 5$ (để ý $\frac{(5-3)(5-4)}{2} = 1$).

Xét n điểm với $n > 5$. Vì không có 3 điểm nào thẳng hàng nên số tất cả các cách chọn n điểm như trên là:

$$C_n^5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}$$

Mỗi cách chọn này cho ta ít nhất 1 tứ giác lồi; tuy nhiên, bất kì tứ giác lồi nào trong số đó cũng có thể được lập từ $(n-4)$ tập hợp khác nhau gồm 5 điểm nói trên, do vậy, có ít nhất số tất cả các tứ giác lồi được thành lập từ n điểm đã cho.

Để kết thúc chứng minh, ta sẽ chứng tỏ rằng:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120} \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2}, \quad \forall n \geq 5$$

. Điều phải chứng minh này tương đương với:

$$n(n-1)(n-2) \geq 60(n-4) \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) - 60(n-4) \geq 0$$

Dễ dàng thấy rằng các số $n = 5$ và $n = 6$ là nghiệm của phương trình $n(n-1)(n-2) - 60(n-4) = 0$, do đó ta có thể phân tích thành nhân tử như sau: $n(n-1)(n-2) - 60(n-4) = (n-5)(n-6)(n+8)$.

Với mọi n nguyên dương và $n \geq 5$, lập bảng xét dấu, dễ thấy dấu của biểu thức $(n-5)(n-6)(n+8)$ cũng là dấu của $(n-5)(n-6)$, từ đó ta được $(n-5)(n-6) = 0$ khi $n = 5, 6$; $(n-5)(n-6) > 0$ khi $n > 6$, suy ra điều phải chứng minh

3.3 Bài toán 3

Bài toán 10. (VMO 2001 – Bảng B): Cho bảng ô vuông kích thước 2000×2001 (hàng $\times$ cột). Hãy tìm số dương k lớn nhất sao cho ta có thể tô màu k ô vuông con của bảng thỏa mãn điều kiện: hai ô vuông con nào được tô màu cũng không có đỉnh chung.

Lời giải:

Qui ước: Thứ tự của các hàng được tính từ trên xuống dưới và thứ tự của các cột được tính từ trái qua phải. Kí hiệu $(i; j)$ là ô vuông nằm ở giao hàng thứ i và cột thứ j . Kí hiệu $k(T)$ là số ô được tô màu ở cách tô màu T .

Xét một cách tô màu T thỏa mãn điều kiện đề bài. Dễ thấy nếu ô $(i; j)$ được tô màu ($1 \leq i \leq 1999$) thì ô $(i+1; j)$ và các ô kề với nó trong cùng hàng đều không được tô màu. Điều này cho phép ta thực hiện phép biến đổi sau đối với T : Xóa màu ở tất cả các ô $(i; j)$ mà $i \equiv 1 \pmod{2}$ và đồng thời tô màu các ô $(i+1; j)$.

Rõ ràng sau khi thực hiện phép biến đổi nói trên với T , ta sẽ được một cách tô màu thỏa mãn điều kiện đề bài và:

$$+k(T') = k(T)$$

+ Tất cả các ô nằm ở các hàng thứ $2i-1$; $i = 1, 2, 3, \dots, 10^3$, đều không có màu.

Từ điều kiện của đề suy ra số ô được tô màu trong một hàng không vượt quá 1001. Do đó, $k(T') \leq 1001.10^3$

Vì vậy: $k(T) \leq 1001.10^3$, với mọi cách tô màu T thỏa mãn điều kiện đề bài. Xét cách tô màu sau: Tô màu tất cả các ô $(2i; 2j - 1)$, với $i = 1, 2, 3, \dots, 10^3$; $j = 1, 2, \dots, 1001$.

Để thấy, cách tô màu vừa nêu thỏa mãn điều kiện đề bài và có số ô được tô màu bằng 1001.10^3 .

Vậy, số nguyên dương k lớn nhất cần tìm là $k = 1001.10^3$

3.4 Bài toán 4

Bài toán 11. (IMO-1979): Cho hình lăng trụ có đáy trên và đáy dưới là các ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$. Mỗi cạnh của hai ngũ giác này cũng như mỗi cạnh trong 25 cạnh $A_iB_j (i, j = 1, \dots, 5)$ đều được tô màu đỏ hoặc xanh. Biết rằng bất kỳ tam giác nào tạo thành từ 3 đỉnh của lăng trụ mà cả 3 cạnh đều được tô màu thì phải có 2 cạnh có màu khác nhau. Chứng minh rằng tất cả 10 cạnh của 2 ngũ giác (ở đáy trên và đáy dưới) đều có cùng một màu.

Hướng dẫn:

* Trước tiên, ta chứng minh rằng tất cả 5 cạnh của ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ đều có cùng màu.

Thật vậy, giả sử điều ngược lại xảy ra, khi đó, tồn tại hai cạnh, chẳng hạn A_1A_2, A_1A_5 , có màu khác nhau. Ta xét 5 cạnh $A_iB_j, j = 1, 2, \dots, 5$. Vì chỉ có 2 màu xanh và đỏ nên ít nhất trong chúng có 3 cạnh cùng màu, ta giả sử 3 cạnh này cùng màu xanh, và A_1A_2 cũng có màu xanh. Giả sử đó là 3 cạnh A_1B_i, A_1B_j, A_1B_k . Lúc đó, xét các tam giác $A_1A_2B_i, A_1A_2B_j, A_1A_2B_k$, ta có 3 cạnh A_2B_i, A_2B_j, A_2B_k , phải cùng màu đỏ. Hai trong 3 đỉnh B_i, B_j, B_k phải kề nhau, nếu hai đỉnh này tạo thành cạnh sơn màu đỏ thì cùng với A_2 , ta được tam giác có cả ba cạnh cùng màu đỏ, còn nếu 2 đỉnh đó tạo thành cạnh sơn màu xanh thì chúng sẽ cùng với A_1 tạo thành tam giác có cả 3 cạnh màu xanh điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Như vậy, tất cả 5 cạnh của ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ đều có cùng màu.

- Tương tự như trên, ta cũng chứng minh được tất cả 5 cạnh của ngũ giác $B_1B_2B_3B_4B_5$ cũng đều có cùng màu.
- Vấn đề còn lại là chứng minh màu các cạnh của hai ngũ giác trên giống

nhau. Giả sử ngược lại, chẳng hạn, 5 cạnh của ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ có màu xanh và 5 cạnh của ngũ giác $B_1B_2B_3B_4B_5$ có màu đỏ. Rõ ràng 3 trong 5 cạnh $A_1B_i, i = 1, 2, \dots, 5$, phải có cùng màu. Giả sử đó là màu đỏ, thế thì lí luận như trên, 2 trong 3 đỉnh B_i đó phải là hai đỉnh kề nhau, từ đó, hai đỉnh này tạo với A_1 thành tam giác có cả 3 cạnh màu đỏ, mâu thuẫn! Như thế, 3 trong 5 cạnh $A_1B_i, i = 1, 2, \dots, 5$, phải có cùng màu xanh.

Lí luận hoàn toàn tương tự, 3 trong 5 cạnh $A_2B_i, i = 1, 2, \dots, 5$, phải có cùng màu xanh.

Trong số 3 cạnh A_1B_i (tập hợp 1) và 3 cạnh A_2B_i (tập hợp 2) vừa chỉ ra ở trên, chắc chắn phải có cùng một B_k nào đó chung ở 2 tập hợp 1 và 2. Khi đó, B_k này sẽ tạo với A_1 và A_2 thành một tam giác có cả 3 cạnh màu xanh, điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Ta có điều phải chứng minh.

3.5 Bài toán 5

Bài toán 12. (IMO-1972): Cho n là số tự nhiên lớn hơn 4, chứng minh rằng mọi tứ giác nội tiếp đều có thể được phân chia làm n tứ giác nội tiếp.

Hướng dẫn: Trước hết, ta nhận xét rằng tứ giác nội tiếp ABCD luôn luôn có thể được phân chia thành 4 tứ giác nội tiếp. Thật vậy, ta lấy P tùy ý bên trong tứ giác ABCD, gọi K là một điểm trên cạnh AB. Nối PK. Tiếp đến, ta lấy trên cạnh BC một điểm L sao cho $\widehat{KPL} = 180^\circ - \widehat{B}$ (điều này chứng tỏ tứ giác KPLB nội tiếp). Ta lại lấy điểm M trên CD sao cho $\widehat{LPM} = 180^\circ - \widehat{C}$; sau đó, lấy N trên AD sao cho $\widehat{MPN} = 180^\circ - \widehat{D}$. Lúc đó, dễ dàng chứng minh được rằng $\widehat{NPK} = 180^\circ - \widehat{A}$.

Tuy nhiên, ta còn phải chứng minh rằng các điểm P, L, M lấy như trên thỏa mãn ý định của chúng ta, nghĩa là nó phải nằm trên các cạnh như ta đã nói. Điều này tùy thuộc vào cách lấy các điểm K và P mà phần trình bày sau đây sẽ rõ.

Rõ ràng là, nếu tứ giác nội tiếp ABCD có hai cạnh song song với nhau ($AB \parallel CD$) thì bài toán xem như được giải quyết, bởi vì lúc đó, ta có thể chia nhỏ tứ giác ABCD thành n tùy ý tứ giác (cũng nội tiếp) bằng n đường thẳng song song $AB \parallel CD$. Vì vậy, bài toán sẽ được giải xong nếu ta chọn các điểm K và P thế nào cho một tứ giác nội tiếp mới thành lập có hai cạnh

song song nhau. Điều này thì dễ, bởi K tùy ý, do đó, ta lấy $PK \parallel AD$, lúc này chắc chắn $PL \parallel CD$ vì: $\widehat{KPL} = 180^\circ - \widehat{B} = \widehat{D}$.

Vấn đề còn lại là xem xét sao cho các điểm K, L, M, N tương ứng nằm trên các cạnh AB, BC, CD, AD.

Trước hết, xét K và L. K không thể nằm trên AD vì ta có $PK \parallel AD$. Như thế, chỉ cần lấy P đủ gần điểm D thì K sẽ nằm trên cạnh AB (tránh tình trạng đường PK cắt BC). Tương tự như thế, ta cũng lấy P đủ gần D để đảm bảo cho L nằm trên cạnh BC. Lúc đó, ta giả sử cả M lẫn N đều nằm trên AD, thế thì bằng cách giữ cho K cố định, ta kéo P tiến về gần sát với CD, N sẽ dịch chuyển lên CD, để lại M nằm trên AD.

Bài toán đã được chứng minh

Chương 4

ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET

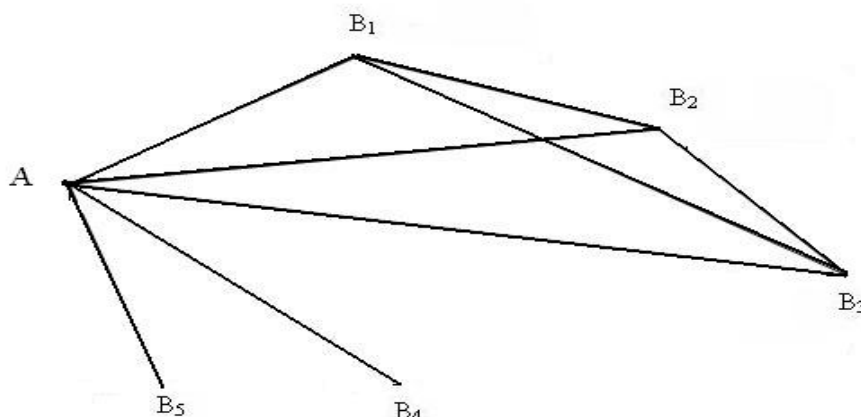
Nguyên lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng: sử dụng nó, ta có thể chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Chính vì vậy, tại các cuộc thi học sinh giỏi toán (quốc gia và quốc tế), nguyên lý Dirichlet thường xuyên được khai thác. Để minh họa, dưới đây ta xét một số bài toán cụ thể

4.1 Bài toán 1

Bài toán 13. *Trong mặt phẳng cho sáu điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Mỗi đoạn thẳng nối từng cặp điểm được bôi màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm trong số sáu điểm đã cho, sao cho chúng là ba đỉnh của một tam giác mà các cạnh của nó được bôi cùng một màu.*

Lời giải: Xét A là một trong số sáu điểm đã cho. Khi đó xét 5 đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng nối điểm A với 5 điểm còn lại). Vì mỗi đoạn thẳng được bôi chỉ màu đỏ hoặc xanh, nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 3 trong 5 đoạn nói trên cùng màu. Giả sử là các đoạn AB_1, AB_2, AB_3 , và có thể cho rằng chúng cùng màu xanh. Chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1. Nếu ít nhất một trong ba đoạn B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 màu xanh thì tồn tại một tam giác với ba cạnh màu xanh và kết luận của bài toán đúng trong trường hợp này.
2. Nếu không phải như vậy, tức là B_1B_2, B_2B_3, B_3B_1 màu đỏ, thì ba điểm phải tìm là B_1, B_2, B_3 , vì $B_1B_2B_3$ là tam giác với ba cạnh đỏ



Hình 4.1: Bảng minh họa cho 6 điểm

4.2 Bài toán 2

Bài toán 14. *Trên mặt phẳng cho 25 điểm. Biết rằng trong 3 điểm bất kì trong số đó luôn luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng: Tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.*

Lời giải:

Lấy A là một trong số 25 điểm đã cho. Xét hình tròn $\Omega_1(A; 1)$ tâm A, bán kính 1. Chỉ có hai khả năng sau có thể xảy ra:

1. Nếu tất cả các điểm đã cho nằm trong Ω_1 thì kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.
2. Tồn tại điểm $B \neq A$ (B thuộc trong số 25 điểm đã cho), sao cho $B \notin \Omega_1$, Vì $B \notin \Omega_1$, nên $AB > 1$.

Xét hình tròn $\Omega_2(B; 1)$ tâm B, bán kính 1. Lấy C là điểm bất kì trong số 25 điểm đã cho sao cho $C \neq A, C \neq B$. Theo giả thiết (và dựa vào $AB > 1$), nên $\min\{CA, CB\} < 1$. Vì thế $C \in \Omega_1$ hoặc $C \in \Omega_2$.

Điều khẳng định này chứng tỏ rằng các hình tròn Ω_1 và Ω_2 chứa tất cả 25 điểm đã cho. Vì thế theo nguyên lý Dirichlet, ít nhất một trong hai hình tròn nói trên chứa không ít hơn 13 điểm đã cho.

Chú ý

Bài toán tổng quát Cho $2n + 1$ điểm trên mặt phẳng ($n \geq 3$). Biết rằng trong 3 điểm bất kì trong số đó luôn tồn tại hai điểm cách nhau nhỏ hơn 1. Khi đó, tồn tại hình tròn bán kính 1 chứa không ít hơn $n + 1$ điểm đã cho.

4.3 Bài toán 3

Bài toán 15. Cho một bảng kích thước $2n \times 2n$ ô vuông. Người ta đánh dấu vào $3n$ ô bất kì của bảng. Chứng minh rằng có thể chọn ra n hàng và n cột của bảng sao cho các ô được đánh dấu đều nằm trên n hàng và n cột này.

Lời giải:

Chọn ra n hàng có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất.

Ta chứng minh rằng các ô được đánh dấu còn lại nhỏ hơn hoặc bằng n . Giả sử trái lại không phải như vậy, tức là số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $n + 1$. Số các hàng còn lại chưa chọn là n . Vậy theo nguyên lí Dirichlet sẽ có ít nhất một hàng (trong số n hàng còn lại) chứa ít nhất hai ô đã đánh dấu.

	X		X	X	
		x		X	
	X				X
		X			
			X		

Chú ý rằng theo cách chọn thì n hàng đã chọn có chứa số ô được đánh dấu nhiều trên các hàng đó nhất. Có một hàng còn lại chưa chọn có ít nhất hai ô đánh dấu, nên suy ra mọi hàng trong số n hàng đã chọn đều có ít nhất hai ô được chọn, tức là trên n hàng đã chọn có không ít hơn $2n$ ô đã được đánh dấu.

Như vậy, số ô được đánh dấu lớn hơn hoặc bằng $2n + (n + 1) \geq 3n$. Đó là điều vô lí (vì chỉ có $3n$ ô được đánh dấu). Vậy nhận xét được chứng minh.

Như vậy, sau khi đã chọn ta n hàng (với cách chọn như trên), theo nhận xét còn lại có không quá n ô được đánh dấu. Vì thế cùng lắm là có n cột chứa chúng. Vì lẽ đó sẽ không thấy còn ô đánh dấu nào nằm ngoài các hàng hay cột được chọn.

4.4 Bài toán 4

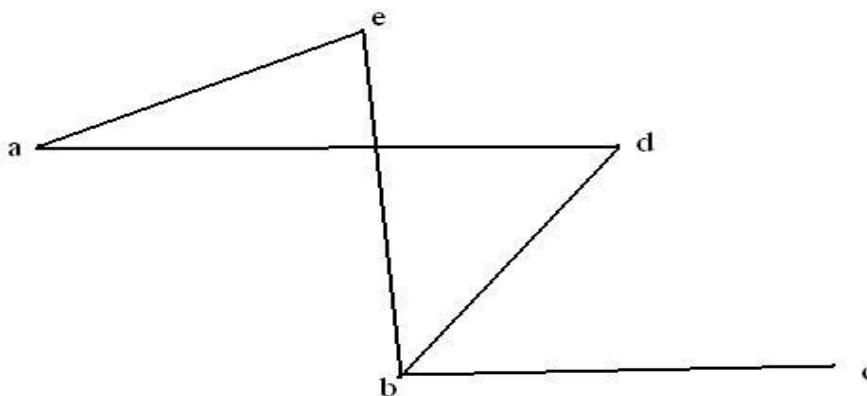
Bài toán 16. Trong mặt phẳng, cho tập hợp A gồm n điểm ($n \geq 2$). Một số cặp điểm được nối với nhau bằng đoạn thẳng. Chứng minh rằng tập hợp A đã cho, có ít nhất hai điểm được nối với cùng số lượng các điểm khác thuộc A .

Lời giải:

Giả sử $a \in A$. Ta kí hiệu $S(a)$ là số lượng các điểm của A nối với a thành đoạn thẳng, ta có:

$$S(a) = 2, S(b) = 3, S(c) = 1, S(d) = 2, S(e) = 2$$

Bài toán trở thành: Chứng minh rằng tồn tại $a_1, a_2 \in A$ ($a_1 \neq a_2$), mà



Hình 4.2: Bảng minh họa cho 5 điểm

$S(a_1) = S(a_2)$. Rõ ràng với mọi $a \in A$ ta có:

$$0 \leq S(a) \leq n - 1 \quad (4.1)$$

Mặt khác, dễ thấy không tồn tại hai điểm $\bar{a} \in A$, $\bar{b} \in A$ mà:

$$S(\bar{a}) = n - 1, S(\bar{b}) = 0 \quad (4.2)$$

Thật vậy, nếu có (4.2), thì từ $S(\bar{a}) = n - 1$, suy ra $\bar{a}$ nối với tất cả $n - 1$ điểm còn lại, nói riêng $\bar{a}$ phải nối với $\bar{b}$. Điều đó có nghĩa là $S(\bar{b}) \geq 1$, và dẫn

đến mâu thuẫn với 4.2 (vì $S(\bar{b}) = 0$).

Gọi S là tập hợp các giá trị mà đại lượng $S(a)$ nhận, $a \in A$, tức là:

$$S = \{m | m = S(a), a \in A\}$$

Như vậy, từ (4.1) suy ra tập S có tối đa n giá trị. Tuy nhiên, từ (4.2) suy ra $(n - 1)$ và 0 không đồng thời thuộc S , vì thế tập S tối đa nhận $(n - 1)$ giá trị. Theo nguyên lí Dirichlet suy ra tồn tại ít nhất $a_1, a_2 \in A$ ($a_1 \neq a_2$), mà $S(a_1) = S(a_2)$.

4.5 Bài toán 5

Bài toán 17. *Chứng minh rằng trong mọi khối đa diện lồi tồn tại ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.*

Lời giải:

Kí hiệu M là số mặt có số cạnh lớn nhất của khối đa diện. Giả sử mặt M có k cạnh. Khi đó vì có k mặt có cạnh chung với M , nên đa diện có ít nhất $k + 1$ mặt. Vì là mặt có số cạnh nhiều nhất bằng k , nên mọi mặt của đa diện có số cạnh nhận một trong các giá trị $\{3, 4, \dots, k\}$.

Đa diện có ít nhất $k + 1$ mặt, mà mỗi mặt số cạnh của nó nhận một trong hai giá trị. Vì thế theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất hai mặt của đa diện có cùng số cạnh.

4.6 Bài toán 6

Bài toán 18. *Một hình lập phương có cạnh bằng 15 chứa 11000 điểm. Chứng minh rằng có một hình cầu bán kính 1 chứa ít nhất 6 điểm trong số 11000 điểm đã cho.*

Lời giải:

Chia mỗi cạnh của hình lập phương thành 13 phần bằng nhau. Như thế, hình lập phương đã cho được chia thành $13^3 = 2197$ hình lập phương nhỏ. Do $111000 > 5.2197 = 10985$, nên tồn tại ít nhất một hình lập phương nhỏ, mà hình lập phương này chứa ít nhất 6 điểm. Như đã biết, nếu gọi cạnh của hình lập phương này là a , thì hình cầu ngoại tiếp có bán kính là R , với $R = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}$. Vì thế, hình cầu ngoại tiếp hình lập phương nhỏ (cạnh của nó

là $\frac{15}{13}$) là:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{13} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{225}{169}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{675}{169}} < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{676}{169}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} = 1$$

Hình cầu này dĩ nhiên chứa ít nhất 6 điểm trong số 11000 điểm đã cho.

4.7 Bài toán 7

Bài toán 19. Bên trong đường tròn bán kính n đặt $4n$ đoạn thẳng có độ dài 1. Chứng minh rằng có thể kẻ một đường thẳng song song hoặc vuông góc với đường thẳng l cho trước và cắt ít nhất 2 đoạn thẳng đã cho.

Lời giải: Giả sử l_i là đường thẳng bất kì vuông góc với l . Kí hiệu độ dài các hình chiếu của đoạn thẳng thứ i lên các đường thẳng l và l_i là a_i và b_i tương ứng. Bởi độ dài mỗi đoạn thẳng bằng 1 nên $a_i + b_i \geq 1$. Do đó:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{4n}) + (b_1 + b_2 + \dots + b_{4n}) \geq 4n$$

Không mất tính tổng quát, giả sử:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{4n}) \geq (b_1 + b_2 + \dots + b_{4n})$$

Khi đó $a_1 + a_2 + \dots + a_{4n} \geq 2n$. Tất cả các đoạn thẳng đã cho đều được chiếu xuống đoạn thẳng có độ dài $2n$, bởi vì chúng đều nằm trong đường tròn bán kính n . Nếu như các hình chiếu của các đoạn thẳng đã cho lên đường thẳng l không có điểm chung, thì sẽ có bất đẳng thức $a_1 + a_2 + \dots + a_{4n} < 2n$. Do đó trên l phải có bị các điểm của ít nhất hai trong số các đoạn thẳng đã cho chiếu lên nó. Đường vuông góc với l tại điểm đó sẽ cắt ít nhất hai đoạn thẳng đã cho.

4.8 Bài toán 8

Bài toán 20. Chứng minh rằng trong mọi đa giác lồi với số cạnh chẵn, tồn tại đường chéo không song song với một cạnh nào của đa giác.

Lời giải:

Ta biết rằng nếu một đa giác có n cạnh, thì có $\frac{n(n-3)}{2}$ đường chéo.

Xét một đa giác lồi bất kì với số cạnh là chẵn (đa giác lồi $2k$ cạnh $k \geq 2$). Khi đó số đường chéo của nó là: $s = \frac{2k(k-3)}{2}$.

Ta có: $s = k(2k-3) = 2k(k-2) + k$, hay suy ra:

$$s > (k-2).2k \quad (4.3)$$

Giả sử trái lại đa giác này có tính chất: Mỗi đường chéo của nó đều song song với một cạnh nào đó của đa giác. Đa giác này có $2k$ cạnh, vì thế từ (4.3) suy ra tồn tại ít nhất $k-1$ đường chéo $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ mà các đường chéo này cùng song song với một cạnh a nào đó của tam giác đã cho (thật vậy, nếu ngược lại mỗi cạnh tối đa là song song $k-2$ đường chéo, thế thì tối đa ta chỉ có $(k-2)2k$ đường chéo và $s \geq (k-2).2k$. Điều này mâu thuẫn với (4.3).

Như thế ta có k đường thẳng song song với nhau $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}, a$.

Chú ý rằng do đa giác là lồi, nên các đường chéo $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$ cùng nằm trên một nửa mặt phẳng bờ xác định cạnh a .

Không giảm tính tổng quát có thể cho d_1 là đường chéo xa nhất đối với a . (vì nếu không thì đánh số lại các đường chéo trên). Ta có tất cả k đoạn thẳng phân biệt, nên mỗi đỉnh của đa giác đều là đầu mút của một đoạn nào đó trong số k đoạn trên.

Từ đó suy ra toàn bộ đa giác nằm hẳn về một nửa mặt phẳng xác định bởi d_1 . Do d_1 là đường chéo, nên điều này mâu thuẫn với tính lồi của đa giác. Vậy giả thiết phản chứng là sai.

4.9 Bài toán 9

Bài toán 21. *Chứng minh rằng trong mọi khối đa diện lồi tồn tại ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.*

Lời giải:

Kí hiệu M là mặt có số cạnh lớn nhất của khối đa diện. Giả sử mặt M có k cạnh. Khi đó, vì có k mặt có cạnh chung với M , nên đa diện có ít nhất $k+1$ mặt. Vì M là mặt có số cạnh lớn nhất bằng k , nên mọi mặt của đa diện có số cạnh nhận một trong các giá trị $\{3, 4, \dots, k\}$. Đa diện có ít nhất $k+1$ mặt, số cạnh của nó nhận một trong $k-2$ giá trị. Vì thế theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất hai mặt của đa diện có cùng số cạnh.

4.10 Bài toán 10

Bài toán 22. *Mỗi điểm trong mặt phẳng được bôi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng ta luôn tạo ra được một hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng màu.*

Lời giải:

Vẽ ba đường thẳng song song $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, ($\Delta_1 \parallel \Delta_2 \parallel \Delta_3$). Lấy trên Δ_1 bất kì bảy điểm. Vì mỗi điểm chỉ được bôi một trong hai màu xanh hoặc đỏ, nên theo nguyên lí Dirichlet trên Δ_1 luôn tồn tại bốn điểm cùng màu. Không giảm tính tổng quát có thể cho đó là các điểm P_1, P_2, P_3, P_4 (và cùng màu đỏ).

Gọi Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , là hình chiếu vuông góc của P_1, P_2, P_3, P_4 xuống Δ_2 và R_1, R_2, R_3, R_4 là hình chiếu của P_1, P_2, P_3, P_4 xuống chỉ có các khả năng sau xảy ra:

1. Nếu tồn tại hai trong số bốn điểm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , màu đỏ (giả sử Q_i, Q_j). Khi đó $P_i P_j Q_j Q_i$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng màu đỏ.
3. Nếu tồn tại hai trong số bốn điểm R_1, R_2, R_3, R_4 màu đỏ (giả sử R_i, R_j). Khi đó $P_i P_j R_j R_i$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng màu đỏ.
4. Bốn điểm Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 và bốn điểm R_1, R_2, R_3, R_4 trong đó tối đa chỉ có một điểm đỏ. Khi đó rõ ràng theo nguyên lí Dirichlet tồn tại i, j mà Q_i, Q_j, R_i, R_j cùng xanh.

Vậy $Q_i Q_j R_j R_i$ là hình chữ nhật có bốn đỉnh cùng xanh.

4.11 Bài toán 11

Bài toán 23. (Putnam 1993) *Cho một dãy số gồm 19 số nguyên dương không vượt quá 93 và một dãy số gồm 93 số nguyên dương không vượt quá 19. Chứng minh rằng từ hai dãy số đó ta có thể lần lượt trích ra hai dãy con có tổng các số hạng bằng nhau.*

Lời giải:

Ta xét bài toán tổng quát: Cho hai dãy (hữu hạn) các số nguyên dương:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m \leq n, \quad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \leq m$$

Khi đó, tồn tại các “chỉ số” $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$ sao cho

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} x_i = \sum_{j=j_1}^{j_2} x_j$$

Giải bài toán tổng quát:

Đặt $a_p := \sum_{i=1}^p x_i$ ($p \in \mathbb{P}, 1 \leq p \leq m$) và $b_q := \sum_{j=1}^q y_j$ ($q \in \mathbb{Z}, 1 \leq q \leq n$).

Thay đổi vai trò của các “ký tự” x, a, m, i, p tương ứng với các ký tự y, b, n, j, q nếu cần, ta có thể xem rằng $a_m \leq b_n$. Khi đó, với mỗi $p \in \mathbb{Z} \cap [1, m]$, tồn tại $f(p) := q \in \mathbb{Z} \cap [1, n]$ là chỉ số bé nhất mà $a_p \leq b_q$. Xét m hiệu:

$$b_{f(1)} - a_1; b_{f(2)} - a_2; \dots; b_{f(m)} - a_m \quad (4.4)$$

Trước hết ta có nhận xét rằng mọi hiệu đều bé hơn m . Thật vậy, nếu có một chỉ số $p \in \mathbb{Z} \cap [1, m]$ nào đó sao cho $m \leq b_{f(p)} - a_p$ thì ($m < b_{f(p)}$ nên $f(p) > 1$) và

$$\begin{aligned} m \leq b_{f(p)-1} + y_{f(p)} - a_p &\Rightarrow 0 \leq m - y_{f(p)} \leq b_{f(p)-1} - a_p \\ &\Rightarrow a_p \leq b_{f(p)-1} \end{aligned}$$

Mâu thuẫn với định nghĩa của $f(p)$. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng: quả thực, mỗi hiệu ở (4.4) là bé hơn m .

Bây giờ, nếu một trong các hiệu đó triệt tiêu: $b_{f(p)} - a_p = 0$, thì rõ ràng ta có ngay đpcm với cách chọn $i_1 := 1 =: j_1, i_2 := p, j_2 := f(p)$. Trong trường hợp còn lại, theo nhận xét trên, toàn bộ m hiệu ở (1) đều thuộc $\mathbb{Z} \cap [1, m-1]$, một tập hợp chỉ có $m-1$ phần tử, nên theo nguyên lý Dirichlet, có hai hiệu bằng nhau; tức là, tồn tại $r, s \in \mathbb{Z} \cap [1, m]$, $r > s$ để

$$\begin{aligned} b_{f(r)} - a_r &= b_{f(s)} - a_s \\ \Rightarrow b_{f(r)} - b_{f(s)} &= a_r - a_s \end{aligned}$$

Và ta cũng có đpcm, với $i_1 := s+1, i_2 := r, j_1 := f(s)+1, j_2 := f(r)$.

4.12 Bài toán 12

Bài toán 24. (Vô địch cộng hòa Czech 1998) Cho X là một tập hợp gồm 14 số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng có một số nguyên dương $k \leq 7$ và có hai tập con k -phần tử: $\{a_1; a_2; \dots; a_k\}, \{b_1; b_2; \dots; b_k\}$ rời nhau của X sao cho

$$\left| \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) - \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} \right) \right| < \frac{1}{1000}$$

Lời giải: Xét $C_{14}^7 = 3432$ tập con 7– phần tử của X. Tổng các nghịch đảo của các phần tử trong mỗi tập con này rõ ràng là không vượt quá $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7} < 2,6$ nên phải thuộc vào một trong số 2600 nửa khoảng :

$$\left(\frac{0}{1000}; \frac{1}{1000}\right], \left(\frac{1}{1000}; \frac{2}{1000}\right], \dots, \left(\frac{2599}{1000}; \frac{2600}{1000}\right]$$

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai tập con khác nhau có tổng nghịch đảo các phần tử thuộc vào cùng một nửa khoảng. Loại bỏ khỏi hai tập con đó các phần tử chung (hai tập con 7– phần tử khác nhau thì có tối đa sáu phần tử chung), ta sẽ thu được hai tập con k – phần tử (với k nguyên dương, $k \leq 7$), thỏa mãn yêu cầu của bài toán: hiệu hai tổng nghịch đảo các phần tử trong hai tập con này sẽ sai khác nhau ít hơn $\frac{1}{1000}$.

4.13 Bài toán 13

Bài toán 25. (HSGQG 2005)

Trong mặt phẳng, cho bát giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ mà không có ba đường chéo nào của nó cắt nhau tại một điểm. Ta gọi mỗi giao điểm của hai đường chéo của bát giác là một nút. Xét các tứ giác lồi mà mỗi tứ giác đều có cả bốn đỉnh là đỉnh của bát giác đã cho. Ta gọi mỗi tứ giác như vậy là tứ giác con.

Hãy tìm số nguyên n nhỏ nhất có tính chất: có thể tô màu nút sao cho với mọi $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và $i \neq k$, nếu kí hiệu $s(i, k)$ là số tứ giác con nhận A_i, A_k làm đỉnh và đồng thời có giao điểm hai đường chéo là một nút đã được tô màu thì tất cả các giá trị $s(i, k)$ đều bằng nhau.

Lời giải:

Gọi n là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bài toán. Ta có $s(i, k) = s(1, 2)$ với mọi $i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và $i \neq k$. Do một nút tương ứng với C_4^2 cặp đỉnh nên:

$$n.C_4^2 = \sum_{i < k} s(i, k) = C_8^2.s(1, 2) \Leftrightarrow 3n = 14s(1, 2)$$

Suy ra, n chia hết cho 14. Từ đó: $n \geq 14$

Cách tô màu 14 nút thỏa mãn bài toán sau:

$$\{1, 2, 3, 4\}; \{1, 2, 5, 6\}; \{1, 2, 7, 8\}; \{2, 3, 5, 8\}; \{2, 3, 7, 6\};$$

$$\{3, 4, 7, 8\}; \{3, 4, 5, 6\}; \{1, 4, 8, 5\}; \{1, 4, 7, 6\}; \{5, 6, 7, 8\}$$

. * Nhận xét:

- Với một hình lập phương có thể ghi lại mỗi đỉnh một số chọn trong tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, hai đỉnh khác nhau ghi hai số khác nhau.
- Mỗi cạnh hình lập phương có thể ứng với đúng 3 cạnh song song với nó.
- Mỗi đường chéo của mặt hình lập phương có thể tương ứng đúng với 3 đường chéo của mặt cùng nằm trong mặt chứa nó hoặc trong mặt đối diện với nó.
- Mỗi đường chéo (chính) của hình lập phương có thể tương ứng với đúng 3 đường chéo (chính) còn lại.

Với ý tưởng trên có thể hiểu lý do tại sao lại chỉ ra được cách tô màu như trên.

4.14 Bài toán 14

Bài toán 26. (USAMO 2001) Có 8 cái hộp, mỗi hộp chứa 6 trái banh. Tìm số nhỏ nhất sao cho mỗi banh tùy ý đều được tô một trong n màu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1. Trong mỗi hộp, không có hai banh nào được tô cùng một màu
2. Hai hộp bất kì có chung không quá một màu.

Lời giải:

+) Gọi x_i là số màu xuất hiện i lần. $i = 1, 2, \dots, k$, ($k \leq n$). Ta có:

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \quad (4.5)$$

$$48 = 1x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k \quad (4.6)$$

+) Gọi y là số cách chọn hai hộp không có chung màu nào. Do hai hộp bất kì có chung không quá một màu nên:

$$C_8^2 = C_2^2 x_2 + C_3^2 x_3 + \dots + C_k^2 x_k + y \quad (4.7)$$

+) Với $i > 1$ ta có:

$$1 - \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}C_i^2 = \frac{(i-2)(i-3)}{6}$$

Lấy (4.5) trừ $\frac{2}{3} \cdot (4.6)$ rồi cộng với $\frac{1}{3} \cdot (4.7)$ ta được:

$$n - \frac{68}{3} = \frac{1}{3}x_1 + \sum_{i>2} \frac{(i-2)(i-3)}{6}x_i + \frac{1}{3}y \geq 0$$

Từ đó: $n \geq 23$

Cách tô sau của 23 màu thỏa mãn bài toán (gọi tên màu là 1, 2, ..., 23)

Hộp I	1	3	4	5	6	7
Hộp II	1	8	9	10	11	12
Hộp III	1	13	14	15	16	17
Hộp IV	2	3	8	13	18	19
Hộp V	2	4	9	14	20	21
Hộp VI	2	5	10	15	22	23
Hộp VII	6	11	16	18	20	22
Hộp VIII	7	12	17	19	21	23

Nhận xét:

+) Ở hình dưới, mỗi đường tượng trưng cho mỗi hộp, các giao điểm ở trên đường tượng trưng cho các bánh.

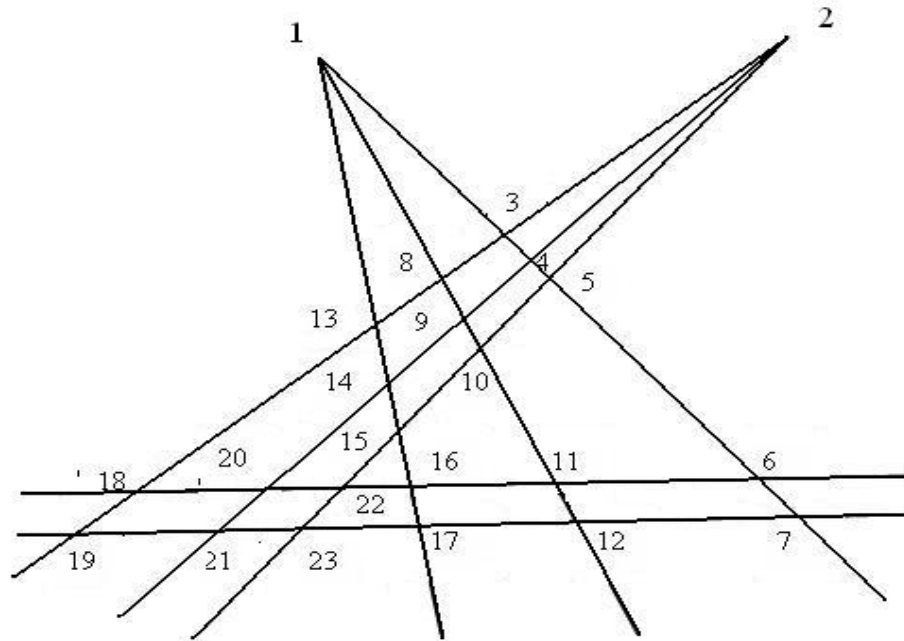
+) Có đúng 8 đường, mỗi đường chứa đúng 6 giao điểm và có tất cả 23 giao điểm. Hai đường bất kì có tối đa một điểm chung.

+) Mỗi cách đánh số 23 giao điểm, từ 1 đến 23, cho ta một cách tô màu trên các bánh ở 8 hộp thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

4.15 Bài toán 15

Bài toán 27. (IMO 2005)

Trong một kỳ thi học sinh giỏi, các thí sinh phải giải 6 bài toán. Biết rằng với hai bài toán bất kỳ luôn có nhiều hơn số thí sinh dự thi, giải được cả hai bài toán này. Ngoài ra không có thí sinh nào giải được cả 6 bài toán. Chứng minh rằng có ít nhất hai thí sinh sao cho mỗi người trong họ giải được đúng 5 bài toán.



Hình 4.3: Bảng minh họa cho 23 điểm

Lời giải:

+) Gọi n là số thí sinh tham gia kỳ thi và x_k là số thí sinh giải được đúng k bài toán ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Ta có:

$$x_6 = 0; \quad n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad (4.8)$$

Ta cần chứng minh: $x_5 \geq 2$

+) Với i, j và $i \neq j$, gọi $s(i, j) = s(j, i)$ là số thí sinh giải được cả bài i và bài j , ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Theo giả thiết luôn có: $5s(i, j) > 2n$. Do đó: $5s(i, j) \geq 2n + 1$

Có tất cả $C_6^2 = 15$ cặp (i, j) mà $i < j$ nên:

$$\sum_{i < j} 5s(i, j) \geq 15(2n + 1)$$

Do đó:

$$S = \sum_{i < j} s(i, j) \geq 3(2n + 1) \quad (4.9)$$

+) Ta cũng có:

$$S = C_2^2 x_2 + C_3^2 x_3 + C_4^2 x_4 + C_5^2 x_5 = x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \quad (4.10)$$

Từ (4.8), (4.9), (4.10):

$$x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \geq 6(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 3$$

Hay

$$4x_5 \geq 6x_0 + 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3 \geq 3 \quad (4.11)$$

Từ đó:

$$x_5 \geq 1$$

+) Ta chứng minh thêm x_5 không thể bằng 1.

Giả sử $x_5 = 1$. Lúc đó từ (4.11) và từ (4.10) cho :

$$S = 6n + 4 \quad (4.12)$$

Trường hợp này có duy nhất một thí sinh A làm được đúng 5 bài, còn lại tất cả đều làm được đúng 4 bài.

+) Gọi bài duy nhất mà thí sinh A không làm được là bài r và k là số thí sinh giải được bài r . Mỗi thí sinh trong k thí sinh này ngoài việc giải được bài r còn giải là số nguyên được đúng 3 bài nữa trong số các bài toán còn lại nên:

$$3k = \sum_{j=1, j \neq r}^6 s(r, j) \quad (4.13)$$

+) Đặt $2n + 1 = 5a$. Ta có: $s(i, j) \geq a$

Nếu a không phải là số nguyên thì:

$$s(i, j) > a \Leftrightarrow 5s(i, j) \geq 2n + 2$$

Suy ra:

$$\sum_{i < j} 5s(i, j) \geq 15(2n + 2) \Leftrightarrow S \geq 6n + 6$$

Trái với (4.12).

+) Nếu a là số nguyên thì hiệu $s(i, j) - a$ là số nguyên không âm. Từ $S = 6n + 4$ viết lại $\sum_{i < j} (s(i, j) - a) = 1$, suy ra trong 15 số hạng $s(i, j)$ với $i < j$, phải có 14 số hạng có cùng giá trị là a và đúng một số hạng có giá trị là $a + 1$. Gọi $s(p, q) = a + 1$. Do đó giá trị của chỉ có thể là $5a$ hoặc $5a + 1$ tùy theo r không thuộc hoặc thuộc $\{p, q\}$.

Kết hợp với (4.13), ta có hoặc $5a$ chia hết cho 3 hoặc $5a + 1$ chia hết cho 3 (**).

+) Vì thí sinh A giải được 5 bài, nên tồn tại một bài t khác bài p, q, r mà thí sinh A giải được. Gọi h là số thí sinh giải được bài t . Trong số h thí sinh này, thì thí sinh A giải được bài t và thêm đúng 4 bài nữa, và $h - 1$ thí sinh còn lại cũng giải được bài t và thêm đúng 3 bài nữa.

Vì vậy:

$$4 + 3(h - 1) = \sum_{j=1, j \neq t}^6 s(t, j) \quad \text{hay} \quad \sum_{j=1, j \neq t}^6 s(t, j) = 3h + 1$$

Do $t \notin \{p, q\}$ nên:

$$\sum_{j=1, j \neq t}^6 s(t, j) = 5a$$

Suy ra $5a = 3h + 1$ và $5a + 1 = 3h + 2$

Điều này mâu thuẫn với (**).

4.15.1 Bài toán tương tự

Bài toán 28. Cho n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3. Trên mỗi cạnh và mỗi đường chéo của n -giác đều $A_1 A_2 \dots A_n$ người ta muốn ghi một số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng p , sao cho các điều kiện sau đều được thỏa mãn:

- i) Mọi số nguyên từ 1 đến p đều được ghi.
- ii) Với mỗi tam giác $A_i A_j A_k$ tùy ý đều có hai cạnh được ghi hai số giống nhau và số này lớn hơn số được ghi trên cạnh còn lại.

Hãy xác định số nguyên p lớn nhất để có thể ghi các số thỏa mãn các điều kiện đặt ra.

Với giá trị này của p , hỏi có bao nhiêu cách ghi thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài toán 29. Có $m + 2$ cái hộp, mỗi hộp chứa m trái bánh. Tìm số n nhỏ nhất sao cho mỗi bánh được tô một trong n màu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1. Trong mỗi hộp, không có hai bánh nào được tô cùng một màu
2. Hai hộp bất kì có chung không quá một màu.

4.16 Bài toán 16

Bài toán 30. (*Iberoamerica 1998*)

Các đại diện n quốc gia ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$) ngồi quanh một bàn tròn theo cách sao cho hai người ngồi sát bên phải hai đại diện bất kì có cùng quốc tịch thì phải có quốc tịch khác nhau. Hãy xác định (theo n) số lớn nhất có thể có các đại diện ngồi quanh bàn tròn đó.

Lời giải:

Ta sẽ dùng $X_1, X_2, \dots, X_n$ để kí hiệu n quốc gia có đại diện ngồi tại bàn tròn; các đại diện có quốc tịch X_i ($\mathbb{N}^* x \ni i \leq n$) sẽ được đánh số là $x_i^1, x_i^2, \dots$

(i) Trước tiên nếu có nhiều hơn n^2 đại diện người tại bàn tròn, thì theo nguyên lí Dirichlet tồn tại i ($\mathbb{N}^* x \ni i \leq n$) để quốc gia X_i có ít nhất là $n+1$ đại diện, mà ta kí hiệu là $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n+1}$; nhưng chỉ có n quốc tịch, nên vẫn theo nguyên lí Dirichlet, trong số $n+1$ người ngồi sát bên phải các đại diện $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n+1}$, phải có hai người có cùng quốc tịch; mâu thuẫn với yêu cầu của bài toán. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng có không quá n^2 đại diện ngồi tại bàn tròn.

(ii) Tiếp theo, giả sử mỗi quốc gia có đúng n đại diện: các đại diện của X_i ($\mathbb{N}^* x \ni i \leq n$) là $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n+1}$; ta sẽ chỉ ra bằng quy nạp theo n rằng có một cách sắp xếp toàn bộ n^2 đại diện đó vào bàn tròn sao cho mọi yêu cầu của bài toán đều được thỏa mãn.

Mỗi cách sắp xếp toàn bộ n^2 đại diện đó vào bàn tròn thực chất là một hoán vị

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n^2-1}, a_{n^2}) \quad (4.14)$$

của tập hợp $\{x_i^j | i, j \in \mathbb{N}^*; i, j \leq n\}$ với quy ước rằng trong cách sắp xếp này:

1. a_{k+1} là đại diện ngồi sát bên phải a_k (với mọi k nguyên dương mà $k < n^2$)

2. a_1 ngồi sát bên phải a_{n^2}

(ta đồng nhất các hoán vị có thể thu được từ nhau qua một phép hoán vị vòng quanh).

Khi $n = 2$ dễ thấy cách sắp xếp $(x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2)$ thỏa mãn mọi yêu cầu của bài toán. Giả sử với $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ nào đó đã có một cách sắp xếp, mà ta vẫn giữ kí hiệu (4.14), thỏa mãn mọi yêu cầu của bài toán. Khi đó, có thể chứng minh rằng:

Với mỗi $i \in \mathbb{N} \cap [1, n]$ tồn tại duy nhất $j \in \mathbb{N} \cap [1, n]$ sao cho người ngồi sát bên phải x_i^j cũng có quốc tịch X_i .

Thật vậy, nếu n người ngồi sát bên phải các đại diện $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n$ đều có quốc tịch khác X_i (chỉ có $n - 1$ quốc tịch như thế), thì theo nguyên lí Dirichlet, ít nhất hai người trong số họ phải có cùng quốc tịch; mâu thuẫn với yêu cầu của bài toán. Mâu thuẫn này chứng tỏ sự tồn tại của $j = j_i$. Hơn nữa, nếu $\mathbb{N} \cap [1, n] \ni k \neq j_i$, thì theo yêu cầu của bài toán, người ngồi sát bên phải x_i^k sẽ không cùng quốc tịch X_i với người ngồi sát bên phải $x_i^{j_i}$. Điều đó cho thấy tính duy nhất của j_i và (ii) đã được chứng minh.

Do (ii), bằng cách hoán vị vòng quanh nếu cần, trong (i) ta có thể xem a_1 và a_2 có cùng quốc tịch; từ đó a_1 khác quốc tịch với a_{n^2} . Vậy, vẫn theo (ii), với mỗi $i \in \mathbb{N} \cap [1, n]$, tồn tại duy nhất $k_i \in \mathbb{N} \cap [1, n^2 - 1]$ sao cho a_{k_i} và a_{k_i+1} có cùng quốc tịch X_i .

Bây giờ, giả sử mỗi quốc gia $X_i (\mathbb{N}^* \ni i \leq n)$ có thêm đại diện thứ $n + 1$ là x_i^{n+1} . Ngoài ra, có thêm quốc gia X_{n+1} với $n + 1$ đại diện là $x_{n+1}^1, x_{n+1}^2, \dots, x_{n+1}^{n+1}$. Khi đó, từ bộ (4.14), bằng cách:

- +) Thay cặp (a_{k_1}, a_{k_1+1}) bởi bộ năm $(a_{k_1}, x_{n+1}^1, x_{n+1}^{n+1}, x_1^{n+1}, a_{k_1+1})$;
- +) Thay cặp (a_{k_i}, a_{k_i+1}) bởi bộ bốn $(a_{k_i}, x_{n+1}^i, x_i^{n+1}, a_{k_i+1})$; với mỗi $i \in \mathbb{N} \cap [2, n]$, ta sẽ thu được một cách sắp xếp thỏa mãn mọi yêu cầu của bài toán cho trường hợp $n + 1$ quốc gia.

Vậy (ii) đã được chứng minh theo nguyên lí quy nạp.

Từ (i) và (ii) ta thấy: số lớn nhất có thể có các đại diện ngồi quanh bàn tròn đã cho là n^2 .

Kết luận

Luận văn đã hoàn thành với các kết quả sau:

1. Đã trình bày các khái niệm cơ bản của lý thuyết tổ hợp
2. Ứng dụng của lý thuyết tổ hợp thông qua các ví dụ và các bài toán đại số, hình học ở phổ thông.

Hướng phát triển của đề tài là mở và vô cùng hấp dẫn, hữu ích đối với các giáo viên dạy toán ở trường phổ thông. Chúng tôi hi vọng đây sẽ là một tài liệu tham khảo hữu ích đối với các em học sinh giỏi và các bạn đồng nghiệp ở trung học phổ thông.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Hữu Điển (2005), *Một số chuyên đề về hình học tổ hợp*, NXB Giáo dục
- [2] Vũ Đình Hòa (2006), *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi hình học tổ hợp*, NXB Giáo Dục.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng, (2008), *Chuyên đề chọn lọc tổ hợp và toán rời rạc*, Nxb Giáo dục.
- [4] Nguyễn Văn Vĩnh (2005), *23 chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp*, NXB Giáo Dục.
- [5] *Tập san toán học tuổi trẻ các năm.*

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn ngày 27 tháng 9 năm 2013 và đã được chỉnh sửa với các ý kiến đóng góp của các thầy, cô trong hội đồng.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2013.

Xác nhận của cán bộ hướng dẫn khoa học

PGS.TS Nông Quốc Chinh