

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU PHƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC TRONG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THU PHƯƠNG

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC TRONG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

Mục lục

Mở đầu	3
Lời cảm ơn	4
1 Một số đẳng thức cơ bản dùng trong phương pháp lượng giác hóa	5
1.1 Các hàm lượng giác cơ bản dùng đặt ẩn phụ	5
1.2 Một số đồng nhất thức lượng giác trong tam giác	6
1.3 Các hệ thức lượng giác để giải phương trình bậc hai và bậc ba . .	7
2 Phương pháp lượng giác hóa trong ước lượng nghiệm phương trình và bất phương trình	10
2.1 Phương pháp lượng giác hóa trong ước lượng nghiệm phương trình	10
2.2 Xây dựng phương trình đại số dựa vào hệ thức lượng giác	15
2.3 Sử dụng lượng giác để khảo sát bất phương trình	24
3 Bất đẳng thức đại số và các bài toán cực trị giải bằng biến đổi lượng giác	28
3.1 Bất đẳng thức đại số giải bằng biến đổi lượng giác	29
3.2 Sử dụng lượng giác hóa trong bài toán cực trị	42
Kết luận	58
Tài liệu tham khảo	59

Mở đầu

Trong chương trình Toán học phổ thông, chuyên đề lượng giác đóng một vai trò như là một công cụ đắc lực nhằm giải quyết hiệu quả nhiều bài toán của giải tích, đại số và hình học. Trong thực tiễn, lượng giác và các đặc trưng cơ bản của lượng giác là chuyên đề cần thiết trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán ở bậc Trung học phổ thông, đồng thời các ứng dụng của nó luôn là sự hấp dẫn đối với nhiều đối tượng học sinh và giáo viên.

Mục tiêu của luận văn “Phương pháp lượng giác trong bất đẳng thức và các bài toán cực trị” nhằm trình bày vấn đề áp dụng phương pháp lượng giác hoá để giải quyết một số bài toán về bất đẳng thức và bài toán cực trị nhằm tạo ra một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi cấp trung học phổ thông.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Chương 1 trình bày mối liên hệ cơ bản giữa một số đẳng thức đại số và lượng giác để sử dụng lượng giác hoá trong các phần sau.

Chương 2 trình bày về một số phương trình và bất phương trình đại số giải được bằng phương pháp lượng giác.

Chương 3 trình bày một số ứng dụng của lượng giác trong bất đẳng thức và các bài toán cực trị đại số.

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến thầy.

Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo khoa Toán trường Đại học Khoa học, khoa sau đại học - Đại học Thái Nguyên, các thầy, cô giảng dạy lớp cao học khoá 5 (2011-2013) đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện cho tôi trong thời gian học tập tại đây.

Tôi xin cảm ơn gia đình và các đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Xin chân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, tháng 5 năm 2013

Người viết Luận văn

Nguyễn Thu Phương

Chương 1

Một số đẳng thức cơ bản dùng trong phương pháp lượng giác hóa

1.1 Các hàm lượng giác cơ bản dùng đặt ẩn phụ

Khi giải một số dạng bài toán đại số, nhiều khi ta gặp phải những bài toán rất khó giải do kĩ thuật biến đổi phức tạp. Trong số đó có nhiều lớp bài toán có thể chuyển về dạng toán lượng giác cho cách giải đơn giản và dễ dàng hơn. Việc chuyển từ các bài toán đại số về các hệ thức, hay phương trình, bất phương trình, hệ phương trình lượng giác thường được gọi là phương pháp “lượng giác hoá”.

Nhằm lượng giác hoá các bài toán đại số sơ cấp, ta sử dụng các nhận xét sau:

1. Nếu $-1 \leq x \leq 1$ thì tồn tại số α và β với $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \pi$ sao cho $\sin \alpha = x$ và $\cos \beta = x$.

2. Nếu $0 \leq x \leq 1$ thì tồn tại số α và β với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ sao cho $\sin \alpha = x$ và $\cos \beta = x$.

3. Với mỗi số thực x tồn tại số α với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sao cho $\tan \alpha = x$.

4. Nếu các số thực x và y thoả mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$ thì tồn tại số α với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ sao cho $x = \cos \alpha$ và $y = \sin \alpha$.

5. Nếu $x \in [a; b]$ thì ta có thể đặt : $x = \frac{b-a}{2} \cos t + \frac{b+a}{2}$ với $0 \leq t \leq \pi$ hoặc $x = \frac{b-a}{2} \sin t + \frac{b+a}{2}$ với $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = (b-a) \cos^2 t + a$ với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = \tan t$ với $\arctan a \leq t \leq \arctan b$.

Ngoài ra còn có một số dấu hiệu nhận biết một bài toán có thể giải được

bằng phương pháp lượng giác hoá.

- Nếu biến x tham gia bài toán thoả mãn điều kiện $|x| \leq a$ ($a > 0$), khi đó ta có thể lượng giác hoá bằng cách đặt $x = a \sin \alpha$ với $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc đặt $x = a \cos \alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$.

- Nếu hai biến x, y tham gia bài toán có ràng buộc $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$ với $a, b, c > 0$; khi đó ta có thể lượng giác hoá bằng cách đặt $x = \frac{c \sin \alpha}{a}; y = \frac{c \cos \alpha}{b}$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$.

- Trong một số bài toán, có sự xuất hiện một biểu thức tương tự với một công thức lượng giác nào đó, ta có thể sử dụng công thức lượng giác tương ứng để đặt ẩn phụ. Chẳng hạn như :

+) Biểu thức $\sqrt{x^2 + 1}$ hoặc $x^2 + 1$ tương tự như công thức $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

+) Biểu thức $4x^3 - 3x$ tương tự như công thức $4 \cos^3 t - 3 \cos t = \cos 3t$.

+) Biểu thức $2x^2 - 1$ tương tự như công thức $2 \cos^2 t - 1 = \cos 2t$.

+) Biểu thức $\frac{2x}{1-x^2}$ tương tự với công thức $\tan 2t = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t}$.

+) Biểu thức $\frac{x+y}{1-xy}$ tương tự như công thức $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

1.2 Một số đồng nhất thức lượng giác trong tam giác

Tiếp theo, ta nhắc lại một số đẳng thức lượng giác quen biết trong tam giác ở chương trình toán phổ thông để áp dụng chứng minh một số dạng bất đẳng thức đại số và bài toán cực trị ở Chương 3.

Tính chất 1.1. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \quad (1.1)$$

Tính chất 1.2. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C. \quad (1.2)$$

Tính chất 1.3. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1. \quad (1.3)$$

Tính chất 1.4. Với mọi tam giác ABC , ta có

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C. \quad (1.4)$$

Tính chất 1.5. Với mọi tam giác ABC , ta có

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1. \quad (1.5)$$

Tính chất 1.6. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}. \quad (1.6)$$

1.3 Các hệ thức lượng giác để giải phương trình bậc hai và bậc ba

Nhờ cách biểu diễn các hàm lượng giác qua số phức (chỉ dùng để biến đổi hình thức) ta cũng có thể áp dụng để giải một số dạng toán.

Đặt $a = e^t$, ta có

$$\begin{aligned} \cos 3it &= \cos i(3t) = \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2} = \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right) \\ i \sin 3it &= i \sin i(3t) = \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right). \end{aligned}$$

Lại có $\cos(3it) = 4 \cos^3 it - 3 \cos it$; $\sin(3it) = 3 \sin it - 4 \sin^3 it$,
nên $i \sin(3it) = 3i \sin it - 4i \sin^3 it = 3i \sin it + 4(i \sin it)^3$.

Từ đó suy ra các đẳng thức

$$\frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right) = 4p^3 - 3p, \quad \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right) = 4q^3 + 3q, \quad (1)$$

với $p = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$; $q = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$.

Tiếp theo, ta có thể viết phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

dưới dạng $2y^2 - 1 = m$ để sử dụng hệ thức $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ để giải và biện luận phương trình bậc hai.

Tương tự, đối với phương trình bậc ba

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$$

bằng cách đặt $x = y - \frac{b}{3a}$ ta thu được phương trình dạng $y^3 + py + q = 0$.

Khi $p > 0$ ta đặt ẩn phụ $y = 2\sqrt{\frac{p}{3}}t$, ta thu được phương trình $4t^3 + 3t = m$.

Khi $p < 0$ ta đặt ẩn phụ $y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}t$, ta thu được phương trình $4t^3 - 3t = m$.

Các phương trình này đều có thể giải được bằng các đẳng thức đại số và lượng giác tương ứng.

Ví dụ 1.1. Giải các phương trình sau với nghiệm thực

a) $4x^3 - 3x = m$ với $|m| \leq 1$,

b) $4x^3 - 3x = m$ với $|m| > 1$.

Bài giải.

a) Vì $|m| \leq 1$, nên ta đặt $m = \cos \alpha = \cos(\alpha \pm 2\pi)$ với $\alpha \in [0; \pi]$.

Do $\cos \alpha = 4\cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3\cos \frac{\alpha}{3}$ nên $4x^3 - 3x = 4\cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3\cos \frac{\alpha}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\alpha}{3}; x_2 = \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3}; x_3 = \cos \frac{\alpha - 2\pi}{3}.$$

b) Vì $|m| > 1$, nên ta đặt $m = \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right)$ với $a^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1}$.

Khi đó

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right).$$

Theo công thức (1) ta suy ra phương trình đã cho có nghiệm thực là

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right).$$

Ta chứng minh x_0 là nghiệm thực duy nhất của phương trình.

Thật vậy, vì x_0 là nghiệm của phương trình $4x^3 - 3x = m$,

nên ta có $4x_0^3 - 3x_0 = m$.

Suy ra $4x^3 - 3x = 4x_0^3 - 3x_0 \Leftrightarrow 4(x^3 - x_0^3) = 3(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(4x^2 - 4xx_0 + 4x_0^2 - 3) = 0.$$

Vì $4x^2 - 4xx_0 + 4x_0^2 - 3 = 0$ có $\Delta' = 12 - 12x_0^2 < 0$ (do $|x_0| > 1$) nên phương trình không có nghiệm thực.

Vậy phương trình $4x^3 - 3x = m$ chỉ có một nghiệm thực duy nhất là

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right).$$

Ví dụ 1.2. Giải và biện luận phương trình sau theo m :

$$4x^3 + 3x = m.$$

Bài giải.

Đặt $m = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right)$ với $a^3 = m \pm \sqrt{m^2 + 1}$. Suy ra

$$4x^3 + 3x = \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right).$$

Theo công thức (1) suy ra phương trình có nghiệm là

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 + 1}} + \sqrt[3]{m - \sqrt{m^2 + 1}} \right).$$

Ta chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thật vậy, xét hàm số $y = 4x^3 + 3x$. Ta có $y' = 12x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì vậy y là hàm số đồng biến nên x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chương 2

Phương pháp lượng giác hóa trong ước lượng nghiệm phương trình và bất phương trình

2.1 Phương pháp lượng giác hóa trong ước lượng nghiệm phương trình

Tiếp theo, ta xét lớp các bài toán về khảo sát nghiệm phương trình bằng sử dụng lượng giác hóa.

Bài toán 2.1 (Xem [6]). Chứng minh rằng phương trình

$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$$

có nghiệm thực $x = x_0$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} < x_0 < \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$$

Bài giải.

Từ công thức $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$), ta suy ra

$$\cos \frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}}.$$

$$\text{Khi } \alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ thì ta có } \cos \frac{\pi}{16} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$, thì ta có $\cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$.

Lại có

$$\begin{aligned}\cos 6t &= 4 \cos^3 2t - 3 \cos 2t = 4(2 \cos^2 t - 1)^3 - 3(2 \cos^2 t - 1) \\ &= 32 \cos^6 t - 48 \cos^4 t + 18 \cos^2 t - 1\end{aligned}$$

nên $64 \cos^6 t - 96 \cos^4 t + 36 \cos^2 t - 3 = 2 \cos 6t - 1$.

Từ phương trình $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$, ta xét $x \in [-1; 1]$.

Đặt $x = \cos t$, khi đó ta có $2 \cos 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{18}$.

Do vậy $x_0 = \cos \frac{\pi}{18}$ là một nghiệm của phương trình.

Ta có $\frac{\pi}{24} < \frac{\pi}{18} < \frac{\pi}{16} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{24} > \cos \frac{\pi}{18} > \cos \frac{\pi}{16}$.

Vậy phương trình $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$ có một nghiệm $x_0 = \cos \frac{\pi}{18}$ thoả

mãn điều kiện $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} < x_0 < \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}$.

Bài toán 2.2. Cho phương trình $x^3 - px^2 + qx - p = 0$ với $p, q > 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lớn hơn 1 thì ta có bất đẳng thức

$$p \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) (q + 3). \quad (2)$$

Bài giải.

Giả sử $x_1 < x_2 < x_3$. Theo Định lý Viète, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = p \end{cases}$$

Vì $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = 1$ nên có thể đặt $x_1 = \tan A, x_2 = \tan B, x_3 = \tan C$ với A, B, C là ba góc của một tam giác và $\frac{\pi}{4} \leq A, B, C < \frac{\pi}{2}$. Không giảm tính tổng quát, giả sử $A = \min \{A, B, C\}$ thì $\frac{\pi}{4} \leq A \leq \frac{\pi}{3}$. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq \frac{2 + \sqrt{2}}{8} (\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan A \tan C + 3)$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4\sqrt{2} \geq \cot A + \cot B + \cot C + 3 \cot A \cot B \cot C$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \cot A + \cot B + \cot C + 3 \cot A \cot B \cot C = \\
& = \cot A + \frac{2 \sin A}{\cos(B-C) + \cos A} + 3 \cot A \frac{\cos(B-C) - \cos A}{\cos(B-C) + \cos A} \\
& \leq \cot A + \frac{2 \sin A}{1 + \cos A} + 3 \cot A \cdot \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}, \text{ do } \frac{\pi}{4} \leq A \leq \frac{\pi}{3} \\
& \leq \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{2 \tan \frac{A}{2}} + 2 \tan \frac{A}{2} + 3 \frac{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}{2 \tan \frac{A}{2}} \cdot \tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2 \tan \frac{A}{2}} + 3 \tan \frac{A}{2} - \frac{3}{2} \tan^3 \frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2t} + 3t - \frac{3}{2}t^3$ với $\forall t \in \left[\sqrt{2}-1; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{2t^3} + 3 - \frac{9}{2}t^2 = \frac{-9t^4 + 6t^2 - 1}{2t^2} = -\frac{(1-3t^2)^2}{2t^2} \leq 0$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left[\sqrt{2}-1; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Suy ra $f(t) \leq f(\sqrt{2}-1) = 8 - 4\sqrt{2}$.

Vậy (2) đúng. Do đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\cos(B-C) = 1$ và $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{2}-1$, tức là $A = \frac{\pi}{4}; B = \frac{3\pi}{8}; C = \frac{3\pi}{8}$.

Bài toán 2.3. Cho phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$. Chứng minh rằng phương trình có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ thỏa mãn hệ thức $x_3^2 = 2 + x_2; x_2^2 = 2 + x_1; x_1^2 = 2 + x_3$.

Bài giải.

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Ta có $f(-2) < 0, f(-1) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0$.

Do tính liên tục của $f(x)$ nên $f(x) = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

$$-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 2 \Rightarrow |x_i| < 2, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Đặt $x = 2 \cos \alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi$. Khi đó $8 \cos^3 \alpha - 6 \cos \alpha + 1 = 0$, tức là $\cos 3\alpha = -\frac{1}{2}$.

Vì $0 \leq \alpha \leq \pi$ nên phương trình $\cos 3\alpha = -\frac{1}{2}$ có ba nghiệm

$$\alpha_3 = \frac{2\pi}{9}; \alpha_2 = \frac{4\pi}{9}; \alpha_1 = \frac{8\pi}{9}.$$

Vì vậy $x_1 = 2 \cos \frac{8\pi}{9}; x_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{9}; x_3 = 2 \cos \frac{2\pi}{9}$.

Do đó $x_3^2 = 2 + x_2; x_2^2 = 2 + x_1; x_1^2 = 2 + x_3$.

Bài toán 2.4. Giải phương trình

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x \left(1 + 2\sqrt{1 - x^2} \right). \quad (3)$$

Bài giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $\frac{t}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ta có phương trình

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cos t} &= \sin t(1 + 2 \cos t) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \frac{t}{2} &= 2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2} \left[1 + 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Vì $\frac{t}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ nên $\cos \frac{t}{2} \neq 0$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 3 \sin \frac{t}{2} - 4 \sin^3 \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{3t}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3t}{2} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ hoặc } \frac{3t}{2} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện đặt ra, ta được $t = \frac{\pi}{6}$ và $t = \frac{\pi}{2}$.

Từ đó suy ra $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 1$.

Vậy tập nghiệm của (3) là $\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Bài toán 2.5. Giải phương trình

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \cdot \left[\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1 - x^2}. \quad (4)$$

Bài giải.

Điều kiện $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$ với $0 \leq t \leq \pi$. Suy ra $\frac{t}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có phương trình

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 + \sin t} \left[\sqrt{(1 + \cos t)^3} - \sqrt{(1 - \cos t)^3} \right] = 2 + \sqrt{1 - \cos^2 t} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right)^2} \left(2\sqrt{2} \cos^3 \frac{t}{2} - 2\sqrt{2} \sin^3 \frac{t}{2} \right) = 2 + \sin t \\
& \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \right) \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} \right) = 2 + \sin t \\
& \Leftrightarrow \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \sin t \right) 2\sqrt{2} = 2 + \sin t \\
& \Leftrightarrow \cos t (2 + \sin t) \cdot \sqrt{2} = 2 + \sin t \Leftrightarrow (2 + \sin t)(\sqrt{2} \cos t - 1) = 0 \\
& \Leftrightarrow \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (vì } 2 + \sin t > 0 \text{ với mọi } t).
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình (4) là $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 2.6. Tìm x trong khoảng $(0; 1)$ thỏa mãn phương trình

$$32x(x^2 - 1)(2x^2 - 1)^2 = 1 - \frac{1}{x}. \quad (5)$$

Bài giải.

Vì $x \in (0; 1)$ nên ta đặt $x = \cos t$ với $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có phương trình

$$\begin{aligned}
& 32 \cos t (\cos^2 t - 1) (2 \cos^2 t - 1)^2 = 1 - \frac{1}{\cos t} \\
& \Leftrightarrow -32 \cos^2 t \sin^2 t \cos^2 2t = \cos t - 1 \\
& \Leftrightarrow 8 \sin^2 2t \cos^2 2t = 1 - \cos t \\
& \Leftrightarrow 2 \sin^2 4t = 1 - \cos t \\
& \Leftrightarrow \cos t = \cos 8t
\end{aligned}$$

Giải hệ này kết hợp với điều kiện $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta được nghiệm

$$t_1 = \frac{2\pi}{7}; t_2 = \frac{2\pi}{9}; t_3 = \frac{4\pi}{9}.$$

Do đó phương trình (5) có ba nghiệm : $x_1 = \cos \frac{2\pi}{7}; x_2 = \cos \frac{2\pi}{9}; x_3 = \cos \frac{4\pi}{9}$.

2.2 Xây dựng phương trình đại số dựa vào hệ thức lượng giác

Từ công thức lượng giác đơn giản $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$, ta có thể tạo ra được những phương trình vô tỷ.

Từ $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ ta có phương trình vô tỷ $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$. (6)

Nếu thay x trong phương trình (6) bởi $\frac{1}{x}$ ta sẽ có phương trình vô tỷ khó hơn $4 - 3x^2 = x^2\sqrt{x^2 - 1}$. (7)

Nếu thay x trong phương trình (6) bởi $x - 1$ ta sẽ có phương trình vô tỷ khó $4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x - x^2}$. (8)

Tương tự như vậy từ các công thức $\sin 3x, \sin 4x \dots$ ta cũng có thể xây dựng các phương trình vô tỷ theo kiểu lượng giác!

Ví dụ 2.1. Từ phương trình lượng giác $\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2}$ và từ đẳng thức lượng giác $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ suy ra $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$ thay thế $\cos t$ bởi x , ta sẽ có một phương trình vô tỷ như sau $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}$.

Vậy ta có bài toán giải phương trình vô tỷ được giải theo phương pháp đặt ẩn phụ lượng giác như sau.

Bài toán 2.7. Giải phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Nhận xét 2.1. Khi đó phương trình này được giải theo phương pháp đặt ẩn phụ lượng giác.

Ví dụ 2.2. Từ phương trình $\cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2}\cos t \sin t$ thay thế $\cos t$ bởi x ta được phương trình vô tỷ $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$.

Và ta có bài toán giải phương trình vô tỷ

Bài toán 2.8 (Xem [6]). Giải phương trình

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}.$$

Nhận xét 2.2. Phương trình này được giải theo phương pháp đặt ẩn phụ lượng giác.

Ví dụ 2.3. Từ phương trình $5 + 3 \sin t = 8(\cos^6 t + \sin^6 t)$ thay thế $\cos t$ bởi x , ta được phương trình vô tỷ $5 + 3\sqrt{1-x^2} = 8[x^6 + (1-x^2)^3]$. Và ta có bài toán.

Bài toán 2.9. Giải phương trình $5 + 3\sqrt{1-x^2} = 8[x^6 + (1-x^2)^3]$.

Nhận xét 2.3. Từ điều kiện $|x| \leq 1$ ta đặt $x = \cos t$; $t \in [0; \pi]$ và ta thu được.

$$\begin{aligned} 5 + 3 \sin t &= 8(\sin^6 t + \cos^6 t) \Leftrightarrow 3 \sin t = 8(1 - 3 \sin^2 t \cos^2 t) - 5 \\ &\Leftrightarrow 3 \sin t = 3 - 24 \sin^2 t \cos^2 t \\ &\Leftrightarrow \sin t = 1 - 8 \sin^2 t \cos^2 t = 1 - 2 \sin^2 2t = \cos 4t \\ &\Leftrightarrow \cos 4t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right). \end{aligned}$$

Từ phương trình này ta sẽ tìm được t , sau đó suy ra được x .

Bây giờ ta chuyển sang xét lớp phương trình và bất phương trình vô tỷ xuất phát từ đẳng thức lượng giác.

Ví dụ 2.4. Từ phương trình $\cos 3t = \sin t$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$4 \cos^3 t - 3 \cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t}.$$

Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau.

Bài toán 2.10. Giải phương trình

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}.$$

Bài giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 t - 3 \cos t &= \sin t \Leftrightarrow \cos 3t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có $t_1 = \frac{\pi}{8}$, $t_2 = \frac{5\pi}{8}$, $t_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x_3 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài toán 2.11. Giải phương trình

$$4x^3 - 12x^2 + 9x - 1 = \sqrt{2x - x^2}.$$

Bài giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4(x-1)^3 - 3(x-1) = \sqrt{1 - (x-1)^2}. \quad (9)$$

Đặt $x-1 = \cos t$, $t \in [0, \pi] \Rightarrow \sin t \geq 0$, phương trình (9) trở thành

$$\begin{aligned} 4\cos^3 t - 3\cos t = \sin t &\Leftrightarrow \cos 3t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = -\frac{\pi}{2} + t + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có: $t_1 = \frac{\pi}{8}$, $t_2 = \frac{5\pi}{8}$, $t_3 = \frac{3\pi}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = 1 + \cos \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = 1 + \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x_3 = 1 + \cos \frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 2.5. Từ phương trình $\cos 3t = \cos \frac{t}{2}$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$8\cos^3 t - 6\cos t = \sqrt{2(1 + \cos t)}.$$

Đặt $x = 2\cos t$, ta được bài toán sau.

Bài toán 2.12. Giải phương trình

$$x^3 - 3x = \sqrt{x+2}. \quad (10)$$

Bài giải. Điều kiện $x \geq -2$. Nếu $x > 2$ thì

$$x^3 - 3x = x + x(x^2 - 4) > x > \sqrt{2x} = \sqrt{x+x} > \sqrt{x+2}.$$

Vậy $x > 2$ không thỏa mãn phương trình (10).

Xét $-2 \leq x \leq 2$. Đặt $x = 2 \cos t$, $t \in [0, \pi]$, phương trình (10) trở thành

$$\begin{aligned} 8 \cos^3 t - 6 \cos t &= \sqrt{2(1 + \cos t)} \Leftrightarrow 4 \cos^3 t - 3 \cos t = \cos \frac{t}{2} \\ \Leftrightarrow \cos 3t &= \cos \frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{t}{2} + k2\pi \\ 3t = -\frac{t}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k\frac{4\pi}{5} \\ t = k\frac{4\pi}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{4\pi}{7}$, $t_3 = \frac{4\pi}{5}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{7}, \quad x_3 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}.$$

Ví dụ 2.6. Từ phương trình $\sin 3t = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} 3 \sin t - 4 \sin^3 t &= \cos t \Leftrightarrow \sin t(3 - 4 \sin^2 t) = \cos t. \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t}(4 \cos^2 t - 1) &= \cos t \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\cos t}{4 \cos^2 t - 1}. \end{aligned}$$

Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau

Bài toán 2.13. Giải phương trình

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{x}{4x^2 - 1}.$$

Bài giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1, x \neq \pm \frac{1}{2}$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}$ nên $\sin t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \cos^2 t} &= \frac{\cos t}{4 \cos^2 t - 1} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t}(4 \cos^2 t - 1) = \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t(3 - 4 \sin^2 t) &= \cos t \Leftrightarrow 3 \sin t - 4 \sin^3 t = \cos t \\ \Leftrightarrow \sin 3t &= \cos t \Leftrightarrow \sin 3t = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = \pi - \frac{\pi}{2} + t + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có: $t_1 = \frac{\pi}{8}$, $t_2 = \frac{5\pi}{8}$, $t_3 = \frac{\pi}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x_3 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 2.7. Từ phương trình $\sin 5t = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} 16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t (16 \sin^4 t - 20 \sin^2 t + 5) &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t [16(1 - \sin^2 t)^2 - 12(1 - \sin^2 t) + 1] &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t} &= \frac{\cos t}{16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1}. \end{aligned}$$

Đặt $x = \cos t$, ta được bài toán sau

Bài toán 2.14. Giải phương trình

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{x}{16x^4 - 12x^2 + 1}.$$

Bài giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$, $16x^4 - 12x^2 + 1 \neq 0$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, $16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1 \neq 0$ nên $\sin t \geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \cos^2 t} &= \frac{\cos t}{16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 t} (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t [16(1 - \sin^2 t)^2 - 12(1 - \sin^2 t) + 1] &= \cos t \\ \Leftrightarrow \sin t (16 \sin^4 t - 20 \sin^2 t + 5) &= \cos t \\ \Leftrightarrow 16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t &= \cos t \Leftrightarrow \sin 5t = \cos t \\ \Leftrightarrow \sin 5t = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \\ t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có:

$$t_1 = \frac{\pi}{12}, \quad t_2 = \frac{\pi}{8}, \quad t_3 = \frac{5\pi}{12}, \quad t_4 = \frac{5\pi}{8}, \quad t_5 = \frac{9\pi}{12}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{12}, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{8}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{12}, \quad x_4 = \cos \frac{5\pi}{8}, \quad x_5 = \cos \frac{3\pi}{4}.$$

Ví dụ 2.8. Từ phương trình $\sin 5t = \cos 3t$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} &16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t = \cos 3t \\ \Leftrightarrow &\sin t (16 \sin^4 t - 20 \sin^2 t + 5) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow &\sin t [16(1 - \sin^2 t)^2 - 12(1 - \sin^2 t) + 1] = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow &\sin t (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow &\sqrt{1 - \cos^2 t} (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t. \end{aligned}$$

Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau

Bài toán 2.15. Giải phương trình

$$\sqrt{1 - x^2} (16x^4 - 12x^2 + 1) = 4x^3 - 3x.$$

Bài giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$ nên $\sin t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 - \cos^2 t} (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow &\sin t (16 \cos^4 t - 12 \cos^2 t + 1) = 4 \cos^3 t - 3 \cos t \\ \Leftrightarrow &\sin t [16(1 - \sin^2 t)^2 - 12(1 - \sin^2 t) + 1] = \cos 3t \\ \Leftrightarrow &\sin t (16 \sin^4 t - 20 \sin^2 t + 5) = \cos 3t \\ \Leftrightarrow &16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t = \cos 3t \Leftrightarrow \sin 5t = \cos 3t \\ \Leftrightarrow &\sin 5t = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3t \right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có:

$$t_1 = \frac{\pi}{16}, \quad t_2 = \frac{\pi}{4}, \quad t_3 = \frac{5\pi}{16}, \quad t_4 = \frac{9\pi}{16}, \quad t_5 = \frac{13\pi}{16}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{16}, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{16}, \quad x_4 = \cos \frac{9\pi}{16}, \quad x_5 = \cos \frac{13\pi}{16}.$$

Ví dụ 2.9. Từ phương trình $\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [0, \pi]$, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} & \sin 3t - \cos 3t = \sin t + \cos t \\ \Leftrightarrow & 3 \sin t - 4 \sin^3 t - 4 \cos^3 t + 3 \cos t = \sin t + \cos t \\ \Leftrightarrow & 2 \cos t + 3 \sin t - 4 \sin^3 t = 4 \cos^3 t + \sin t \\ \Leftrightarrow & 2 \cos t + \sin t(3 - 4 \sin^2 t) = 4 \cos^3 t + \sin t \\ \Leftrightarrow & 2 \cos t + \sqrt{1 - \cos^2 t}(4 \cos^2 t - 1) = 4 \cos^3 t + \sqrt{1 - \cos^2 t}. \end{aligned}$$

Đặt $x = \cos t$ ta được bài toán sau

Bài toán 2.16. Giải phương trình

$$2x + (4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Bài giải. Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$ nên $\sin t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & 2 \cos t + (4 \cos^2 t - 1)\sqrt{1 - \cos^2 t} = 4 \cos^3 t + \sqrt{1 - \cos^2 t} \\ \Leftrightarrow & 2 \cos t + \sin t [4(1 - \sin^2 t) - 1] = 4 \cos^3 t + \sin t \\ \Leftrightarrow & 2 \cos t + \sin t(3 - 4 \sin^2 t) = 4 \cos^3 t + \sin t \\ \Leftrightarrow & 3 \sin t - 4 \sin^3 t - 4 \cos^3 t + 3 \cos t = \sin t + \cos t \\ \Leftrightarrow & \sin 3t - \cos 3t = \sin t + \cos t \Leftrightarrow \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow & \sin 5t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $t \in [0, \pi]$ nên ta có:

$$t_1 = \frac{\pi}{16}, \quad t_2 = \frac{\pi}{4}, \quad t_3 = \frac{5\pi}{16}, \quad t_4 = \frac{9\pi}{16}, \quad t_5 = \frac{13\pi}{16}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{16}, \quad x_2 = \cos \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \cos \frac{5\pi}{16}, \quad x_4 = \cos \frac{9\pi}{16}, \quad x_5 = \cos \frac{13\pi}{16}.$$

Ví dụ 2.10 (Xem [6]). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases} \quad (11)$$

Bài giải.

Nếu $x^2 = 1$ thì từ phương trình đầu của hệ ta có $\pm 2 = 0$ (vô lý).

Vậy $x^2 \neq 1$.

Tương tự ta cũng có $y^2 \neq 1$, $z^2 \neq 1$. Do đó

$$(11) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} \\ z = \frac{2y}{1-y^2} \\ x = \frac{2z}{1-z^2} \end{cases} \quad (12)$$

Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{\pm\frac{\pi}{4}\}$, khi đó (12) trở thành

$$\begin{cases} y = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t} = \tan 2t \\ z = \frac{2 \tan 2t}{1 - \tan^2 2t} = \tan 4t \\ x = \frac{2 \tan 4t}{1 - \tan^2 4t} = \tan 8t \end{cases} \quad (*)$$

Từ $x = \tan t$ và từ (*) ta có $\tan 8t = \tan t \Leftrightarrow 8t = t + k\pi \Leftrightarrow t = k\frac{\pi}{7}$.

Vì $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{\pm\frac{\pi}{4}\}$ nên ta được $k \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 7 nghiệm là

$$\begin{cases} x = \tan \frac{k\pi}{7} \\ y = \tan \frac{k2\pi}{7} \\ z = \tan \frac{k4\pi}{7} \end{cases}, \quad k \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}.$$

Ví dụ 2.11 (Xem [6]). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \quad (13)$$

Bài giải.

Nhận xét rằng nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ thì $(-x, -y, -z)$ cũng là nghiệm

và x, y, z phải cùng dấu.

Giả sử rằng $x > 0, y > 0, z > 0$. Từ (13) ta suy ra

$$3 \left(\frac{x^2 + 1}{2x} \right) = 4 \left(\frac{y^2 + 1}{2y} \right) = 5 \left(\frac{z^2 + 1}{2z} \right).$$

Đặt $x = \tan \frac{\alpha}{2}, y = \tan \frac{\beta}{2}, z = \tan \frac{\gamma}{2}, (\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi))$.

Ta có

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{x^2 + 1}{2x}, \frac{1}{\sin \beta} = \frac{y^2 + 1}{2y}, \frac{1}{\sin \gamma} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Suy ra

$$\frac{3}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \gamma}. \quad (14)$$

Ta chứng minh rằng nếu $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a = 1$ thì $\tan(a+b+c)$ không xác định.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \tan(a+b+c) &= \frac{\tan(a+b) + \tan c}{1 - \tan(a+b) \tan c} \\ &= \frac{\tan(a+b) + \tan c}{1 - \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \tan c} \\ &= \frac{[\tan(a+b) + \tan c] (1 - \tan a \tan b)}{1 - [\tan a \tan b + \tan a \tan c + \tan b \tan c]}. \end{aligned}$$

Vì $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a = 1$ nên $\tan(a+b+c)$ không xác định.

Áp dụng điều này ta có $xy + yz + zx = 1$ nên $\tan \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right)$ không xác định.

Vì $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ ta suy ra $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ hay chúng là 3 góc của một tam giác.

Theo (14) và theo định lý sin ta có thể giả thiết 3 cạnh của tam giác đó là 3, 4, 5.

Từ đó

$$\begin{aligned} x = \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}. \\ y = \tan \frac{\beta}{2} &= \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}. \\ z = \tan \frac{\gamma}{2} &= \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{1 - 0}{1} = 1. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$ và $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

Ví dụ 2.12 (Xem [6]). Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} |x| + |y| &= 1 & (**) \\ x^2 + y^2 &= m \end{cases} \quad (15)$$

Bài giải. Từ phương trình $(**)$ ta có $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Do đó ta có thể đặt

$$|x| = \sin^2 t, \quad |y| = \cos^2 t.$$

Khi đó phương trình $(**)$ trở thành: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (luôn đúng với mọi $t \in \mathbb{R}$).
Từ đó ta có hệ phương trình (15) tương đương với:

$$\sin^4 t + \cos^4 t = m \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t \cos^2 t = m \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t = m \\ &\Leftrightarrow \cos 4t = 4m - 3 \quad (17) \end{aligned}$$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình (17) có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq 4m - 3 \leq 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

2.3 Sử dụng lượng giác để khảo sát bất phương trình

Trong phần này ta thường dùng các phép đặt

$$x = \sin t, x = \cos t, x = \tan t, \dots$$

được thể hiện qua các ví dụ sau:

Các ví dụ

Ví dụ 2.13. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1. \quad (18)$$

Bài giải. Điều kiện $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Đặt $x = \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos t > 0$.

Bất phương trình (18) trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\sin^2 t} &> \frac{3\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 t} &> \frac{3\sin t}{\cos t} - 1 \Leftrightarrow \tan^2 t - 3\tan t + 2 > 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \tan t < 1 \\ \tan t > 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{4} \\ \arctan 2 < t < \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó

$$(18) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) < x < \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin(\arctan 2) < x < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\arctan 2) < x < 1 \end{cases}$$

(Do hàm số sin đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)

$$\text{Mặt khác } \sin(\arctan 2) = \frac{\tan(\arctan 2)}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan 2)}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy bất phương trình (18) có nghiệm là

$$-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc } \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1.$$

Ví dụ 2.14 (Xem [6]). Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2+a^2} \leq x + \frac{2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}. \quad (19)$$

Bài giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $x = |a| \tan \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó bất phương trình (19) có dạng

$$\begin{aligned} \frac{|a|}{\cos \alpha} &\leq |a| \tan \alpha + \frac{2a^2}{|a|} \cos \alpha \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \sin \alpha + 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \tan \alpha \geq -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \geq \frac{|a|}{\sqrt{3}}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là: $x \geq \frac{|a|}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2.15 (Xem [6]). Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} > m\sqrt{x-x^2} + 1.$$

Bài giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$.

Đặt $x = \cos^2 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ta thu được bất phương trình

$$\cos t + \sin t > m \sin t \cos t + 1. \quad (20)$$

Đặt $u = \cos t + \sin t$, $u \in [1, \sqrt{2}]$ nên $\sin t \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}$.

Khi đó (20) trở thành

$$2u > m(u^2 - 1) + 2 \Leftrightarrow 2(u - 1) > m(u^2 - 1). \quad (21)$$

- Nếu $u = 1$ thì (21) $\Leftrightarrow 2 \cdot 0 > m \cdot 0$ (vô lý). Suy ra bất phương trình không có nghiệm $u = 1$.
- Nếu $u \in (1; \sqrt{2}]$ thì ta có $u - 1 > 0, u + 1 > 0$ nên

$$(21) \Leftrightarrow m < \frac{2}{u+1} = f(u).$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình (20) có nghiệm $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ hay là (21) có nghiệm $u \in [1, \sqrt{2}]$.

Điều kiện cần và đủ để xảy ra điều đó là $m < \max_{(1, \sqrt{2}]} f(u)$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m < 1$.

Bài tập tương tự

Bài tập 2.1 (Xem [6]). Giải các phương trình sau

1) $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$.

$$2) (1 - m^2)^x + (2m)^x = (1 + m^2)^x, \quad (0 < m < 1).$$

$$3) (3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3.$$

$$4) 3^{x^3+x+2} + (x^3 - 3x + 1) \cdot 3^{2x-x^3} = 3^{4x+1}.$$

Bài tập 2.2. Giải các hệ phương trình sau

$$1) \begin{cases} x^3(1 + 3y) = 8 \\ x(y^3 - 1) = 6 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 - 3x = y(1 - 3x^2) \\ y^3 - 3y = z(1 - 3y^2) \\ z^3 - 3z = x(1 - 3z^2) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x^2 + xy)(y + 2z) = \frac{1}{8} \\ x^2 + y^2 + 3xy + 4xz + 2yz = -\frac{3}{4} \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad (x < 0 < y, z).$$

$$4) \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 2y \\ y - \frac{1}{y} = 2z \\ z - \frac{1}{z} = 2x \end{cases}.$$

Bài tập 2.3 (Xem [6]). Chứng minh rằng phương trình $16x^5 - 20x^3 + 5x + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Bài tập 2.4 (Xem [6]). Phương trình $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$ có bao nhiêu nghiệm nằm trong khoảng $(0; 1)$?

Chương 3

Bất đẳng thức đại số và các bài toán cực trị giải bằng biến đổi lượng giác

Ta nhắc lại một số bất đẳng thức lượng giác quen biết trong chương trình toán phổ thông.

Tính chất 3.1. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}. \quad (3.1)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Tính chất 3.2. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (3.2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Tính chất 3.3. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (3.3)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Tính chất 3.4. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}. \quad (3.4)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Tính chất 3.5. Với mọi tam giác ABC ta có

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1. \quad (3.5)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Tính chất 3.6. Với mọi tam giác ABC nhọn, ta có

$$\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1. \quad (3.6)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

3.1 Bất đẳng thức đại số giải bằng biến đổi lượng giác

Trong phần này ta chứng minh một số bất đẳng thức đại số có điều kiện ràng buộc ban đầu.

Bài toán 3.1 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$a + b + c = 1.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \leq \frac{9}{4}.$$

Nhận xét 3.1. Từ điều kiện giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy vai trò của các biến a, b, c như nhau, nhưng bất đẳng thức cần chứng minh không thuần nhất sẽ tạo cho học sinh biến đổi để sử dụng các bất đẳng thức cổ điển như Cauchy, Bunhiacopski... rất khó khăn. Việc biến đổi giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$a + b + c = \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{bc}{a}} = 1$$

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} = \frac{1}{1 + \frac{bc}{a}} + \frac{1}{1 + \frac{ca}{b}} + \frac{1}{1 + \frac{ab}{c}}$$

Và áp dụng bất đẳng thức (3.1), ta có lời giải sau.

Bài giải. Ta có

$$a + b + c = \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{bc}{a}} = 1. \quad (22)$$

Đặt

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan \frac{A}{2}, \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan \frac{B}{2}, \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{C}{2}; \quad A, B, C \in (0; \pi).$$

Từ giả thiết (22) và (1.3), ta có $A + B + C = \pi$.

Áp dụng bất đẳng thức (3.1), ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} \\ &= \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\cos A + \cos B + \cos C) + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \leq \frac{9}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Hoàn toàn tương tự như bài toán 3.1 ta sẽ có được lời giải bài toán 3.2.

Bài toán 3.2 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi, thỏa mãn điều kiện:

$$a + b + c = 1$$

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3} \left(\frac{bc}{a+bc} - \frac{\sqrt{abc}}{c+ab} \right) + \frac{\sqrt{abc}}{b+ca} \geq \frac{2\sqrt{3}-5}{4}.$$

Bài giải.

Ta có

$$a + b + c = \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{bc}{a}} = 1. \quad (23)$$

Đặt:

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan \frac{A}{2}, \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan \frac{B}{2}, \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{C}{2}; \quad A, B, C \in (0; \pi).$$

Từ giả thiết (23) và (1.3), ta có $A + B + C = \pi$

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{3} \left(\frac{\tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} - \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} \right) + \frac{\tan \frac{B}{2}}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} \\ &= \sqrt{3} \left(\sin^2 \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sin C \right) + \frac{1}{2} \sin B \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos A - \sin C) + \frac{1}{2} \sin B \\ &= -\frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos A - \sin B + \sqrt{3} \sin C) + \frac{\sqrt{3}}{2} \geq -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\min Q = \frac{2\sqrt{3} - 5}{4}, \quad \text{khi} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = b = 2\sqrt{3} - 3 \\ c = 7 - 4\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Bài toán 3.3 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$ab + bc + ca = abc.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a + bc} + \sqrt{3} \left(\frac{b}{b + ca} + \frac{c}{c + ab} \right) \geq \frac{4\sqrt{3} - 3}{4}.$$

Nhận xét 3.2. Ta biến đổi giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Và

$$\frac{a}{a + bc} + \sqrt{3} \left(\frac{b}{b + ca} + \frac{c}{c + ab} \right) = \frac{1}{1 + \frac{bc}{a}} + \sqrt{3} \left(\frac{1}{1 + \frac{ca}{b}} + \frac{1}{1 + \frac{ab}{c}} \right).$$

Ta có lời giải sau.

Bài giải.

Ta có

$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}} \quad (24)$$

Đặt

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan A, \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan B, \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan C; \quad A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ giả thiết (24) và (1.4), ta có $A + B + C = \pi$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+bc} + \sqrt{3}\left(\frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab}\right) &= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \sqrt{3}\left(\frac{1}{1+\tan^2 B} + \frac{1}{1+\tan^2 C}\right) \\ &= \cos^2 A + \sqrt{3}(\cos^2 B + \cos^2 C) = \frac{1}{2}(\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C)) + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ &\geq -\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}-3}{4} \end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{a}{a+bc} + \sqrt{3}\left(\frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab}\right) \geq \frac{4\sqrt{3}-3}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A = \frac{\pi}{6} \\ B = C = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 7 + 4\sqrt{3} \\ b = c = \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bài toán 3.4 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$abc = a + b + c + 2.$$

Chứng minh rằng:

$$2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}\right) \leq 4 + abc.$$

Nhận xét 3.3. Sử dụng phép biến đổi

$$abc = a + b + c + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} + 2\frac{1}{abc} = 1.$$

Ta nhận thấy do a, b, c là ba số thực dương, suy ra

$$\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab} \in (0; 1).$$

Ta có lời giải bài toán.

Bài giải.

Từ điều kiện ta có

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} + 2\frac{1}{abc} = 1.$$

Do a, b, c là ba số thực dương, suy ra

$$\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab} \in (0; 1).$$

Đặt

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} = \cos A, \frac{1}{\sqrt{ca}} = \cos B, \frac{1}{\sqrt{ab}} = \cos C; \quad A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ điều kiện bài toán, ta có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1 \quad (25)$$

Từ giả thiết (25) và (1.2), ta có $A + B + C = \pi$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \right) &\leq 4 + \frac{1}{\cos A \cos B \cos C} \\ \Leftrightarrow 2 (\cos B \cos C + \cos C \cos A + \cos A \cos B) &\leq 4 \cos A \cos B \cos C + 1 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 2.$$

Bài toán 3.5. (Iran-2005). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} = 2.$$

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq \frac{3}{2}$.

Nhận xét 3.4. * Nhìn vào giả thiết của bài toán ta rất khó hình dung ra đây là bài toán có mối quan hệ với các đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác.

* Nhưng nếu sử dụng phép biến đổi từ giả thiết:

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2(abc)^2 = 1.$$

Và nhận thấy a, b, c là ba số thực dương, suy ra

$$ab, bc, ca \in (0; 1).$$

Đặt

$$bc = \cos A, ca = \cos B, ab = \cos C; \quad A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ điều kiện bài toán, ta có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1. \quad (26)$$

Từ giả thiết (26) và (1.2), ta có $A + B + C = \pi$.

Bài giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh đưa về bất đẳng thức lượng giác cơ bản trong tam giác:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nhận xét 3.5. • Hoàn toàn tương tự ta cũng có thể xây dựng và chứng minh được các bất đẳng thức đại số có điều kiện ràng buộc ban đầu xuất phát từ các hệ thức lượng giác và các bất đẳng thức lượng giác khác trong tam giác.

Bài toán 3.6. Cho a, b, c, d liên hệ bởi: $a = c\sqrt{1 - d^2}; b = d\sqrt{1 - c^2}$. (27)

Chứng minh rằng: $|a| + |b| \leq 1$.

Bài giải.

Điều kiện có nghĩa: $|c| \leq 1; |d| \leq 1$.

Từ (27) ta có $|a| = |c| \cdot \sqrt{1 - |d|^2}, |b| = |d| \cdot \sqrt{1 - |c|^2}$.

Đặt $|c| = \cos \alpha; |d| = \cos \beta$ với $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} |a| + |b| &= \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \beta} + \cos \beta \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha \\ &= \sin(\alpha + \beta) \leq 1. \end{aligned}$$

Bài toán 3.7 (Xem [6]). Cho bốn số u, v, x, y thoả mãn điều kiện:

$$u^2 + v^2 = x^2 + y^2 = 1.$$

Chứng minh rằng: $|u(x + y) + v(x - y)| \leq \sqrt{2}$.

Bài giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin \alpha \\ v = \cos \alpha \\ x = \sin \beta \\ y = \cos \beta \end{cases} \text{ và } A = |u(x + y) + v(x - y)|.$$

Ta có

$$\begin{aligned} A &= |\sin \alpha (\sin \beta + \cos \beta) + \cos \alpha (\sin \beta - \cos \beta)| \\ &= |\sin (\alpha + \beta) - \cos (\alpha + \beta)| \\ &= \left| \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy $|u(x + y) + v(x - y)| \leq \sqrt{2}$ (điều phải chứng minh).

Bài toán 3.8. Cho $a > 0, b > 0$ và $a + b = 1$. Chứng minh rằng:

$$\text{a, } ab \leq \frac{1}{4};$$

$$\text{b, } \frac{2}{3} \leq \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi nào?

Bài giải.

Từ giả thiết $a > 0, b > 0$ và $a + b = 1$, suy ra tồn tại góc α thuộc $[0; \pi]$ sao cho

$$\begin{cases} a = \cos^2 \alpha \\ b = \sin^2 \alpha \end{cases}$$

a, Ta có $ab = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \leq \frac{1}{4}$ (điều phải chứng minh).

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ tức là $a = b = \frac{1}{2}$.

b, Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} &= \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \sin^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha)} \\ &= \frac{2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2 + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \leq 1 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\sin \alpha \cos \alpha = 0$ tức là $a = 1$; $b = 0$ hoặc $a = 0$; $b = 1$.

Lại có

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} - \frac{2}{3} = \frac{2 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha}{2 + \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha} - \frac{2}{3} = \frac{2(1 - \sin^2 2\alpha)}{3 \left(2 + \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)} \geq 0; \forall \alpha \in [0; \pi].$$

Từ đó suy ra dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

tức là $a = b = \frac{1}{2}$.

Vậy $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \geq \frac{2}{3}$.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài toán 3.9. Cho $a, b, x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện: $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$.

Chứng minh rằng: $x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

Bài giải.

Vì $a, b, x, y > 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ nên $\exists \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho : $\begin{cases} \frac{a}{x} = \cos^2 \alpha \\ \frac{b}{y} = \sin^2 \alpha \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos^2 \alpha} \\ y = \frac{b}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$ và $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \tan^2 \alpha$.

Ta có

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{a}{\cos^2 \alpha} + \frac{b}{\sin^2 \alpha} = a(1 + \tan^2 \alpha) + b(1 + \cot^2 \alpha) \\ &= a + b + a \tan^2 \alpha + b \cot^2 \alpha \geq a + b + 2\sqrt{a b \cot^2 \alpha \tan^2 \alpha} \\ &\text{hay } x + y \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$a \tan^2 \alpha = b \cot^2 \alpha = \frac{b}{\tan^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \tan^4 \alpha = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Bài toán 3.10. Cho $|a| \geq 1; |b| \geq 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1} \leq |ab|$. (28)

Bài giải.

Vì $|a| \geq 1; |b| \geq 1$ nên $ab \neq 0$.

$$(28) \Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1}}{ab} \right| \leq 1.$$

Vì $|a| \geq 1; |b| \geq 1$ nên ta có thể đặt $a = \frac{1}{\cos \alpha}; b = \frac{1}{\cos \beta}$

với $\alpha, \beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1}}{ab} &= \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} + \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1}}{\frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{\cos \beta}} = \cos \alpha \cos \beta (\tan \alpha + \tan \beta) = \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Vậy $\left| \frac{\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1}}{ab} \right| = |\sin(\alpha + \beta)| \leq 1$, ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3.11. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} \left[\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3} \right] \leq 2\sqrt{2} + \sqrt{2 - 2x^2}.$$

Bài giải.

Điều kiện có nghĩa $|x| \leq 1$.

Đặt $x = \cos \alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$.

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sin \alpha} \left[\sqrt{(1 + \cos \alpha)^3} - \sqrt{(1 - \cos \alpha)^3} \right] &\leq 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin \alpha \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos^3 \frac{\alpha}{2} - \sin^3 \frac{\alpha}{2} \right) &\leq \sqrt{2} (2 + \sin \alpha) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \alpha (2 + \sin \alpha) &\leq \sqrt{2} (2 + \sin \alpha) \\ \Leftrightarrow (2 + \sin \alpha)(\cos \alpha - 1) &\leq 0 \text{ (luôn đúng với mọi } \alpha \in [0, \pi] \text{)}. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 3.12. Chứng minh rằng với mọi x, y ta có:

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Bài giải.

Đặt $x = \tan \alpha; y = \tan \beta$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)(1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2(1 + \tan^2 \beta)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Thật vậy đặt $A = \frac{(\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)(1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2(1 + \tan^2 \beta)^2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{1} \\ &= \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\cos^4 \alpha \cos^4 \beta} \\ &= \frac{1}{4} \sin [2(\alpha - \beta)] \sin [2(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Do đó

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{(\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)(1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2(1 + \tan^2 \beta)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

$$+, A = \frac{1}{4} \text{ khi và chỉ khi hoặc } \begin{cases} \sin [2(\alpha - \beta)] = 1 \\ \sin [2(\alpha + \beta)] = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin [2(\alpha - \beta)] = -1 \\ \sin [2(\alpha + \beta)] = -1 \end{cases}$$

$$\text{Chẳng hạn, } \begin{cases} 2(\alpha - \beta) = \frac{\pi}{2} \\ 2(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2(\alpha - \beta) = -\frac{\pi}{2} \\ 2(\alpha + \beta) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

hay $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}; \beta = 0$, tức là : $x = \pm 1; y = 0$.

$$+, A = -\frac{1}{4} \text{ khi và chỉ khi hoặc } \begin{cases} \sin [2(\alpha - \beta)] = 1 \\ \sin [2(\alpha + \beta)] = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin [2(\alpha - \beta)] = -1 \\ \sin [2(\alpha + \beta)] = 1 \end{cases}$$

$$\text{Chẳng hạn: } \begin{cases} 2(\alpha - \beta) = \frac{\pi}{2} \\ 2(\alpha + \beta) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2(\alpha - \beta) = -\frac{\pi}{2} \\ 2(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

hay $\alpha = 0; \beta = \pm \frac{\pi}{4}$ tức là : $x = 0; y = \pm 1$.

Bài toán 3.13 (Xem [6]). Cho các số x, y, z thoả mãn: $\begin{cases} 0 < x, y, z < 1 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài giải.

Đặt $A = \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$.

Vì $0 < x, y, z < 1$ nên ta đặt $x = \tan \alpha$; $y = \tan \beta$; $z = \tan \gamma$, với $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4}$.

Từ giả thiết: $xy + yz + zx = 1$, ta có $\tan \alpha \tan \beta + \tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha = 1$

$\Leftrightarrow \tan \beta (\tan \alpha + \tan \gamma) = 1 - \tan \alpha \tan \gamma$.

Vì $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4}$ nên $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma > 0$ suy ra

$$\tan \beta (\tan \alpha + \tan \gamma) > 0$$

nên $\tan \alpha \tan \gamma = 1$ không là nghiệm hay $1 - \tan \alpha \tan \gamma \neq 0$.

Do đó

$$\begin{aligned} \tan \beta \left(\frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \gamma} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \tan \beta \tan(\alpha + \gamma) &= 1 \end{aligned}$$

(vì $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4}$ nên $0 < \alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ do đó $\tan(\alpha + \gamma)$ được xác định)

hay $\sin \beta \sin(\alpha + \gamma) = \cos \beta \cos(\alpha + \gamma) \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} 2A &= \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} \\ &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} + \frac{2 \tan \gamma}{1 - \tan^2 \gamma} \\ &= \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma \end{aligned}$$

Mặt khác $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ nên $\tan(2\alpha + 2\beta) = \tan(\pi - 2\gamma)$.

Cũng do $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4}$ nên $\tan 2\alpha \tan 2\beta \tan 2\gamma$ có nghĩa nên

$$\begin{aligned} \frac{\tan 2\alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan 2\alpha \tan 2\beta} &= -\tan 2\gamma \\ \Leftrightarrow \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma &= \tan 2\alpha \cdot \tan 2\beta \cdot \tan 2\gamma. \end{aligned}$$

Do đó $2A = \tan 2\alpha + \tan 2\beta + \tan 2\gamma = \tan 2\alpha \cdot \tan 2\beta \cdot \tan 2\gamma$

$$\text{hay } 2A = \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}.$$

$$\text{Suy ra } 2A \geq 3\sqrt[3]{\frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}} = 3\sqrt[3]{2A}$$

hay

$$8A^3 \geq 27.2A.$$

Vậy $A \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 3.14. Cho nhị thức $ax + b$ thoả mãn điều kiện

$$\sqrt{1-x^2} |ax + b| \leq 1, \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng :

$$1, |a| \leq 2.$$

$$2, |ax + b| \leq 2, \forall x \in [-1; 1].$$

Bài giải.

1, Đặt $x = \cos t$, từ giả thiết ta có $|\sin t(a \cos t + b)| \leq 1, \forall t$.

Do đó

$$\text{với } t = \frac{\pi}{4} \text{ ta có } \left| a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right| \leq 1$$

$$\text{với } t = \frac{3\pi}{4} \text{ ta có } \left| -a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right| \leq 1.$$

Mặt khác:

$$|a| = \left| a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} - \left(-a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right) \right| \leq \left| a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right| + \left| -a \cdot \frac{1}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right| \leq 2.$$

Vậy $|a| \leq 2$ (điều phải chứng minh).

2, Nếu $\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq 1$ thì

$$\begin{aligned} |ax + b| &= \left| \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| \\ &\leq \left| \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right) \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| + \left| \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right| \\ &\leq x + \frac{1}{\sqrt{2}} + x - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{hay } |ax + b| \leq 2x \leq 2, \forall x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right].$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $|ax + b| \leq 2, \forall x \in \left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$.

Nếu $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $x^2 \leq \frac{3}{4}$. Khi đó ta có

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $|ax+b| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq 2$.

Vậy $|ax+b| \leq 2, \forall x \in [-1; 1]$ (điều phải chứng minh).

Bài toán 3.15. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ và với mọi a , ta có:

$$-(1+a^2)^n \leq (2a)^n + (1-a^2)^n \leq (1+a^2)^n.$$

Bài giải.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$-1 \leq \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^n + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n \leq 1.$$

Đặt $\tan \frac{\alpha}{2} = a$ với $-\pi < \alpha < \pi$ ta có

$$\frac{2a}{1+a^2} = \sin \alpha; \frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos \alpha.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$-1 \leq \sin^n \alpha + \cos^n \alpha \leq 1.$$

Thật vậy ta có

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -\sin^2 \alpha \leq \sin^n \alpha \leq \sin^2 \alpha, \forall n \geq 2.$$

Tương tự

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow -\cos^2 \alpha \leq \cos^n \alpha \leq \cos^2 \alpha, \forall n \geq 2.$$

Do đó $-1 \leq \sin^n \alpha + \cos^n \alpha \leq 1$, bài toán được chứng minh.

3.2 Sử dụng lượng giác hóa trong bài toán cực trị

Ta thường gặp trong việc giải các bài toán với các hàm đại số nhiều biến ở dạng

"Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $u = f(x, y)$ biết $x^2 + y^2 = 1$." Khi đó ta thường lựa chọn việc đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$.

Các bước thực hiện:

- Lượng giác hóa hàm số.
- Thực hiện tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác.
- Kết luận

Ví dụ 3.1 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab}.$$

Nhận xét 3.6. * Với giả thiết hoàn toàn tương tự như bài toán 3.1, nhưng việc tìm giá trị lớn nhất của biểu thức Q không đối xứng với các biến a, b, c là một bài toán khó.

* Khi tiếp cận được cách giải của bài toán 3.1 thì ta có thể biến đổi biểu thức Q về dạng lượng giác mà việc tìm giá trị lớn nhất của biểu thức lượng giác đó không phức tạp ta có lời giải sau.

Bài giải.

Ta có

$$a + b + c = \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \sqrt{\frac{bc}{a}} = 1 \quad (29)$$

Đặt

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan \frac{A}{2}, \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan \frac{B}{2}, \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{C}{2}; \quad A, B, C \in (0; \pi).$$

Từ giả thiết (29) và (1.3), ta có $A + B + C = \pi$

Ta có

$$Q = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} = 1 + \frac{1}{2} (\cos A + \cos B + \sin C) \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Suy ra

$$\max Q = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ khi } a = b = 2\sqrt{3} - 3, c = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Ví dụ 3.2 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$ab + bc + ca = abc.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{a + bc} + \frac{b}{b + ca} + \frac{c}{c + ab}.$$

Nhận xét 3.7. Ta biến đổi giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Và

$$\frac{a}{a + bc} + \frac{b}{b + ca} + \frac{c}{c + ab} = \frac{1}{1 + \frac{bc}{a}} + \frac{1}{1 + \frac{ca}{b}} + \frac{1}{1 + \frac{ab}{c}}.$$

Ta có lời giải sau.

Bài giải.

Ta có

$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} = \sqrt{\frac{bc}{a}} \sqrt{\frac{ca}{b}} \sqrt{\frac{ab}{c}}. \quad (30)$$

Đặt

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \tan A, \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan B, \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan C; A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ giả thiết (30) và (1.4), ta có $A + B + C = \pi$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{a + bc} + \frac{b}{b + ca} + \frac{c}{c + ab} &= \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \tan^2 B} + \frac{1}{1 + \tan^2 C} \\ &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\min P = \frac{3}{4} \text{ khi } a = b = c = 3.$$

Ví dụ 3.3 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện

$$abc + a + b = c.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{c^2}{c^2 + 1}.$$

Nhận xét 3.8. * Ta biến đổi giả thiết và biểu thức Q về dạng:

$$abc + a + b = c \Leftrightarrow a.b + b.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.a = 1.$$

Và

$$Q = \frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} - \frac{1}{1 + \frac{1}{c^2}}.$$

Khi đó thực hiện phép đặt ẩn phụ đưa bài toán về tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức lượng giác và ta có lời giải sau

Bài giải.

Từ điều kiện ta có

$$a.b + b.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.a = 1 \quad (31)$$

Đặt

$$a = \tan \frac{A}{2}, b = \tan \frac{B}{2}, \frac{1}{c} = \tan \frac{C}{2}; A, B, C \in (0; \pi).$$

Từ giả thiết (31) và (1.3), ta có $A + B + C = \pi$.

Với cách đặt trên thì

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} - \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} = \frac{1}{2} (\sin A + \sin B - \cos C) - \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\max Q = \frac{1}{4}, \text{ khi } \begin{cases} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = b = 2 - \sqrt{3} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 3.4 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$abc + a + b = c.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{2(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} + \frac{c}{1+c^2}.$$

Nhận xét 3.9. Tương tự cách biến đổi như ví dụ 3.3, ta có lời giải.

Bài giải.

Từ điều kiện ta có

$$a.b + b.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.a = 1 \quad (32)$$

Đặt:

$$a = \tan \frac{A}{2}, b = \tan \frac{B}{2}, \frac{1}{c} = \tan \frac{C}{2}; A, B, C \in (0; \pi).$$

Từ giả thiết (32) và (1.3), ta có $A + B + C = \pi$

Với cách đặt trên thì

$$\begin{aligned} Q &\leq \frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} + \frac{c}{1+c^2} = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1+\tan^2 \frac{C}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C) \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\max Q = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ khi } \begin{cases} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = b = 2 - \sqrt{3} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Ví dụ 3.5 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$ab = 1 + bc + ca.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1}.$$

Nhận xét 3.10. * Khi thay đổi giả thiết của các ví dụ 3.3,3.4 bởi các giả thiết khác ta được các bài toán mới mà cách giải không thay đổi.

* Ta thực hiện phép biến đổi giả thiết

$$ab = 1 + bc + ca \Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot c + c \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

* Ta có cách giải của bài toán như sau.

Bài giải. Từ điều kiện ta có

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot c + c \cdot \frac{1}{a} = 1. \quad (33)$$

Đặt

$$\frac{1}{a} = \tan \frac{A}{2}, \frac{1}{b} = \tan \frac{B}{2}, c = \tan \frac{C}{2}; \quad A, B, C \in (0; \pi).$$

Từ giả thiết (33) và (1.3), ta có $A + B + C = \pi$.

Với cách đặt trên ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} = \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{2} \sin C \\ &= \frac{1}{2} (\cos A + \cos B + \sin C) + 1 \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\max Q = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1, \quad \text{khi} \quad \begin{cases} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = b = 2 + \sqrt{3} \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$$

Ví dụ 3.6 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$ab = 1 + bc + ca.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{3}}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} - \frac{\sqrt{3} \cdot c}{c^2 + 1}.$$

Bài giải.

Từ điều kiện ta có

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \cdot c + c \cdot \frac{1}{a} = 1. \quad (34)$$

Đặt

$$\frac{1}{a} = \tan \frac{A}{2}, \frac{1}{b} = \tan \frac{B}{2}, c = \tan \frac{C}{2}; \quad A, B, C \in (0; \pi).$$

Từ giả thiết (34) và (1.3), ta có $A + B + C = \pi$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{3} \tan^2 \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} - \frac{\sqrt{3} \tan \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}} = \sqrt{3} \sin^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos A) + \frac{1}{2} \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C = -\frac{\sqrt{3}}{2} (\cos A + \sin C) + \frac{1}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\min P = \frac{2\sqrt{3} - 5}{4}, \quad \text{khi} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = B = \frac{\pi}{6} \\ C = \frac{2\pi}{3} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = b = 2 + \sqrt{3} \\ c = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

Ví dụ 3.7 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$ab = 1 + bc + ca.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{b^2 + 1} - \frac{\sqrt{3}}{c^2 + 1}.$$

Bài giải.

Từ điều kiện ta có

$$a \cdot b \cdot \frac{1}{c} = a + b + \frac{1}{c} \quad (35)$$

Đặt

$$a = \tan A, b = \tan B, \frac{1}{c} = \tan C; \quad A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ giả thiết (35) và (1.4), ta có $A + B + C = \pi$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{\sqrt{3}}{1 + \tan^2 B} - \frac{\sqrt{3}\tan^2 C}{1 + \tan^2 C} = \cos^2 A + \sqrt{3}\cos^2 B - \sqrt{3}\sin^2 C \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos 2B) - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos 2C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2A + \sqrt{3}(\cos 2B + \cos 2C)) \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\min P = -\frac{3}{4}, \text{ khi } \begin{cases} A = \frac{\pi}{6} \\ B = C = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = 2 + \sqrt{3} \\ c = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Ví dụ 3.8 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$ab + bc + ca + abc = 4.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = ab + bc + ca + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Nhận xét 3.11. Ta biến đổi giả thiết về dạng:

$$\frac{bc}{4} + \frac{ca}{4} + \frac{ab}{4} + 2\sqrt{\frac{bc}{4}}\sqrt{\frac{ca}{4}}\sqrt{\frac{ab}{4}} = 1.$$

Và do a, b, c là các số thực dương nên suy ra $bc, ca, ab \in (0; 4)$.

Bài giải.

Đặt

$$\sqrt{bc} = 2 \cos A, \sqrt{ca} = 2 \cos B, \sqrt{ab} = 2 \cos C; \quad A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ điều kiện bài toán, ta có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1. \quad (36)$$

Từ giả thiết (36) và (1.2), ta có $A + B + C = \pi$.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= 4(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) + 2(\cos A + \cos B + \cos C) \\ &= 4(1 - 2\cos A \cos B \cos C) + 2\left(1 + 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) \\ &= 6 + 8\left(\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \cos A \cos B \cos C\right) \geq 6. \end{aligned}$$

Vậy $\min P = 6$ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.9 (Xem [5]). Cho ba số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện:

$$a + b + c + 1 = 4abc.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{\sqrt{4bc-1}}{bc} + \frac{\sqrt{4ca-1}}{ca} + \frac{1}{ab}.$$

Nhận xét.

* Nhìn vào giả thiết của bài toán ta rất khó hình dung ra đây là bài toán có mối quan hệ với các đẳng thức, bất đẳng thức lượng giác.

* Nhưng nếu sử dụng phép biến đổi:

$$a + b + c + 1 = 4abc \Leftrightarrow \frac{1}{4bc} + \frac{1}{4ca} + \frac{1}{4ab} + 2\frac{1}{8abc} = 1.$$

Và nhận thấy a, b, c là ba số thực dương, suy ra

$$\frac{1}{4bc}, \frac{1}{4ca}, \frac{1}{4ab} \in (0; 1).$$

Từ đó ta có cách đặt để đưa Q về dạng lượng giác mà việc tìm giá trị lớn nhất của Q đơn giản chỉ dùng công thức biến đổi lượng giác.

Ta có lời giải sau.

Bài giải.

Từ điều kiện ta có

$$\frac{1}{4bc} + \frac{1}{4ca} + \frac{1}{4ab} + 2\frac{1}{8abc} = 1.$$

Do a, b, c là ba số thực dương, suy ra

$$\frac{1}{4bc}, \frac{1}{4ca}, \frac{1}{4ab} \in (0; 1).$$

Đặt

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} = 2 \cos A, \frac{1}{\sqrt{ca}} = 2 \cos B, \frac{1}{\sqrt{ab}} = 2 \cos C; \quad A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Từ điều kiện bài toán, ta có

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1. \quad (37)$$

Từ giả thiết (37) và (1.2), ta có $A + B + C = \pi$.

Với cách đặt trên ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{4bc-1}}{bc} + \frac{\sqrt{4ca-1}}{ca} + \frac{1}{ab} = 4\cos^2 A \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 A} - 1} + 4\cos^2 B \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos^2 B} - 1} + 4\cos^2 C \\ &= 2 \sin 2A + 2 \sin 2B - 4 \sin^2 C + 4 \end{aligned} \quad (38)$$

Mặt khác

$$\sin 2A + \sin 2B - 2 \sin^2 C \leq 2 \sin C - 2 \sin^2 C = -2 \left(\sin C - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \quad (39)$$

Từ (38) và (39) suy ra

$$Q \leq 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 5$$

nên

$$\max Q = 5 \quad \text{khi} \quad \begin{cases} A = B = \frac{5\pi}{12} \\ C = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ c = 2\sqrt{3} + 3 \end{cases}$$

Ví dụ 3.10 (Đề thi Tuyển sinh ĐH, CĐ - 2008B). Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

Bài giải. Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đặt $x = \sin t, y = \cos t, \quad t \in [0, 2\pi)$. Khi đó

$$P = \frac{2(\sin^2 t + 6 \sin t \cos t)}{1 + 2 \sin t \cos t + 2 \cos^2 t} = \frac{1 - \cos 2t + 6 \sin 2t}{\cos 2t + \sin 2t + 2}.$$

Gọi y_0 là một giá trị tùy ý của P . Điều đó có nghĩa là phương trình sau (ẩn là t) có nghiệm

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2t + 6 \sin 2t}{\cos 2t + \sin 2t + 2} &= y_0 \\ \Leftrightarrow (6 - y_0) \sin 2t - (y_0 + 1) \cos 2t &= 2y_0 - 1. \end{aligned} \quad (40)$$

Vì (40) có nghiệm nên ta phải có:

$$\begin{aligned}(6 - y_0)^2 + (y_0 + 1)^2 &\geq (2y_0 - 1)^2 \\ \Leftrightarrow y_0^2 + 3y_0 - 18 &\geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq y_0 \leq 3.\end{aligned}$$

Vậy: $\max P = 3$ và $\min P = -6$.

Ví dụ 3.11 (Xem [6]). Cho $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}.$$

Bài giải. Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đặt $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi)$. Khi đó ta có

$$A = \cos t\sqrt{1+\sin t} + \sin t\sqrt{1+\cos t}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}A^2 &= (\cos t\sqrt{1+\sin t} + \sin t\sqrt{1+\cos t})^2 \\ &\leq (\cos^2 t + \sin^2 t)(1 + \sin t + 1 + \cos t)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A^2 \leq 2 + \sin t + \cos t = 2 + \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow A \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có: } A = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\sin t}}{\cos t} = \frac{\sqrt{1+\cos t}}{\sin t} \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

(vì $0 \leq t < 2\pi$),

$$\text{tức là } \sin t = \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hay } x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy: } \max A = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 3.12. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}.$$

Bài giải. Ta có $abc + a + c = b \Leftrightarrow a + c = b(1 - ac)$.

Nếu $ac = 1$ thì $a + c = 0 \Leftrightarrow a = -c$ nên $a^2 = -1$ (vô lý). Vậy, $ac \neq 1$.

Khi đó ta có $b = \frac{a+c}{1-ac}$.

Đặt $a = \tan \alpha, c = \tan \beta$ nên $b = \tan(\alpha + \beta)$, với $\alpha, \beta > 0$ và $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{\tan^2 \alpha + 1} - \frac{2}{\tan^2(\alpha + \beta) + 1} + \frac{3}{\tan^2 \beta + 1} \\ &= 2 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2(\alpha + \beta) + 3 \cos^2 \beta \\ &= \cos 2\alpha + 1 - \cos[2(\alpha + \beta)] - 1 + 3 \cos^2 \beta \\ &= 2 \sin \beta \sin(2\alpha + \beta) + 3(1 - \sin^2 \beta) \\ &= \frac{10}{3} - 3 \left[\sin \beta - \frac{1}{3} \sin(2\alpha + \beta) \right]^2 - \frac{1}{3} \cos^2(2\alpha + \beta) \leq \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \beta &= \frac{1}{3} \sin(2\alpha + \beta) \\ \cos(2\alpha + \beta) &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta &= \frac{\pi}{2} \\ \sin \beta &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vì $\sin \beta = \frac{1}{3}$ nên $\cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ nên $\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ và $c = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lại có $\tan 2\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cot \beta = 2\sqrt{2}$ nên $\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad b = \tan(\alpha + \beta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{10}{3} \text{ khi } a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 3.13. Trong các nghiệm (x, y) của bất phương trình

$$\log_{x^2+y^2}(x+y) \geq 1 \quad (41)$$

Hãy tìm các nghiệm sao cho $(x+y)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài giải. Ta xét hai trường hợp

- Nếu $x^2 + y^2 > 1$ thì ta có

$$\begin{aligned} (41) &\Leftrightarrow x+y \geq x^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Mặt khác $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vì vậy tập hợp các điểm $M(x; y)$ là nghiệm của bất phương trình $x + y \geq x^2 + y^2$ là hình tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x - \frac{1}{2} = r \cos \varphi \\ y - \frac{1}{2} = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \text{với } r \geq 0 \text{ và } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Khi đó (42) trở thành: $r \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,
đồng thời

$$x + y = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) = 1 + r\sqrt{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

suy ra

$$x + y \leq 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = 2.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x + y = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu $0 < x^2 + y^2 < 1$ thì (41) $\Leftrightarrow 0 < x + y \leq x^2 + y^2$.

Rõ ràng với mọi cặp (x, y) thỏa mãn điều kiện trên ta đều có

$$x + y \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Vậy $\max(x + y) = 2$ khi $x = 1, y = 1$.

Ví dụ 3.14 (Xem [6]). Trong tất cả các nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz \geq 12 \end{cases} \quad (*)$$

hãy tìm nghiệm (x, y, z, t) sao cho $(x + z)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài giải. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 = 1 \\ xt + yz \geq 12 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} \frac{x}{4} = \cos \alpha \\ \frac{y}{4} = \sin \alpha \end{cases}$, với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ và $\begin{cases} \frac{z}{3} = \cos \beta \\ \frac{t}{3} = \sin \beta \end{cases}$, với $0 \leq \beta \leq 2\pi$.

Khi đó (*) trở thành $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \geq 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) \geq 1$

suy ra $\sin(\alpha + \beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Ta có

$$|x + z| = |4 \cos \alpha + 3 \cos \beta| = |4 \cos \alpha + 3 \sin \alpha| = |5 \sin(\varphi + \alpha)| \leq 5,$$

với $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, $\cos \varphi = \frac{3}{5}$.

Từ đó $z + x = 5$ khi $\sin(\varphi + \alpha) = 1 \Rightarrow \varphi + \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

$$\Rightarrow x = 4 \cos \alpha = 4 \sin \varphi = \frac{16}{5}, \quad y = 4 \sin \alpha = 4 \cos \varphi = \frac{12}{5},$$

$$z = 3 \cos \beta = 3 \cos \varphi = \frac{9}{5}, \quad t = 3 \sin \beta = 3 \sin \varphi = \frac{12}{5}.$$

Vậy $\max(x + z) = 5$ khi $x = \frac{16}{5}, y = \frac{12}{5}, z = \frac{9}{5}, t = \frac{12}{5}$.

Ví dụ 3.15. Cho $|x| \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = (1 - x)^n + (1 + x)^n$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài giải. Vì $|x| \leq 1$ nên ta đặt $x = \cos 2t$, khi đó có

$$\begin{aligned} y &= (1 - \cos 2t)^n + (1 + \cos 2t)^n = 2^n \sin^{2n} t + 2^n \cos^{2n} t \\ &= 2^n (\sin^{2n} t + \cos^{2n} t) \leq 2^n (\sin^2 t + \cos^2 t) = 2^n \end{aligned}$$

Như vậy $y \leq 2^n$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sin t \cdot \cos t = 0$ hay $x = -1$ hoặc $x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2^n .

Ví dụ 3.16. Cho $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |20x^3 - 15x + 36y - 48y^3|$.

Bài giải.

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đặt $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= |20\sin^3 t - 15\sin t + 36\cos t - 48\cos^3 t| \\ &= |-5(3\sin t - 4\sin^3 t) - 12(4\cos^3 t - 3\cos t)| \\ &= |5\sin 3t + 12\cos 3t| \leq \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \end{aligned}$$

hay $P \leq 13$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sin 3t}{5} = \frac{\cos 3t}{12} \Leftrightarrow \tan 3t = \frac{5}{12}$.

Vậy $\max P = 13$.

Ví dụ 3.17. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau:

$$u = \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Bài giải. Hàm số đã cho có nghĩa với mọi x, y .

Đặt $x = \tan \alpha$; $y = \tan \beta$ với $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Hàm số đã cho trở thành

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\tan \alpha + \tan \beta)(1 - \tan \alpha \tan \beta)}{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta}} \\ &= \frac{1}{2} \sin [2(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Vì $-1 \leq \sin [2(\alpha + \beta)] \leq 1$ nên $-\frac{1}{2} \leq u \leq \frac{1}{2}$.

Ta có $u = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $\sin [2(\alpha + \beta)] = 1$, chẳng hạn $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ do đó

$$\tan(\alpha + \beta) = 1 \Leftrightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

hay

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \Leftrightarrow x+y+xy = 1$$

Suy ra $\max u = \frac{1}{2}$.

Lại có $u = -\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $\sin[2(\alpha + \beta)] = -1$, chẳng hạn $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{4}$ do đó

$$\tan(\alpha + \beta) = -1 \Leftrightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = -1$$

hay

$$\frac{x + y}{1 - xy} = -1 \Leftrightarrow xy - x - y = 1.$$

$$\text{Vậy } \min u = -\frac{1}{2}, \max u = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 3.18. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4xy - 4y^2}{x^2 + y^2}.$$

Bài giải. Hàm số đã cho xác định với mọi x, y không đồng thời bằng 0.

Xét hai trường hợp sau

a, Với $y = 0, x \neq 0$ ta có $P = 0$.

b, Với $y \neq 0$ chia cả tử số và mẫu số cho y^2 ta được $P = \frac{4\frac{x}{y} - 4}{\frac{x^2}{y^2} + 1}$.

Đặt $\frac{x}{y} = \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{4 \tan t - 4}{\tan^2 t + 1} = \frac{4 \frac{\sin t}{\cos t} - 4}{\frac{1}{\cos^2 t}} \\ &= 4 (\sin t \cos t - \cos^2 t) \\ &= 2 (\sin 2t - \cos 2t) - 2 = 2\sqrt{2} \sin \left(2t - \frac{\pi}{4}\right) - 2. \end{aligned}$$

Vì $-1 \leq \sin \left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ nên $-2\sqrt{2} - 2 \leq P \leq 2\sqrt{2} - 2$.

Ta có $P = -2\sqrt{2} - 2$ khi và chỉ khi $\sin \left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, chẳng hạn $t = -\frac{\pi}{8}$ tức là $\frac{x}{y} = \tan \left(-\frac{\pi}{8}\right)$.

Và $P = 2\sqrt{2} - 2$ khi và chỉ khi $\sin \left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, chẳng hạn $t = \frac{3\pi}{8}$ tức là $\frac{x}{y} = \tan \frac{3\pi}{8}$.

Vậy $\max P = 2\sqrt{2} - 2; \min P = -2\sqrt{2} - 2$.

Bài tập tương tự

Bài tập 3.1 (Xem [6]). Cho tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ thoả mãn điều kiện :

$$\sqrt{1-x^2} |ax^2 + bx + c| \leq 1, \forall x \in [-1; 1].$$

Chứng minh rằng:

1, $|a| \leq 4$.

2, $|ax^2 + bx + c| \leq 3, \forall x \in [-1; 1]$.

Bài tập 3.2 (Xem [6]). Xét các số thực dương a, b, c thoả mãn điều kiện

$$2006ac + ab + bc = 2006.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 2006^2} + \frac{3}{c^2 + 1}.$$

Bài tập 3.3. Giả sử x, y là các số thực thay đổi thoả mãn điều kiện

$$x > 0, y > 0; x + y = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

Bài tập 3.4. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A = x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2).$$

Bài tập 3.5 (Xem [6]). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $u = 2x + 3\sqrt{3}y + 2$ với $4x^2 + 9y^2 = 16$.

Bài tập 3.6 (Xem [6]). Cho các số thực a, b, c dương thoả mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1.$$

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Kết luận

Luận văn “Phương pháp lượng giác trong bất đẳng thức và các bài toán cực trị” đã trình bày được những vấn đề sau:

1. Luận văn đã trình bày chi tiết một số dạng toán về sự liên hệ giữa lượng giác và một số đẳng thức đại số.
2. Tiếp theo, xét một số lớp bài toán về phương trình, bất phương trình giải được bằng phương pháp lượng giác.
3. Cuối cùng, trong luận văn trình bày các ứng dụng của phương pháp lượng giác trong bất đẳng thức và các bài toán cực trị đại số.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Mậu, 1993, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB Giáo Dục.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, 2006, *Bất đẳng thức, định lý và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [3] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Các bài toán nội suy và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [4] Nguyễn Văn Mậu, 2007, *Chuyên đề chọn lọc lượng giác và áp dụng*, NXB Giáo Dục.
- [5] Trương Ngọc Đắc, *Một số ứng dụng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác*, Kỷ yếu Hội thảo khoa học *Các chuyên đề toán học bồi dưỡng học sinh giỏi* khu vực Duyên hải, Nam Trung Bộ và Tây Nguyên, Quy Nhơn, 20-21/4/2013 (Nguyễn Văn Mậu, Trần Đức Minh chủ biên), trang 24-42.
- [6] Lại Thị Quỳnh Nguyên, *Một số ứng dụng của lượng giác trong Đại số và Giải tích* Kỷ yếu Hội thảo khoa học *Các chuyên đề toán học bồi dưỡng học sinh giỏi*, Trường Phổ thông vùng cao Việt Bắc, Thái Nguyên, 02-03/11/2012, trang 66-91.
- [7] *Các bài thi Olympic Toán trung học phổ thông Việt Nam (1990-2006)*, NXB Giáo Dục.