

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

NGUYỄN ĐÌNH XUÂN

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên-2013

MỤC LỤC

Mở đầu	2
1 Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng	4
1.1 Phương pháp tọa độ.	4
1.2 Phương trình đường thẳng và đường bậc hai và tham số hoá.	5
1.3 Sử dụng tọa độ để chứng minh một số định lý hình học.	27
1.3.1 Định lý Stewart.	27
1.3.2 Đường tròn Appolonus.	29
1.3.3 Bài toán con bướm cho đường tròn.	30
1.3.4 Đường thẳng Newton.	31
1.3.5 Định lý Pithot.	33
1.3.6 Định lý Ptolemy.	34
1.3.7 Định lý Pascal.	39
1.3.8 Đường tròn 9 điểm và đường thẳng Euler.	48
2 Xây dựng một số bài toán Đại số và Hình học sơ cấp	56
2.1 Bài toán con bướm cho các đường côníc.	56
2.2 Chứng minh một số bài toán Đại số và Hình học sơ cấp.	59
2.3 Một vài phương trình đường có chứa tham số	71
2.4. Bài toán vectơ liên quan tới tam giác.	76
Kết luận	83
Tài liệu tham khảo	84

Mở đầu

Chúng ta ai cũng biết rằng, có nhiều phương pháp khác nhau để giải một bài toán. Sử dụng phương pháp nào để cách giải tự nhiên và qua đó có thể nhìn thấy cách xây dựng bài toán mới không quá tầm thường. Đặc biệt trong Hình học sơ cấp, khi sử dụng hình vẽ để trình bày lời giải một bài hình ta khó có thể vận dụng một số kết quả của Đại số và Giải tích. Hơn nữa, có một số bài toán hình mà ta không thể vẽ được kết quả, chẳng hạn một vài bài quỹ tích. Rất tự nhiên xuất hiện câu hỏi: Chọn phương pháp nào để trình bày một bài hình, mở rộng bài hình, xây dựng bài hình mới. Vì những lí do ở trên nên chúng tôi đã chọn “Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng” để trình bày một số kết quả hình học sơ cấp.

Liên quan đến cách chọn phương pháp tọa độ là hai câu hỏi trong lĩnh vực Toán sơ cấp.

(1) Tại sao chỉ cần sử dụng một mặt phẳng và một mặt nón đủ tạo ra một đường conic? Nói một cách khác: Ta cần hệ hai phương trình đa thức $f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0$ đã đủ mô tả tất cả các điểm thuộc đường conic. Câu hỏi này gắn liền với vấn đề nổi tiếng do Perron đặt ra: Số cực tiểu các đa thức đủ mô tả một đường cong phẳng.

(2) Xác định tất cả các điểm hữu tỷ trên một đường cong phẳng thế nào? Nói một cách khác: Giải phương trình Diophante $f(x, y) = 0$ trên $\mathbb{Q}$.

Đặc biệt, phương pháp tọa độ cho phép chúng ta sử dụng một vài kết quả của Đại số, Giải tích và Số học vào xây dựng một bài hình sơ cấp. Tham số hoá một vài đường cong phẳng qua các hàm hữu tỷ để chúng ta biểu diễn đường cong đó qua *không điểm tổng quát*. Việc đưa phân tử ∞ vào R để ta có thể vét hết các điểm thuộc một đường conic. Việc sử dụng ma trận và định thức để chúng ta phát hiện kết quả hình học không qua kẻ vẽ.

Cấu trúc của luận văn: Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia ra làm hai chương

Chương 1: Trình bày về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Bao gồm Mục 1 được trình bày phương pháp tọa độ trong mặt phẳng. Mục 2 tập trung trình bày phương trình một vài đường, chẳng hạn: Đường thẳng và đường bậc hai; tham số hoá một số đường. Còn Mục 3 trình bày việc sử dụng phương pháp tọa độ để chứng minh một số định lý nổi tiếng trong hình học.

Chương 2: Xây dựng một số bài toán Đại số và Hình học sơ cấp. Bao gồm Mục 1 sử dụng tọa độ để ứng dụng Bài toán con bướm cho các đường conic. Mục 2 xây dựng một số bài toán Đại số và Hình học. Mục 3 là một vài phương trình đường có chứa tham số. Mục 4 nêu bài toán véc tơ liên quan đến tam giác.

Mặc dù đã có rất nhiều cố gắng cho luận văn nhưng chắc chắn nội dung trình bày trong luận văn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót nhất định và em rất mong nhận được sự chỉ bảo, hướng dẫn của các thầy giáo, cô giáo và sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp để luận văn của em được hoàn chỉnh và có ý nghĩa thiết thực hơn.

Qua đây em xin bày tỏ lòng biết ơn đến PGS.TS Đàm Văn Nhĩ, người đã tận tình giúp đỡ, động viên và ân cần hướng dẫn, chỉ bảo em hoàn thành luận văn này. Đồng thời em cũng xin chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo trong hội đồng khoa học thuộc Đại học Thái Nguyên, các thầy giáo, cô giáo trực tiếp giảng dạy lớp Cao học toán K5B, cảm ơn trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên nơi em đã được học tập, tiếp nhận một học vấn sau đại học căn bản và cuối cùng, xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian ôn thi, học Cao học và viết luận văn.

Trân trọng cảm ơn!

Hải Phòng, ngày 02 tháng 5 năm 2013

Học viên

Nguyễn Đình Xuân

Chương 1

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng

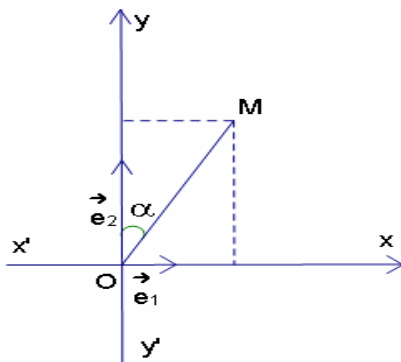
1.1 Phương pháp tọa độ

1.1.1 Sơ lược về phương pháp tọa độ mặt phẳng

Bằng cách đưa vào mặt phẳng một hệ trục tọa độ, mỗi véc tơ, mỗi điểm trên mặt phẳng đó đều được xác định bởi một tọa độ xác định. Vận dụng các kỹ thuật hoặc công thức, quy tắc đã học với những kỹ năng, thao tác và khả năng thực hiện trực tiếp các phép tính, những đơn giản hoá và các lời giải tương tự. Khi đó chúng ta có thể chuyển nhiều bài toán hình học sang bài toán đại số và ngược lại, từ kết quả của đại số suy ra được vài tính chất và mối quan hệ giữa các hình hình học.

1.1.2 Hệ tọa độ trên mặt phẳng.

Định nghĩa: Hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ gồm hai trục $(O; \vec{i})$ và $(O; \vec{j})$ vuông góc với nhau. Điểm gốc O chung của hai trục gọi là gốc tọa độ. Trục $(O; \vec{i})$ được gọi là trục hoành và ký hiệu là Ox , trục $(O; \vec{j})$ được gọi là trục tung và ký hiệu là Oy . Các véc tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các véc tơ đơn vị trên Ox, Oy và $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$. Hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ còn được ký hiệu là Oxy .



Các định nghĩa:

1. $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.
2. $\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$.
3. $x = OM \cos \alpha$.
4. $y = OM \sin \alpha \left(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \right)$.

Kết quả quan trọng:

1. Trong mặt phẳng (Oxy) cho $\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$, ta có $\vec{a}$ và $\vec{b}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

2. Trong mặt phẳng (Oxy) cho $\vec{a}(a_1; a_2), \vec{b}(b_1; b_2)$

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

1.2 Phương trình đường thẳng và đường bậc hai và tham số hoá các đường**Phương trình đường thẳng**

Các dạng phương trình đường thẳng: Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$, ta có

(i) $d: ax + by + c = 0$.

(ii) $t: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$.

(iii) Đường thẳng AB : $(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y + x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$ với $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

(iv) Đường thẳng AB : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ với $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

(v) Giả sử $d_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ và $d_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. Khi đó tọa độ giao điểm

$$A = d_1 \times d_2 \text{ với } x_A = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, y_A = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}.$$

Góc giữa d_1 và d_2 là α với $\tan \alpha = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{|a_1 a_2 + b_1 b_2|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right|}{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}$

và $\sin \alpha = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}$, $\cos \alpha = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}$.

Giả sử tam giác ABC có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$. Khi đó diện tích

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \text{gttd} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Phương trình các đường thẳng chứa các đỉnh :

$$\text{BC: } a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_1 = y_2 - y_3 \\ b_1 = x_3 - x_2 \\ c_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \end{cases}$$

$$\text{CA: } a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_2 = y_3 - y_1 \\ b_2 = x_1 - x_3 \\ c_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \end{cases}$$

$$\text{AB: } a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_3 = y_1 - y_2 \\ b_3 = x_2 - x_1 \\ c_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases}$$

Nếu giải hệ phương trình, người lại để tính x_i, y_i qua các a_j, b_j, c_j ta có

$$x_1 = \frac{b_2 c_3 - b_3 c_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2}, y_1 = \frac{a_3 c_2 - a_2 c_3}{a_2 b_3 - a_3 b_2}$$

$$x_2 = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{a_3 b_1 - a_1 b_3}, y_2 = \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_3 b_1 - a_1 b_3}$$

$$x_3 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, y_3 = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Phương trình đường bậc hai

Mệnh đề 1.2.1: Nếu 3 đỉnh tam giác ABC là những giao điểm của các cặp thuộc ba đường thẳng $a_i x + b_i y + c_i = 0$ với $i = 1, 2, 3$, thì diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của $\triangle ABC$ được tính theo các công thức

$$(i) S_{ABC} = \frac{1}{2} gttđ \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

$$(ii) R = gttđ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{2}.$$

(iii) Nếu kí hiệu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ thì

$$abc = gttđ \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^3 \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Chứng minh: (i) Thay x_i, y_i vào công thức tính diện tích tam giác ABC ta nhận được:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} gttđ \begin{vmatrix} \frac{b_2 c_3 - b_3 c_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2} & \frac{a_3 c_2 - a_2 c_3}{a_2 b_3 - a_3 b_2} & 1 \\ \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{a_3 b_1 - a_1 b_3} & \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_3 b_1 - a_1 b_3} & 1 \\ \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} & \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
S_{ABC} &= \frac{1}{2} g t t \vec{d} \begin{vmatrix} \frac{b_2 c_3 - b_3 c_2}{a_2 b_3 - a_3 b_2} & \frac{a_3 c_2 - a_2 c_3}{a_2 b_3 - a_3 b_2} & 1 \\ \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{a_3 b_1 - a_1 b_3} & \frac{a_1 c_3 - a_3 c_1}{a_3 b_1 - a_1 b_3} & 1 \\ \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} & \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} g t t \vec{d} \frac{\begin{vmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 & a_3 c_2 - a_2 c_3 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 & a_1 c_3 - a_3 c_1 & a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 & a_2 c_1 - a_1 c_2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.
\end{aligned}$$

Xét ma trận cấp ba $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ và ma trận phụ hợp của M là

$$M_{ad} = \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 & a_3 c_2 - a_2 c_3 & a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 & a_1 c_3 - a_3 c_1 & a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 & a_2 c_1 - a_1 c_2 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Vì $M M_{ad} = |M| E$ nên $|M| |M_{ad}| = |M|^3$ hay $|M_{ad}| = |M|^2$. Do vậy ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} g t t \vec{d} \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

(ii) Vì $R^2 = \frac{S_{ABC}}{2 \sin A \sin B \sin C}$ nên ta có công thức xác định R qua

$$R^2 = \frac{1}{2} gtt\vec{d} \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{2 \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{|a_1 b_2 - a_2 b_1| |a_2 b_3 - a_3 b_2| |a_3 b_1 - a_1 b_3|}} \cdot \frac{1}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}.$$

Do vậy $R = gtt\vec{d} \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{2}.$

(iii) Ta có $abc = gtt\vec{d} \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^3 \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$

vì $abc = 4RS_{ABC}$.

Biểu diễn bán kính đường tròn ngoại tiếp qua tọa độ đỉnh

Mệnh đề 1.2.2. Giả sử ba điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ và $C(x_3; y_3)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với độ dài ba cạnh $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gọi R là bán kính

đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó ta có $R = \frac{abc}{2gttd \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}$

Chứng minh: Ta biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không thay đổi qua một phép tịnh tiến. Do đó có thể coi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $O(0;0)$ và ta có

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = R^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = R^2 \\ x_3^2 + y_3^2 = R^2 \end{cases} \text{ và suy ra } \begin{cases} R^2 - x_1x_2 - y_1y_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2} \\ R^2 - x_2x_3 - y_2y_3 = \frac{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}{2} \\ R^2 - x_1x_3 - y_1y_3 = \frac{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}{2} \end{cases}$$

Từ $2S = gtt\vec{d} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ và tích hai định thức

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ R & R & R \end{vmatrix} \text{ ta có biểu thị mỗi}$$

quan hệ giữa tọa độ đỉnh, diện tích và bán kính R qua

$$4S^2R^2 = gtt\vec{d} \begin{vmatrix} 0 & -x_1x_2 - y_1y_2 + R^2 & -x_1x_3 - y_1y_3 + R^2 \\ -x_1x_2 - y_1y_2 + R^2 & 0 & -x_2x_3 - y_2y_3 + R^2 \\ -x_1x_3 - y_1y_3 + R^2 & -x_2x_3 - y_2y_3 + R^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Vì $R^2 - x_ix_j - y_iy_j = \frac{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}{2}$ với mọi $i, j=1, 2, 3, i \neq j$, suy ra

$$4S^2R^2 = gtt\vec{d} \begin{vmatrix} 0 & \frac{b^2}{2} & \frac{c^2}{2} \\ \frac{b^2}{2} & 0 & \frac{a^2}{2} \\ \frac{c^2}{2} & \frac{a^2}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{a^2b^2c^2}{4}. \text{ Vậy } R = \frac{abc}{2.gtt\vec{d} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}. \quad \square$$

Ví dụ 1.2.3. [Rumania 2004] Giả sử điểm M ở trong tam giác ABC . Ký hiệu R, R_1, R_2, R_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, MBC, MCA, MAB . Các đường thẳng AM, BM, CM cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 . Đặt $k_1 = \frac{MA_1}{AA_1}, k_2 = \frac{MB_1}{BB_1}, k_3 = \frac{MC_1}{CC_1}$. Chứng minh rằng $k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3 \geq R$.

Bài giải: Từ Mệnh đề 1.2.2 suy ra đồng nhất thức $4SR = abc$. Do đó ta có

$$4S_{ABC}R = abc$$

$$4S_{MBC}R_1 = a.MB.MC$$

$$4S_{MCA}R_2 = b.MC.MA$$

$$4S_{MAB}R_3 = c.MA.MB$$

Từ
$$\frac{k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3}{R} = \frac{S_{MBC}R_1 + S_{MCA}R_2 + S_{MAB}R_3}{S_{ABC}R}$$
 suy ra quan hệ

$$\frac{k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3}{R} = \frac{a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB}{abc} \geq 1.$$

Ví dụ 1.2.4. Gọi điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Kí hiệu R, R_1, R_2, R_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng: $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$.

Bài giải: Vì $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{3}$ nên $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$ □

Ví dụ 1.2.5. Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Kí hiệu R, R_1, R_2, R_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, IBC, ICA, IAB. Chứng minh rằng: $\frac{R_1}{h_a} + \frac{R_2}{h_b} + \frac{R_3}{h_c} \geq \frac{R}{r}$.

Bài giải:

$$k_1 = \frac{r}{h_a}, k_2 = \frac{r}{h_b} \text{ và } k_3 = \frac{r}{h_c} \text{ nên } \frac{R_1}{h_a} + \frac{R_2}{h_b} + \frac{R_3}{h_c} \geq \frac{R}{r}. \quad \square$$

Phương trình đường parabol

Đường parabol (P) với đường chuẩn d: $x = -\frac{p}{2}$ và tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0)$ có phương trình chính tắc và phương trình tiếp tuyến (t) tại điểm $M(x_0; y_0)$:

$$(P): y^2 = 2px; (d): p(x + x_0) = yy_0.$$

Giả sử Mt cắt đường thẳng Ox tại T và cắt đường thẳng Oy tại S. Khi đó

$$T(-x_0; 0) \text{ và } FM = \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + y_0^2} \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + 2px_0} = x_0 + \frac{p}{2}.$$

Do vậy $TS = SM$ và $FT = FM$. Nếu qua M kẻ đường thẳng $mM // Ox$ thì $\angle mMt = \angle tMF$.

Mệnh đề 1.2.6. Đường thẳng $d': ax + by + c = 0$ tiếp xúc với $(P): y^2 = 2px$ khi và chỉ khi $pb^2 = 2ac$. Đặc biệt, khi $b = 1$ ta có $p = 2ac$.

Chứng minh: Đường thẳng $d': ax+by+c=0$ tiếp xúc với $(P): y^2=2px$ khi và chỉ khi có $M(x_0; y_0) \in (P)$ để d' trung tiếp tuyến $Mt = px - y_0y + px_0 = 0$ của (P)

hay $\frac{a}{p} = \frac{b}{-y_0} = \frac{c}{px_0} := u \neq 0$. Điều này tương đương $a=up, b=-uy_0, c=upx_0$. Hiển

nhiên $y_0^2=2px_0$ tương đương $pu^2y_0^2=2up \cdot upx_0$ hay $pb^2=2ac$, vì $u \neq 0$

Ví dụ 1.2.7. Giả sử đường thẳng d_0 đi qua tiêu điểm F của (P) có phương trình

$d_0: y = a(x - \frac{p}{2}), a \neq 0$, cắt (P) ở A và B . Khi đó

(i) $\angle AOB > \frac{\pi}{2}$.

(ii) $AB > 2p$ và AB nhỏ nhất bằng $2p$ khi $AB \perp Ox$.

(iii) Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn AB .

(iv) Đường tròn đường kính AB luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Bài giải: (i) Tọa độ của A và B là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} y = a(x - \frac{p}{2}) \\ y^2 = 2px \end{cases}$$

hay hệ phương trình $ay^2 - 2py - ap^2 = 0, x = \frac{y^2}{2p}$.

Gọi y_1, y_2 là hai nghiệm của $ay^2 - 2py - ap^2 = 0$. Khi đó $A(x_1 = \frac{y_1^2}{2p}, y_1)$ và

$B(x_2 = \frac{y_2^2}{2p}, y_2)$.

Ta có $AB^2 = (y_2 - y_1)^2 + (\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p})^2 = [(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2] \left[1 + \frac{1}{4p^2}(y_1 + y_2)^2 \right]$.

Vậy $AB^2 = \left[\frac{4p^2}{a^2} + 4p^2 \right] \left[1 + \frac{1}{4p^2} \frac{4p^2}{a^2} \right] = 4p^2 \left[1 + \frac{1}{a^2} \right]^2$.

Tính

$T = OA^2 + OB^2 : T = y_2^2 + y_1^2 + \frac{y_2^4}{4p^2} + \frac{y_1^4}{4p^2} = \frac{4p^2}{a^2} + 2p^2 + \frac{1}{4p^2} \left[\left(\frac{4p^2}{a^2} + 2p^2 \right)^2 - 2p^4 \right]$

Tính ra $OA^2 + OB^2 = p^2 \left[\frac{4}{a^4} + \frac{8}{a^2} + \frac{5}{2} \right] < p^2 \left[\frac{4}{a^4} + \frac{8}{a^2} + 4 \right] = AB^2$. Do đó $\angle AOB > \frac{\pi}{2}$.

(ii) Hiển nhiên.

(iii) Giả sử $I(x_I, y_I)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB . Đặt $u = \frac{p}{a}$. Tọa độ điểm

$$I \text{ là } \begin{cases} x_I = \frac{y_1^2 + y_2^2}{4p} = \frac{\frac{4p^2}{a^2} + 2p^2}{4p} = \frac{4u^2 + 2p^2}{4p} \\ y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{a} = u \end{cases}$$

Vậy, tập tất cả các trung điểm I của đoạn thẳng AB là $(P'): p(x - \frac{p}{2}) = y^2$.

(iv) Từ $x_1 = \frac{u^2}{p} + \frac{p}{2} = \frac{u^2}{p} + p - \frac{p}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{p}{2}$ suy ra $x_1 + \frac{p}{2} = \frac{AB}{2}$. Vậy, đường tròn

đường kính AB luôn luôn tiếp xúc với đường chuẩn $d: x = -\frac{p}{2}$. $\square$

Ví dụ 1.2.8. Trong mặt phẳng (Oxy) cho parabol $(P): y = \frac{1}{4}x^2$ giả sử n đường thẳng đi qua $I(0;1)$ cắt (P) ở $A_1, B_1; A_2, B_2; \dots; A_n, B_n$, tương ứng.

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt[n]{IA_1 \cdot IA_2 \dots IA_n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{IB_1 \cdot IB_2 \dots IB_n}} \leq 1.$$

Bài giải: Giả sử $(d): y = kx + 1$ đi qua I cắt (P) tại A, B . Khi đó tọa độ của hai

điểm A, B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = kx + 1 \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$. Xét hệ phương trình $\begin{cases} y = kx + 1 \\ x^2 - 4kx - 4 = 0 \end{cases}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $x^2 - 4kx - 4 = 0$ và $A(x_1, kx_1 + 1), B(x_2, kx_2 + 1)$. Ta có thể giả thiết $x_1 < 0 < x_2$.

$$\begin{aligned}
\text{Biến đổi } \frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + k^2 x_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + k^2 x_2^2}} = \frac{1}{-x_1 \sqrt{1+k^2}} + \frac{1}{x_2 \sqrt{1+k^2}} \\
&= \frac{x_2}{-x_1 x_2 \sqrt{1+k^2}} + \frac{-x_1}{-x_1 x_2 \sqrt{1+k^2}} = \frac{x_2 - x_1}{4\sqrt{1+k^2}} \\
&= \frac{\sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2}}{4\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{16k^2 + 16}}{4\sqrt{1+k^2}} = 1
\end{aligned}$$

Như vậy đã biến đổi được hệ thức hằng $\frac{1}{IA} + \frac{1}{IB} = 1$. Từ đó suy ra bất đẳng thức

$$1 = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{IA_k} + \frac{1}{IB_k} \right) \geq \frac{1}{\sqrt[n]{IA_1 \cdot IA_2 \dots IA_n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{IB_1 \cdot IB_2 \dots IB_n}}. \quad \square$$

Phương trình đường tròn

Đường tròn (C) tâm $I(a, b)$ bán kính R có phương trình chính tắc và phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(x_0, y_0)$:

$$(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2; (d): (x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) - R^2 = 0.$$

Ví dụ 1.2.9. Cho tam giác đều ABC và hình vuông MNPQ nội tiếp trong cùng một đường tròn (E) bán kính 1. Khi đó $IA^4 + IB^4 + IC^4 = 18R^4$ và $IM^4 + IN^4 + IP^4 + IQ^4 = 24R^4$ với bất kỳ $I \in (E)$. Tổng $T = IM^6 + IN^6 + IP^6 + IQ^6$ có phụ thuộc vào vị trí của điểm I hay không?

Bài giải: Dựng hệ (Oxy) sao cho $A(0; R), B(-\frac{\sqrt{3}R}{2}; -\frac{R}{2}), C(\frac{\sqrt{3}R}{2}; -\frac{R}{2})$. Giả sử

$I(x; y)$ với $x^2 + y^2 = R^2$. Khi đó ta có tổng $IA^2 + IB^2 + IC^2 =$

$$\left[x^2 + (y-R)^2 \right]^2 + \left[\left(x + \frac{\sqrt{3}R}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{R}{2} \right)^2 \right]^2 + \left[\left(x - \frac{\sqrt{3}R}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{R}{2} \right)^2 \right]^2 = 18R^4.$$

Tương tự có $IM^4 + IN^4 + IP^4 + IQ^4 = 24R^4$. Dễ dàng kiểm tra T phụ thuộc vào I

Ví dụ 1.2.10. Cho đường tròn (C) và một điểm M. Đường thẳng qua M cắt (C) ở A và B. Khi đó $\overline{MA}, \overline{MB}$ không phụ thuộc vào vị trí đường thẳng (MAB).

Bài giải: Dựng hệ (Oxy) sao cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = R^2$. Giả sử $M(a; b)$.

Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB. Khi đó:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2.$$

Vậy $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (MO^2 - OI^2) - (OA^2 - OI^2) = MO^2 - R^2$ và chúng ta có hệ thức

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = a^2 + b^2 - R^2.$$

Ví dụ 1.2.11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm O bán kính R.

Khi đó hãy

(i) Xác định tập tất cả các điểm M thỏa mãn $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$

(ii) Xác định những điểm $P, Q \in (C)$ để $T_1 = PA^2 + PB^2 + PC^2$ là lớn nhất và

$T_2 = QA^2 + QB^2 + QC^2$ là nhỏ nhất.

Bài giải: (i) Không hạn chế có thể coi $R=1$. Dựng hệ (Oxy) sao cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$. Giả sử $A(1; 0), B(\cos \alpha; \sin \alpha), C(\cos \beta; \sin \beta)$ và $M(x, y)$.

Phương trình $MA^2 + MC^2 = 2MA^2$ tương đương $(x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 + (x - \cos \beta)^2 + (y - \sin \beta)^2 = 2(x - 1)^2 + 2y^2$.

Từ đây suy ra $d: x(\cos \alpha + \cos \beta - 1) + y(\sin \alpha + \sin \beta) = 0$. Như vậy, tập các điểm M là đường thẳng d đi qua O và $d \perp AK$, ở đó K là trung điểm của BC.

(ii) Giả sử $N(\cos t; \sin t)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} T &= NA^2 + NB^2 + NC^2 = (\cos t - \sin \alpha)^2 + (\sin t - \sin \alpha)^2 \\ &\quad + (\cos t - \cos \beta)^2 + (\sin t - \sin \beta)^2 + (\cos t - 1)^2 + \sin^2 t \\ &= 6 - 2[\cos t(\cos \alpha + \cos \beta + 1) + \sin t(\sin \beta + \sin \alpha)] \\ &= 6 - 2\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{ON} = 6 - 2OH \cdot ON \cos \varphi = 6 - 2OH \cos \varphi \end{aligned}$$

trong đó $\varphi = \angle NOH$. Từ đây suy ra $T_1 = 6 + 2.OH$ khi $\varphi = \pi$ và $T_2 = 6 - 2.OH$ khi $\varphi = 0$. Hiển nhiên P và Q là giao điểm giữa OH với (C). $\square$

Chú ý 1.2.12. Nếu $A(\cos \alpha; \sin \alpha), B(\cos \beta; \sin \beta)$ và $C(\cos \gamma; \sin \gamma)$

thì phương trình $OH : y = \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma} x$ và hoành độ của P, Q là

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2}}.$$

Phương trình đường ellíp

Đường ellíp (E) với tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ có phương trình chính tắc và phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(x_0; y_0)$:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, S(E) = \pi ab; (d): \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Đường thẳng $(\ell): mx + ny + p = 0$ tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi

$$a^2 m^2 + b^2 n^2 = p^2.$$

Hai đường kính liên hợp của đường ellíp (E) với hệ số góc k, k' thoả mãn

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Mệnh đề 1.2.13. Trong (Oxy) , ánh xạ $\phi: (Oxy) \rightarrow (Oxy)$,

$M(x; y) \mapsto M'(X=x; Y=ky)$ với $|k| \neq 0, 1$, được gọi là ánh xạ co hệ số k . Khi đó

(i) ϕ biến đường tròn thành ellíp và ngược lại, với mỗi ellíp có ánh xạ co biến nó thành đường tròn.

(ii) ϕ biến ba điểm thẳng hàng A_1, A_2, A_3 thành ba điểm thẳng hàng A'_1, A'_2, A'_3 và

$$\frac{A_1 A_2}{A_2 A_3} = \frac{A'_1 A'_2}{A'_2 A'_3}$$

(iii) Giả sử A_1, A_2, A_3 được biến thành A'_1, A'_2, A'_3 qua ϕ . Khi đó công thức tính diện tích $S_{A'_1 A'_2 A'_3} = |k| S_{A_1 A_2 A_3}$.

(iv) Ánh xạ co biến tiếp tuyến của đường tròn (C) thành một tiếp tuyến của ellíp (C)

Chứng minh: (i) Chỉ cần chứng minh cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = R^2$. Giả sử $M(x; y)$ là điểm tùy ý thuộc (C) và $M'(X; Y) = \phi(M)$. Khi đó $x^2 + y^2 = R^2$ và $X = x, Y = ky$. Vậy $X^2 + \frac{Y^2}{k^2} = R^2$.

Do đó ảnh của (C) là ellíp $(E): k^2 x^2 + y^2 = k^2 R^2$. Ngược lại chỉ cần chứng minh cho ellíp $(E): b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

Xét ánh xạ ϕ biến $M(x; y)$ thành $M'(X = x; Y = \frac{ay}{b})$. Khi đó $b^2 X^2 + b^2 Y^2 = a^2 b^2$ hay $X^2 + Y^2 = a^2$. Do đó ảnh của (E) qua ϕ là đường tròn.

(ii) Giả sử $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$ là ba điểm thẳng hàng, chẳng hạn chúng cùng thuộc đường thẳng $ax + by + c = 0$. Gọi $A'_i(X_i = x_i; Y_i = ky_i), i = 1, 2, 3$, là ảnh của A_i qua ϕ . Vì $ax_i + by_i + c = 0$ nên $aX_i + b\frac{Y_i}{k} + c = 0, i = 1, 2, 3$. Vậy ba

điểm A'_1, A'_2, A'_3 cùng nằm trên đường thẳng $ax + \frac{b}{k}y + c = 0$ và từ đó suy ra chúng thẳng hàng. Để chứng minh sự bảo toàn tỷ số, chỉ cần xét ba điểm thuộc đường thẳng $y = ax + b$ là $A_1(x_1; y_1 = ax_1 + b), A_2(x_2; y_2 = ax_2 + b), A_3(x_3; y_3 = ax_3 + b)$ và ba điểm ảnh $A'_1(x_1; Y_1 = k(ax_1 + b)), A'_2(x_2; Y_2 = k(ax_2 + b)), A'_3(x_3; Y_3 = k(ax_3 + b))$. Ta có ngay tỷ số các độ dài:

$$\frac{A'_1 A'_2}{A'_2 A'_3} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + k^2 a^2 (x_2 - x_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + k^2 a^2 (x_2 - x_3)^2}} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - x_3|} = \frac{A_1 A_2}{A_2 A_3}.$$

(iii) Giả sử $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), A_3(x_3; y_3)$ là ba điểm tùy ý không thẳng hàng. Gọi $A'_i(X_i = x_i; Y_i = ky_i), i = 1, 2, 3$, là ảnh của A_i qua ϕ .

$$\text{Khi đó diện tích } 2S_{A_1 A_2 A_3} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = |k| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 2|k| S_{A'_1 A'_2 A'_3}.$$

(iv) Giả sử $d:xx_0+yy_0=R^2$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$. Qua phép co-dãn hệ số k , đường tròn $(C):x^2+y^2=R^2$ biến thành ellíp $(E):\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2k^2}=1$, điểm $M(x_0;y_0)$ biến thành $M'(x_0;ky_0)$ và đường thẳng $d:xx_0+yy_0=R^2$ biến thành đường thẳng $d':xx_0+y\frac{y_0}{k}=R^2$. Vì $x_0^2+y_0^2=R^2$ nên $R^2x_0^2+R^2k^2\frac{y_0^2}{k^2}=R^2$. Vậy d' tiếp xúc với (E) . $\square$

Ví dụ 1.2.14. Giả sử một đường ellíp nội tiếp trong tam giác ABC và tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB tại M, N, P, tương ứng. Chứng minh $AN.BP.CM = AP.BM.CN$ và AM, BN, CP đồng quy.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) sao cho ellíp nội tiếp trong tam giác ABC có phương trình $(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ hay $(E):x^2+y^2\frac{a^2}{b^2}=a^2$. Thực hiện phép co-dãn hệ số $k=\frac{a}{b}$, từ (Oxy) lên (Oxy) biến $M(x;y)$ thành $M'(x'=x;y'=\frac{a}{b}y)$. Khi đó tam giác ABC biến thành tam giác $A'B'C'$, đường ellíp (E) biến thành đường tròn $(C):x^2+y^2=a^2$ nội tiếp trong tam giác $A'B'C'$ tiếp xúc các cạnh tam giác $A'B'C'$. Giả sử phép co-dãn hệ số k biến thành M',N',P' cũng là những tiếp điểm do (C) tiếp xúc các cạnh $\Delta A'B'C'$.

Vì $A'N'=A'P', B'P'=B'M'$ và $C'M'=C'N'$ nên $\frac{B'M'}{M'C'} \cdot \frac{C'N'}{A'N'} \cdot \frac{A'P'}{B'P'}=1$.

Từ đây suy ra $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} \cdot \frac{AP}{BP}=1$. Như vậy $AN.CM.BP=AP.BM.CN$.

Vì AM',BN',CP' đồng quy tại K' nên ảnh của K' là K qua phép co-dãn với hệ số $\frac{b}{a}$ sẽ thuộc đồng thời cả ba đường AM, BN, CP. Điều đó chứng tỏ AM, BN, CP đồng quy.

Ví dụ 1.2.15. Giả sử một đường ellíp nội tiếp trong tứ giác ABCD và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA tại M, N, P, Q tương ứng.

Chứng minh bốn đoạn AC, BD, MP, NQ đồng quy.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) sao cho ellíp nội tiếp trong tứ giác $ABCD$ có

phương trình $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hay $(E): x^2 + y^2 \frac{a^2}{b^2} = a^2$. Thực hiện phép co-dãn hệ

số $k = \frac{a}{b}$, từ (Oxy) lên (Oxy) biến $M(x; y)$ thành $M'(x' = x; y' = \frac{a}{b}y)$. Khi đó tứ

giác $ABCD$ biến thành tứ giác $A'B'C'D'$, đường ellíp (E) biến thành đường tròn

$(C): x^2 + y^2 = a^2$ nội tiếp tứ giác $A'B'C'D'$ tiếp xúc các cạnh tứ giác $A'B'C'D'$.

Giả sử phép co-dãn hệ số k biến M, N, P, Q thành M', N', P', Q' cũng là những

tiếp điểm do (E) tiếp xúc các cạnh $A'B', B'C', C'D', D'A'$. Vì $AC', B'D', M'P', N'Q'$

đồng quy tại điểm I' theo Ví dụ 1.3.24 nên ảnh I của nó qua phép co-dãn hệ số

$\frac{b}{a}$ sẽ thuộc cả bốn đoạn AC, BD, MP, NQ . Do đó bốn đoạn AC, BD, MP, NQ

đồng quy. □

Ví dụ 1.2.16. Giả sử tam giác ABC có diện tích S . Phép co-dãn hệ số k biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) . Giả sử $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ và $C(x_3, y_3)$.

Khi đó $A'(x_1, ky_1), B'(x_2, ky_2)$ và $C'(x_3, ky_3)$. Khi đó ta có công thức $S_{A'B'C'} = |k|S$

$$\text{vì } S_{ABC} = \frac{1}{2} \text{gttd} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{|k|}{2} \text{gttd} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = |k|S. \quad \square$$

Phương trình đường hyperbôl

Đường hyperbôl (H) với tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ có phương trình chính tắc

và phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(x_0; y_0)$:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; (d): \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Đường $(\ell): mx + ny + p = 0$ tiếp xúc với hyperbôl (H) khi và chỉ khi

$$a^2 m^2 - b^2 n^2 = p^2$$

Hai đường kính liên hợp của hyperbôl (H) với hệ số góc k, k' thỏa mãn

$$kk' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Tham số hoá đồ thị

Định nghĩa 1.2.17. Đồ thị phẳng $V(f)$ được gọi là *đồ thị phẳng hữu tỷ* nếu có hai hàm hữu tỷ $\varphi(t), \psi(t) \in R(t)$ của biến t và cả hai không đồng thời thuộc R thỏa mãn $f(\varphi(t), \psi(t)) = 0$.

Đồ thị phẳng hữu tỷ có quan hệ tới việc tìm các nghiệm $(a, b) \in R^2$ của phương trình $f(x, y) = 0$ hoặc tìm các điểm thuộc đồ thị phẳng với tọa độ là những số hữu tỷ hay xác định những điểm không tầm thường với tọa độ nguyên thuộc đa tạp Fermat $V: x^n + y^n - z^n = 0, n \geq 3$.

Khi biểu diễn đồ thị phẳng $V(f)$ qua $x = \varphi(t), y = \psi(t) \in R(t)$, ta nói rằng đã *tham số hoá* được $V(f)$. Việc tham số hoá đồ thị phẳng qua các hàm hữu tỷ như sau: Chọn điểm $P \in V$ và viết phương trình tham số của đường thẳng (d) qua P sao cho (d) cắt V tại đúng một điểm thứ hai khác P .

Cho $(\ell): f(x, y) = 0$ với $f(x, y)$ là đa thức bất khả quy. Khi có hai hàm hữu tỷ $\varphi(t), \psi(t)$ của biến t và cả hai không đồng thời thuộc R thỏa mãn $f(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$ thì điểm $\varphi(t), \psi(t)$ được gọi là *không điểm tổng quát* của (ℓ) .

Ta thêm ∞ vào R và coi nó như một phần tử.

Ta định nghĩa $\varphi(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)$ và $\psi(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$. Khi đó tọa độ các điểm của

(ℓ) với tọa độ thuộc $R \cup \{\infty\}$ sẽ có dạng $(\varphi(t); \psi(t)), t \in R \cup \{\infty\}$. Việc tìm không điểm tổng quát của (ℓ) gắn liền với vấn đề giải phương trình $f(x, y) = 0$ trên

Q hay phương trình $z^d f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ trên Z , ở đó $d = \deg f(x, y)$.

Định nghĩa 1.2.18. Cho đồ thị phẳng bất khả quy (ℓ) . Những điểm thuộc (ℓ) với tọa độ thuộc Q được gọi là *những điểm hữu tỷ* của (ℓ) .

Phương trình tham số đường thẳng

Đường thẳng $d: ax+by+c=0$ có phương trình tham số $d: \begin{cases} x=x_0+bt \\ y=y_0-at \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Với $ax_0+by_0+c=0$.

Phương trình tham số đường parabol

Đường parabol (P) có phương trình tham số $\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt, \end{cases}$

Phương trình tham số đường tròn

Mệnh đề 1.2.19. Đường tròn $(C): x^2+y^2=1$ là đồ thị phẳng hữu tỷ được tham

số hoá qua $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}, y(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

với quy ước $x(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{1+t^2}=0, y(\infty)=\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-t^2}{1+t^2}=-1$. Với điểm $A(x_0; y_0) \in (C)$,

phương trình tiếp tuyến At của (C) là $xx_0+yy_0=1$.

Chứng minh: Đường thẳng (d) đi qua điểm $(0;1) \in (C)$ với hệ số góc $-t$ có phương trình $(d): y=-tx+1$. (d) cắt (C) tại điểm điểm $(0;1)$ và điểm

$A_t(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$. Điểm $(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$ chạy qua tất cả các điểm thuộc (C) , khác

điểm $(0;-1)$. Với quy $x(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{1+t^2}=0, y(\infty)=\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-t^2}{1+t^2}=-1$ thì A_t cũng chạy

qua cả điểm $(0;-1)$.

Vì $A(x_0; y_0) \in (C)$ nên $x_0^2+y_0^2=1$. Vậy $At: 2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0$. $\square$

Phương trình tham số đường Ellíp

Mệnh đề 1.2.20. Đường Ellíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là đồ thị phẳng hữu tỷ được tham

số hoá qua $x(t)=\frac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}, y(t)=\frac{b^3-a^2bt^2}{b^2+a^2t^2}$ với quy ước $x(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}=0$,

$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b^3 - a^2 b t^2}{b^2 + a^2 t^2} = -b$. Với điểm $A(x_0; y_0) \in (E)$, phương trình tiếp tuyến At

của (E) là $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Chứng minh: Đường thẳng (d) đi qua điểm $(0; b) \in (E)$ với hệ số góc $-t$ có phương trình $(d): y = -tx + b$. (d) cắt (E) tại điểm điểm $(0; b)$ và điểm

$A_t(\frac{2a^2 b t}{b^2 + a^2 t^2}, \frac{b^3 - a^2 b t^2}{b^2 + a^2 t^2})$. Điểm $A_t(\frac{2a^2 b t}{b^2 + a^2 t^2}, \frac{b^3 - a^2 b t^2}{b^2 + a^2 t^2})$ chạy qua tất cả các

điểm thuộc (E) , khác điểm $(0; -b)$.

Với quy ước $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2a^2 b t}{b^2 + a^2 t^2} = 0, y(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^3 - a^2 b t^2}{b^2 + a^2 t^2} = -b$ thì A_t cũng chạy

qua cả điểm $(0; -b)$. Vì $A(x_0; y_0) \in (E)$ nên $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Vậy $At: \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$ hay $At: \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. □

Chú ý: Tham số hóa đường tròn và ellíp qua các hàm lượng giác:

(i) Đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ còn được tham số hóa qua $x = \cos t, y = \sin t$;

còn Ellíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tham số hóa qua $x = a \cos t, y = b \sin t$

(ii) Giả sử $A(a \cos t, b \sin t) \in (E)$. Đặt $r = OA, \angle xOA = t_1$. Khi đó ta có

$A(r \cos t_1, r \sin t_1) \in (E)$ và $\frac{r^2 \cos^2 t_1}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 t_1}{b^2} = 1$. Từ đây suy ra độ dài

$OA = r = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 t_1 + a^2 \sin^2 t_1}}$ và nhận được quan hệ sau:

$$\begin{cases} \cos t = \frac{b \cos t_1}{\sqrt{b^2 \cos^2 t_1 + a^2 \sin^2 t_1}} \\ \sin t = \frac{a \sin t_1}{\sqrt{b^2 \cos^2 t_1 + a^2 \sin^2 t_1}} \end{cases}$$

Dễ dàng suy ra $\cos t \neq 0$ khi và chỉ khi $\cos t_1 \neq 0$ và $\tan t = \frac{a}{b} \tan t_1$.

(iii) Từ $a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t = OA^2 = r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 t_1 + a^2 \sin^2 t_1}$ ta suy ra quan hệ

$$(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)(b^2 \cos^2 t_1 + a^2 \sin^2 t_1) = a^2 b^2.$$

(iv) Giả sử $A(a \cos t, b \sin t), B(a \cos u, b \sin u) \in (E)$. Khi đó có hệ thức

$$AB^2 = 4 \sin^2 \frac{t-u}{2} \left[b^2 \cos^2 \frac{t+u}{2} + a^2 \sin^2 \frac{t+u}{2} \right].$$

Ví dụ 1.2.21. Đường $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 5$ là đồ thị phẳng hữu tỷ trên Q .

Bài giải: Đường thẳng (d) đi qua điểm $(4; 10) \in (E)$ với hệ số góc $-t$ có phương trình $(d): y = -t(x - 4) + 10$. Đường thẳng (d) cắt (E) tại điểm $(4; 10)$ và điểm

$$\text{thứ hai } A_t \left(\frac{64t^2 + 320t - 100}{16t^2 + 25}; \frac{-160t^2 + 200t + 250}{16t^2 + 25} \right).$$

$$\text{Điểm } A_t \left(\frac{64t^2 + 320t - 100}{16t^2 + 25}; \frac{-160t^2 + 200t + 250}{16t^2 + 25} \right) \text{ chạy qua tất cả các điểm}$$

thuộc (E) , khác điểm $(4; -10)$ với quy ước $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{64t^2 + 320t - 100}{16t^2 + 25} = 4$

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-160t^2 + 200t + 250}{16t^2 + 25} = -10 \text{ thì } A_t \text{ chạy qua các điểm } (4; -10).$$

Vậy $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 5$ là đồ thị phẳng hữu tỷ trên Q .

Phương trình tham số đường Hypecbol

Mệnh đề 1.2.22. Đường Hypecbol $(H) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ là đồ thị phẳng hữu tỷ được

tham số hoá qua $x(t) = \frac{a + ab^2 t^2}{1 - b^2 t^2}, y(t) = \frac{2b^2 t}{1 - b^2 t^2}$ với quy ước

$x(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a+ab^2t^2}{1-b^2t^2}=-a, y(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2b^2t}{1-b^2t^2}=0$. Từ đây suy ra nghiệm hữu tỷ của

$x^2-dy^2=1$, trong đó d là số nguyên và không là số chính phương. Với điểm

$A(x_0; y_0) \in (H)$, Phương trình tiếp tuyến At của (H) là $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Chứng minh: Đường thẳng (d) đi qua điểm $(a;0) \in (H)$ với hệ số góc at có phương trình $(d): x = a(ty+1)$. (d) cắt (H) tại điểm $(a;0)$ và điểm

$A_t(\frac{a+ab^2t^2}{1-b^2t^2}, \frac{2b^2t}{1-b^2t^2})$. Điểm $A_t(\frac{a+ab^2t^2}{1-b^2t^2}, \frac{2b^2t}{1-b^2t^2})$ chạy qua tất cả các điểm thuộc (H) , khác điểm $(-a;0)$.

Với quy ước $x(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a+ab^2t^2}{1-b^2t^2}=-a, y(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2b^2t}{1-b^2t^2}=0$ thì A_t cũng chạy qua cả điểm $(-a;0)$.

Nghiệm tổng quát của $x^2-dy^2=1$ là $x=\frac{d+t^2}{d-t^2}, y=\frac{2t}{d-t^2}$. Với $t=\frac{m}{n}$ có

$$x=\frac{dn^2+m^2}{dn^2-m^2}, y=\frac{2mn}{dn^2-m^2}, \text{ trong đó } m, n \in \mathbb{Z}, (m, n)=1.$$

Vì $A(x_0; y_0) \in (H)$ nên $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Vậy $At: \frac{2x_0}{a^2}(x-x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y-y_0) = 0$

hay $At: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. □

Ví dụ 1.2.23. Đường Hypecbôl $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 3$ là một đồ thị phẳng hữu tỷ trên $\mathbb{Q}$

Bài giải: Đường thẳng (d) đi qua điểm $(6;7) \in (H)$ với hệ số góc $3t$ có phương trình $(d): x = 3t(y-7)+6$. Đường thẳng (d) cắt (H) tại điểm $(6;7)$ và điểm thứ

hai $A_t\left(\frac{-294t^2+42t-6}{49t^2-1}; \frac{343t^2-196t+7}{49t^2-1}\right)$.

Điểm $A_t \left(\frac{-294t^2 + 42t - 6}{49t^2 - 1}; \frac{343t^2 - 196t + 7}{49t^2 - 1} \right)$ chạy qua tất cả các điểm thuộc

(H), khác điểm $(-6; 7)$ với quy ước $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-294t^2 + 42t - 6}{49t^2 - 1} = -6$

$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{343t^2 - 196t + 7}{49t^2 - 1} = 7$ thì A_t chạy qua các điểm $(-6; 7)$.

Ví dụ 1.2.24. Đường Hypecbôl $(H): \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 2$ là đồ thị phẳng hữu tỷ trên Q .

Bài giải: Đường thẳng (d) đi qua điểm $\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right) \in (H)$ với hệ số góc $3t$ có phương

trình $(d): x = 3t \left(y - \frac{7}{2} \right) + \frac{9}{2}$. Đường thẳng (d) cắt (H) tại điểm $\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$ và điểm

thứ hai $A_t \left(\frac{-\frac{9}{2}t^2 + \frac{3}{7}t - \frac{9}{98}}{t^2 - \frac{1}{49}}; \frac{\frac{7}{2}t^2 - 3t + \frac{1}{14}}{t^2 - \frac{1}{49}} \right)$.

Điểm $A_t \left(\frac{-\frac{9}{2}t^2 + \frac{3}{7}t - \frac{9}{98}}{t^2 - \frac{1}{49}}; \frac{\frac{7}{2}t^2 - 3t + \frac{1}{14}}{t^2 - \frac{1}{49}} \right)$ chạy qua tất cả các điểm thuộc (H) ,

khác điểm $\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$ với quy ước $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\frac{9}{2}t^2 + \frac{3}{7}t - \frac{9}{98}}{t^2 - \frac{1}{49}} = -\frac{9}{2}$

$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{2}t^2 - 3t + \frac{1}{14}}{t^2 - \frac{1}{49}} = \frac{7}{2}$ thì A_t chạy qua các điểm $\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$. □

Ví dụ 1.2.25. Trong mặt phẳng, đồ thị phẳng Lemniscat cho bởi

$$(L): (x^2 + y^2)^2 = b^2(x^2 - y^2)$$

là một đồ thị phẳng hữu tỷ.

Bài giải: Đặt $x^2 + y^2 = t(x - y)$ và thay vào phương trình,

ta có $t^2(x-y)^2 = b^2(x^2-y^2)$. Nếu $x=y$ thì $x^2+y^2=0$ từ $x=y$ và $x^2+y^2=0$ ta suy ra $x=y=0$. Ta có điểm $O(0;0) \in (L)$.

Nếu $x \neq y$, ta có $t^2(x-y) = b^2(x+y)$. Ta có $y = \frac{t^2-b^2}{t^2+b^2}$ khi $t^2+b^2 \neq 0$.

$$\text{Vậy } x^2 + \left(\frac{t^2-b^2}{t^2+b^2} \right) x^2 = xt \left(1 - \frac{t^2-b^2}{t^2+b^2} \right).$$

Khi $x \neq 0$, ta có $x = \frac{b^2 t(t^2+b^2)}{t^4+b^4}$, $y = \frac{b^2 t(t^2-b^2)}{t^4+b^4}$. Chú ý rằng, khi cho $t=0$ ta nhận được điểm $O(0;0)$.

Tóm lại (L) là một đồ thị phẳng hữu tỷ. $\square$

Ví dụ 1.2.26. Chứng minh rằng đồ thị phẳng $(\ell) : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2 y}{c^2}$ với $abc \neq 0$ là đồ thị phẳng hữu tỷ.

Bài giải: Nếu $x=0$ thì $y=0$. Khi $x \neq 0$, đặt $y = \frac{b}{a} tx$. Khi đó $x = \frac{a^3 b t}{c^2 (t^2+1)^2}$ và

$y = \frac{a^2 b^2 t^2}{c^2 (t^2+1)^2}$. Vậy, đồ thị phẳng $(\ell) : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2 y}{c^2}$ với $abc \neq 0$ là đồ thị phẳng hữu tỷ. $\square$

Ví dụ 1.2.27. Trong mặt phẳng, đồ thị phẳng Cartes Folium cho bởi $(F) : x^3 + y^3 - 3axy = 0, a \neq 0$, là một đồ thị phẳng hữu tỷ.

Bài giải: Hiển nhiên, khi $x=0$ thì $y=0$ và điểm $(0;0)$ thuộc (F) .

Xét $x \neq 0$. Đặt $y = tx$ và thay vào phương trình, ta có $x(t^3+1) = 3at$.

Nếu $t = -1$ thì $0 = -3a \neq 0$: mâu thuẫn. Vậy $t \neq -1$ và $x = \frac{3at}{t^3+1}, y = \frac{3at^2}{t^3+1}$.

Tóm lại (F) là một đồ thị phẳng hữu tỷ. $\square$

Ví dụ 1.2.28. Tham số hoá Ellipsoid $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Bài giải: Trước tiên, tham số hoá (E) qua $x = a \cos u \cos v, y = b \cos u \sin v$ và

$$z = c \sin u. \text{ Thế } \cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin u = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos v = \frac{1-t'^2}{1+t'^2}, \sin v = \frac{2t'}{1+t'^2}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x = a \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1-t'^2}{1+t'^2} \\ y = b \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2t'}{1+t'^2} \\ z = c \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

1.3 Sử dụng tọa độ để chứng minh một số định lý hình học.

Một số kết quả trong Hình học sơ cấp được chứng minh lại bằng phương pháp tọa độ. Trước tiên ta khai thác Định lý Stewart.

1.3.1 Định lý Stewart.

Mệnh đề 1.3.1 [Stewart] Với ba điểm tùy ý M, N, P thẳng hàng và một điểm I có đồng nhất thức:

$$T = IM^2 \cdot \overline{NP} + IN^2 \cdot \overline{PM} + IP^2 \cdot \overline{MN} = -\overline{MN} \cdot \overline{NP} \cdot \overline{PM}.$$

Chứng minh: Đặt hệ tọa độ (Oxy) sao cho $M(0;0), N(b;0), P(c;0)$. Giả sử

$$I(x;y). \text{ Khi đó, } T = (x^2 + y^2)(c-b) + [(x-b)^2 + y^2](-c) + [(x-c)^2 + y^2]b.$$

$$\text{Dễ dàng suy ra } T = bc(c-b) = -\overline{MN} \cdot \overline{NP} \cdot \overline{PM}. \quad \square$$

Chú ý 1.3.2. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$ và $I \equiv A, M \equiv B, P \equiv C$.

(i) Khi N là trung điểm của BC và $AN = m_a$ ta có $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ theo Mệnh đề 1.3.1.

(ii) Khi $AN = l_a$ là phân giác trong của góc A thì $BN = \frac{ac}{b+c}$ và $CN = \frac{ab}{b+c}$.

Theo Mệnh đề 1.3.1 có $l_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$.

Khi ta thay hiệu $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$ thì $l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$.

(iii) Khi $\triangle ABC$ không cân tại đỉnh A và $AN = l_a$ là phân giác ngoài của góc A thì

$BN = \frac{ac}{c-b}$ và $CN = \frac{ab}{c-b}$. Theo Mệnh đề 1.3.1 có $l_a^2 = \frac{bc[a^2 - (c-b)^2]}{(c-b)^2}$

Ví dụ 1.3.3. Cho $\triangle ABC$ với độ dài các cạnh a, b, c và độ dài ba đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c . Chứng minh rằng:

$$(i) \quad \frac{b+c}{2} > m_a \geq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}.$$

$$(ii) \quad m_a m_b m_c \geq abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Bài giải: (i) Từ $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}{4}$, ta suy ra $m_a^2 \geq bc \cos^2 \frac{A}{2}$

$$\text{hay } m_a \geq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}.$$

Lại có $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}{4} < \frac{b^2 + c^2 + 2bc}{4}$. Vậy $\frac{b+c}{2} \geq m_a \geq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$.

(ii) Vì $m_a \geq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$, $m_b \geq \sqrt{ca} \cos \frac{B}{2}$, $m_c \geq \sqrt{ab} \cos \frac{C}{2}$ nên $m_a m_b m_c \geq$

$$abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Ví dụ 1.3.4. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c là độ dài các đường phân giác trong của tam giác ABC . Nếu $\ell_a = \ell_b$ thì $\triangle ABC$ cân.

Bài giải: Ta biết $\ell_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$ và $\ell_b^2 = \frac{ca[(a+c)^2 - b^2]}{(a+c)^2}$ nếu $\ell_a = \ell_b$

thì $\frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{ca[(a+c)^2 - b^2]}{(a+c)^2}$. Từ đây suy ra $a = b$.

Ví dụ 1.3.5. Cho $\triangle ABC$ với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Giả sử $h_a, h_b, h_c, l_a, l_b, l_c$ và m_a, m_b, m_c là độ dài các đường cao, các đường phân giác trong và các đường trung tuyến của $\triangle ABC$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau:

(i) $h_a \leq l_a \leq m_a$. Dấu “=” xảy ra khi $b = c$.

(ii) $\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{\sqrt{ca}}{c+a} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right)$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài giải: (i) Hiển nhiên $h_a \leq l_a$. Vì $\frac{l_a^2}{m_a^2} = \frac{4bc}{(b+c)^2} \frac{(b+c)^2 - a^2}{2(b^2 + c^2) - a^2} \leq \frac{4bc}{(b+c)^2} \leq 1$ theo

Chú ý 1.3.2 nên $l_a \leq m_a$. Hiển nhiên, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

(ii) Bởi có $\frac{l_a}{m_a} \leq 2 \frac{\sqrt{bc}}{b+c}$, $\frac{l_b}{m_b} \leq 2 \frac{\sqrt{ca}}{c+a}$, $\frac{l_c}{m_c} \leq 2 \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

nên $\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{bc}}{b+c} + \frac{\sqrt{ca}}{c+a} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right)$. Hiển nhiên, dấu “=” xảy ra khi và

chỉ khi $a = b = c$.

1.3.2 Đường tròn Apollonius

Mệnh đề 1.3.6. [Apollonius] Cho hai điểm A và B cố định. Tập hợp tất cả

những điểm M thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = k > 0$ với $k \neq 1$ là một đường tròn.

Chứng minh: Dựng hệ tọa độ (Oxy) sao cho $A(-a;0), B(b;0)$ với $a, b > 0$ và $\frac{a}{b} = k$. Giả sử $M(x; y)$. Ta thấy ngay $MA = kMB$ khi và chỉ khi

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2((x-b)^2 + y^2) \text{ hay } \left(x + \frac{a+bk^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2(a+b)^2}{(1-k^2)^2}.$$

Vì $a = kb$ nên $\left(x + \frac{a}{1-k}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2b^2}{(1-k)^2}$. Do vậy, tập hợp tất cả những điểm M

thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = k > 0, k \neq 1$, là đường tròn tâm $I\left(\frac{a}{k-1}; 0\right)$ và bán kính $R = \frac{kb}{|k-1|}$.

Ví dụ 1.3.7. Trên đường tròn lấy $n \geq 3$ điểm. Từ trọng tâm của hệ $n - 2$ điểm trong số đó hạ đường vuông góc với dây cung nối 2 điểm còn lại. Chứng minh rằng tất cả các đường vuông góc này đồng quy tại một điểm.

Bài giải: Có thể giả thiết $R = 1$. Kí hiệu n điểm $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ thuộc đường tròn $(O; 1)$ với tọa độ $A_k(x_k; y_k), x_k^2 + y_k^2 = 1, k = 1, 2, \dots, n$. Giả sử trọng tâm của hệ

$n-2$ điểm $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \dots, A_{i_{n-2}}$ là $I(x_I; y_I)$ với $x_I = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} x_{i_k}}{n-2}, y_I = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} y_{i_k}}{n-2}$

và $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Kí hiệu $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của hệ n điểm trên.

Khi đó $x_G = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}, y_G = \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n}$.

Phương trình đường thẳng đi qua I vuông góc với $A_{i_{n-1}}A_{i_n}$ là

$$(d_I): (x_{i_n} - x_{i_{n-1}})(x - x_I) + (y_{i_n} - y_{i_{n-1}})(y - y_I) = 0$$

Bài toán chuyển thành: Tìm điểm cố định của (d_I) khi hoán vị (i_j) thay đổi.

Giải quyết vấn đề này, ta chọn điểm cố định dạng $C(x_c = \alpha x_G; \alpha y_G)$.

$$\text{Đề có } (x_{i_n} - x_{i_{n-1}}) \left(\alpha \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n-2} x_{i_k}}{n-2} \right) + (y_{i_n} - y_{i_{n-1}}) \left(\alpha \frac{\sum_{k=1}^n y_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n-2} y_{i_k}}{n-2} \right) = 0$$

ta sẽ chọn $\alpha = \frac{n}{n-2}$ và nhận được hệ thức:

$$(x_{i_n} - x_{i_{n-1}})(x_{i_n} + x_{i_{n-1}}) + (y_{i_n} - y_{i_{n-1}})(y_{i_n} + y_{i_{n-1}}) = 1 - 1 = 0.$$

Như vậy, tất cả (d_I) đều đi qua điểm cố định $C \left(x_c = \frac{n}{n-2} x_G; \frac{n}{n-2} y_G \right)$. $\square$

1.2.3 Bài toán con bướm

Tiếp theo sau đây là việc xét Bài toán con bướm.

Mệnh đề 1.3.8. [Bài toán con bướm] Cho dây cung MN của một đường tròn và điểm O thuộc đoạn thẳng MN. Giả sử hai dây cung bất kỳ AB và CD, đều khác MN, đi qua điểm O của MN. Gọi giao điểm giữa AC và BD với MN là P và Q tương ứng. Khi đó hãy chứng minh $OP = OQ$ khi O là trung điểm đoạn MN.

Chứng minh: Ta chỉ cần xét đường tròn có bán kính bằng 1.

Dựng hệ tọa độ (Oxy) sao cho phương trình đường tròn $(\ell): x^2 + (y-a)^2 = 1$ và phương trình $(MN): y=0, 0 \leq a \leq 1$. Giả sử $(AB): y=kx$ và $(CD): y=hx$. Khi đó ta có :

$$A(x_1; y_1=kx_1), B(x_2; y_2=kx_2) \text{ với } x_{1,2} = \frac{ak \pm \sqrt{k^2 + 1 - a^2}}{k^2 + 1}$$

$$C(x'_1; y'_1=hx'_1), D(x'_2; y'_2=hx'_2) \text{ với } x'_{1,2} = \frac{ah \pm \sqrt{h^2 + 1 - a^2}}{h^2 + 1}.$$

$$\text{Từ } (AC): x = x_1 + \frac{(x'_1 - x_1)(y - kx_1)}{hx'_1 - kx_1} \text{ suy ra } x_P = x'_1 x_1 \frac{h-k}{hx'_1 - kx_1}$$

$$\text{Vì } x'_1 x'_2 = \frac{a^2 - 1}{h^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{a^2 - 1}{k^2 + 1} \text{ nên } x_P = \frac{(a^2 - 1)(h-k)}{h(1+k^2)x_2 - k(1+h^2)x'_2}$$

$$\text{Tương tự } x_Q = \frac{(a^2 - 1)(h-k)}{h(1+k^2)x_1 - k(1+h^2)x'_1}. \text{ Vì } x_1 + x_2 = \frac{2ak}{1+k^2}, x'_1 + x'_2 = \frac{2ah}{1+h^2}$$

$$\text{nên } h(1+k^2)x_2 - k(1+h^2)x_2' + h(1+k^2)x_1 - k(1+h^2)x_1' = 0.$$

Do vậy $x_P + x_Q = 0$ hay $OP = OQ$. □

1.2.4 Đường thẳng Newton

Mệnh đề 1.3.9. [Newton] Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm O . Gọi I, J là trung điểm của AC và BD tương ứng. Khi đó I, O, J thẳng hàng theo thứ tự.

Chứng minh: Dựng hệ tọa độ (Oxy) để đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ là $(\ell): x^2 + y^2 = 1$. Khi đó phương trình các cạnh và tọa độ các đỉnh:

$$\left\{ \begin{array}{l} (AB): x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1 \\ (BC): x \cos \beta - y \sin \beta = 1 \\ (CD): x \cos \gamma + y \sin \gamma = 1 \\ (DA): x \cos \delta - y \sin \delta = 1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} A \left(x_A = \frac{\cos \frac{\alpha - \delta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \delta}{2}}; y_A = \frac{\sin \frac{\alpha - \delta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \delta}{2}} \right) \\ B \left(x_B = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}; y_B = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \right) \\ C \left(x_C = \frac{\cos \frac{\gamma - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \beta}{2}}; y_C = \frac{\sin \frac{\gamma - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \beta}{2}} \right) \\ D \left(x_D = \frac{\cos \frac{\gamma - \delta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \delta}{2}}; y_D = \frac{\sin \frac{\gamma - \delta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \delta}{2}} \right) \end{array} \right.$$

$$\text{Bởi vì } \frac{y_I}{x_I} = \frac{y_A + y_C}{x_A + x_C} = \frac{\sin(t - \delta) - \sin(t - \alpha) + \sin(t - \beta) - \sin(t - \gamma)}{\cos(t - \alpha) + \cos(t - \beta) + \cos(t - \gamma) + \cos(t - \delta)}$$

$$\text{và } \frac{y_J}{x_J} = \frac{y_B + y_D}{x_B + x_D} = \frac{\sin(t - \delta) - \sin(t - \alpha) + \sin(t - \beta) - \sin(t - \gamma)}{\cos(t - \alpha) + \cos(t - \beta) + \cos(t - \gamma) + \cos(t - \delta)}$$

$$\text{với } t = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} \text{ nên ba điểm } I, O, J \text{ thẳng hàng.}$$

Chú ý 1.3.10. Với cách chứng minh trên, dễ dàng chỉ ra O không phải luôn luôn là trung điểm của IJ .

Mệnh đề 1.3.11. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường Ellíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Gọi I, J là trung điểm của AC và BD tương ứng. Khi đó I, O, J thẳng hàng theo thứ tự.

Chứng minh: Phương trình các cạnh và tọa độ các đỉnh của tứ giác $ABCD$:

$$\begin{cases} (AB): x \frac{\cos \alpha}{a} + y \frac{\sin \alpha}{b} = 1, (BC): x \frac{\cos \beta}{a} - y \frac{\sin \beta}{b} = 1 \\ (CD): x \frac{\cos \gamma}{a} + y \frac{\sin \gamma}{b} = 1, (DA): x \frac{\cos \delta}{a} - y \frac{\sin \delta}{b} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \left(x_A = \frac{a \cos \frac{\alpha - \delta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \delta}{2}}; y_A = \frac{b \sin \frac{\alpha - \delta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \delta}{2}} \right) \\ B \left(x_B = \frac{a \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}; y_B = \frac{b \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \right) \\ C \left(x_C = \frac{a \cos \frac{\gamma - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \beta}{2}}; y_C = \frac{b \sin \frac{\gamma - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \beta}{2}} \right) \\ D \left(x_D = \frac{a \cos \frac{\gamma - \delta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \delta}{2}}; y_D = \frac{b \sin \frac{\gamma - \delta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \delta}{2}} \right) \end{cases}$$

$$\text{Vì } \frac{y_I}{x_I} = \frac{y_A + y_C}{x_A + x_C} = \frac{b [\sin(t - \delta) - \sin(t - \alpha) + \sin(t - \beta) - \sin(t - \gamma)]}{a [\cos(t - \alpha) + \cos(t - \beta) + \cos(t - \gamma) + \cos(t - \delta)]}$$

$$\text{và } \frac{y_J}{x_J} = \frac{y_B + y_D}{x_B + x_D} = \frac{b [\sin(t - \delta) - \sin(t - \alpha) + \sin(t - \beta) - \sin(t - \gamma)]}{a [\cos(t - \alpha) + \cos(t - \beta) + \cos(t - \gamma) + \cos(t - \delta)]}$$

với $t = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}$ nên ba điểm I, O, J thẳng hàng. $\square$

1.2.5 Định lý Pitot

Mệnh đề 1.3.12 [Pitot] Tứ giác ABCD ngoại tiếp một đường tròn khi và chỉ khi $AB+CD=AD+BC$.

Chứng minh: Khi tứ giác ABCD ngoại tiếp một đường tròn thì hiển nhiên $AB+CD=AD+BC$. Ngược lại, giả sử $AB+CD=AD+BC$. Phân giác góc A và B cắt nhau ở O. Dựng đường tròn (ℓ) tâm O tiếp xúc với AB, BC và AD. Kẻ DC' tiếp xúc với (ℓ), trong đó $C' \in BC$ và C' nằm giữa B và C, chẳng hạn.

Từ $BC + AD = AB + DC$, $BC' + AD = AB + DC'$

suy ra $DC = BC - BC' + DC' = CC' + DC'$. Như vậy $C \equiv C'$. $\square$

Chú ý 1.3.13. Trình bày cách chứng minh định lý này bằng phương pháp tọa độ.

Ví dụ 1.3.14. Giả sử hình thành ABCD, $AB \parallel CD$, ngoại tiếp một đường tròn với hai đường chéo cắt nhau ở I. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 là bán kính đường tròn nội tiếp trong các tam giác IAB, IBC, ICD, IDA, tương ứng.

Chứng minh đồng nhất thức $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$.

Bài giải: Ký hiệu s_1, s_2, s_3, s_4 và p_1, p_2, p_3, p_4 là diện tích và chu vi của các tam giác IAB, IBC, ICD, IDA, tương ứng. Vì hình thang ABCD ngoại tiếp một đường tròn nên $p_1 + p_3 = p_2 + p_4$ theo Mệnh đề 1.3.12. Từ $S_{ABC} = S_{ABD}$ suy ra $s_2 = s_4 := s$.

Do bởi $\triangle IBC$ đồng dạng với $\triangle ICD$

nên $\frac{ID}{IB} = \frac{p_3}{p_1}$. Ta có $\frac{s_3}{s} = \frac{s_3}{s_2} = \frac{ID}{IB} = \frac{p_3}{p_1}$ và $\frac{s}{s_1} = \frac{s_4}{s_1} = \frac{ID}{IB} = \frac{p_3}{p_1}$. Như vậy $s = s_1 \frac{p_3}{p_1}$ và

$s = s_3 \frac{p_1}{p_3}$. Từ $p_1 + p_3 = p_2 + p_4$ suy ra $\frac{p_1}{s} + \frac{p_3}{s} = \frac{p_2}{s} + \frac{p_4}{s}$ hay $\frac{p_2}{s_2} + \frac{p_4}{s_4} = \frac{p_3}{s_3} + \frac{p_1}{s_1}$

Do đó $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$. $\square$

1.2.6 Định lý Ptolemy

Mệnh đề 1.3.15. [Plotemy] Với bốn điểm A, B, C, D ta luôn có

$AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$. Tứ giác lồi ABCD nội tiếp trong một đường tròn khi và chỉ khi $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Chứng minh: Không hạn chế có thể coi A, B, C nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Giả sử tọa độ bốn điểm $A(\cos \alpha; \sin \alpha), B(\cos \beta; \sin \beta), C(\cos \gamma; \sin \gamma)$ và $D(a; 0)$ với $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$. Ta phải chứng minh

$$\sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \gamma} + \sin \frac{\gamma - \beta}{2} \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha} \geq \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \beta}$$

hay

$$S = \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sqrt{u^2 + 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \sin \frac{\gamma - \beta}{2} \sqrt{u^2 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \geq \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \sqrt{(1 - a)^2 + 4a \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

với $u^2 = (1 - a)^2$. Chú ý rằng, với $x = \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, y = \sin \frac{\gamma - \beta}{2}$ ta có

$$S = \sqrt{u^2 x^2 + 4a x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \sqrt{u^2 y^2 + 4a y^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \geq \sqrt{u^2 (x + y)^2 + a \left(2x \sin \frac{\gamma}{2} + 2y \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2}$$

$$\text{Do } 2x \sin \frac{\gamma}{2} + 2y \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\gamma - \beta - \alpha}{2} - \cos \frac{\gamma + \beta - \alpha}{2} = 2 \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\text{và } \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} = \sin \left(\frac{\gamma - \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2} \right) \leq x + y \text{ nên ta có ngay bất đẳng thức}$$

$$S \geq \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \sqrt{u^2 + 4a \sin^2 \frac{\beta}{2}} \text{ và được } AB.CD + AD.BC \geq AC.BD. \text{ Giả thiết}$$

ABCD nội tiếp trong đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ với tọa độ các đỉnh

$$\begin{cases} A(x_A = \cos \alpha; y_A = \sin \alpha) \\ B(x_B = \cos \beta; y_B = \sin \beta) \\ C(x_C = \cos \gamma; y_C = \sin \gamma) \\ D(x_D = 1; y_D = 0), 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi \end{cases}$$

Đặt $T = AB.CD + AD.BC - AC.BD$. Khi đó ta có

$$T = \sqrt{2 - 2 \cos(\beta - \alpha)} \sqrt{2 - 2 \cos \gamma} + \sqrt{2 - 2 \cos(\gamma - \beta)} \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{2-2\cos(\gamma-\alpha)}\sqrt{2-2\cos\beta} \\
& = 4\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 4\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \\
& 2\left[\cos\frac{\gamma-\beta+\alpha}{2} - \cos\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} + \cos\frac{\gamma-\beta-\alpha}{2} \right. \\
& \quad \left. - \cos\frac{\gamma-\beta+\alpha}{2} + \cos\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2} - \cos\frac{\gamma-\beta-\alpha}{2} \right] = 0
\end{aligned}$$

Ngược lại, giả thiết $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

với toạ độ bốn điểm $A(\cos\alpha; \sin\alpha), B(\cos\beta; \sin\beta), C(\cos\gamma; \sin\gamma)$ và $D(a; 0)$ với $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi$ và thoả mãn $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Khi đó, với các kí

hiệu ở trên ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{u^2 x^2 + 4ax^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} + \sqrt{u^2 y^2 + 4ay^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \\
& = \sqrt{u^2 (x+y)^2 + a \left(2x \sin \frac{\gamma}{2} + 2y \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2}, (*)
\end{aligned}$$

hay hệ thức tương đương $\sqrt{\left(u^2 + 4a \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) \left(u^2 + 4a \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = u^2 + 4a \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$

Vì $x, y \neq 0$ và $a \neq 0$ không thoả mãn (*) nên $u=0$ hay $a=1$. Vậy $D(a; 0)$ và tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Vấn đề 1.3.16. Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp trong Ellíp $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Xét quan hệ giữa $AB \cdot CD + AD \cdot BC$ và $AC \cdot BD$.

Ví dụ 1.3.17. Cho tứ giác lồi $A_1 A_2 A_3 A_4$. Tứ giác $A_1 A_2 A_3 A_4$ nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi có thể gán cho mỗi đỉnh A_i của nó một cặp số thực $(a_i; b_i), i=1, 2, 3, 4$, thoả mãn $A_i A_j = a_i b_j - a_j b_i$ với mọi $i, j, 1 \leq i < j \leq 4$.

Bài giải: Giả sử đã gán được mỗi đỉnh A_i của tứ giác lồi $A_1 A_2 A_3 A_4$ một cặp số thực $(a_i; b_i)$ thoả mãn $A_i A_j = a_i b_j - a_j b_i$ với mọi $i, j, 1 \leq i < j \leq 4$. Ta chỉ ra tứ giác lồi $A_1 A_2 A_3 A_4$ nội tiếp trong đường tròn ngoại tiếp $\triangle A_1 A_2 A_3$.

Thật vậy, $A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 + A_1 A_4 \cdot A_2 A_3 - A_1 A_3 \cdot A_2 A_4 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_3 b_4 - a_4 b_3) +$

$$+(a_1b_4 - a_4b_1)(a_2b_3 - a_3b_2) - (a_1b_3 - a_3b_1)(a_2b_4 - a_4b_2) = 0.$$

Vậy, tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong một đường tròn theo Mệnh đề 1.3.15.

Ngược lại, giả thiết tứ giác lồi $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp trong một đường tròn.

Đặt $a = A_1A_2, -a_3 = A_2A_3, -a_4 = A_2A_4$ và $b_j = \frac{A_1A_j}{A_1A_2}$ với $j = 2, 3, 4$.

Tương ứng $A_1 \leftrightarrow (a; 0), A_2 \leftrightarrow (0; 1), A_3 \leftrightarrow (a_3; b_3)$ và $A_4 \leftrightarrow (a_4; b_4)$.

Như vậy $A_1A_j = A_1A_2 \cdot b_j = a_1b_j - a_j \cdot 0$ với $j = 2, 3, 4$

và $A_2A_3 = -a_3 = 0 \cdot b_3 - a_3 \cdot 1, A_2A_4 = -a_4 = 0 \cdot b_4 - a_4 \cdot 1$. Ta kiểm tra A_3A_4 . Vì tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp một đường tròn nên $A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_1A_4 \cdot A_2A_3 = A_1A_3 \cdot A_2A_4$ (theo Mệnh đề 1.3.14) hay $a_1 \cdot A_3A_4 + b_4 \cdot a_1 \cdot (-a_3) = b_3 \cdot a_1 \cdot (-a_4)$.

Vì $a_1 \neq 0$ nên $A_3A_4 = a_3b_4 - a_4b_3$. Như vậy, tất cả các yêu cầu đều thỏa mãn.

Ví dụ 1.3.18. Trong mặt phẳng (Oxy) cho Ellíp: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Giả sử đường kính bất kỳ AB: $y = kx$ với $k \neq 0$ và $A, B \in (E)$. Một cát tuyến thay đổi song song hoặc trùng AB cắt (E) tại M, N . Khi đó

(i) Tập các trung điểm I của MN là một đường kính CD của (E). Hai đường kính AB, CD được gọi là hai đường kính liên hợp.

(ii) [Apollonius] $AB^2 + CD^2 = 4(a^2 + b^2)$

(iii) $S_{ACBD} = 2ab$

Bài giải: (i) Giả sử $(d): y = kx + d$ song song hoặc trùng với (AB) . Khi đó tọa

độ giao điểm M, N là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = kx + d \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$

hay $\begin{cases} y = kx + d \\ (b^2 + k^2a^2)x^2 + 2ka^2dx + a^2d^2 - a^2b^2 = 0, (*) \end{cases}$ Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*)

Vậy $I(x_I; y_I)$ với $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{ka^2d}{b^2 + k^2a^2}, y_I = kx_I + d = \frac{b^2d}{b^2 + k^2a^2}$.

Như vậy, điểm I chạy trên đường thẳng $(CD): y = -\frac{b^2}{ka^2}x = hx$

ta có ngay $hk = -\frac{b^2}{a^2}$.

(ii) Tọa độ của A, B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = kx + d \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$

Ta có ngay $A\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}}; \frac{kab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}}\right)$.

Tương tự có $C\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 + h^2a^2}}; \frac{hab}{\sqrt{b^2 + h^2a^2}}\right)$.

Tóm lại $AB^2 + CD^2 = 4(OA^2 + OC^2) = 4(a^2 + b^2)$.

(iii) Ta có diện tích $S_{ACBD} = 2 \left\| \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ \frac{ab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}} & \frac{kab}{\sqrt{b^2 + k^2a^2}} & 1 \\ \frac{ab}{\sqrt{b^2 + h^2a^2}} & \frac{hab}{\sqrt{b^2 + h^2a^2}} & 1 \end{array} \right\| = 2ab.$ □

Ví dụ 1.3.19. Trong mặt phẳng (Oxy) cho Ellíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Giả sử đường thẳng qua tiêu điểm F cắt (E) ở M, N ; giả sử I, J thuộc (E) sao cho $OI \perp OJ$. Khi đó

(i) $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2a}{b^2}$.

(ii) $\frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

(iii) Hạ $OH \perp IJ$. Tìm tập hợp tất cả các điểm H khi $OI \perp OJ$ và I, J chạy trên (E) .

Bài giải: (i) Không hạn chế có thể coi $a > b > 0$. Khi đó $F(c = \sqrt{a^2 - b^2}; 0)$.

Đặt $\angle AFM = \alpha$, ở đó $A(a;0)$. Hạ $MP \perp OA, P(x;0)$. Ta có $x-c = FM \cos \alpha$.

Dễ dàng suy ra $FM = \frac{b^2}{a+c \cos \alpha}$ và $FN = \frac{b^2}{a-c \cos \alpha}$. Vậy $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN} = \frac{2a}{b^2}$.

(ii) Giả sử $I(a \cos \alpha; b \sin \alpha)$. Khi đó $OI^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha}$.

Tương tự $OJ^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha}$. Từ đây suy ra $\frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

(iii) Hiển nhiên $OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Vậy tập hợp tất cả các điểm H khi $OI \perp OJ$ và I,

J chạy trên (E) là đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. □

Ví dụ 1.3.20. Cho đường tròn (O) với tâm O đường kính $AB = 2$. Qua điểm M thuộc đường tròn (O) hạ $MP \perp AB, P \in AB$. Dựng đường tròn tâm M bán kính MP cắt đường tròn (O) tại E và D. Gọi giao điểm $I = DE \times MP$. Khi M chạy trên đường tròn (O), hãy chỉ ra:

(i) I chạy trên đường tròn (ℓ) nào?

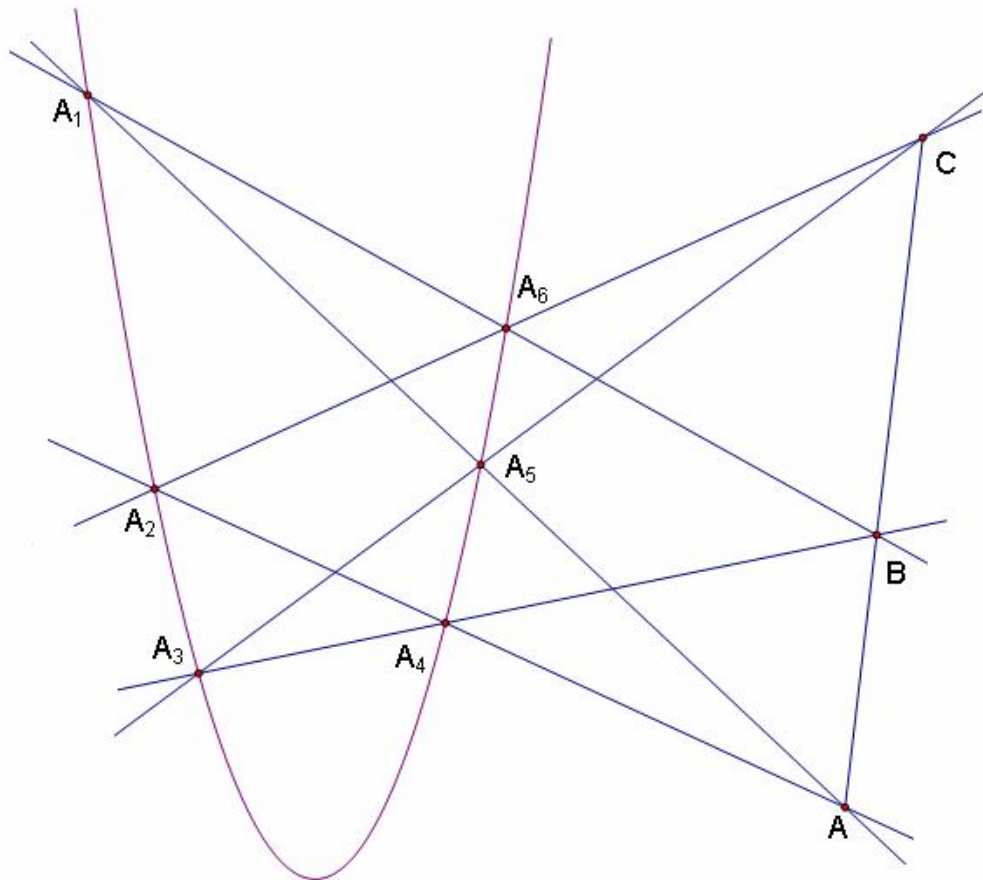
(ii) Nếu góc vuông $\angle zJt$ có hai cạnh góc vuông tiếp xúc với (ℓ) thì J chạy trên đường cong (ℓ') nào?

Bài giải: (i) Đường thẳng MP cắt hai đường tròn (O) và (M) ở M' và P' . Vì DE là trục đẳng phương của hai đường tròn nên $IP \cdot IP' = IM \cdot IM'$. Vậy $IP \cdot MP' = IM \cdot PM'$. Vì $PM' = PM = MP'$ nên $IP = IM$. Dựng hệ tọa độ (Oxy) với $A(1;0), O(0;0)$. Khi đó (O): $x^2 + y^2 = 1$. Giả sử $I(u;v)$. Khi đó $M(u;2v)$. Vì $u^2 + 4v^2 = 1$ nên M chạy trên Ellíp $(\ell): x^2 + 4y^2 = 1$.

(ii) Vì góc vuông $\angle zJt$ có hai cạnh góc vuông tiếp xúc với (ℓ) nên J chạy trên đường tròn $(\ell'): x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$. $\square$

1.2.7 Định lý Pascal

Định lý 1.3.21.[Pascal] Giả sử 6 điểm $A_1, A_2, \dots, A_6$ nằm trên đường cong bậc hai không suy biến (ℓ) . Khi đó ba điểm giao $A = (A_1A_5) \times (A_2A_4)$, $B = (A_3A_4) \times (A_6A_1)$ và $C = (A_2A_6) \times (A_3A_5)$ thẳng hàng.



Chứng minh: Qua phép biến đổi tuyến tính có thể coi $(\ell): x = y^2$.

Kí hiệu $d_{ij}(x, y) = 0$ là phương trình đường thẳng A_iA_j .

Đặt $p(x, y) = d_{24}(x, y)d_{16}(x, y)d_{35}(x, y) - \alpha d_{34}(x, y)d_{23}(x, y)d_{15}(x, y)$.

Đây là một đa thức bậc ba đối với x và y . Tọa độ 6 điểm $A_1, A_2, \dots, A_6$ thỏa mãn phương trình $p(x; y) = 0$. Lấy một điểm bất kỳ A thuộc (ℓ) , khác 6 điểm trên. Ta chọn α để tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình $p(x; y) = 0$. Nếu thế x qua y^2 ta được đa thức $p(y^2; y)$ bậc ≤ 6 . Phương trình $p(y^2; y) = 0$ cho tung độ của 7 điểm khác nhau, có nghĩa: $p(y^2; y) = 0$ có 7 nghiệm y khác nhau.

Vậy $p(y^2; y) \equiv 0$ hay mọi điểm thuộc (ℓ) đều có tọa độ thỏa mãn $p(x; y) = 0$.

Coi $p(x; y)$ như là một đa thức của x . Với phép chia đa thức, ta nhận được

$$p(x, y) = (x - y^2)q(x, y) + r(y)$$

trong đó $q(x, y)$ là thương và $r(y)$ là phần dư. Vì mọi điểm thuộc $(\ell): x = y^2$ đều thỏa mãn $p(x, y) = 0$ nên $r(y) \equiv 0$. Vậy $p(x, y) = (x - y^2)q(x, y)$. Vì $p(x, y)$ là đa thức bậc 3 nên $q(x, y)$ phải là đa thức bậc nhất hay $p(x, y) = (x - y^2)(ax + by + c)$.

Do 9 điểm $A_1, A_2, \dots, A_6$ và A, B, C đều thuộc đường cong $p(x, y) = 0$, nhưng A, B, C không thuộc $(\ell): x = y^2$ nên A, B, C thuộc đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$ hay A, B, C thẳng hàng. $\square$

Hệ quả 1.3.22. [Pappus] Giả sử 3 điểm A_1, A_2, A_3 nằm trên đường thẳng (d_1) và 3 điểm A_4, A_5, A_6 nằm trên đường thẳng (d_2) khác (d_1) . Khi đó ba điểm giao $A = (A_1A_5) \times (A_2A_4)$, $B = (A_1A_6) \times (A_2A_5)$ và $C = (A_2A_6) \times (A_3A_5)$ thẳng hàng.

Chứng minh: Kết quả này được suy ra từ Định lý 1.3.21.

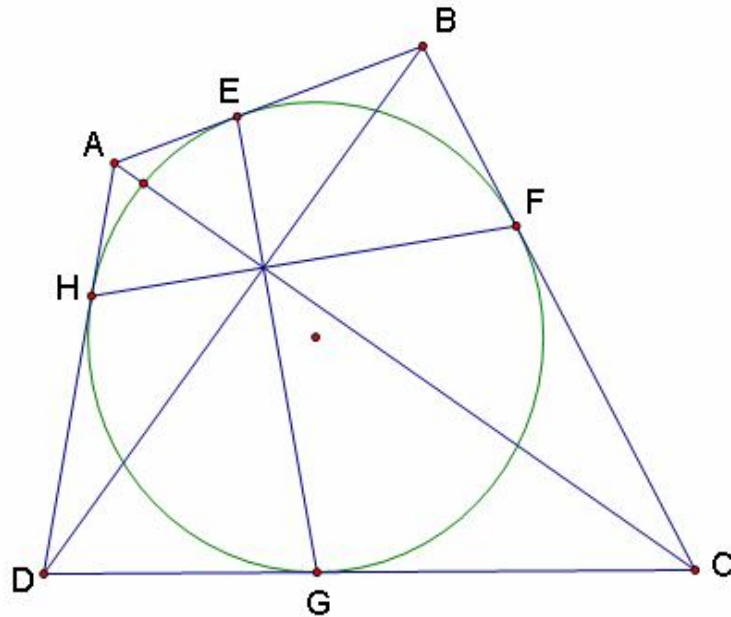
Ví dụ 1.3.23. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (C) . Tại các đỉnh A, B, C ta kẻ các tiếp tuyến Aa, Bb, Cc của đường tròn (C) và các tiếp tuyến cắt các cạnh $E = Aa \times BC, F = Bb \times CA, G = Cc \times AB$. Khi đó ba điểm E, F, G thẳng hàng.

Bài giải: Coi ba đỉnh tam giác ABC như là 6 điểm A, A, B, B, C, C nằm trên một đường cong bậc hai. Do vậy, ba điểm E, F, G thẳng hàng theo Định lý 1.3.21. $\square$

Ví dụ 1.3.24. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi các điểm tiếp xúc giữa AB, BC, CD, DA với (O) là E, F, G, H .

Khi đó bốn đường thẳng AC, BD, EG, FH đồng quy.

Bài giải:



Gọi $I = EG \times FH, J = EH \times FG$. Coi bốn điểm E, F, G, H như là 6 điểm E, E, F, F, G, G, H, H nằm trên một đường cong bậc hai. Do vậy, ba điểm J, I, B thẳng hàng theo Định lý 1.3.21. Tương tự, xét 6 điểm E, F, G, G, H, H ta còn có J, D, I thẳng hàng. Vậy BD đi qua I . Điều này chứng tỏ EG, FH, BD đồng quy ở I . Hoàn toàn tương tự, ba đường thẳng AC, EG, FH cũng đồng quy ở I .

Tóm lại, bốn đường thẳng AC, BD, EG, FH đồng quy. $\square$

Ví dụ 1.3.25. Giả sử $\triangle ABC$ có ba đỉnh thuộc một Parabol. Qua mỗi đỉnh A, B, C ta dựng tiếp tuyến với parabol và giả thiết mỗi tiếp tuyến này cắt cạnh đối diện ở A_1, B_2, C_1 tương ứng. Khi đó A_1, B_2, C_1 thẳng hàng.

Bài giải: Xét 6 điểm A, A, B, B, C, C thuộc parabol. Khi đó ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng theo Định lý Pascal.

Ví dụ 1.3.26. Giả sử $(\ell): y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ là một đường cong phẳng bậc ba trong mặt phẳng (Oxy) . Qua điểm I tùy ý trong (Oxy) dựng hai đường thẳng cắt (ℓ) tại các điểm A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3 , tương ứng. Khi đó tỷ số

$$\frac{IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3}{IB_1 \cdot IB_2 \cdot IB_3}$$
 không phụ thuộc vào việc chọn điểm I .

Bài giải: Giả sử $I(u, v)$ trong mặt phẳng (Oxy) . Đổi hệ trục để I là gốc toạ độ qua $X = x - u, Y = y - v$. Khi đó $I(0; 0)$ và $(\ell): Y = pX^3 + qX^2 + rX + s$ trong mặt phẳng toạ độ (IXY) . Giả sử hai đường thẳng qua gốc I với phương trình $Y = tX$ và $Y = t'X$ cắt (ℓ) tại các điểm A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3 , tương ứng. Hiển nhiên, hoành độ của các điểm A_1, A_2, A_3 và X_1, X_2, X_3 là nghiệm của phương trình $pX^3 + qX^2 + rX + s = tX$.

$$\text{Khi đó } X_1 X_2 X_3 = -\frac{s}{p} \text{ và } IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3 = \sqrt{X_1^2 + t^2 X_1^2} \sqrt{X_2^2 + t^2 X_2^2} \sqrt{X_3^2 + t^2 X_3^2}.$$

$$\text{N như vậy } IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3 = |X_1 X_2 X_3| \sqrt{(1+t^2)^3} = \left| \frac{s}{p} \right| \sqrt{(1+t^2)^3}.$$

$$\text{Tương tự, ta cũng có } IB_1 \cdot IB_2 \cdot IB_3 = \left| \frac{s}{p} \right| \sqrt{(1+t'^2)^3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3}{IB_1 \cdot IB_2 \cdot IB_3} = \sqrt{\left(\frac{1+t^2}{1+t'^2} \right)^3}.$$

□

Ví dụ 1.3.27. Giả sử $(\ell): y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$, là một đường cong phẳng bậc ba trong mặt phẳng (Oxy) . Qua hai điểm I và J tùy ý trong (Oxy) dựng hai đường thẳng song song cắt (ℓ) tại các điểm A_1, A_2, A_3 và B_1, B_2, B_3 , tương ứng.

Khi đó tỷ số $\frac{IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3}{JB_1 \cdot JB_2 \cdot JB_3}$ không phụ thuộc vào việc chọn hệ số góc của hai đường song song trên.

Bài giải: Giả sử hai đường thẳng song song qua $I(u_1, v_1)$ và $J(u_2, v_2)$ có hệ số góc t . Khi đó phương trình tương ứng của chúng là $(Id_1): y = t(x - u_1) + v_1$ và $(Jd_2): y = t(x - u_2) + v_2$. Giả sử hoành độ của các điểm A_1, A_2, A_3 là x_1, x_2, x_3 . Chúng là nghiệm của $ax^3 + bx^2 + (c - t)x + d + tu_1 - v_1 = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ và $A_1(x_1; t(x_1 - u_1) + v_1), A_2(x_2; t(x_2 - u_1) + v_1), A_3(x_3; t(x_3 - u_1) + v_1)$ với $x = u_1$ được

$$a(u_1 - x_1)(u_1 - x_2)(u_1 - x_3) = au_1^3 + bu_1^2 + cu_1 + d - v_1 = f(u_1)$$

$$\text{Ta có } IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3 = |(x_1 - u_1)(x_2 - u_1)(x_3 - u_1)| \sqrt{(1 + t^2)^3}$$

$$\text{và như vậy } IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3 = \left| \frac{f(u_1)}{a} \right| \sqrt{(1 + t^2)^3}.$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự có } JB_1 \cdot JB_2 \cdot JB_3 = \left| \frac{f(u_2)}{a} \right| \sqrt{(1 + t^2)^3}.$$

$$\text{Vậy } \frac{IA_1 \cdot IA_2 \cdot IA_3}{JA_1 \cdot JA_2 \cdot JA_3} = \left| \frac{f(u_1)}{f(u_2)} \right| \text{ không phụ thuộc } t. \quad \square$$

Ví dụ 1.3.28. Cho đường tròn (O) với tâm O đường kính AB cố định. Qua O dựng đường thẳng $d \perp AB$. Qua điểm M thuộc đường tròn (O) ta hạ $MP \perp d, P \in d$. Gọi giao điểm $N = AP \times OM$. Khi M chạy trên (O), hãy chỉ ra:

(i) N chạy trên đường (ℓ) nào?

(ii) Nếu góc vuông $\angle zIt$ có hai cạnh góc vuông tiếp xúc với (ℓ) thì I thuộc tiếp tuyến AT của đường tròn (O).

Bài giải: Hạ $NE \perp d, NT \perp AT$. Vậy $NO = NT$. Điều này chứng tỏ N chạy trên Parabol (ℓ) với tiêu điểm O và đường chuẩn AT. Vì góc vuông $\angle INT$ có hai cạnh góc vuông tiếp xúc với (ℓ) nên I thuộc đường chuẩn AT của (ℓ) .

Ví dụ 1.3.29. Cho đường tròn (ℓ) tâm O và đường thẳng d tiếp xúc với (ℓ) tại $A \in (\ell)$. Giả sử M là điểm biến thiên trên d và qua M dựng tiếp tuyến MB, trong đó B là tiếp điểm, với (ℓ) . Đường thẳng OB cắt đường thẳng $Mm \parallel OA$ tại P. Xác định tập hợp các điểm P.

Bài giải: Kẻ $OE \perp Mm$. Khi đó $OE = AM = MB$. Từ đó suy ra hai tam giác vuông OPE và PMB bằng nhau. Vậy $PE = PB$ và suy ra $PO = PM$. Như vậy, tập hợp các điểm P là parabol với tiêu điểm O và đường chuẩn d . $\square$

Ví dụ 1.3.30. Xác định tập hợp tâm của tất cả các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng d và tiếp xúc ngoài với đường tròn (ℓ) tâm O bán kính R cho trước.

Bài giải: Giả sử I là tâm đường tròn tiếp xúc với d tại A và tiếp xúc ngoài với (ℓ) tại B. Khi đó $IO = IB + R$. Kéo dài IA về phía A và lấy A_0 sao cho $IA_0 = IA + R$. Qua A_0 kẻ $d' \parallel d$. Khi đó d' cố định và $IA_0 = IO$. Như vậy, tập các điểm I là Parabol với tiêu điểm O và đường chuẩn d' . $\square$

Ví dụ 1.3.31. Cho tam giác ABC với $a = BC, b = CA, c = AB$. Chứng minh rằng, với điểm $M \in BC$ ta luôn có đồng nhất thức

$$a^2 AM^2 = b^2 BM^2 + c^2 CM^2 + (b^2 + c^2 - a^2) BM \cdot CM.$$

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) để $M(0;0), B(u;0), C(v;0)$ và $A(x_1; y_1)$

với $u < 0 < v, v - u = a$ và thỏa mãn $c^2 = (x_1 - u)^2 + y_1^2 = AM^2 - 2ux_1 + u^2$,

$$b^2 = (x_1 - v)^2 + y_1^2 = AM^2 - 2vx_1 + v^2 \text{ thay } v - u = a$$

dễ dàng có $b^2 + c^2 - a^2 = 2AM^2 - 2ux_1 - 2vx_1 + 2uv$

Đặt $T = b^2 BM^2 + c^2 CM^2 + (b^2 + c^2 - a^2) BM \cdot CM$. Khi đó ta có được

$$T = [AM^2 - 2vx_1 + v^2]u^2 + [AM^2 - 2ux_1 + u^2]v^2 - uv[2AM^2 - 2ux_1 - 2vx_1 + 2uv] \\ = (v-u)^2 AM^2 = a^2 AM^2.$$

$$\text{Vậy } a^2 AM^2 = b^2 BM^2 + c^2 CM^2 + (b^2 + c^2 - a^2) BM \cdot CM. \quad \square$$

Ví dụ 1.3.32. Trong một mặt phẳng, cho hai hình vuông ABCD và $A'B'C'D'$ với thứ tự các đỉnh cùng theo một hướng.

Chứng minh đồng nhất thức $A'A^2 + C'C^2 = B'B^2 + D'D^2$.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) để $A(a;0), B(0;a), C(-a;0), D(0;-a)$. Giả sử tâm hình vuông $A'B'C'D'$ là $I(u;v)$ và $A'(x_1, y_1)$. Vì hình vuông $A'B'C'D'$ là cùng hướng hình vuông ABCD nên sử dụng phép quay tâm $I(u;v)$ với góc quay $\frac{\pi}{2}$ biểu diễn qua ma trận:

$$\begin{pmatrix} x' & -u \\ y' & -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -u \\ y & -v \end{pmatrix}$$

ta được $B'(u+v-y_1; x_1-u+v)$. Dễ dàng có $C'(2u-x_1; 2v-y_1)$, và $D(u-v+y_1; u+v-x_1)$.

Khi đó ta có $A'A^2 + C'C^2 = (a-x_1)^2 + y_1^2 + (-a-2u+x_1)^2 + (2v-y_1)^2$

$$B'B^2 + D'D^2 = (u+v-y_1)^2 + (a+u-v-x_1)^2 + (u-v+y_1)^2 + (-a-u-v+x_1)^2$$

Dễ dàng kiểm tra đồng nhất thức $A'A^2 + C'C^2 = B'B^2 + D'D^2$ vì cả hai đều bằng

$$2a^2 + 4u^2 + 4v^2 + 2x_1^2 + 2y_1^2 + 4au - 4ax_1 - 4ux_1 - 4vy_1. \quad \square$$

Ví dụ 1.3.33. Cho hai đường thẳng (Ox) và (Oy) vuông góc với nhau tại O. Từ điểm P cố định thuộc (Ox) kẻ đường thẳng bất kỳ cắt (Oy) tại A. Dựng đường thẳng qua A vuông góc với (PA) cắt (Ox) ở B. Từ B dựng đường thẳng vuông góc với (Ox) cắt (PA) ở M. Tìm tập hợp tất cả các điểm M khi A chạy trên (Oy) .

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) và $P(a;0)$ trong mặt phẳng (Oxy) . Đường thẳng qua P với phương trình $y=t(x-a)$ cắt (Oy) tại điểm $A(0;-ta)$. Hiển nhiên, phương trình $(BA): y = -\frac{x}{t} - ta$ và tọa độ $B(-t^2a;0)$.

Khi đó M có tọa độ $M(x_M = -t^2a; y_M = -t^3a - t^2a)$.

Vậy ta suy ra quan hệ sau:

$$y_M^2 = a^2(t^6 + 2t^4 + t^2) = a^2 \left(-\frac{x_M^3}{a^3} + 2\frac{x_M^2}{a^2} - \frac{x_M}{a} \right).$$

Do đó, tập hợp tất cả các điểm M khi A chạy trên (Oy) là đường cong bậc ba với phương trình $x^3 + a^2x = a(2x^2 + y^2)$.

Ví dụ 1.3.34. Giả sử ΔABC có độ dài ba cạnh a, b, c. Khi đó có đúng 2 điểm E thỏa mãn $aEA = bEB = cEC$.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) . Không làm mất tính tổng quát có thể giả thiết bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng 1. Giả sử $A(1;0), B(\cos u; \sin u)$ với $0 < u < v < 2\pi$ và $C(\cos v; \sin v)$ và $E(x; y)$. Từ $d := aEA = bEB = cEC > 0$ suy ra hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \frac{d^2}{a^2} \\ (x-\cos u)^2 + (y-\sin u)^2 = \frac{d^2}{b^2} \text{ . Do vậy} \\ (x-\cos v)^2 + (y-\sin v)^2 = \frac{d^2}{c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 1 = \frac{d^2}{a^2} \\ x^2 + y^2 - 2x\cos u - 2y\sin u + 1 = \frac{d^2}{b^2} \text{ hay hệ tương đương} \\ x^2 + y^2 - 2x\cos v - 2y\sin v + 1 = \frac{d^2}{c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 1 = \frac{d^2}{a^2} \\ x(\cos u - 1) + y \sin u = \frac{d^2}{2a^2} - \frac{d^2}{2b^2} \\ x(\cos v - 1) + y \sin v = \frac{d^2}{2a^2} - \frac{d^2}{2c^2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } D = (\cos u - 1) \sin v - (\cos v - 1) \sin u = \sin(v - u) - (\sin v - \sin u)$$

$$\text{hay } D = 2 \sin \frac{v - u}{2} \left(\cos \frac{v - u}{2} - \cos \frac{v + u}{2} \right) \neq 0 \text{ nên hệ phương trình tuyến tính}$$

$$\begin{cases} x(\cos u - 1) + y \sin u = \frac{d^2}{2a^2} - \frac{d^2}{2b^2} \\ x(\cos v - 1) + y \sin v = \frac{d^2}{2a^2} - \frac{d^2}{2c^2} \end{cases} \text{ có đúng một nghiệm } (x_0; y_0).$$

$$\text{Vậy hệ đã cho có đúng hai nghiệm, vì phương trình } \frac{d^2}{a^2} = x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 + 1$$

$$= d^4(\dots) - 2d^2(\dots) + 1 \text{ có hai nghiệm } d^2.$$

Ví dụ 1.3.35. Có đúng hai điểm F nhìn các cạnh tam giác ABC dưới một góc $\frac{\pi}{3}$ hoặc $\frac{2\pi}{3}$.

Bài giải: Dựng cung chứa góc $\frac{\pi}{3}$ trên BC và trên CA. Hai cung này cắt nhau ở

F_1 . Khi đó F_1 nhìn AB dưới góc $\frac{2\pi}{3}$. Dựng cung chứa góc $\frac{2\pi}{3}$ trên BC và trên

CA, hai cung này cắt nhau ở F_2 . Khi đó F_2 nhìn AB dưới góc $\frac{2\pi}{3}$. Vậy có

đúng hai điểm F nhìn các cạnh tam giác ABC dưới một góc $\frac{\pi}{3}$ hoặc $\frac{2\pi}{3}$. $\square$

1.2.8 Đường tròn 9 điểm và đường tròn Euler

Không hạn chế, ta chỉ cần xét tam giác nội tiếp trong đường tròn bán kính $R=1$. Dựng hệ toạ độ (Oxy) sao cho đường tròn $(\ell): x^2 + y^2 = 1$ và $\triangle ABC$ với $A(1;0), B(\cos \alpha; \sin \alpha)$ và $C(\cos \gamma; \sin \gamma)$, trong đó $0 < \alpha, \beta < \pi$ và $\gamma = \alpha + \beta$. Hạ

các đường cao AA_0, BB_0, CC_0 . Tọa độ trọng tâm

$G\left(\frac{1+\cos\alpha+\cos\gamma}{3}; \frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{3}\right)$ và trực tâm $H(1+\cos\alpha+\cos\gamma; \sin\alpha+\sin\gamma)$.

Đường thẳng (OH) được gọi là đường thẳng Euler của ΔABC và được ký hiệu qua (d) . Phương trình tham số đường thẳng Euler

$$d: \begin{cases} x=(1+\cos\alpha+\cos\gamma)t \\ y=(\sin\alpha+\sin\gamma)t, t \in R \end{cases}$$

Mệnh đề 1.3.36. [Euler] Giả sử ΔABC với các đường cao AA_0, BB_0, CC_0 và trực tâm H . Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm đoạn HA, HB, HC và gọi A_2, B_2, C_2 là trung điểm cạnh BC, CA, AB , tương ứng. Khi đó 9 điểm $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn. Đường tròn này được gọi là đường tròn Euler. Tâm đường tròn Euler là trung điểm đoạn OH và

phương trình $\left(x - \frac{1+\cos\alpha+\cos\gamma}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; còn đường thẳng

Euler OH có phương trình $OH: y = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{1+\cos\alpha+\cos\gamma}x$.

Bài giải: Gọi E là trung điểm đoạn OH . Khi đó tọa độ các điểm

$$\begin{aligned} E & \left(\frac{1+\cos\alpha+\cos\gamma}{2}; \frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{2} \right) \\ A_1 & \left(\frac{1+1+\cos\alpha+\cos\gamma}{2}; \frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{2} \right) \\ B_1 & \left(\frac{\cos\alpha+1+\cos\alpha+\cos\gamma}{2}; \frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{2} \right) \\ C_1 & \left(\frac{\cos\beta+1+\cos\alpha+\cos\gamma}{2}; \frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{2} \right) \end{aligned}$$

$$A_2 \left(\frac{\cos \alpha + \cos \gamma}{2}; \frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{2} \right)$$

$$B_2 \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2}; \frac{\sin \gamma}{2} \right)$$

$$C_2 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}; \frac{\sin \alpha}{2} \right)$$

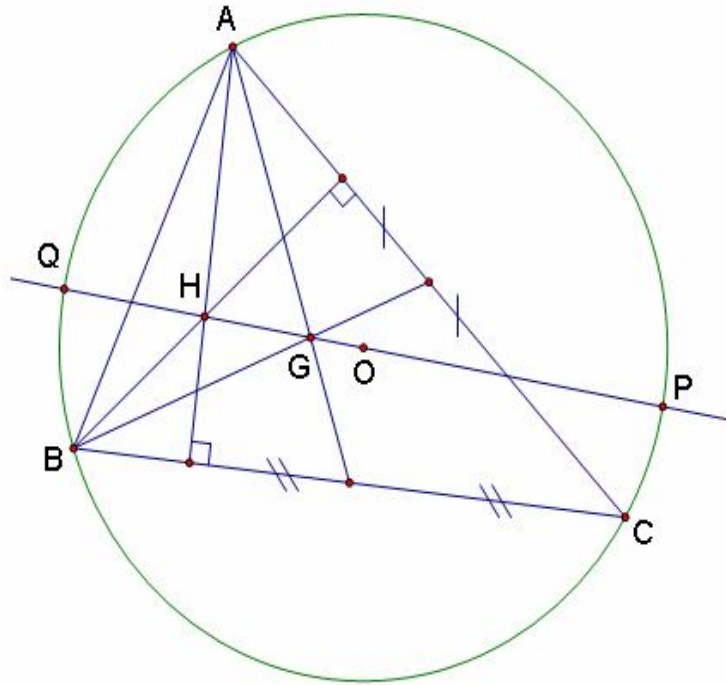
$$\text{Xét đường tròn } (\ell): \left(x - \frac{1 + \cos \alpha + \cos \gamma}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Hiển nhiên $A_1, A_2 \in (\ell)$. Vì $\angle A_1 A_0 A_2 = \frac{\pi}{2}$ nên ba điểm A_0, A_1, A_2 nằm trên đường tròn (ℓ) tâm E bán kính $r = \frac{1}{2}$. Tương tự 6 điểm còn lại cũng thuộc đường tròn (ℓ) .

Chú ý 1.3.37. Ta có $OE^2 = \frac{3 + 2\cos \alpha + 2\cos \gamma + 2\cos(\gamma - \alpha)}{4}$ và $OI^2 = 1 - 2r$, ở đó I là tâm đường tròn nội tiếp trong $\triangle ABC$. Vậy $OE \geq OI$ khi và chỉ khi $8r + 2\cos \alpha + 2\cos \gamma + 2\cos \beta \geq 1$.

Mệnh đề 1.3.38. [Dự tuyển IMO 1986] Giả sử $\triangle ABC$ với tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H và trọng tâm G. Đặt $f(X) = XA^2 + XB^2 + XC^2$ với điểm X thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi P và Q là hai điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp sao cho $f(P), f(Q)$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tương ứng. Khi đó 5 điểm O, H, G, P, Q thẳng hàng.

Bài giải: Không làm mất tính tổng quát, có thể giả thiết $R=1$. Dựng hệ tọa độ (Oxy) sao cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $\triangle ABC$ với $A(1;0), B(\cos \alpha; \sin \alpha)$ và $C(\cos \gamma; \sin \gamma)$, trong đó $0 < \alpha, \beta < \pi$ và $\gamma = \alpha + \beta$.



Toạ độ trọng tâm $G\left(\frac{1+\cos\alpha+\cos\gamma}{3}; \frac{\sin\alpha+\sin\gamma}{3}\right)$ và trực tâm

$H(1+\cos\alpha+\cos\gamma; \sin\alpha+\sin\gamma)$. Giả sử $X(x; y)$ với $x^2+y^2=1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(X) &= (x-1)^2 + y^2 + (x-\cos\alpha)^2 + (y-\sin\alpha)^2 + (x-\cos\gamma)^2 + (y-\sin\gamma)^2 \\ &= 6 - 2x - 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha - 2x\cos\gamma - 2y\sin\gamma \\ &= 6 - 2(1+\cos\alpha+\cos\gamma)x - 2(\sin\alpha+\sin\gamma)y \\ &= 6 - 2\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OX} = 6 - 2OH \cos t \end{aligned}$$

với t là góc giữa OX và OH . Hiển nhiên $f(X)_{\text{in}} = 6 + 2OH$ khi $t = \pi$ và

$f(X)_{\text{nn}} = 6 - 2OH$ khi $t = 0$. Do vậy 5 điểm O, H, G, P, Q thẳng hàng. $\square$

Ví dụ 1.3.39. Giả sử $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = 1$ có bán kính đường tròn nội tiếp r với các đường cao AA_0, BB_0, CC_0 . Gọi s là bán kính

đường tròn nội tiếp trong tam giác $A_0B_0C_0$. Khi đó $s \leq 1 - \frac{(1+r)^2}{3}$.

Bài giải: Đặt $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$. Khi đó $r = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

Vì bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_0 B_0 C_0$ bằng $\frac{1}{2}$ theo Mệnh đề 1.2.31 nên

$$s = 2 \sin \frac{\pi - 2\alpha}{2} \sin \frac{\pi - 2\beta}{2} \sin \frac{\pi - 2\gamma}{2} = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Như vậy $s + \frac{(1+r)^2}{3} = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \frac{(1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2})^2}{3}$. Từ đây suy ra

$$s + \frac{(1+r)^2}{3} \leq 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{3} = 1 \text{ hay } s \leq 1 - \frac{(1+r)^2}{3}. \quad \square$$

Vấn đề 1.3.40. Một câu hỏi đặt ra: Đường trong 9 điểm Euler và đường tròn nội tiếp trong ΔABC có tiếp xúc với nhau không? Vấn đề này được coi như một bài tập.

Mệnh đề 1.3.41. Với tam giác ABC ta luôn có các đồng nhất thức sau đây:

$$(i) \begin{cases} a^2 = BC^2 = 2 - 2 \cos \beta \\ b^2 = CA^2 = 2 - 2 \cos \gamma \\ c^2 = AB^2 = 2 - 2 \cos \alpha \end{cases} \text{ và } \begin{cases} HA^2 + a^2 = 4 \\ HB^2 + b^2 = 4 \\ HC^2 + c^2 = 4 \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} OH^2 = 9 - a^2 - b^2 - c^2. \\ \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2 \text{ khi } \Delta ABC \text{ nhọn} \\ \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \text{ khi } \Delta ABC \text{ vuông} \\ \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \text{ khi } \Delta ABC \text{ tù} \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} 2OH \cdot HA \cos \angle OHA = 12 - 2a^2 - b^2 - c^2 \\ 2OH \cdot HB \cos \angle OHB = 12 - a^2 - 2b^2 - c^2 \\ 2OH \cdot HC \cos \angle OHC = 12 - a^2 - b^2 - 2c^2 \end{cases}$$

$$(iv) \text{ Tính } T = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA_0} \text{ và } P = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} \text{ theo } a, b, c.$$

Chứng minh: (i) là hiển nhiên.

$$(ii) \text{ Ta có } OH^2 = (1 + \cos \alpha + \cos \gamma)^2 + (\sin \alpha + \sin \gamma)^2 = 9 - a^2 - b^2 - c^2$$

Từ đây suy ra $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{9 - OH^2}{4} \leq \frac{9}{4}$. Khi ΔABC nhọn

thì $OH^2 < 1$ và như vậy $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$. Khi ΔABC vuông

thì $OH^2=1$ và như vậy $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$; còn khi ΔABC tù thì $OH^2 > 1$ và như vậy $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$.

(iii) Vì $2OH.HA \cos \angle OHA = OH^2 + HA^2 - OA^2 = 12 - 2a^2 - b^2 - c^2$ nên $2OH.HA \cos \angle OHA = 12 - 2a^2 - b^2 - c^2$. Tương tự có hệ thức khác.

(iv) Kéo dài AA_0 cắt đường tròn (ℓ) tại A' . Khi đó ta có

$$T = \frac{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA'}}{2} = \frac{OH^2 - R^2}{2} = 4 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$P = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = (-\cos \alpha - \cos \gamma; -\sin \alpha - \sin \gamma)(-1 - \cos \gamma; -\sin \gamma) = 4 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$\text{Tóm lại } T = P = 4 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}. \quad \square$$

Mệnh đề 1.3.42. Giả sử ΔABC với độ dài cạnh a, b, c nội tiếp trong đường tròn tâm O với trực tâm H . Nếu điểm M thuộc đường thẳng Euler (OH) thì tồn tại một số $k \in \mathbb{R}$ để $MA^2 + ka^2 = MB^2 + kb^2 = MC^2 + kc^2$. Ngược lại, với mỗi số $k \in \mathbb{R}$ đều có một điểm N duy nhất thỏa mãn $NA^2 + ka^2 = NB^2 + kb^2 = NC^2 + kc^2$.

Chứng minh: Không hạn chế có thể giả thiết bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng 1. Với bất kỳ điểm M thuộc đường thẳng (OH) , chẳng hạn M thuộc tia (HO) , sẽ có $MA^2 = MH^2 + HA^2 - 2HM.HA \cos \angle OHA$ hay

$$\begin{aligned} MA^2 &= MH^2 + HA^2 - \frac{HM}{OH} \cdot 2OH.HA \cos \angle OHA \\ &= MH^2 + 4 - a^2 - \frac{HM}{OH} (12 - 2a^2 - b^2 - c^2) \\ &= MH^2 + 4 - 12 \frac{HM}{OH} + \frac{HM}{OH} (a^2 + b^2 + c^2) + \left(\frac{HM}{OH} - 1 \right) a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Như vậy } MA^2 + \left(1 - \frac{HM}{OH} \right) a^2 = MH^2 + 4 - 12 \frac{HM}{OH} + \frac{HM}{OH} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Với } k = 1 - \frac{HM}{OH} \text{ có } MA^2 + ka^2 = MH^2 + (1 - k)(a^2 + b^2 + c^2) + 4(3k - 2).$$

Tương tự $MB^2 + kb^2 = MH^2 + (1-k)(a^2 + b^2 + c^2) + 4(3k-2) = MC^2 + kc^2$.

Ngược lại, giả thiết cho số $k \in R$. Nếu $k = 0$ thì $NA^2 + 0.a^2 = NB^2 + 0.b^2 = NC^2 + 0.c^2$ tương đương $N \equiv O$. Giả thiết $k \neq 0$. Giả sử $N(x; y)$. Hệ phương trình $NA^2 + ka^2 = NB^2 + kb^2 = NC^2 + kc^2$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} x(1 - \cos \alpha) - y \sin \alpha = k(\cos \gamma - \cos \beta) \\ x(1 - \cos \gamma) - y \sin \gamma = k(\cos \alpha - \cos \beta) \end{cases}$$

Vì định thức $D = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \neq 0$ nên hệ có đúng 1 nghiệm. $\square$

Định lý 1.3.43. Giả sử ΔABC với độ dài các cạnh a, b, c nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính 1 với trục tâm H . Điểm M thuộc đường thẳng Euler (OH) khi và chỉ khi có số $k \in R$ để $MA^2 + ka^2 = MB^2 + kb^2 = MC^2 + kc^2$. Từ đây suy ra kết quả sau: Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ và $C(x_3; y_3)$. Điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng Euler của ΔABC khi và chỉ khi có số $k \in R$ để

$$xx_1 + yy_1 + ka^2 = xx_2 + yy_2 + kb^2 = xx_3 + yy_3 + kc^2.$$

Chứng minh: Theo Mệnh đề 1.3.42 ta thấy rằng, nếu $M \in (OH)$ thì tồn tại k để $MA^2 + ka^2 = MB^2 + kb^2 = MC^2 + kc^2$ và ngược lại, với mỗi $k \in R$ có điểm N duy nhất thỏa mãn $NA^2 + ka^2 = NB^2 + kb^2 = NC^2 + kc^2$.

Với $M \in (OH)$ có $MA^2 + ka^2 = MH^2 + HA^2 - 2MH.HA \cos \angle MHA + ka^2$

$$\text{hay } MA^2 + ka^2 = MH^2 + 4 - a^2 + ka^2 \pm \frac{HM}{OH}(12 - 2a^2 - b^2 - c^2).$$

$$\text{Xét } MA^2 + ka^2 = MH^2 + \left(4 - 12 \frac{OM}{OH}\right) + \frac{HM}{OH}(a^2 + b^2 + c^2) + \left(k - 1 + \frac{HM}{OH}\right)a^2$$

Chọn $M \in (HO)$ với $\frac{HM}{OH} = 1 - k$

$$\text{ta sẽ có } MA^2 + ka^2 = MH^2 + \left(4 - 12 \frac{OM}{OH}\right) + \frac{HM}{OH}(a^2 + b^2 + c^2) + \left(k - 1 + \frac{HM}{OH}\right)a^2$$

$$\text{hay } MA^2 + ka^2 = MH^2 + (1 - k)(a^2 + b^2 + c^2) + 4(3k - 2)$$

Khi đó $MB^2 + kb^2 = MH^2 + (1-k)(a^2 + b^2 + c^2) + 4(3k-2) = MC^2 + kc^2$.

Tương tự xét $MA^2 + ka^2 = MH^2 + 4 - a^2 + ka^2 + \frac{HM}{OH}(12 - 2a^2 - b^2 - c^2)$. Vì N là

điểm duy nhất thỏa mãn $NA^2 + ka^2 = NB^2 + kb^2 = NC^2 + kc^2$ nên $M \equiv N$.

Chú ý 1.3.44. Với trực tâm H có $HA^2 + 1.a^2 = HB^2 + 1.b^2 = HC^2 + 1.c^2$; Với tâm ngoại O có $OA^2 + 0.a^2 = OB^2 + 0.b^2 = OC^2 + 0.c^2$; Với trọng tâm G có

$GA^2 + \frac{1}{3}a^2 = GB^2 + \frac{1}{3}b^2 = GC^2 + \frac{1}{3}c^2$; Với E là trung điểm của đoạn OH có

$EA^2 + \frac{1}{2}a^2 = EB^2 + \frac{1}{2}b^2 = EC^2 + \frac{1}{2}c^2$ và chúng đều bằng $\frac{1}{4}(1 + a^2 + b^2 + c^2)$.

Chú ý 1.3.45. Hệ thức $EB^2 + \frac{1}{2}(4 - c^2) = EC^2 + \frac{1}{2}(4 - b^2) = EH^2 + \frac{1}{2}a^2$

tương đương $EB^2 + \frac{1}{2}b^2 = EC^2 + \frac{1}{2}c^2 = EH^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2$

$$= \frac{9 - a^2 - b^2 - c^2}{4} + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 2 = \frac{1 + a^2 + b^2 + c^2}{4} = EA^2 + \frac{1}{2}a^2.$$

Như vậy $E \in d_0$ và $E \in (d)$ cùng ứng với $k = \frac{1}{2}$.

Chương 2

Xây dựng một số bài toán Đại số và Hình học sơ cấp

2.1 Bài toán con bướm cho các đường conic

Vấn đề 2.1.1. Thay đường tròn bằng một đường conic khác, kết quả về Bài toán con bướm có còn đúng không?

Các ví dụ dưới đây sẽ chỉ ra rằng, bài toán con bướm đúng cho tất cả các đường conic

Ví dụ 2.1.2. Cho dây cung MN của một đường Parabol. Giả sử hai dây cung bất kỳ AB và CD, đều khác MN, đi qua trung điểm I của MN. Gọi giao điểm giữa AC và BD với MN là P và Q tương ứng. Khi đó $IP = IQ$.

Chứng minh: Dựng hệ tọa độ (Oxy) sao cho phương trình đường Parabol $(\ell): y = v(x^2 + ax + b)$ và $M(m, v(m^2 + am + b)), N(n, v(n^2 + an + b))$ với trung điểm I của MN chính là điểm $O(0;0)$. Do vậy $n = -m$ và $b = -m^2$.

Phương trình của đường thẳng (MN) là $(MN): y = ux$. Khi đó $u = av$.

Giả sử $(AB): y = kx$ và $(CD): y = hx$. Khi đó ta có tọa độ 4 điểm giao:

$$A(x_1; y_1 = kx_1), B(x_2; y_2 = kx_2), x_{1,2} = \frac{k - av \pm \sqrt{(k - av)^2 - 4bv^2}}{2v}$$

$$C(x'_1; y'_1 = hx'_1), D(x'_2; y'_2 = hx'_2), x'_{1,2} = \frac{h - av \pm \sqrt{(h - av)^2 - 4bv^2}}{2v}$$

Từ $(AC): x = x_1 + \frac{(x'_1 - x_1)(y - kx_1)}{hx'_1 - kx_1}$ và $(MN): y = ux$ ta suy ra

$$x_P = x'_1 x_1 \frac{h - k}{(h - u)x'_1 - (k - u)x_1}$$

Vì $x'_1 x'_2 = b, x_1 x_2 = b$ nên $x_P = \frac{b(h - k)}{(h - u)x_2 - (k - u)x'_2}$. Hoàn toàn tương tự

$$x_Q = \frac{b(h - k)}{(h - u)x_1 - (k - u)x'_1}. \text{ Vì } x_1 + x_2 = \frac{k - av}{v}, x'_1 + x'_2 = \frac{h - av}{v}$$

$$\text{nên } (h-u)x_2 - (k-u)x_2' + (h-u)x_1 - (k-u)x_1' = \frac{(h-k)(u-av)}{v} = 0$$

do bởi $u=av$. Vậy $x_p + x_q = 0$ hay $IP=IQ$. $\square$

Ví dụ 2.1.3. Cho dây cung MN của một đường ellíp hoặc hyperbol hoặc đường tròn. Giả sử hai dây cung bất kỳ AB và CD, đều khác MN, đi qua trung điểm I của MN. Gọi giao điểm giữa AC và BD với MN là P và Q tương ứng. Khi đó $IP=IQ$.

Chứng minh: Dựng hệ toạ độ (Oxy) sao cho phương trình đường ellíp hoặc hyperbol có dạng $(\ell): \alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ và $(MN): y = ax + b$. Khi đó tọa độ điểm M và N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax + b \\ \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = ax + b \\ \alpha x^2 + \beta(ax + b)^2 = 1 \end{cases}$$

Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình $(\alpha + \beta a^2)x^2 + 2\beta abx + \beta b^2 - 1 = 0$

Tọa độ hai điểm $M(m; y_m = am + b), N(n; y_n = an + b)$. Gọi $I(x_0; y_0)$ là trung điểm

của MN. Ta có $x_0 = \frac{m+n}{2} = -\frac{\beta ab}{\alpha + \beta a^2}$ và $y_0 = ax_0 + b$.

Giả sử $(AB): y = k(x - x_0) + y_0$ và $(CD): y = h(x - x_0) + y_0$. Khi đó ta có tọa độ giao điểm $A(x_1; y_1 = k(x_1 - x_0) + y_0), B(x_2; y_2 = k(x_2 - x_0) + y_0)$ với x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$(\alpha + \beta k^2)x^2 - 2\beta k(kx_0 - y_0)x + \beta(kx_0 - y_0)^2 - 1 = 0;$$

Tọa độ giao điểm $C(x_1'; y_1' = h(x_1' - x_0) + y_0), D(x_2'; y_2' = h(x_2' - x_0) + y_0)$ với x_1' và x_2' là hai nghiệm của phương trình

$$(\alpha + \beta h^2)x^2 - 2\beta h(hx_0 - y_0)x + \beta(hx_0 - y_0)^2 - 1 = 0;$$

Đặt $u_i = x_i - x_0, u_i' = x_i' - x_0$ với $i=1, 2$, Ta có $u_i - u_i' = x_i - x_i'$ và $y_i - y_i' = ku_i - hu_i'$.

Từ $(AC): \frac{x - x_1}{x_1' - x_1} = \frac{y - y_1}{y_1' - y_1}$ suy ra phương trình đường thẳng

$$(AC): x = x_1 + \frac{(u_1' - u_1)(y - ku_1 - y_0)}{hu_1' - ku_1}.$$

Do $(MN): y = a(x - x_0) + y_0$ ta suy ra tọa độ điểm P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = a(x - x_0) + y_0 \\ x = x_1 + \frac{(u_1' - u_1)(y - ku_1 - y_0)}{hu_1' - ku_1} \end{cases}$$

Từ hệ này suy ra được $x_P - x_0 = \frac{(h-k)u_1u_1'}{(h-a)u_1' - (k-a)u_1}$.

Hoàn toàn tương tự $x_Q - x_0 = \frac{(h-k)u_2u_2'}{(h-a)u_2' - (k-a)u_2}$.

Xét tổng $(x_P - x_0) + (x_Q - x_0) = \frac{(h-k)u_1u_1'}{(h-a)u_1' - (k-a)u_1} + \frac{(h-k)u_2u_2'}{(h-a)u_2' - (k-a)u_2}$.

Để chứng minh $x_P - x_0 + x_Q - x_0 = 0$ hay $IP = IQ$ ta chỉ ra đẳng thức

$$(h-a)u_1' u_2' (u_1 + u_2) = (k-a)u_1 u_2 (u_1' + u_2'), (*)$$

Ta có $u_1 + u_2 = x_1 + x_2 - 2x_0 = \frac{2\beta k(kx_0 - y_0)}{\alpha + \beta k^2} - 2x_0 = -\frac{2\beta ky_0 + 2\alpha x_0}{\alpha + \beta k^2}$

và $u_1 u_2 = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = x_1 x_2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_0^2$

hay $u_1 u_2 = \frac{\beta(kx_0 - y_0)^2 - 1}{\alpha + \beta k^2} - \frac{2\beta k(kx_0 - y_0)}{\alpha + \beta k^2} x_0 + x_0^2 = \frac{\beta y_0^2 + \alpha x_0^2 - 1}{\alpha + \beta k^2}$. Tương tự ta có

$$u_1' + u_2' = -\frac{2\beta h y_0 + 2\alpha x_0}{\alpha + \beta h^2} \text{ và } u_1' u_2' = \frac{\beta y_0^2 + \alpha x_0^2 - 1}{\alpha + \beta h^2}.$$

Qua việc thay $u_1 + u_2, u_1 u_2, u_1' + u_2', u_1' u_2'$ vào $(*)$ và biến đổi, chứng minh

$$(*) \text{ tương đương với chứng minh } h(a\beta y_0 + \alpha x_0) = k(a\beta y_0 + \alpha x_0)$$

hay $a\beta y_0 + \alpha x_0 = 0$.

Vì $x_0 = -\frac{\beta ab}{\alpha + \beta a^2}$ và $y_0 = ax_0 + b$ nên ta có $\beta a^2 x_0 + \alpha x_0 + \beta ab = 0$.

Do vậy $a\beta y_0 + \alpha x_0 = a\beta(ax_0 + b) + \alpha x_0 = \beta a^2 x_0 + \alpha x_0 + \beta ab = 0$. □

2.2 Chứng minh một số bài toán Đại số và hình học sơ cấp

Phần Hình học rất được chú trọng nhất là trong các kỳ thi Đại học, cao đẳng. Có nhiều cách giải bài toán hình học, việc ứng dụng phương pháp tọa độ vào giải các bài toán hình học giúp cho người làm toán có thể giải quyết vấn đề một cách rất đơn giản. Để giải quyết được bài toán hình học theo phương pháp này người làm toán cần phải biết chọn hệ trục tọa độ Descartes và đơn vị trục, biết dựa vào các điều kiện bài toán để xác định tọa độ điểm, phương trình các đường, điều kiện ràng buộc với nhau giữa tọa độ các điểm, phương trình các đường; đồng thời thành thạo trong việc sử dụng các kiến thức cần thiết để giải bài toán. Mặt khác, một vài bài toán hình rất đáng được quan tâm đó là bài toán tìm tập hợp điểm mà không kẻ vẽ được bằng thước kẻ hoặc compa.

Ví dụ 2.2.1. Cho góc vuông xOy một hình chữ nhật $OABC$ có chu vi không đổi, A, C là điểm thay đổi thuộc Ox, Oy . Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ B vuông góc với đường chéo AC luôn đi qua một điểm cố định:

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) với $O(0;0)$ trùng với đỉnh O của hình chữ nhật $OABC$. Ta gọi $A(a;0), C(0;c)$ dễ dàng nhận thấy $B(a;c), (a,c>0)$. Đặt $a+c=b(b=const)$ vì chu vi $OABC$ không đổi.

Ta có ngay phương trình đường thẳng $AC: y = -\frac{c}{a}x + c$.

Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua B vuông góc với đường thẳng AC , đường thẳng

(Δ) có dạng: $y = \frac{a}{c}x + y_0 \Rightarrow y_0 = c - \frac{a}{c} \cdot a = \frac{c^2 - a^2}{c} = b\left(1 - \frac{a}{c}\right)$.

Do đó phương trình của (Δ) là $y = \frac{a}{c}x + b\left(1 - \frac{a}{c}\right)$

Giả sử (Δ) qua điểm cố định $M(x_1; y_1)$ với mọi $\frac{a}{c}$, ta có:

$$\frac{a}{c}(x_1 - b) - (y_1 - b) = 0 \text{ với mọi } \frac{a}{c}, \text{ hay } \begin{cases} x_1 = b \\ y_1 = b \end{cases}.$$

Vậy (Δ) luôn đi qua điểm cố định $D(b;b)$.

Ví dụ 2.2.2. Tứ giác IAJB có các góc A và b vuông, $IA > IB$. Chứng tỏ rằng với mọi điểm M trên đường thẳng IJ ta luôn có:

$$\frac{JA}{JB} \leq \frac{MA}{MB} \leq \frac{IA}{IB}.$$

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) sao cho O là trung điểm của IJ và IJ là trục hoành Ox. Khi đó A, B thuộc đường tròn (O;R) với $R=OI$, không mất tính tổng quát ta chọn $|\overline{OI}|=|\overline{OJ}|=R=1$.

Gọi hoành độ của A là $\cos a (a \in [0; \pi])$ thì ta dễ dàng suy ra $A(\cos a; \sin a)$.

Tương tự, gọi hoành độ của B là $\cos b (b \in [0; \pi])$ thì ta có $B(\cos b; \sin b)$ và $I(-1;0), J(1;0)$.

Từ giả thiết $IA > IB$, ta có $\sqrt{(-1-\cos a)^2 + \sin^2 a} > \sqrt{(-1-\cos b)^2 + \sin^2 b}$ hay $\cos a > \cos b$.

Mặt khác, gọi $M(x;0)$ ta sẽ có $\frac{MA^2}{MB^2} = \frac{x^2 - 2x\cos a + 1}{x^2 - 2x\cos b + 1}$.

Xét hàm số $y = \frac{x^2 - 2x\cos a + 1}{x^2 - 2x\cos b + 1}$ ta có $y' = \frac{(\cos a - \cos b)(x^2 - 1)}{(x^2 - 2x\cos b + 1)^2} = 0$

khi $x = \pm 1$. Xét bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
			y(-1)				1
y	1						
					y(1)		

Ta đã có $\frac{IA^2}{IB^2} = \frac{1+\cos a}{1+\cos b} = y(-1) > 1$ và có $\frac{JA^2}{JB^2} = \frac{1-\cos a}{1-\cos b} = y(1) < 1$.

Từ đó $y(1) \leq \frac{MA^2}{MB^2} \leq y(-1)$ hay $\frac{JA}{JB} \leq \frac{MA}{MB} \leq \frac{IA}{IB}$ (đccm) $\square$

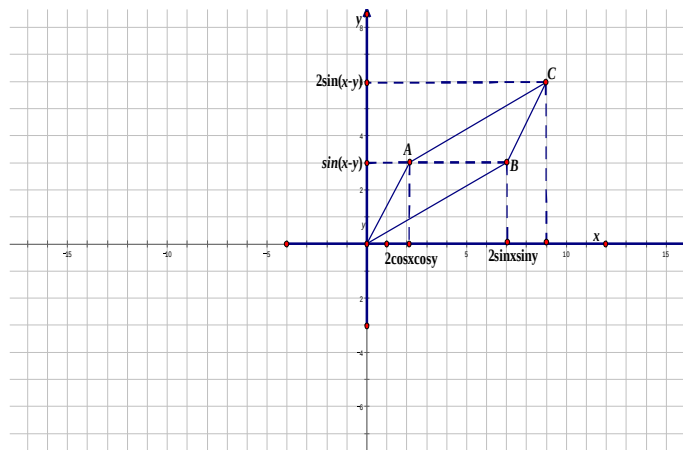
Ví dụ 2.2.3: Chứng minh rằng với mọi giá trị của x, y ta đều có:

$$\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2. \quad (1)$$

Bài giải: Dựng hệ tọa độ (Oxy) lấy các điểm $A(2\cos x \cos y; \sin(x-y))$ và

$B(2\sin x \sin y; \sin(x-y))$. Ta có ngay $OA = \sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)}$

$OB = \sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)}$.



Dựng hình bình hành OBCA, dễ thấy $C(2(\cos x \cos y + \sin x \sin y); 2\sin(x-y))$.

Ta có $OA + OB = OA + CA \geq OC$, do đó $\sqrt{4\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2(x-y)} +$

$+\sqrt{4\sin^2 x \sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq \sqrt{4\cos^2(x-y) + 4\sin^2(x-y)} = 2.$ $\square$

Ví dụ 2.2.4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

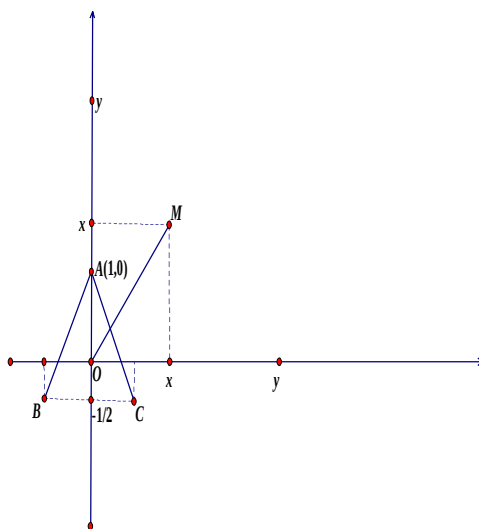
$$T = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1}.$$

Bài giải: Viết lại biểu thức đã cho như sau

$$T = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Đặt hệ tọa độ (Oxy) , lấy các điểm $M(x;x)$, $A(0;1)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và

$$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right).$$



Đễ thấy: $MA = \sqrt{(0-x)^2 + (1-x)^2} = \sqrt{x^2 + (x-1)^2}$

$$MB = \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$MC = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - x\right)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Ta có: $T = MA + MB + MC$

Lại có:

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

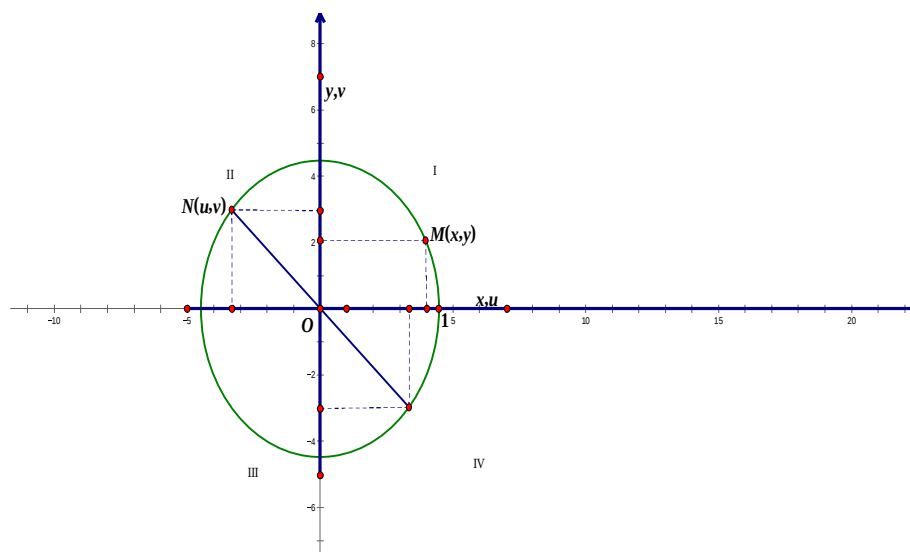
$$BC = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$CA = \sqrt{\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra ΔABC đều và T nhỏ nhất khi $M \equiv O$ và $\min T = 3$ khi $x=0$.

Ví dụ 2.2.5. Chứng minh rằng nếu $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ (*) và $xu + yv = 0$ (**) thì $x^2 + u^2 = y^2 + v^2 = 1$ và $xy + uv = 0$.

Bài giải: Dựng hệ trục tọa độ (Oxy) , dễ dàng nhận thấy phương trình $x^2 + y^2 = 1$ là phương trình đường tròn có tâm $O(0;0)$ bán kính $R=1$. Nếu đồng nhất mặt phẳng tọa độ (Oxy) với mặt phẳng tọa độ (Ouv) thì đường tròn đó cũng là đường tròn có phương trình $u^2 + v^2 = 1$. Trên đường tròn đó lấy hai điểm $M(x;y)$ và $N(u;v)$.



Ta có: $\overrightarrow{OM} = (x; y), \overrightarrow{ON} = (u; v)$. Suy ra: $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = xy + uv$

Theo giả thiết $xu + yv = 0$ nên ta có $xy + uv = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON}$

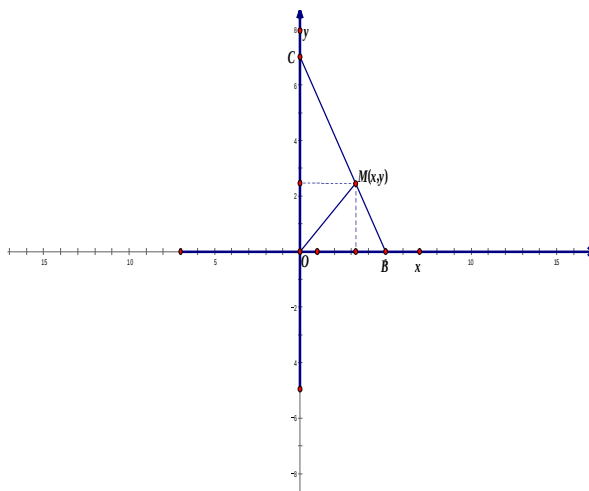
Nếu M thuộc cung vuông (I) thì N hoặc nằm trong cung vuông (IV). Để nhận thấy $|x| = |v|, |u| = |y|$, suy ra:

$$\begin{cases} x^2 = v^2 \\ u^2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + u^2 = v^2 + y^2 = 1 \text{ và từ } xu + yv = 0 \text{ nếu thay } u = y \text{ hoặc } u = -y \text{ ta đều được } xy + uv = 0.$$

Ví dụ 2.2.6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, các cạnh góc vuông là b và c, M là một điểm trên cạnh BC sao cho $\angle BAM = \alpha$.

Chứng minh rằng: $AM = \frac{bc}{c \cos \alpha + b \sin \alpha}$

Bài giải: Chọn hệ trục (Oxy) sao cho $A \equiv O$. Dễ dàng nhận thấy $A(0;0), B(b;0), C(0;c)$. Gọi $M(x;y) \in BC$.



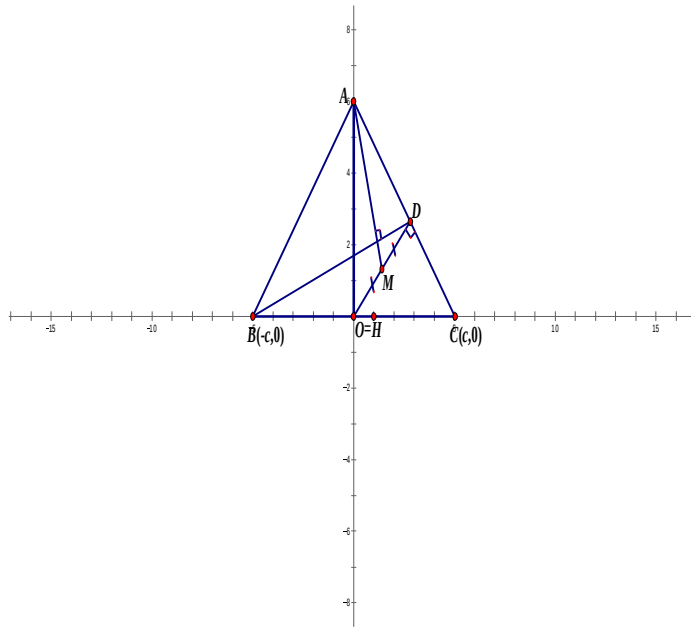
Ta có: $x = AM \cos \alpha, y = AM \sin \alpha$ nên $M(AM \cos \alpha; AM \sin \alpha)$. Do $M \in BC$ suy ra $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}$ cùng phương, ta có:

$$\begin{vmatrix} AM \cos \alpha & AM \sin \alpha - 1 \\ b & -c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AM(c \cos \alpha + b \sin \alpha) = bc$$

Suy ra $AM = \frac{bc}{c \cos \alpha + b \sin \alpha}$.

Ví dụ 2.2.7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh $AM \perp BD$.

Bài giải: Dựng hệ trục (Oxy) sao cho $H \equiv O$. Dễ dàng nhận thấy $H(0;0), A(c;a), B(-c;0), C(c;0)$. Gọi $D(x;y)$ là hình chiếu của H trên AC.



Ta có: $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x; -y)(c; -a) = 0 \\ \begin{vmatrix} x & y-a \\ c & -a \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cx - ay = 0 \\ ax + cy = ac \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2c}{a^2 + c^2} \\ y = \frac{c^2a}{a^2 + c^2} \end{cases}$$

Vậy $D\left(\frac{a^2c}{a^2 + c^2}; \frac{c^2a}{a^2 + c^2}\right)$.

M là trung điểm của HD nên $M\left(\frac{a^2c}{2(a^2 + c^2)}; \frac{c^2a}{2(a^2 + c^2)}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} &= \left(\frac{2a^2c + c^3}{a^2 + c^2}; \frac{c^2a}{a^2 + c^2}\right) \cdot \left(\frac{a^2c}{2(a^2 + c^2)}; \frac{-c^2a - 2a^3}{2(a^2 + c^2)}\right) \\ &= \frac{2a^4c^2 + a^2c^4}{2(a^2 + c^2)^2} + \frac{-c^4a^2 - 2a^4c^2}{2(a^2 + c^2)^2} = 0. \text{ Do đó } \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AM}. \end{aligned}$$

Vậy $AM \perp BD$. $\square$.

Ví dụ 2.2.8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

(i) $MB^2 + MC^2 = MA^2$.

(ii) $\overrightarrow{AM} = (t+1) \cdot \overrightarrow{AC} + (2t-1) \cdot \overrightarrow{AB}$.

Bài giải: Dựng hệ trục (Oxy) sao cho $A \equiv O$, véc tơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$. Khi đó ta có $B(b;0), C(0;c)$.

(i) Gọi $M(x;y)$, ta có: $MB^2 + MC^2 = MA^2$.

$$\Leftrightarrow [(x-b)^2 + y^2] + [x^2 + (y-c)^2] = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow (x-b)^2 + (y-c)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=b \\ y=c \end{cases} \text{ suy ra } M(b;c).$$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đỉnh của hình chữ nhật BACM.

(ii) $\overrightarrow{AB} = b\vec{i}, \overrightarrow{AC} = c\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (t+1)\overrightarrow{AC} + (2t-1)\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (t+1)c\vec{j} + (2t-1)b\vec{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = (2t-1)b & (1) \\ y_M = (t+1)c & (2) \end{cases}$$

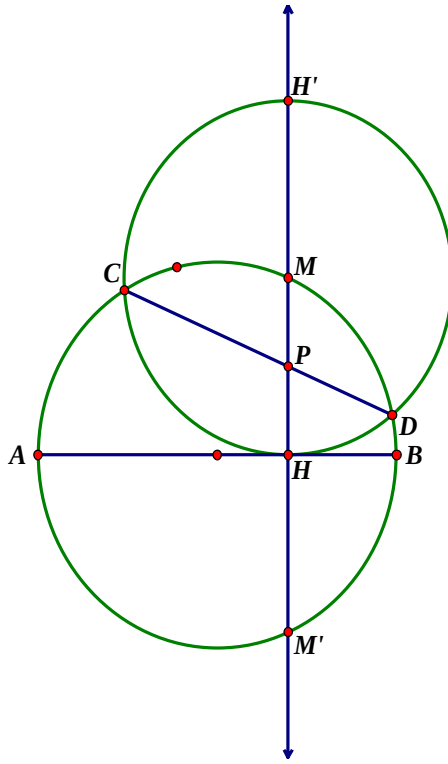
Từ (1) suy ra $t = \frac{x_M + b}{2b}$, thay vào (2), ta có $y_M = \left(\frac{x_M + b}{2b} + 1\right)c$

$$\Leftrightarrow y_M = \frac{c}{2b}x_M + \frac{3}{2}c.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = \frac{c}{2b}x + \frac{3}{2}c$.

Ví dụ 2.2.9. Cho đường tròn (ℓ) đường kính $AB = 2R$ cố định. Điểm M chạy trên (ℓ) . Một đường tròn (ℓ') tâm M thay đổi luôn tiếp xúc với AB. Giả sử (ℓ') cắt (ℓ) tại C và D. Đường thẳng CD cắt đường MH, ở đó $MH \perp AB$ tại P. Tìm tập hợp các điểm P.

Bài giải:



Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và H' là giao điểm giữa HM với (ℓ') .

Khi đó $MH = HM' = MH'$. Vì $PC \cdot PD = PM \cdot PM' = PH \cdot PH'$ và

$$PM \cdot [PH + HM'] = PH [PM + MH'], \text{ nên } PM \cdot HM' = PH \cdot MH' \text{ hay } PM = PH.$$

Do vậy P là trung điểm đoạn MH . Vậy tập các điểm P là đường ellíp với trục lớn AB và tỉ số cho $\frac{1}{2}$.

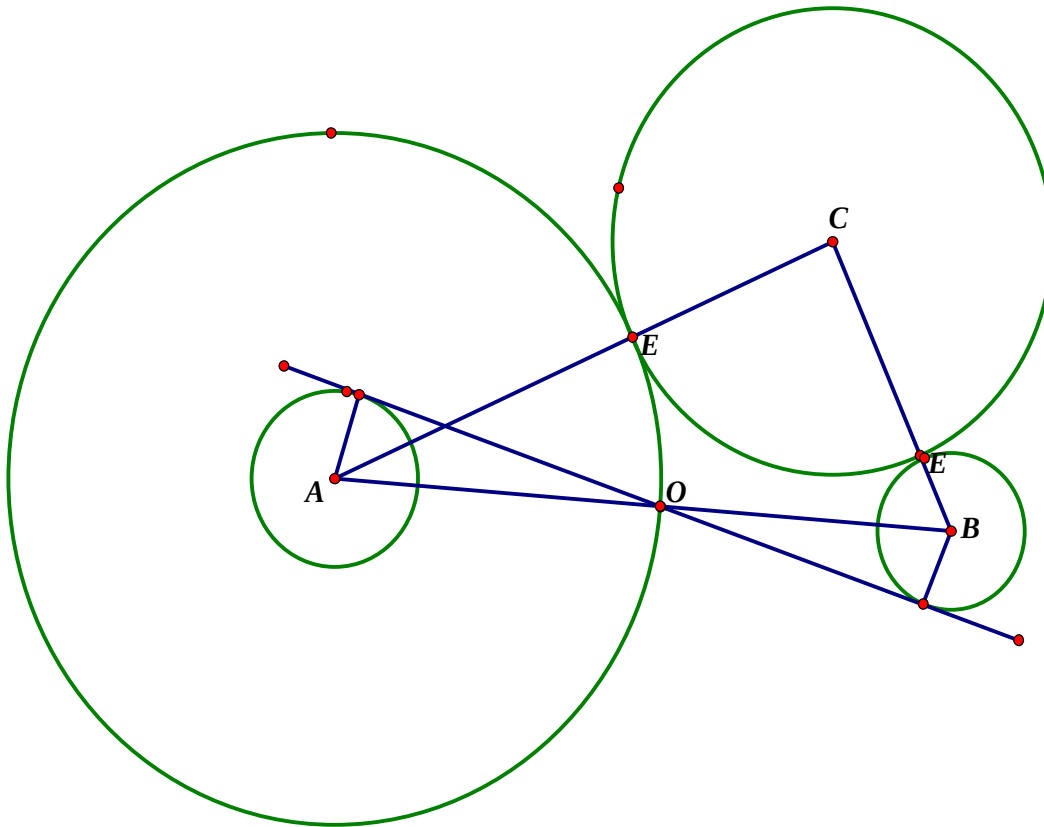
Ví dụ 2.2.10. Cho hai đường tròn, một đường tròn tâm A bán kính $3R$, đường tròn kia tâm B bán kính R , với $AB=6R$

(i) Xét tất cả các đường tròn tâm C tiếp xúc ngoài với hai đường tròn trên. Tìm tập hợp các tâm C của hệ đường tròn này.

(ii) Gọi γ là bán kính của một trong các đường tròn tâm C . Đặt $\angle BAC = \alpha$,

$$\angle ABC = \beta. \text{ Tính } \tan \frac{\alpha}{2}, \tan \frac{\beta}{2}, \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} \text{ theo } \alpha \text{ và xét chúng khi } \gamma \rightarrow \infty.$$

Bài giải:



(i) Ta có $CE=CF$, $CA-3R=CB-R$. Vậy $CA-CB=2R$. Do vậy C nằm trên đường Hyperbol với tiêu điểm A và B.

$$\cos u = \cos \angle OAI = \frac{AI}{AO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}.$$

(ii) Vì $CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos \alpha$

$$\text{nên } (R + \gamma)^2 = 36R^2 + (3R + r)^2 - 12R(3R + r) \cos \alpha$$

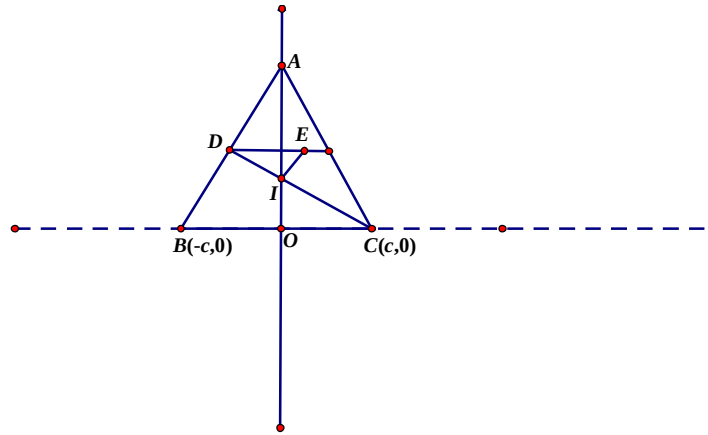
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\gamma + 11R}{3\gamma + 9R} \Rightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma - R}{2\gamma + 10R} \text{ hay } \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\gamma - R}{2\gamma + 10R}}$$

$$\text{Tương tự } \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{2\gamma - 2R}{\gamma + 5R}} \text{ suy ra } \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2} = 2.$$

Khi $\gamma \rightarrow +\infty$ có $\tan \frac{\alpha}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}, \tan \frac{\beta}{2} \rightarrow \sqrt{2}$

Ví dụ 2.2.11 [Đề thi vô địch Anh- năm 1983]. Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, D là trung điểm cạnh AB, E là trọng tâm của $\triangle ACD$. Chứng minh rằng nếu $AB=CD$ thì IE vuông góc với CD.

Bài giải: Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ 2.1.18. Gọi $I(x; y)$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Hình vẽ 2.1.18

Khi đó $O(0;0), A(0;a), B(-c;0), C(c;0), D\left(-\frac{c}{2}; \frac{a}{2}\right), E\left(\frac{c}{6}; \frac{a}{2}\right)$ (Theo công thức tọa độ trọng tâm tam giác)

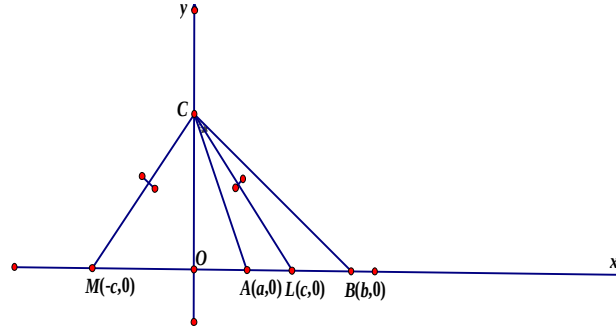
$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{OI} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{c}{2}; y - \frac{a}{2}\right) \cdot (c; a) = 0 \\ (x; y) \cdot (2c; 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a^2 - c^2}{2a} \end{cases}$$

Vậy $I\left(0; \frac{a^2 - c^2}{2a}\right)$, suy ra $\overrightarrow{IE}\left(\frac{c}{6}; \frac{c^2}{2a}\right)$. Mặt khác $\overrightarrow{DC}\left(\frac{3c}{2}; -\frac{a}{2}\right)$.

$$\text{Ta nhận được } \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{DC} = \left(\frac{c}{6}; \frac{c^2}{2a}\right) \cdot \left(\frac{3c}{2}; -\frac{a}{2}\right) = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{c^2}{4} = 0 \Rightarrow IE \perp DC. \quad \square$$

Ví dụ 2.2.12 [Đề thi vô địch Bungari- năm 1991]. Đường phân giác trong và ngoài của góc C của tam giác ABC cắt đường thẳng AB ở L và M. Chứng minh rằng nếu $CL=CM$ thì $AC^2 + BC^2 = 4R^2$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)

Chọn hệ trục (Oxy) như hình vẽ (O là trung điểm của ML)



Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{AL^2}{LB^2} = \frac{AC^2}{CB^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(c-a)^2}{(b-c)^2} = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} \Leftrightarrow ab^2+ac^2-a^2b-c^2b=0 \Leftrightarrow b=\frac{c^2}{a}$$

$$\text{Vậy } B\left(\frac{c^2}{a}; 0\right) \text{ nên } AC^2 + BC^2 = (a^2 + c^2) + \left(c^2 + \frac{c^4}{a^2}\right) = \left[\frac{a^2 + c^2}{a}\right], (1)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} AI = CI \\ AI = BI \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = BI^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-c)^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = \left(\frac{x-c}{a}\right)^2 + y^2 \end{array} \right\} \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2ax - 2cy = a^2 - c^2 \\ x = \frac{a^2 + c^2}{2a} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a^2 + c^2}{2a} \\ y = c \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I\left(\frac{a^2+c^2}{2a};c\right), \text{ nên } 4R^2=4CI^2=4\left(\frac{a^2+c^2}{2a}\right)=\left(\frac{a^2+c^2}{a}\right)^2, \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC^2 + BC^2 = 4R^2$. □

2.3 Một vài phương trình đường có chứa tham số

Khi giải các bài toán hình học ta thường hay gặp các bài toán liên quan đến tham số. Có lẽ đây là dạng toán mà nhiều học sinh lúng túng nhất. Trong phần này chúng ta nghiên cứu một số bài toán mà chúng ta hay thường gặp.

Ví dụ 2.3.1. Trong mặt phẳng (Oxy) cho họ hai đường thẳng:

$$(\Delta_m): (1-m)x + my + m + 2 = 0 \text{ và đường thẳng } (d): x + 3y - 6 = 0$$

(i) Với vị trí nào của m thì đường thẳng (d) cắt đường thẳng Δ_m ?

(ii) Chứng tỏ rằng đường thẳng (d) không phụ thuộc họ đường thẳng (Δ_m) .

Bài giải: (i) Đường thẳng (d) cắt đường thẳng (Δ_m) khi và chỉ khi hệ phương

$$\text{trình } \begin{cases} (1-m)x + my + m + 2 = 0 \\ x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Muốn vậy } D = \begin{vmatrix} 1-m & m \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{4}$$

Vậy $m \neq \frac{3}{4}$ thì đường thẳng (d) cắt đường thẳng (Δ_m) .

(ii) Chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử (d) thuộc họ đường

$$\text{thẳng } (\Delta_m), \text{ đồng nghĩa phải có: } \frac{1-m}{1} = \frac{m}{3} = \frac{m+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-m}{1} = \frac{m}{3} \\ 1-m = -(m+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{5} \\ 1 = -2 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Vậy (d) không thuộc họ đường thẳng (Δ_m) . □

Ví dụ 2.3.2. Trong mặt phẳng (Oxy) cho họ đường thẳng

$$\Delta(m): mx + 3(1-m)y + 1 - 2m = 0$$

(i) Chứng tỏ rằng mọi đường thẳng $\Delta(m)$ đi qua một điểm cố định S.

(ii) Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-3+t \end{cases}$ tìm đường thẳng $\Delta(m)$ vuông góc với (d)

Bài giải: (i) Ta có thể viết $\Delta(m): m(x-3y-2)+3y+1=0$ (*)

Đẳng thức (*) đúng với mọi giá trị của m nên ta có:

$$\begin{cases} x-3y-2=0 \\ 3y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow S\left(1; -\frac{1}{3}\right)$$

(ii) Ta có vectơ chỉ phương của (d) là $\vec{u}=(-2;1)$, vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta(m)$ là $\vec{a}(3(1-m);-m)$. Đường thẳng $\Delta(m)$ cần tìm vuông góc với (d) nên nhận vectơ $\vec{u}=(-2;1)$ là pháp vectơ. Ta phải tìm m để $\vec{u}.\vec{a}=0$

$$\Leftrightarrow [3(1-m)(-2)+(-m).1]=0 \Leftrightarrow m=\frac{6}{5}$$

Ta suy ra đường thẳng $\Delta\left(\frac{6}{5}\right): \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{7}{5} = 0$ hay $6x - 3y - 7 = 0$ vuông góc với đường thẳng (d).

Ví dụ 2.3.3. Trong mặt phẳng (Oxy) cho hai đường thẳng Δ_m và Δ'_m có phương trình cùng chứa tham số m:

$$\Delta_m: m^2x + 2(2m-3)y - 2(3m^2 - 2m + 3) = 0$$

$$\Delta'_m: (m^2 - 3m + 3)x + 2(m-2)y - 4(m-1)^2 = 0$$

(i) Chứng minh rằng khi m thay đổi thì đường thẳng Δ_m luôn đi qua một điểm cố định A và đường thẳng Δ'_m luôn đi qua một điểm cố định B.

(ii) Chứng tỏ rằng khi m thay đổi thì giao điểm M của hai đường thẳng Δ_m và Δ'_m di động trên một đường cong cố định. Viết phương trình đường cong ấy.

Bài giải: (i) Ta có thể viết: $\Delta_m: m^2(x-6) + 4m(y+1) - 6y - 6 = 0$ (**)

Đẳng thức (**) đúng với mọi giá trị của m nên ta có:

$$\begin{cases} x-6=0 \\ y+1=0 \\ -6y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow A(6;-1). \text{ Vậy đường thẳng } \Delta_m \text{ luôn đi qua } A(6;-1).$$

Tương tự, đường thẳng Δ'_m luôn đi qua điểm $B(4;2)$

(ii) Tọa độ giao điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} m^2x + 2(2m-3)y + 2(3m^2-2m+3) = 0 \\ (m^2-3m+3)x + 2(m-2)y - 4(m-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } D = \begin{vmatrix} m^2 & 2(2m-3) \\ m^2-3m+3 & 2(m-2) \end{vmatrix} = -2(m-1)(m-3)^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2(3m^2-2m+3) & 2(2m-3) \\ 4(m-1)^2 & 2(m-2) \end{vmatrix} = -4m(m-3)^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m^2 & 2(3m^2-2m+3) \\ m^2-3m+3 & 4(m-1)^2 \end{vmatrix} = 2(m-3)^2(-m^2+m-1)$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1, m \neq 3$, ta có nghiệm

$$\text{của hệ phương trình là: } x = \frac{D_x}{D} = \frac{2m}{m-1}; y = \frac{D_y}{D} = \frac{m^2-m+1}{m-1}$$

$$\text{Suy ra: } M\left(\frac{2m}{m-1}; \frac{m^2-m+1}{m-1}\right).$$

Với $x = \frac{2m}{m-1} \Rightarrow m = \frac{x}{x-2}$, thay giá trị của m vào biểu thức của y ta được:

$$y = \frac{\frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{x}{x-2} + 1}{\frac{x}{x-2} - 1} \Rightarrow y = \frac{x^2 - 2x - 4}{2(x-2)}$$

Vậy giao điểm M di động trên đường cong: $y = \frac{x^2 - 2x - 4}{2(x-2)}$.

Ví dụ 2.3.4. Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng Δ_m đi qua điểm $A(1;-1)$

Có hệ số góc m và elíp $(E): x^2 + 3y^2 - 3 = 0$.

(i) Viết phương trình đường thẳng Δ_m và biện luận theo m số giao điểm của đường thẳng Δ_m và elíp (E) .

(ii) Tìm tập hợp các trung điểm của các dây tạo bởi (E) và các đường thẳng song song với đường thẳng $x - y = 0$

Bài giải: (i) Phương trình đường thẳng Δ_m là $y + 1 = m(x - 1) \Leftrightarrow y = mx - m - 1$

Toạ độ giao điểm của đường thẳng Δ_m và elíp (E) (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = mx - m - 1 \\ x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx - m - 1 \\ x^2 + 3(mx - m - 1)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = mx - m - 1 & (1) \\ (1 + 3m^2)x^2 - 6m(1 + m)x + 3m(2 + m) = 0 & (2) \end{cases}$$

Số nghiệm của hệ phương trình (1), (2) là số nghiệm của phương trình (2)

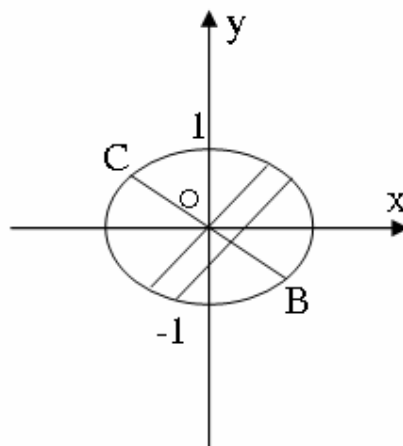
Giải phương trình (2), có $\Delta' = 9m^2(1 + m)^2 - 3m(1 + 3m^2)(2 + m) = 6m(m - 1)$

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$: không có giao điểm.

Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 1$: có 1 giao điểm kép.

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 1$: có 2 giao điểm.

(ii) Các đường thẳng song song với các đường thẳng $x - y = 0$ có phương trình dạng $x - y + C = 0$ (Hình vẽ).



Tọa độ giao điểm của các đường thẳng đó với ellíp (E) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + C = 0 \\ x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + C \\ x^2 + 3(x + C)^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + C \\ 4x^2 + 6Cx + 3C^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

Phương trình (4) là phương trình hoành độ giao điểm. Phương trình (4) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -3C^2 + 12 \geq 0 \Leftrightarrow |C| \leq 2$

Gọi hai giao điểm của đường thẳng $x - y + C = 0$ và elíp (E) là $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$, gọi $M(x; y)$ là trung điểm của M_1M_2 . Ta có

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{6C}{4} = -\frac{3C}{2} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3C}{4}$.

Từ đó: $y_1 + y_2 = x_1 + C + x_2 + C = x_1 + x_2 + 2C$

Suy ra $\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} + C \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-3C}{4} + C = \frac{C}{4}$. Vậy ta có $M\left(\frac{-3C}{4}; \frac{C}{4}\right)$.

Như vậy từ $x = \frac{-3C}{4}$ và $y = \frac{C}{4}$, ta được: $x = -3y \Leftrightarrow x + 3y = 0$.

Đường thẳng $x + 3y = 0$ cắt elíp (E) tại hai điểm $B\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $C\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy tập hợp các trung điểm M là đoạn thẳng BC.

Ví dụ 2.3.5. Trong mặt phẳng (Oxy) cho điểm F(1;0) và một điểm di động

$M(-1;m)$ với $m \in R$.

(i) Với mỗi giá trị của m, hãy viết phương trình đường trung trực Δ của MF.

(ii) Tìm những điểm trên mặt phẳng (Oxy) không thuộc một đường thẳng Δ nào

(iii) Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Bài giải: (i) Gọi H là trung điểm của đoạn MF. Dễ thấy điểm H nằm trên trục tung và $H\left(0; \frac{m}{2}\right)$. Phương trình đường thẳng MF hay đường thẳng HF là:

$\frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{m}{2}} = 1 \Rightarrow mx + 2y - m = 0$. Đường trung trực Δ đi qua điểm H và vuông góc

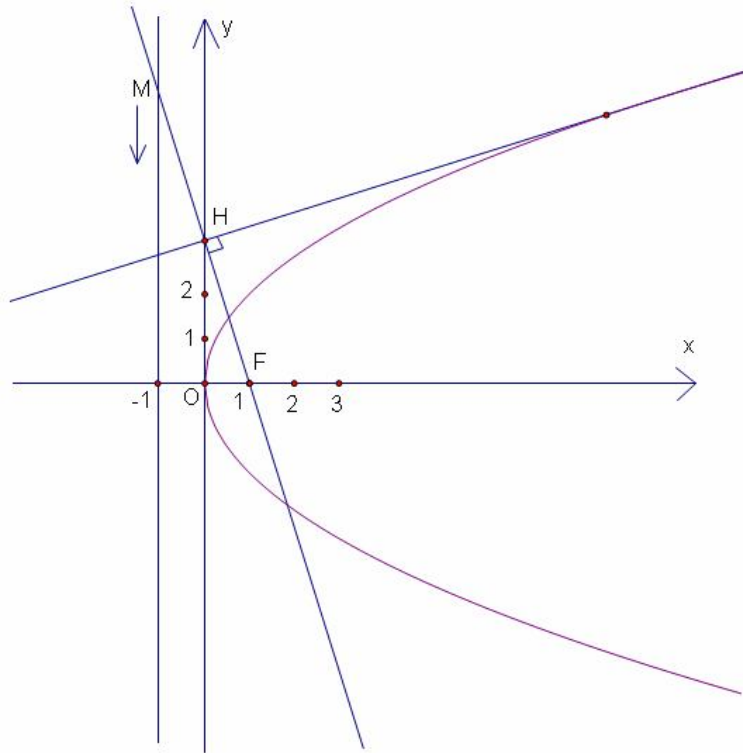
với đường thẳng HF có phương trình là:

$$\Delta: 2(x-0) - m\left(y - \frac{m}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2my + m^2 = 0$$

(ii) Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là một điểm nào đó không nằm trên một đường thẳng Δ nào đó. Ta có: $4x_0 - 2my_0 + m^2 \neq 0$ với mọi m.

Vậy phương trình sau đây không có nghiệm: $m^2 - 2my_0 + 4x_0 = 0$, nghĩa là:

$\Delta' = y_0^2 - 4x_0 < 0 \Leftrightarrow y_0^2 < 4x_0$. Vậy các điểm trên mặt phẳng mà không thuộc một đường thẳng Δ nào nằm trong miền trong của parabol $(P): y^2 = 4x$.



(iii) Ta sẽ chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn tiếp xúc với parabol (P) .

Ta biết điều kiện cần và đủ để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với parabol

$y^2 = 2px$ là $B^2p = 4m^2 \cdot 2 = 2AC$. Vậy Δ tiếp xúc với (P) .

2.4. Bài toán véctor liên quan tới tam giác

Bài toán về véctor liên quan đến tam giác được sử dụng trong hình học được phát biểu như sau:

Mệnh đề 2.4.1. Cho ΔABC với độ dài cạnh $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ và điểm I thuộc mặt phẳng (ABC) . Khi đó

(i) Nếu I thuộc miền ΔABC thì có đồng nhất thức

$$\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}$$

(ii) Nếu I thuộc miền ngoài tam giác ABC và nằm trong góc $\angle A$ thì

$$-\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}$$

(iii) Với tâm đường tròn nội tiếp I và tâm đường tròn bàng tiếp J ở trong góc A ta có đồng nhất thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Chứng minh: (i) Dựng hệ tọa độ Ixy sao cho $I(0;0)$, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ và $C(x_3; y_3)$. Diện tích các tam giác IBC , ICA , IAB được quy ước bởi

$$2S_{IBC} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, 2S_{ICA} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, 2S_{IAB} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Do vậy: $\overrightarrow{IA}.2S_{IBC} = (x_2y_3 - x_3y_2)(x_1, y_1)$

$$\overrightarrow{IB}.2S_{ICA} = (x_3y_1 - x_1y_3)(x_2, y_2)$$

$$\overrightarrow{IC}.2S_{IAB} = (x_1y_2 - x_2y_1)(x_3, y_3)$$

Bởi vì hai định thức sau triệt tiêu $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ và $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ nên

$$\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(ii) Nếu I thuộc miền ngoài tam giác ABC và nằm trong góc $\angle A$ thì

$$S_{IBC} = -S_{ICB}. \text{ Do vậy } -\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(iii) là hiển nhiên.

Hệ quả 2.4.2. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. Gọi G , H , O và I là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC . Khi đó

$$(i) \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$(ii) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}.$$

$$(iii) (a + b + c)\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}.$$

Chứng minh: (i) Suy ra từ Mệnh đề 2.4.1.

$$(ii) \text{ Từ } \vec{0} = -3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \text{ suy ra } \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

$$(iii) \text{ Từ } \vec{0} = -(a + b + c)\overrightarrow{OI} + a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}, \text{ theo Mệnh đề 2.4.1, ta suy ra}$$

$$\text{đồng nhất thức } (a + b + c)\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}.$$

Ví dụ 2.4.3. Giả sử tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ và I , J là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp trong góc $\angle A$ của tam giác. Khi đó có bất đẳng thức sau đây:

$$(i) aEA^2 + bEB^2 + cEC^2 \geq abc \text{ với điểm } E \text{ tùy ý.}$$

$$(ii) aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc.$$

$$(iii) -aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = abc.$$

$$(iv) a(AH^2 + AK^2 - AJ^2) + b(BK^2 + BJ^2 - BH^2) + c(CJ^2 + CH^2 - CK^2)$$

$= 3abc$ khi J , H , K là tâm đường tròn bàng tiếp và ở trong góc $\angle A, \angle B, \angle C$, tương ứng của tam giác.

Bài giải: (i) Từ bất đẳng thức $(a\overrightarrow{EA} + b\overrightarrow{EB} + c\overrightarrow{EC})^2 \geq 0$ ta suy ra

$$0 \leq a^2EA^2 + b^2EB^2 + c^2EC^2 + 2ab\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} + 2bc\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} + 2ca\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{EA} = a^2EA^2 + b^2EB^2$$

$$+ c^2EC^2 + ab(EA^2 + EB^2 - c^2) + bc(EB^2 + EC^2 - a^2) + ca(EC^2 + EA^2 - b^2)$$

Giản ước cho $a + b + c$ được bất đẳng thức $aEA^2 + bEB^2 + cEC^2 \geq abc$.

(ii) Từ $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 2.4.1 ta suy ra

$$0 = a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = a^2IA^2 + b^2IB^2$$

$$+c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - c^2) + bc(IB^2 + IC^2 - a^2) + ca(IC^2 + IA^2 - b^2)$$

Giản ước cho $a + b + c$ được đồng nhất thức $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.

(iii) Từ $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 2.4.1 ta suy ra

$$0 = a^2JA^2 + b^2JB^2 + c^2JC^2 + 2ab\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JB} + 2bc\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{JC} + 2ca\overrightarrow{JC}.\overrightarrow{JA} = a^2JA^2 + b^2JB^2 + c^2JC^2 + ab(JA^2 + JB^2 - c^2) + bc(JB^2 + JC^2 - a^2) + ca(JC^2 + JA^2 - b^2)$$

Giản ước cho $-a + b + c$ được đồng nhất thức $-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = abc$.

(iv) Như các đồng nhất thức $-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = abc$, $aHA^2 - bHB^2 + cHC^2 = abc$ và $aKA^2 + bKB^2 - cKC^2 = 3abc$.

$$\text{Vậy } a(AH^2 + AK^2 - AJ^2) + b(BJ^2 - BH^2 + BK^2) + c(CJ^2 + CH^2 - CK^2) = 3abc.$$

Chú ý 2.4.4 Với Mệnh đề này thì người ta có thể suy ra nhiều kết quả khác trong Hình học như một số tác giả đã trình bày trên báo toán học tuổi trẻ hoặc chứng minh Định lý Euler về tam giác Pedal.

Khai thác một bài toán vectơ trong mặt phẳng

Phần tiếp theo các kết quả được suy ra từ bài toán sau đây:

Mệnh đề 2.4.5 Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ và điểm I thuộc mặt phẳng (ABC) . Khi đó

(i) Nếu I thuộc miền $\triangle ABC$ thì có đồng nhất thức

$$\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}$$

(ii) Nếu I thuộc miền ngoài tam giác ABC và nằm trong góc $\angle A$ thì

$$-\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}$$

Với tam giác ABC đã có, xem ví dụ 2.4.1, bất đẳng thức và đồng nhất thức sau:

Ví dụ 2.4.6 Giả sử tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác. Khi đó có bất đẳng thức sau đây:

(i) $aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 \geq abc$ với điểm J tùy ý.

(ii) $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.

Ví dụ 2.4.7 Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử G là trọng tâm tam giác; I, r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC; O, R là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và J là điểm tùy ý trong mặt phẳng (ABC). Khi đó:

(i) $T = JA^2 + JB^2 + JC^2 = 3JG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$. Khi lấy $J \equiv O$ sẽ nhận được

$$3R^2 = 3OG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

(ii) $S = aA^2 + bB^2 + cC^2 = (a + b + c)JI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2$.

(iii) $S = aA^2 + bB^2 + cC^2 = (a + b + c)(JI^2 + 2Rr)$. Đặc biệt có $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 2Rr(a + b + c)$.

(iv) **(Euler)** $OI^2 = R^2 - 2Rr = R^2 - \frac{abc}{a + b + c}$, (IOM1962).

(v) $P = \sin(2A)JA^2 + \sin(2B)JB^2 + \sin(2C)JC^2 = \frac{abc}{2R^3}JO^2 + \frac{abc}{2R}$. Đặc biệt có

$$aIA^2 \cos A + bIB^2 \cos B + cIC^2 \cos C = abc \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Bài giải: (i) Ta có $T = (\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GC})^2$.

Vậy $T = 3JG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3IG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$ theo Chú ý 1.3.2.

(ii), (iii) Vì $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 2.4.1 nên được hệ thức:

$$S = a(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA})^2 + b(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IB})^2 + c(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$= (a + b + c)JI^2 + aIA^2 + bIB^2 + cIC^2. \text{ Mặt khác, ta còn có}$$

$$Q = aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 4Rr^2 \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$$

$$= 4Rr^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = 4Rr^2 \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$$

$$= 4rr^2 \frac{\frac{a+b+c}{r}}{4R} = (a+b+c)2Rr.$$

Do đó $S = aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = (a+b+c)(JI^2 + 2Rr)$. Khi $J \equiv I$ nhận được đồng nhất thức $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = 2Rr(a+b+c)$.

(iv) Từ (ii) có $(a+b+c)R^2 = (a+b+c)(OI^2 + 2Rr)$ hay $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

(v) Vì $\sin(2A)\overrightarrow{OA} + \sin(2B)\overrightarrow{OB} + \sin(2C)\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 2.4.1 và

$$\sin(2A) + \sin(2B) + \sin(2C) = 4\sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{2R^3} \text{ nên nhận được}$$

$$P = \frac{abc}{2R^3}IO^2 + \frac{abc}{2R}. \text{ Khi } J \equiv I \text{ được } \sin(2A)IA^2 + \sin(2B)IB^2 + \sin(2C)IC^2 = \\ = \frac{abc}{2R^3}IO^2 + \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{2R^3}(R^2 - 2Rr) + \frac{abc}{2R} = \frac{abc}{R} - \frac{rabc}{R^2}. \text{ Từ đây suy ra}$$

$$aIA^2 \cos A + bIB^2 \cos B + cIC^2 \cos C = abc \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Ví dụ 2.4.8. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$. Giả sử I, K, r, r_a là tâm, bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp, thuộc góc $\angle A$; O, R là tâm, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và J là điểm tùy ý trong mặt phẳng (ABC). Khi đó:

(i) $-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = (-a+b+c)(JK^2 - 2Rr_a)$. Đặc biệt có

$$-\frac{-aKA^2 + bKB^2 + cKC^2}{-a+b+c} = 2Rr_a.$$

(ii) $OK^2 = R^2 + 2Rr_a$.

(iii) $IA \cdot IB \cdot IC = 4Rr^2, KA \cdot KB \cdot KC = 4Rr_a^2$.

Bài giải: (i) Vì $-a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB} + c\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 2.4.1 nên ta có:

$$-a(\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KA})^2 + b(\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KB})^2 + c(\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KC})^2 = \\ = (-a+b+c)JK^2 - aKA^2 + bKB^2 + cKC^2. \text{ Mặt khác, biến đổi}$$

$$\begin{aligned}
-aKA^2 + bKB^2 + cKC^2 &= 4Rr_a^2 \left(-\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) \\
&= 4Rr_a^2 \frac{-\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 4Rr_a^2 \frac{a-b-c}{\frac{r_a}{4r}} = (a-b-c)2Rr_a.
\end{aligned}$$

Vì $r_a(b+c-a) = \frac{abc}{2R}$ hay $r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. Do vậy ta nhận được

$$-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = (-a+b+c)(JK^2 - 2Rr_a).$$

(ii) Từ (i), với $J \equiv O$, ta suy ra $(-a+b+c)R^2 = (-a+b+c)(OK^2 - 2Rr_a)$

hay $OK^2 = R^2 + 2Rr_a$.

(iii) Ta có đồng nhất thức $IA.IB.IC = \frac{r^3}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r^3}{\frac{r}{4R}} = 4Rr^2$

và $KA.KB.KC = \frac{r_a^3}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r_a^3}{\frac{r_a}{4R}} = 4Rr_a^2$.

Kết luận

Trong luận văn đã trình bày được một số kết quả sau :

1. Phương trình đường bậc hai và tham số hóa một số đường.
2. Sử dụng phương pháp tọa độ để chứng minh một số định lý hình học:
 - 2.1 Định lý Stewart.
 - 2.2 Đường tròn Apollonius.....
 - 2.3 Bài toán con bướm cho đường tròn.....
 - 2.4 Đường thẳng Newton.....
 - 2.5 Định lý Pithot.....
 - 2.6 Định lý Ptolemy.....
 - 2.7 Định lý Pascal.....
 - 2.8 Đường tròn 9 điểm và đường thẳng Euler.....
3. Sử dụng phương pháp tọa độ để xây dựng một số bài toán Đại số và Hình học sơ cấp
4. Mệnh đề 2.4.1 đã chỉ ra bài toán véc tơ liên quan đến tam giác mà ta có thể sử dụng để chứng minh Định lý Euler về tam giác Pedal và nhiều kết quả khác nữa./.

Hướng nghiên cứu tiếp theo của luận văn là tiếp tục nghiên cứu, tìm hiểu thêm về phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, đồng thời nghiên cứu về phương pháp tọa độ trong không gian và phát triển một số bài toán mới.

Tài liệu tham khảo

- [1] T. X. Bang, N. T. Long, N. P. Phúc, Tạp chí toán học và tuổi trẻ tập I, NXB GD, Năm 2004.
- [2] Lê Khắc Bảo, 172 bài toán có chứa tham số, Năm 1999.
- [3] N. V. Mậu, Đ. V. Nhi, Đồng nhất thức và phương pháp tọa độ trong hình học, ĐHQGHN, Năm 2012.
- [4] A. Pogorelov, Geometry, Mir Publishers Moscow 1987.
- [5] Réunion de Professeurs, Problèmes de Géométrie Classe de Mathématiques No 265 M, 77. Rue de Vaugirard Paris (VI)
- [6] SGK Hình học 10, NXB Giáo dục, Năm 2006.
- [7] Tuyển tập các phương pháp giải toán sơ cấp Tập III, Hình học, NXB Giáo dục, Năm 2002.

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn ngày 22 tháng 6 năm 2013 và đã được chỉnh sửa với các ý kiến đóng góp của các thầy, cô giáo trong hội đồng.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 6 năm 2013

Xác nhận của cán bộ hướng dẫn khoa học

PGS.TS Đàm Văn Nhĩ