

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

Đỗ Văn Hải

**SỬ DỤNG MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC
ĐỂ CHỨNG MINH
MỘT SỐ KẾT QUẢ HÌNH HỌC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

Đỗ Văn Hải

**SỬ DỤNG MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC
ĐỂ CHỨNG MINH
MỘT SỐ KẾT QUẢ HÌNH HỌC**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên Ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60460113

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - Năm 2013

**Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên**

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Đàm Văn Nhĩ

Phản biện 1: GS.TSKH. Nguyễn Tự Cường

Phản biện 2: PGS.TSKH. Lê Thị Thanh Nhàn

Luận văn đã được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại:
Trường Đại học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên
Ngày 27 tháng 09 năm 2013

**Có thể tìm hiểu tại
Trung tâm học liệu Đại Học Thái Nguyên
Thư viện trường Đại Học Khoa học - ĐH Thái Nguyên**

Mục lục

Mục lục	1
Mở đầu	2
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị	3
1.1. Ma trận, các phép toán về ma trận	3
1.2. Định thức và một số đồng nhất thức cổ điển	7
1.3. Vành ma trận $K[A]$	12
Chương 2. Vận dụng trong hình học sơ cấp	14
2.1. Phép biến đổi tọa độ đặc biệt trong mặt phẳng	14
2.1.1. Phép tịnh tiến	14
2.1.2. Phép đối xứng trục	14
2.1.3. Phép quay	15
2.1.4. Phép đối xứng tâm	15
2.1.5. Phép vị tự	15
2.1.6. Vận dụng	15
2.2. Diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp	21
2.2.1. Diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp	21
2.2.2. Bài toán véc tơ liên quan tới tam giác	35
2.3. Thể tích, bán kính mặt cầu ngoại tiếp qua định thức	37
2.3.1. Tích vô hướng, tích có hướng của hai véc tơ	37
2.3.2. Thể tích, bán kính mặt cầu ngoại tiếp qua định thức	43
2.3.3. Khai thác bài toán vectơ của tứ diện	56
2.4. Đồ thị phẳng 21 - điểm K_3	57
Kết luận	62

Mở đầu

Vận dụng ma trận và định thức cùng một số kết quả trong đại số tuyến tính vào nghiên cứu Toán sơ cấp đang được nhiều thầy, cô giáo quan tâm. Với sự giúp đỡ của định thức và ma trận ta có thể thu được nhiều kết quả mới qua việc biến đổi tọa độ giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn và đại số hóa một số bài hình sơ cấp. Do vậy, luận văn này đặt vấn đề vận dụng định thức ma trận vào xét một số bài toán hình học sơ cấp. Nội dung của luận văn được chia ra làm hai chương.

Chương I: Kiến thức chuẩn bị về ma trận, các phép toán về ma trận, định thức và một số đồng nhất thức cổ điển, Vành ma trận $K[A]$

Chương II: Vận dụng định thức ma trận trong hình học sơ cấp.

Mục 2.1. Trình bày phép biến đổi tọa độ đặc biệt trong mặt phẳng

Mục 2.2. Trình bày diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp qua tọa độ đỉnh, độ dài các cạnh tam giác

Mục 2.3. Sử dụng định thức tính thể tích qua tọa độ đỉnh, độ dài các cạnh

Mục 2.4. Xét bài toán đồ thị phẳng 21 - điểm K_3

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS-TS. Đàm Văn Nhĩ - Đại học Sư phạm Hà Nội. Em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy. Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo Trường Đại Học Khoa Học. Tôi xin cảm ơn tới Sở Giáo dục - Đào tạo Tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu Trường THPT Việt Lâm - Huyện Vị Xuyên đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Thái Nguyên, ngày 08 tháng 08 năm 2013

Tác giả

Đỗ Văn Hải

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Ma trận, các phép toán về ma trận

1) Ma trận

Định nghĩa 1.1. Ma trận cỡ $m \times n$: Một bảng gồm $m.n$ số được viết thành m dòng, n cột như sau:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

được gọi là một ma trận kiểu $(m \times n)$.

Mỗi số a_{ij} được gọi là một thành phần của ma trận. Nó ở dòng thứ i và cột thứ j .

Ta thường kí hiệu ma trận bởi các chữ in hoa: A, B ... Có thể viết ma trận (1.1) một cách đơn giản bởi:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Khi đã biết rõ m và n thì còn có thể viết là: $A = (a_{ij})$.

Ma trận dòng: Ma trận cỡ $1 \times n$ gọi là ma trận dòng

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_j \ \dots \ a_n) \quad (1.2)$$

Ma trận cột: Ma trận cỡ $m \times 1$ gọi là ma trận cột

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_j \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Ma trận vuông: Ma trận cỡ $n \times n$ gọi là ma trận vuông cấp n (hay ma trận cấp n) và viết $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Trong ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n \times n}$ đây các phần tử có chỉ số hàng bằng chỉ số cột $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ gọi là *đường chéo chính của ma trận A*

Định nghĩa 1.2. Ta gọi ma trận

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{in} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

là ma trận chuyển vị của ma trận (1.1) và kí hiệu là tA .

Như vậy ma trận tA thu được từ A bằng cách đổi dòng thứ i của A thành cột thứ i của tA và nếu A là ma trận kiểu $m \times n$ thì ma trận chuyển vị tA là ma trận kiểu $n \times m$.

2) Các phép toán về ma trận

Phép cộng hai ma trận

Định nghĩa 1.3. Tổng của hai ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$ là ma trận: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$

Định nghĩa 1.4. Với các ma trận vuông cấp hai dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\text{khi đó: } A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Định nghĩa 1.5. Với các ma trận vuông cấp ba dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\text{khi đó: } A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

Quy tắc cộng ma trận: Muốn cộng hai ma trận ta chỉ việc cộng các thành phần tương ứng (cùng dòng, cùng cột) của chúng:

$$(a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Phép nhân ma trận với một số

Định nghĩa 1.6. Tích của phần tử $k \in \mathbf{K}$ với ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}[K]$ là ma trận: $kA = (ka_{ij})_{m \times n}$.

Với ma trận vuông cấp hai: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, ta có:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

Với ma trận vuông cấp ba: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, ta có:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

Tích của hai ma trận

Định nghĩa 1.7. Tích AB của ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và ma trận $B = (b_{jk})_{n \times p}$ là ma trận $C = (c_{ik}) \in M(m \times p, \mathbf{K})$ với các phần tử được xác định như sau:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n (a_{ij}b_{jk}), \text{ trong đó } (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq p)$$

Định nghĩa 1.8. Với các ma trận vuông cấp hai dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

khi đó:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Với ma trận cột $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tích AX được xác định như sau:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 1.9. Với các ma trận vuông cấp ba dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

khi đó:

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^3 a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}.$$

Với ma trận cột $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, tích AX được xác định như sau:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}.$$

Nhận xét 1.1. Điều kiện để định nghĩa được ma trận tích AB là số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B

Ma trận đơn vị: Ma trận E cấp n có các đường chéo chính bằng 1, các phần tử ngoài đường chéo chính đều bằng 0 gọi là ma trận đơn vị:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Mệnh đề 1.1. Với hai ma trận vuông cấp hai AB luôn có $|AB| = |A||B|$.

Chứng minh. Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Khi đó ta có tích $AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$. Từ việc biến đổi tích hai ma trận và định thức

$$\begin{aligned} |AB| &= \begin{vmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{vmatrix} = (ax + bz)(cy + dt) - (ay + bt)(cx + dz) \\ &= adxt + bcyz - adyz - bcxt = (ad - bc)(xt - yz) = |A||B| \end{aligned}$$

chúng ta nhận được kết quả $|AB| = |A||B|$.

- Tương tự : Với hai ma trận vuông cấp ba AB luôn có $|AB| = |A||B|$.

1.2. Định thức và một số đồng nhất thức cổ điển

1) Định thức

Định nghĩa 1.10. Với ma trận vuông

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

ta gọi tổng

$$D = \sum_{s \in S(n)} \text{sgn}(s) a_{1s(1)} a_{2s(2)} \dots a_{is(i)} \dots a_{ns(n)}$$

là định thức của ma trận A và kí hiệu bởi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

hay $|A|$ hay $\det(A)$

Trong cách kí hiệu này ta cũng nói mỗi a_{ij} là một thành phần, các thành phần $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ tạo thành dòng thứ i , các thành phần $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ tạo thành cột thứ j của định thức. Khi ma trận A có cấp n ta cũng nói $|A|$ là một định thức cấp n .

Định thức của ma trận cấp hai $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Định thức của ma trận cấp ba $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2) Một số đồng nhất thức cổ điển

Chúng tôi nêu ra dưới đây một vài đồng nhất thức được sử dụng trong lý thuyết số hoặc trong chứng minh bất đẳng thức.

Mệnh đề 1.2. [Euler] Với $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ ta có đồng nhất thức

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2,$$

$$\text{trong đó } \begin{cases} z_1 = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 \\ z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 \\ z_3 = x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2 \\ z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1. \end{cases}$$

Chứng minh: Vì $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$

nên với hai ma trận $\begin{pmatrix} x_1+ix_2 & x_3+ix_4 \\ -x_3+ix_4 & x_1-ix_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1+iy_2 & y_3+iy_4 \\ -y_3+iy_4 & y_1-iy_2 \end{pmatrix}$

ta có $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) =$

$$= \begin{vmatrix} x_1+ix_2 & x_3+ix_4 \\ -x_3+ix_4 & x_1-ix_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1+iy_2 & y_3+iy_4 \\ -y_3+iy_4 & y_1-iy_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z_1+iz_2 & z_3+iz_4 \\ -z_3+iz_4 & z_1-iz_2 \end{vmatrix} = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \text{ theo Mệnh đề 1.1.} \quad \square$$

Ví dụ 1.1. Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2005^n$ có nghiệm nguyên với mỗi số nguyên dương n .

Bài giải: Hiển nhiên $x_1 = 44, y_1 = 7, z_1 = 4, t_1 = 2$ là một nghiệm nguyên của $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2005$. Sử dụng quy nạp nếu x_n, y_n, z_n, t_n là một nghiệm nguyên của $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2005^n$ thì

$$\begin{cases} x_{n+1} = 44x_n - 7y_n - 4z_n - 2t_n \\ y_{n+1} = 7x_n - 44y_n + -2z_n + 4t_n \\ z_{n+1} = 4x_n + 2y_n + 44z_n - 7t_n \\ t_{n+1} = 2x_n - 4y_n + 7z_n + 44t_n \end{cases}$$

là một $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2005^{n+1}$ theo Mệnh đề 1.2. $\square$

Mệnh đề 1.3. Với a, b, c, x, y, z ta luôn có đồng nhất thức sau đây:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

$$\text{trong đó} \begin{cases} A = ax + bz + cy \\ B = ay + bx + cz \\ C = az + by + cx. \end{cases}$$

Chứng minh: Vì $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ với hai ma trận

vuông cùng cấp X, Y có $|X||Y| = |XY|$ nên từ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} ax + bz + cy & ay + bx + cz & az + by + cx \\ az + by + cx & ax + bz + cy & ay + bx + cz \\ ay + bx + cz & az + by + cx & ax + bz + cy \end{vmatrix} = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$$

suy ra hệ thức cần chứng minh. $\square$

Hệ quả 1.4. Với a, b, c, x, y, z ta luôn có đồng nhất thức sau đây:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ & = A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA, \end{aligned}$$

$$\text{trong đó} \begin{cases} A = ax + bz + cy \\ B = ay + bx + cz \\ C = az + by + cx. \end{cases}$$

Chứng minh: Suy ra từ mệnh đề 1.3 □

Ví dụ 1.2. Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ là ba nghiệm phức $x^3 = 1$ và $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ta có đồng nhất thức

$$(i) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

$$(ii) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = f(\alpha_1)f(\alpha_2)f(\alpha_3).$$

Bài giải: (i) Vì $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ nên $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

$$(ii) \quad \text{Vì } (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ nên}$$

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(\alpha_1) & f(\alpha_2) & f(\alpha_3) \\ \alpha_1^2 f(\alpha_1) & \alpha_2^2 f(\alpha_2) & \alpha_3^2 f(\alpha_3) \\ \alpha_1 f(\alpha_1) & \alpha_2 f(\alpha_2) & \alpha_3 f(\alpha_3) \end{vmatrix}.$$

Từ đó suy ra $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = f(\alpha_1)f(\alpha_2)f(\alpha_3)$. □

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương n phương trình $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2600^n$ luôn có nghiệm dương x, y, z .

Bài giải: Vì $x = 12, y = 12, z = 2$ ta có $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2600$. Kết quả được suy ra từ mệnh đề 1.2 với số nguyên dương n tùy ý. □

Ví dụ 1.4. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Chứng minh rằng, nếu các số thực x, y, z, t, p, q, r, s thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} ax + by + cz + dt = p \\ -bx + ay + dz - ct = q \\ -cx - dy + az + bt = r \\ -dx + cy - bz + at = s \end{cases}$$

thì ta có đồng nhất thức $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x + y + z + t) =$

$$= (ap - bq - cr - ds) + (bp + aq - dr + cs) + (cp + dq + ar - bs) + (dp - cq + br + as)$$

$$\text{và } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 xyzt =$$

$$= (ap - bq - cr - ds)(bp + aq - dr + cs)(cp + dq + ar - bs)(dp - cq + br + as).$$

Bài giải: Vì $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$ thỏa mãn $A^c A = A A^c = (a^2 + b^2 +$

$$c^2 + d^2)E \text{ nên từ } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} \text{ có } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A^c \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$$

$$\text{và } \begin{cases} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)x = ap - bq - cr - ds \\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)y = bp + aq - dr + cs \\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)z = cp + dq + ar - bs \\ (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)t = dp - cq + br + as. \end{cases}$$

Từ đây suy ra hai đồng nhất thức đã nêu ra ở trên. $\square$

Ví dụ 1.5. Tính định thức $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$. Sau đó hãy tìm ra các số nguyên

$a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, 10\}$ thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2 + 8abcd$ là một số nguyên tố.

Bài giải: Ta có $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 -$

$$2a^2d^2 - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2 + 8abcd. \text{ Vì } \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{vmatrix} = (a + b + c + d)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} = (a + b + c + d) \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a - b & d - c & c - d \\ 0 & d - b & a - c & b - d \\ 0 & c - b & b - c & a - d \end{vmatrix} = (a + b + c + d)$$

$$\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

Không hạn chế có thể coi $10 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 1$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} a+b-c-d=1 \\ a-b+c-d=1 \\ a-b-c+d=1 \\ a+b+c+d \text{ là số nguyên tố.} \end{cases}$$

Từ đây suy ra $b=c=d, a=b+1$ và như vậy, $4b+1$ là số nguyên tố. Từ đó dễ dàng suy ra: $b=c=d=1, a=2$; $b=c=d=3, a=4$; $b=c=d=4, a=5$; $b=c=d=7, a=8$ và $b=c=d=9, a=10$. $\square$

1.3. Vành ma trận $K[A]$

Xét vành đa thức một biến $K[x]$ trên trường K . Giả sử đa thức thuộc $K[x]$ là $f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0$ và ma trận vuông A cấp $n \leq 3$. Định nghĩa

$$f(A) = a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \dots + a_1 A + a_0 E$$

với E là ma trận đơn vị cùng cấp với ma trận vuông A . Từ các phép toán về ma trận, chẳng hạn như: $EA^r = A^r E = A^r, A^r A^s = A^s A^r = A^{r+s}$ và $A^r(\alpha A^s + \beta A^t) = \alpha A^{r+s} + \beta A^{r+t}$ với $\alpha, \beta \in K$, suy ra ngay kết quả sau:

Định lý 1.5. Với hai đa thức f và g thuộc $K[x]$ và ma trận A ta luôn có

- (i) Nếu $f = g$ thì $f(A) = g(A)$.
- (ii) $(f + g)(A) = f(A) + g(A)$.
- (iii) $(fg)(A) = f(A)g(A)$.
- (iv) $f(A)g(A) = g(A)f(A)$.
- (v) $(\alpha f)(A) = \alpha f(A)$ với bất kỳ $\alpha \in K$.

Ký hiệu $K[A] = \{f(A) | f \in K[x]\}$. Từ định lý 1.5 suy ra ngay kết quả:

Định lý 1.6. Tập $K[A]$ cùng phép cộng, nhân các ma trận và nhân ma trận với một số lập thành một vành giao hoán có đơn vị E .

Mệnh đề 1.7. Tương ứng $\phi : K[x] \rightarrow K[A], f(x) \mapsto f(A)$, là một toàn cấu với $\text{Ker}(\phi) \neq (0)$.

Chứng minh: Do bởi $\phi(f+g) = (f+g)(A) = f(A) + g(A) = \phi(f) + \phi(g)$ và $\phi(fg) = (fg)(A) = f(A)g(A) = \phi(f)\phi(g)$ theo Định lý 1.5 nên ϕ là một đồng cấu vành.

Với $f(A) = a_s A^s + a_{s-1} A^{s-1} + \dots + a_1 A + a_0 E$ có đa thức $f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ để $\phi(f) = f(A)$. Do vậy ϕ là một toàn cấu vành.

Vì tập $M_{n,n}$ tất cả các ma trận vuông cấp n trên K là một không gian vectơ n^2 chiều trên K với cơ sở $\Delta_{ij} = (1_{ij})$, trong đó tại vị trí (i, j) có $1_{ij} = 1$, còn tại các vị trí khác đều bằng 0. Như vậy nhiều hơn n^2 ma trận vuông cấp n trên K đều là phụ thuộc tuyến tính. Như vậy tồn tại đa thức khác 0 là $f(x) = x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ với $s \geq n^2 + 1$ thỏa mãn $f(A) = 0$. Vậy $\text{Ker}(\phi) \neq (0)$. Vì vành $K[x]$ là vành idêan chính nên có đa thức bậc thấp nhất $F(x) \neq 0$ để $\text{Ker}(\phi) = (F) \neq (0)$. $\square$

Hệ quả 1.8. Ta có $K[A] \cong K[x]/(F)$.

Chứng minh: Bởi vì $\phi : K[x] \rightarrow K[A], f(x) \mapsto f(A)$, là một toàn cấu với $\text{Ker}(\phi) = (F) \neq (0)$ theo Mệnh đề 1.7 nên $K[A] \cong K[x] / \text{Ker}(\phi) = K[x]/(F)$. $\square$

Chú ý: Vì $K[x]$ là vành các idêan chính nên có duy nhất một đa thức bậc thấp nhất dạng $m(x) = x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d \in K[x]$ để $\text{Ker}(\phi) = (F) = (m(x))$. Hiển nhiên $m(A) = 0$ đôi khi $m(x)$ còn được gọi là đa thức tối thiểu của ma trận A .

Chương 2

Vận dụng trong hình học sơ cấp

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , phép biến đổi tọa độ được biểu diễn qua ma trận $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

2.1. Phép biến đổi tọa độ đặc biệt trong mặt phẳng

2.1.1. Phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , phép tịnh tiến f được biểu diễn dưới dạng ma trận $f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Bổ đề 2.1. Tích hai phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến

Chứng minh. Dựng hệ tọa độ (Oxy) . Xét hai phép tịnh tiến sau đây: $f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ và $g : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Khi đó hợp thành

$$g \circ f : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

là một phép tịnh tiến.

2.1.2. Phép đối xứng trục

Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng $d : ax + by = 0$ đi qua gốc tọa độ $O(0,0)$ với $a^2 + b^2 \neq 0$. Phép đối xứng trục d được biểu diễn qua

ma trận như sau : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & -\frac{2ab}{a^2 + b^2} \\ -\frac{2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Nếu ta biểu

diễn đường thẳng $d : \sin \alpha x + \cos \alpha y = 0$ thì phép đối xứng trục d được biểu diễn qua ma trận $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2.1.3. Phép quay

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , phép quay $I(a; b)$ với góc quay α được biểu diễn qua ma trận $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

2.1.4. Phép đối xứng tâm

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , phép đối xứng tâm $I(a; b)$ được biểu diễn qua ma trận $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

2.1.5. Phép vị tự

Trong mặt phẳng (Oxy) , phép vị tự tâm $I(a, b)$ tỷ số k được biểu diễn $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1 - k) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 - k)a \\ (1 - k)b \end{pmatrix}$.

2.1.6. Vận dụng

Ví dụ 2.1. Trong mặt phẳng cho hai hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$ và $A_2B_2C_2D_2$. Gọi A_3, B_3, C_3, D_3 là trung điểm các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 và D_1D_2 , tương ứng. Khi đó hoặc bốn điểm A_3, B_3, C_3, D_3 thẳng hàng hoặc chúng là 4 đỉnh của một hình bình hành.

Bài giải: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , giả sử $A_1(a_{11}, a_{12}), B_1(b_{11}, b_{12}), C_1(c_{11}, c_{12}), D_1(d_{11}, d_{12})$ và tọa độ $A_2(a_{21}, a_{22}), B_2(b_{21}, b_{22}), C_2(c_{21}, c_{22}), D_2(d_{21}, d_{22})$. Vì $A_1B_1C_1D_1$ và $A_2B_2C_2D_2$ là hai hình bình hành nên có

$$b_{11} - a_{11} = c_{11} - d_{11}$$

$$b_{12} - a_{12} = c_{12} - d_{12}$$

$$b_{21} - a_{21} = c_{21} - d_{21}$$

$$b_{22} - a_{22} = c_{22} - d_{22}$$

và suy ra $\begin{cases} \frac{b_{11} + b_{21}}{2} - \frac{a_{11} + a_{21}}{2} = \frac{c_{11} + c_{21}}{2} - \frac{d_{11} + d_{21}}{2} = m \\ \frac{b_{12} + b_{22}}{2} - \frac{a_{12} + a_{22}}{2} = \frac{c_{12} + c_{22}}{2} - \frac{d_{12} + d_{22}}{2} = n. \end{cases}$ Ta lại có tọa độ các điểm $A_3(\frac{a_{11} + a_{21}}{2}, \frac{a_{12} + a_{22}}{2}), B_3(\frac{b_{11} + b_{21}}{2}, \frac{b_{12} + b_{22}}{2}),$

$C_3\left(\frac{c_{11} + c_{21}}{2}, \frac{c_{12} + c_{22}}{2}\right)$ và $D_3\left(\frac{d_{11} + d_{21}}{2}, \frac{d_{12} + d_{22}}{2}\right)$ và ta nhận được

$$\begin{pmatrix} \frac{b_{11} + b_{21}}{2} \\ \frac{b_{12} + b_{22}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11} + a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12} + a_{22}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{c_{11} + c_{21}}{2} \\ \frac{c_{12} + c_{22}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_{11} + d_{21}}{2} \\ \frac{d_{12} + d_{22}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Ta suy ra hoặc bốn điểm A_3, B_3, C_3, D_3 thẳng hàng hoặc chúng là 4 đỉnh của một hình bình hành. $\square$

Ví dụ 2.2. Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi $ABCD$. Dựng hai hình vuông cùng hướng $AEBF$ và $CHDK$. Chứng minh đồng nhất thức

$$|EH^2 - FK^2| = 4S_{ABCD}.$$

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy để $A(0; -a)$, $E(-a; 0)$, $B(0; a)$, $F(a; 0)$. Giả sử tâm hình vuông $CHDK$ là $I(u; v)$ và $C(x_1; y_1)$. Vì hình vuông $CHDK$ cùng hướng với hình vuông $AEBF$ nên sử dụng phép quay tâm $I(u; v)$ với góc quay $\frac{-\pi}{2}$ biểu diễn bởi ma trận :

$$\begin{pmatrix} x' - u \\ y' - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix}$$

ta được $H(u - v + y_1; u + v - x_1)$. Dễ dàng có $D(2u - x_1; 2v - y_1)$, và $K(u + v - y_1; v - u + x_1)$. Ta có $|EH^2 - FK^2| = 4|ua + uy_1 - vx_1| = 4S_{ABCD}$. $\square$

Ví dụ 2.3. Trong mặt phẳng, cho hai hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$ với thứ tự các đỉnh cùng theo một hướng. Chứng minh đồng nhất thức

$$A'A^2 + C'C^2 = B'B^2 + D'D^2.$$

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy để $A(a; 0)$, $B(0; a)$, $C(-a; 0)$, $D(0; -a)$. Giả sử tâm hình vuông $A'B'C'D'$ là $I(u; v)$ và $A'(x_1; y_1)$. Vì hình vuông $A'B'C'D'$ cùng hướng hình vuông $ABCD$ nên sử dụng phép quay tâm $I(u; v)$ với góc quay $\frac{\pi}{2}$ biểu diễn qua ma trận:

$$\begin{pmatrix} x' - u \\ y' - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - u \\ y - v \end{pmatrix}$$

ta được $B'(u + v - y_1; x_1 - u + v)$. Dễ dàng có $C'(2u - x_1; 2v - y_1)$, và $D(u - v + y_1; u + v - x_1)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} A'A^2 + C'C^2 &= (a - x_1)^2 + y_1^2 + (-a - 2u + x_1)^2 + (2v - y_1)^2 \\ B'B^2 + D'D^2 &= (u + v - y_1)^2 + (a + u - v - x_1)^2 \\ &\quad + (u - v + y_1)^2 + (-a - u - v + x_1)^2. \end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra đồng nhất thức $A'A^2 + C'C^2 = B'B^2 + D'D^2$ vì cả hai đều bằng $2a^2 + 4u^2 + 4v^2 + 2x_1^2 + 2y_1^2 + 4au - 4ax_1 - 4ux_1 - 4vy_1$. $\square$

Giả sử điểm I, M, N tương ứng các số phức z_I, z_M, z_N . Phép quay tâm I góc quay α biến điểm M thành điểm N được biểu diễn dưới dạng phức:

$$z_N = z_I + (z_M - z_I)e^{i\alpha}.$$

Bây giờ ta vận dụng phép quay vào việc xét một số bài hình dưới đây.

Ví dụ 2.4. Trong mặt phẳng cho đa giác đơn bất kỳ $A_1A_2 \dots A_n$ và coi $A_{n+1} \equiv A_1$. Xét hệ vectơ $\vec{e}_i$ sao cho $\vec{e}_i \perp \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $\vec{e}_i$ hướng ra ngoài miền đa giác và $|\vec{e}_i| = A_iA_{i+1}$ với $i = 1, 2, \dots, n$. Khi đó $\sum_{i=1}^n \vec{e}_i = \vec{0}$.

Bài giải: Định hướng đa giác, chẳng hạn hướng thuận, $\vec{e}_i$ có được do quay $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ góc $-\frac{\pi}{2}$. Vậy $\sum_{i=1}^n \vec{e}_i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \right) = e^{-i\frac{\pi}{2}} (\vec{0}) = \vec{0}$. $\square$

Ví dụ 2.5. Cho tam giác ABC với độ dài cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Dựng ra phía ngoài ba tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1 . Dựng tiếp ra phía ngoài tam giác $A_1B_1C_1$ ba tam giác đều $B_1C_1A_2, C_1A_1B_2$ và $A_1B_1C_2$. Chứng minh

- (i) $AA_1 = BB_1 = CC_1$ và $\Delta O_1O_2O_3$ đều, trong đó O_1, O_2, O_3 làm các tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1 .
- (ii) A, A_1, A_2 thẳng hàng. Khi b, c cố định còn a thay đổi, hãy tìm a để A_1A_2 lớn nhất.
- (iii) Tiếp tục quá trình như trên để có tam giác $A_{2010}B_{2010}C_{2010}$. Khi đó $A, A_1, \dots, A_{2010}$ thẳng hàng và tìm giá trị lớn nhất của $A_{2010}A_{2009}$ khi b, c cố định, còn a thay đổi.

Bài giải: (i) Tương ứng A, B, C ba số phức z_A, z_B, z_C . Khi đó ta có

$$\begin{cases} z_{A_1} = z_C + e^{iu}(z_B - z_C) \\ z_{B_1} = z_A + e^{iu}(z_C - z_A) \\ z_{C_1} = z_B + e^{iu}(z_A - z_B) \\ z_{A_2} = z_{C_1} + e^{iu}(z_{B_1} - z_{C_1}) \\ u = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Từ $z_C + e^{iu}(z_{B_1} - z_C) = z_C + e^{iu}(z_A + e^{iu}(z_C - z_A) - z_C)$ ta suy ra hệ thức $z_C + e^{iu}(z_{B_1} - z_C) = z_C(1 - e^{iu} + e^{2iu}) + z_A(e^{iu} - e^{2iu}) = z_A$ vì $e^{iu} \neq -1, e^{3iu} + 1 = 0$ nên $1 - e^{iu} + e^{2iu} = 0, e^{iu} - e^{2iu} = 1$. Như vậy ta có $z_{A_1} - z_A = e^{iu}(z_B - z_{B_1})$ và suy ra $AA_1 = BB_1$. Tương tự $BB_1 = CC_1$. Dễ dàng kiểm tra $3[z_{O_2} + e^{iu}(z_{O_3} - z_{O_2})] = 3z_{O_1}$. Vậy $\Delta O_1 O_2 O_3$ đều.

(ii) Dễ dàng chỉ ra $z_{A_1} + z_{A_2} = 2z_A$. Vậy A là trung điểm của $A_1 A_2$. Từ $A_1 A_2 = 2AA_1 = 2BB_1 \leq (b + c)$. Vậy $A_1 A_2$ lớn nhất bằng $2(b + c)$ khi $A = \frac{2\pi}{3}$. Từ đó có a để $A_1 A_2$ lớn nhất.

(iii) được suy ra từ (ii). $\square$

Ví dụ 2.6. Cho tam giác ABC Với độ dài cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Dựng ra phía ngoài tam giác đều BCA_1, CAB_1, ABC_1 . Dựng tiếp ra phía ngoài tam giác $A_1 B_1 C_1$ ba tam giác đều sau đây: $B_1 C_1 A_2, C_1 A_1 B_2, A_1 B_1 C_2$. Gọi M, N, P là trung điểm BC, CA, AB ; M_1, N_1, P_1 là trung điểm $B_1 C_1, C_1 A_1, A_1 B_1$, và M_2, N_2, P_2 là trung điểm $B_2 C_2, C_2 A_2, A_2 B_2$, tương ứng. Chứng minh rằng :

(i) $AA_1 \parallel 2MM_1, BB_1 \parallel 2NN_1, CC_1 \parallel 2PP_1$ và MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy.

(ii) $A_2 M_2 \parallel AM_1 \parallel MM_0$, trong đó M_0 là trung điểm của AA_1 .

(iii) Hạ $MM_2 \perp B_1 C_1, NN_2 \perp C_1 A_1, PP_2 \perp A_1 B_1$. Khi đó MM_2, NN_2, PP_2 đồng quy tại một điểm.

Bài giải: (i) Ta có $2z_M = z_B + z_C, 2z_{M_1} = z_{B_1} + z_{C_1}$. Viết $\overrightarrow{IJ} = z_J - z_I$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MM_1} &= 2z_{M_1} - 2z_M = z_{B_1} + z_{C_1} - z_B - z_C = z_A - z_C + e^{iu}(z_C - z_B) \\ &= \overrightarrow{A_1 A}. \text{ Vậy } AA_1 \parallel MM_1, AA_1 = 2MM_1. \end{aligned}$$

Ba đoạn MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy được suy ra từ việc xét $\triangle MNP$ và phép quay e^{iu} .

(ii) Từ $AA_1 \parallel 2MM_1$ suy ra $AM_1 \parallel MM_0$. Ta lại có $AM_1 \parallel A_2M_2$. Do vậy $A_2M_2 \parallel AM_1 \parallel MM_0$.

(iii) Sử dụng kết quả $AA_1 = BB_1 = CC_1 = d$ và công thức đường trung tuyến ta có $2MB_1^2 = d^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}$, $2MC_1^2 = d^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$. Vậy $MB_1^2 - MC_1^2 = \frac{b^2 - c^2}{2}$ hay $M_2B_1^2 - M_2C_1^2 = \frac{b^2 - c^2}{2}$. Tương tự có $N_2C_1^2 - N_2A_1^2 = \frac{c^2 - a^2}{2}$, $P_2A_1^2 - P_2B_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}$. Khi đó $M_2B_1^2 - M_2C_1^2 + N_2C_1^2 - N_2A_1^2 + P_2A_1^2 - P_2B_1^2 = 0$. Do đó MM_2, NN_2, PP_2 đồng quy tại một điểm. $\square$

Ví dụ 2.7. Trong mặt phẳng cho tứ giác $A_0A_1A_2A_3$ và định nghĩa $A_{4k+i} \equiv A_i$ với $i = 0, 1, 2, 3$ và $k \in \mathbb{Z}$. Với điểm P_0 ta thực hiện phép quay tâm A_0 góc quay $\frac{\pi}{2}$ để được P_1 ; thực hiện phép quay tâm A_1 góc quay $\frac{\pi}{2}$ để được P_2 ; thực hiện phép quay tâm A_2 góc quay $\frac{\pi}{2}$ để được P_3 ; thực hiện phép quay tâm A_3 góc quay $\frac{\pi}{2}$ để được P_4 và cứ tiếp tục như vậy. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để có P_0 sao cho $P_{2012} \equiv P_0$ là $A_0A_2 = A_1A_3$ và $A_0A_2 \perp A_1A_3$.

Bài giải: Tương ứng A_0, A_1, A_2, A_3 là bốn số phức z_0, z_1, z_2, z_3 và tương ứng với P_k là số phức $\alpha_k, k = 0, 1, 2, \dots$. Khi đó ta biểu diễn

$$\begin{cases} \alpha_1 = z_0 + i(\alpha_0 - z_0) \\ \alpha_2 = z_1 + i(\alpha_1 - z_1) \\ \alpha_3 = z_2 + i(\alpha_2 - z_2) \\ \alpha_4 = z_3 + i(\alpha_3 - z_3). \end{cases}$$

Dễ dàng chỉ ra $\alpha_4 = (1 - i)(z_3 - z_1) + (1 + i)(z_2 - z_0) + \alpha_0$. Vậy qua 4 lần quay ta được một phép tịnh tiến $\alpha_4 = \alpha_0 + (1 - i)(z_3 - z_1) + i(1 - i)(z_2 - z_0)$. Vì $2012 = 503 \cdot 4$ nên $\alpha_{2012} = \alpha_0 + 503[(1 - i)(z_3 - z_1) + i(1 - i)(z_2 - z_0)]$. để $\alpha_{2012} \equiv \alpha_0$ cần và đủ $(1 - i)(z_3 - z_1) + i(1 - i)(z_2 - z_0) = 0$ hay $(z_3 - z_1) + i(z_2 - z_0) = 0$. điều này tương ứng $A_0A_2 = A_1A_3$ và $A_0A_2 \perp A_1A_3$. $\square$

Ví dụ 2.8. Trong mặt phẳng cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính R . Dựng ra phía ngoài bốn hình vuông sau đây:

$ABB_1A_2, BCC_1B_2, CDD_1C_2$ và DAA_1D_2 . Gọi A_3, B_3, C_3, D_3 là trung điểm các đoạn A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 và D_1D_2 , tương ứng. Chứng minh

- (i) $AA_3 = CC_3 = \frac{BD}{2}$ và $AA_3 \perp BD, CC_3 \perp BD$. Từ đó suy ra từng cặp A_3C_3 và AC ; B_3D_3 và BD , cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn khi AC và BD không vuông góc với nhau
- (ii) Tứ giác $A_3B_3C_3D_3$ có nội tiếp trong một đường tròn không? (coi như một bài tập).

Bài giải: (i) Ta chỉ cần xét $R = 1$. Tương ứng A, B, C, D là bốn số phức z_a, z_b, z_c, z_d với $|z_a| = |z_b| = |z_c| = |z_d| = 1$ và tương ứng A_k, B_k, C_k, D_k là các số phức $z_{a_k}, z_{b_k}, z_{c_k}, z_{d_k}$ với $k = 1, 2, 3$. Khi đó có biểu diễn

$$\begin{cases} z_{a_1} = z_a - i(z_d - z_a) \\ z_{b_1} = z_b - i(z_a - z_b) \\ z_{c_1} = z_c - i(z_b - z_c) \\ z_{d_1} = z_d - i(z_c - z_d) \end{cases} \quad \begin{cases} z_{a_2} = z_a + i(z_b - z_a) \\ z_{b_2} = z_b + i(z_c - z_b) \\ z_{c_2} = z_c + i(z_d - z_c) \\ z_{d_2} = z_d + i(z_a - z_d) \end{cases} \quad \begin{cases} z_{a_3} = \frac{z_{a_1} + z_{a_2}}{2} \\ z_{b_3} = \frac{z_{b_1} + z_{b_2}}{2} \\ z_{c_3} = \frac{z_{c_1} + z_{c_2}}{2} \\ z_{d_3} = \frac{z_{d_1} + z_{d_2}}{2} \end{cases}.$$

Dễ dàng có $z_{a_3} - z_a = i \frac{z_b - z_d}{2} = z_{c_3} - z_c$. Vậy $AA_3 = CC_3 = \frac{BD}{2}$ và $AA_3 \perp BD, CC_3 \perp BD$. Từ đây suy ra A_3C_3 và AC cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn. Tương tự có $BB_3 = DD_3 = \frac{AC}{2}$ và $BB_3 \perp AC, DD_3 \perp AC$. Từ đây suy ra B_3D_3 và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

(ii) Giả sử I, J, H, K là tâm các hình vuông $ABB_1A_2, BCC_1B_2, CDD_1C_2$ và DAA_1D_2 ứng với số phức z_I, z_J, z_H, z_K . $\square$

Ví dụ 2.9. Cho $\triangle ABC$. Dựng ra phía ngoài ba hình vuông $BCA_1A_2, CAB_1B_2, ABC_1C_2$. Gọi các tâm hình vuông này là I, J, K và M là trung điểm BC . Chứng minh rằng $AI = JK, AI \perp JK$ và $MJ = MK, MJ \perp MK$.

Bài giải: Tương ứng A, B, C ba số phức z_A, z_B, z_C . khi đó có biểu diễn

$$\begin{cases} z_{A_1} = z_C + i(z_B - z_C) \\ z_{B_1} = z_A + i(z_C - z_A) \\ z_{C_1} = z_B + i(z_A - z_B). \end{cases}$$

Tương ứng I, J, K, M là bốn số phức z_I, z_J, z_K, z_M . Từ các quan hệ sau:

$$\begin{aligned} z_I &= \frac{z_B + z_{A_1}}{2} = \frac{z_B + z_C + i(z_B - z_C)}{2} \\ z_J &= \frac{z_C + z_{B_1}}{2} = \frac{z_C + z_A + i(z_C - z_A)}{2} \\ z_K &= \frac{z_A + z_{C_1}}{2} = \frac{z_A + z_B + i(z_A - z_B)}{2} \end{aligned}$$

có $2\overrightarrow{AI} = z_B + z_C + i(z_B - z_C) - 2z_A$, $2\overrightarrow{JK} = z_B - z_C + i(2z_A - z_B - z_C)$.
 Bởi vì $z_B + z_C + i(z_B - z_C) - 2z_A = i(z_B - z_C + i(2z_A - z_B - z_C))$ nên có
 được $AI = JK, AI \perp JK$.

Từ $z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$ suy ra ngay $2\overrightarrow{MJ} = z_A - z_B + i(z_C - z_A)$ và $2\overrightarrow{MK} = z_A - z_C + i(z_A - z_B)$. Bởi vì $z_A - z_C + i(z_A - z_B) = i(z_A - z_B + i(z_C - z_A))$ nên có được $MJ = MK, MJ \perp MK$. $\square$

2.2. Diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp

2.2.1. Diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp

Giả sử tam giác ABC có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$. Khi đó diện tích

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|. \text{ Phương trình các đường thẳng chứa các đỉnh}$$

$$BC : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_1 = y_2 - y_3 \\ b_1 = x_3 - x_2 \\ c_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \end{cases}$$

$$CA : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_2 = y_3 - y_1 \\ b_2 = x_1 - x_3 \\ c_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \end{cases}$$

$$AB : a_3x + b_3y + c_3 = 0 \text{ với } \begin{cases} a_3 = y_1 - y_2 \\ b_3 = x_2 - x_1 \\ c_3 = x_1y_2 - x_2y_1. \end{cases}$$

Nếu giải hệ phương trình, ngược lại để tính x_i, y_i qua các a_j, b_j, c_j , ta có

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{a_2b_3 - a_3b_2}, y_1 = \frac{a_3c_2 - a_2c_3}{a_2b_3 - a_3b_2} \\x_2 &= \frac{b_3c_1 - b_1c_3}{a_3b_1 - a_1b_3}, y_2 = \frac{a_1c_3 - a_3c_1}{a_3b_1 - a_1b_3} \\x_3 &= \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y_3 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.\end{aligned}$$

Mệnh đề 2.2. Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh a, b, c với độ dài các đường cao h_a, h_b, h_c ; độ dài các bán kính đường tròn ngoại, nội và bàng tiếp là R, r, r_1, r_2, r_3 . Khi đó diện tích S của tam giác ABC được xác định qua:

- (i) $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$
- (ii) $S = \frac{abc}{4R}.$
- (iii) $S = \frac{(a+b+c)r}{2} = pr.$
- (iv) $S = (p-a)r_1 = (p-b)r_2 = (p-c)r_3.$
- (v) $S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$, trong đó $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ và $C(x_3; y_3)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Mệnh đề 2.3. Nếu 3 đỉnh tam giác ABC là những điểm giao của các cặp thuộc ba đường thẳng $a_ix + b_iy + c_i = 0$ với $i = 1, 2, 3$, thì diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của được tính theo các công thức

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad S_{ABC} &= \frac{1}{2} \left| \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \right|. \\ \text{(ii)} \quad R &= \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{2} \right|.\end{aligned}$$

(iii) Nếu ký hiệu $a = BC, b = CA, c = AB$ thì

$$abc = \frac{\left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right|^3 \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{\left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right|}.$$

Chứng minh: (i) Thay x_i, y_i vào công thức tính diện tích tam giác ABC ta nhận được:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \frac{b_2c_3 - b_3c_2}{b_3c_1 - b_1c_3} & \frac{a_3c_2 - a_2c_3}{a_1c_3 - a_3c_1} \\ \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_3b_1 - a_1b_3} & \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2c_1 - a_1c_2} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{\begin{vmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & a_3c_2 - a_2c_3 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 & a_1c_3 - a_3c_1 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & a_2c_1 - a_1c_2 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \right|. \end{aligned}$$

Xét ma trận cấp ba $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ và ma trận phụ hợp của M là

$$M_{ad} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & a_3c_2 - a_2c_3 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 & a_1c_3 - a_3c_1 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & a_2c_1 - a_1c_2 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Vì $MM_{ad} = |M|E$ nên $|M||M_{ad}| = |M|^3$ hay $|M_{ad}| = |M|^2$. Do vậy có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \right|.$$

(ii) Vì $R^2 = \frac{S_{ABC}}{2 \sin A \sin B \sin C}$ nên ta có công thức xác định R qua

$$R^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2}{2 \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{|a_1 b_2 - a_2 b_1| |a_2 b_3 - a_3 b_2| |a_3 b_1 - a_1 b_3|}} \right|.$$

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)$$

Do vậy

$$R = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{2} \right|.$$

$$(iii) \text{ Ta có } abc = \left| \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^3 \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \right|$$

vì $abc = 4RS_{ABC}$. □

Ví dụ 2.10. Trong mặt phẳng (P) cho đường thẳng d và các tam giác ABC . Gọi A', B', C' là những điểm đối xứng với A, B, C , tương ứng d . Qua A', B', C' kẻ đường thẳng $A'a, B'b, C'c$ song song với BC, CA, AB , tương ứng. Chứng minh rằng ba đường song song vừa dựng đồng quy tại một điểm.

Bài giải: Dựng hệ Oxy với $d \equiv Oy$. Tọa độ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ và $A'(x_1, -y_1), B'(x_2, -y_2), C'(x_3, -y_3)$. Ta có phương trình $A'a, B'b, C'c$:

$$\begin{aligned} A'a &: (y_3 - y_2)x - (x_3 - x_2)y - (y_3 - y_2)x_1 - (x_3 - x_2)y_1 = 0 \\ B'b &: (y_1 - y_3)x - (x_1 - x_3)y - (y_1 - y_3)x_2 - (x_1 - x_3)y_2 = 0 \\ C'c &: (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x_3 - (x_2 - x_1)y_3 = 0. \end{aligned}$$

Vì $(A'a) + (B'b) = (C'c)$ và $A'a \times B'b$ nên ba đường thẳng $A'a, B'b, C'c$ đồng quy tại một điểm. □

Ví dụ 2.11. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với hai đường chéo cắt nhau ở O . Gọi L, M, N là trung điểm của DB, BC, CA , tương ứng. Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng AL, OM, DN đồng quy tại một điểm thì ta có hoặc $AD \parallel BC$ hoặc $S_{ABCD} = 2S_{OBC}$.

Bài giải: Dựng hệ Oxy với tọa độ $A(a, 0), B(b, d), C(c, 0)$ và $D(ub, ud)$ với $u < 0, a < 0 < c, d > 0$. Tọa độ $L(\frac{1+u}{2}b, \frac{1+u}{2}d)$, $M(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2})$ và $N(\frac{a+c}{2}, 0)$. Phương trình đường thẳng:

$$AL : (1+u)dx + (2a - (1+u)b)y - (1+u)ad = 0$$

$$OM : dx - (b+c)y = 0$$

$$DN : 2udx - (2ub - a - c)y - ud(a+c) = 0.$$

Ta thấy, nếu ba đường thẳng AL, OM, DN đồng quy tại một điểm thì

$$\begin{vmatrix} d & -b-c & 0 \\ (1+u)d & 2a - (1+u)b & -(1+u)ad \\ 2ud & a+c-2ub & -u(a+c)d \end{vmatrix} = 0. \text{ Vì } d > 0 \text{ nên ta nhận được}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -b-c & 0 \\ 1+u & 2a - (1+u)b & (1+u)a \\ 2u & a+c-2ub & u(a+c) \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Khai triển } 0 = \begin{vmatrix} 1 & -c & 0 \\ 1+u & 2a & (1+u)a \\ 2u & a+c & u(a+c) \end{vmatrix} = (a-cu)(au - a - cu - c).$$

Nếu $a = cu$ thì $AD \parallel BC$. Nếu $au - a - cu - c = 0$ thì $u = \frac{a+c}{a-c}$. Khi đó ta

$$\text{có } S_{ABCD} = \frac{(c-a)(d-ud)}{2} = \frac{d(c-a)(1 - \frac{a+c}{a-c})}{2} = \frac{2dc}{2} = 2S_{OBC}. \quad \square$$

Ví dụ 2.12. Cho tam giác ABC và lấy điểm D, E, F thuộc các cạnh BC, CA, AB , tương ứng thỏa mãn $\frac{BD}{DC} \leq \frac{BF}{FA} \leq 1$ và $\frac{AE}{EC} \leq \frac{AF}{FB}$. Chứng minh rằng $S_{DEF} \leq \frac{S_{ABC}}{4}$.

Bài giải: Dựng hệ Oxy . Giả sử $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ và với $u \in [0, 1], v \in (0, 1], t \in (0, 1)$ có biểu diễn $D = (1-u)B + uC$, $E = vA + (1-v)C$,

$F = (1-t)A + tB$. Vì $\frac{BD}{DC} \leq \frac{BF}{FA} \leq 1$ và $\frac{AE}{EC} \leq \frac{AF}{FB}$ nên $\frac{u}{1-u} \leq \frac{1-t}{t} \leq 1$ và $\frac{1-v}{v} \leq \frac{t}{1-t}$. Ta suy ra $\frac{1}{2} \leq t < 1$, $t+u \leq 1 \leq t+v$. Ta thấy

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \begin{vmatrix} 0 & 1-u & u \\ v & 0 & 1-v \\ 1-t & t & 0 \end{vmatrix} = t(1-t) - (1-u-t)(v+t-1).$$

Như vậy

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4} \text{ hay } S_{DEF} \leq \frac{S_{ABC}}{4}.$$

□

Ví dụ 2.13. Giả sử tam giác ABC với đường tròn nội tiếp tâm I và nó tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F , tương ứng. Gọi L, M, N là trung điểm các cạnh BC, CA, AB , tương ứng. Chứng minh rằng, các đường thẳng l, m, n , đi qua D, E, F và song song với IL, IM, IN , tương ứng, đồng quy tại một điểm. Giả sử điểm đó là P . Xác định giá trị lớn nhất của độ dài $|\vec{AP} - 4\vec{AI}|$.

Bài giải: Đặt $\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AC}$. Đặt $a = BC, b = CA, c = AB, 2p = a + b + c$ và $\alpha = \frac{a}{2p}, \beta = \frac{b}{2p}, \gamma = \frac{c}{2p}$. Khi đó ta có kết quả sau:

$$\begin{aligned} \vec{AI} &= \beta\vec{u} + \gamma\vec{v}, \vec{AL} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}, \vec{LI} = \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{u} + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\vec{v} \\ \vec{AM} &= \frac{\vec{v}}{2}, \vec{MI} = \beta\vec{u} + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\vec{v}, \vec{AN} = \frac{\vec{u}}{2}, \vec{NI} = \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{u} + \gamma\vec{v} \\ \vec{AD} &= \frac{a+b-c}{2a}\vec{u} + \frac{a+c-b}{2a}\vec{v}, \vec{AE} = \frac{b+c-a}{2b}\vec{v}, \vec{AF} = \frac{b+c-a}{2c}\vec{u}. \end{aligned}$$

Phương trình l, m, n , qua D, E, F song song với LI, MI, NI , tương ứng:

$$\begin{aligned} \vec{AD} + s\vec{LI} &= \left(s\left(\beta - \frac{1}{2}\right) + \frac{1-2\gamma}{2\alpha}\right)\vec{u} + \left(s\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \frac{1-2\beta}{2\alpha}\right)\vec{v} \\ \vec{AE} + r\vec{MI} &= r\beta\vec{u} + \left(r\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \frac{1-2\alpha}{2\beta}\right)\vec{v} \\ \vec{AF} + p\vec{NI} &= \left(p\left(\beta - \frac{1}{2}\right) + \frac{1-2\alpha}{2\gamma}\right)\vec{u} + p\gamma\vec{v}. \end{aligned}$$

Với $s = 4$ ta nhận được biểu diễn $\vec{AD} + 4\vec{LI} = (4\beta - 1)\vec{u} + (4\gamma - 1)\vec{v} + \frac{1}{2\alpha}\left(\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{u} + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\vec{v}\right)$. Đặt $\vec{AP} = (4\beta - 1)\vec{u} + (4\gamma - 1)\vec{v}$. Ta có $\vec{AP} = \vec{AD} + \left(4 - \frac{1}{2\alpha}\right)\vec{LI}$. Như vậy, đường thẳng l đi qua điểm P . Với $r = 4$ ta

nhận được biểu diễn $\overrightarrow{AE} + 4\overrightarrow{MI} = 4\beta\vec{u} + \left(4\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) + \frac{1-2\alpha}{2\beta}\right)\vec{v}$ và nhận được $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AE} + \left(4 - \frac{1}{\beta}\right)\overrightarrow{MI}$. Như vậy, đường thẳng m đi qua điểm P . Tương tự, đường thẳng n cũng đi qua P . $\square$

Mệnh đề 2.4. Giả sử ba điểm $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ và $C(x_3; y_3)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy với độ dài ba cạnh $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Khi đó có $R = \frac{abc}{2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}.$

Chứng minh: Ta biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không thay đổi qua một phép tịnh tiến. Do đó có thể coi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $O(0; 0)$ và ta có

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = R^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = R^2 \\ x_3^2 + y_3^2 = R^2 \end{cases} \quad \text{và suy ra} \quad \begin{cases} R^2 - x_1x_2 - y_1y_2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2} \\ R^2 - x_2x_3 - y_2y_3 = \frac{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}{2} \\ R^2 - x_1x_3 - y_1y_3 = \frac{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Từ } 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{và tích hai định thức}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & R \\ x_2 & y_2 & R \\ x_3 & y_3 & R \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 \\ R & R & R \end{vmatrix} \quad \text{ta có}$$

biểu thị quan hệ giữa tọa độ đỉnh, diện tích và bán kính R qua $4S^2R^2$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -x_1x_2 - y_1y_2 + R^2 & -x_1x_3 - y_1y_3 + R^2 \\ -x_1x_2 - y_1y_2 + R^2 & 0 & -x_2x_3 - y_2y_3 + R^2 \\ -x_1x_3 - y_1y_3 + R^2 & -x_2x_3 - y_2y_3 + R^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Vì $R^2 - x_ix_j - y_iy_j = \frac{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}{2}$, $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$, nên

$$4S^2R^2 = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{b^2}{2} & \frac{c^2}{2} \\ \frac{b^2}{2} & 0 & \frac{a^2}{2} \\ \frac{c^2}{2} & \frac{a^2}{2} & 0 \end{array} \right| = \frac{a^2b^2c^2}{4}. \text{ Vậy } R = \frac{abc}{2 \cdot \left| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right|}. \quad \square$$

Ví dụ 2.14. [Rumania 2004] Giả sử điểm M ở trong tam giác ABC . Ký hiệu R, R_1, R_2, R_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, MBC, MCA, MAB . Các đường thẳng AM, BM, CM cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 . Đặt $k_1 = \frac{MA_1}{AA_1}, k_2 = \frac{MB_1}{BB_1}, k_3 = \frac{MC_1}{CC_1}$. Chứng minh rằng $k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3 \geq R$.

Bài giải: Từ Mệnh đề 2.3 suy ra đồng nhất thức $4SR = abc$. Do đó

$$4S_{ABC}R = abc$$

$$4S_{MBC}R_1 = a.MB.MC$$

$$4S_{MCA}R_2 = b.MC.MA$$

$$4S_{MAB}R_3 = c.MA.MB.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3}{R} &= \frac{S_{MBC}R_1 + S_{MCA}R_2 + S_{MAB}R_3}{S_{ABC}R} \text{ suy ra quan hệ} \\ \frac{k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3}{R} &= \frac{a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB}{abc} \geq 1. \quad \square \end{aligned}$$

Ví dụ 2.15. Gọi điểm G là trọng tâm tam giác ABC . Ký hiệu R, R_1, R_2, R_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, GBC, GCA, GAB . Chứng minh rằng $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$.

Bài giải: Vì $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{3}$ nên $R_1 + R_2 + R_3 \geq 3R$. $\square$

Ví dụ 2.16. Gọi điểm I là tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC . Ký hiệu R, R_1, R_2, R_3 là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, IBC, ICA, IAB . Chứng minh rằng $\frac{R_1}{h_a} + \frac{R_2}{h_b} + \frac{R_3}{h_c} \geq \frac{R}{r}$.

Bài giải: Vì $k_1 = \frac{r}{h_a}, k_2 = \frac{r}{h_b}$ và $k_3 = \frac{r}{h_c}$ nên $\frac{R_1}{h_a} + \frac{R_2}{h_b} + \frac{R_3}{h_c} \geq \frac{R}{r}$. $\square$

Ví dụ 2.17. Cho $\Delta A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng, với bất kỳ điểm O trong mặt phẳng $A_1A_2A_3$ ta luôn có $S_{A_1A_2A_3} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^3 \sqrt{OA_i^2 + 1}$.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy . Giả sử $A_i(x_i; y_i), i = 1, 2, 3$. Theo Mệnh

đề 2.2 ta có $4S^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \leq \prod_{i=1}^3 (x_i^2 + y_i^2 + 1)$. Từ đây suy

ra $S_{A_1A_2A_3} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^3 \sqrt{OA_i^2 + 1}$. Dấu bằng xảy ra khi ba vectơ $(x_1; y_1; 1)$, $(x_2; y_2; 1)$ và $(x_3; y_3; 1)$ đôi một vuông góc với nhau. $\square$

Mệnh đề 2.5. Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm M, N, P thuộc cạnh BC, CA, AB , tương ứng. Đặt $u = \frac{MB}{MC}, v = \frac{NC}{NA}, t = \frac{PA}{PB}$. Khi đó ta có tỷ số diện tích

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1 + uvt}{(1 + u)(1 + v)(1 + t)}.$$

Chứng minh: Giả thiết $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$.

Vì $\overrightarrow{BM} = u\overrightarrow{MC}$ nên $M(\frac{x_2 + ux_3}{1 + u}, \frac{y_2 + uy_3}{1 + u})$.

Tương tự ta cũng có $N(\frac{x_3 + vx_1}{1 + v}, \frac{y_3 + vy_1}{1 + v})$ và $P(\frac{x_1 + tx_2}{1 + t}, \frac{y_1 + ty_2}{1 + t})$.

Đặt $\alpha = (1 + u)(1 + v)(1 + t)$ và biến đổi

$$\begin{aligned} T &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{x_2 + ux_3}{1 + u} & \frac{x_3 + vx_1}{1 + v} & \frac{x_1 + tx_2}{1 + t} \\ \frac{y_2 + uy_3}{1 + u} & \frac{y_3 + vy_1}{1 + v} & \frac{y_1 + ty_2}{1 + t} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 + u)(1 + v)(1 + t)} \begin{vmatrix} 1 + u & 1 + v & 1 + t \\ x_2 + ux_3 & x_3 + vx_1 & x_1 + tx_2 \\ y_2 + uy_3 & y_3 + vy_1 & y_1 + ty_2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & v & 1 \\ 1 & 0 & t \\ u & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1 + uvt}{\alpha} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Như vậy:

$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{x_2 + ux_3}{1+u} & \frac{x_3 + vx_1}{1+v} & \frac{x_1 + tx_2}{1+t} \\ \frac{y_2 + uy_3}{1+u} & \frac{y_3 + vy_1}{1+v} & \frac{y_1 + ty_2}{1+t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{1 + uv}{(1+u)(1+v)(1+t)}$$

hay $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1 + uv}{(1+u)(1+v)(1+t)}.$ □

Ví dụ 2.18. [Olympic Toán học lần thứ 6 VN] Cho $\triangle ABC$ với diện tích bằng 1. Lấy điểm M, N, P thuộc cạnh BC, CA, AB , tương ứng sao cho $k_1 = \frac{MB}{MC}, k_2 = \frac{NC}{NA}, k_3 = \frac{PA}{PB}$ với $k_1, k_2, k_3 < 1$. Xác định diện tích tam giác với các đỉnh là giao điểm giữa AM, BN, CP .

Bài giải: Giả thiết $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$. Vì $\overrightarrow{BM} = k_1 \overrightarrow{MC}$ nên

$$M(x_m = \frac{x_2 + k_1 x_3}{1 + k_1}, y_m = \frac{y_2 + k_1 y_3}{1 + k_1}).$$

Tương tự ta cũng có

$$N(x_n = \frac{x_3 + k_2 x_1}{1 + k_2}, y_n = \frac{y_3 + k_2 y_1}{1 + k_2})$$

$$P(x_p = \frac{x_1 + k_3 x_2}{1 + k_3}, y_p = \frac{y_1 + k_3 y_2}{1 + k_3}).$$

Gọi: $E = AM \times BN$. Theo Định lý Menêlauýt $\frac{AE}{EM} \frac{BM}{BC} \frac{NC}{NA} = 1$.

Vậy: $AE = \frac{1 + k_1}{k_1 k_2} EM$

và $E(x_e = \frac{k_1 k_2 x_1 + (1 + k_1)x_m}{1 + k_1 + k_1 k_2}, y_e = \frac{k_1 k_2 y_1 + (1 + k_1)y_m}{1 + k_1 + k_1 k_2}).$

Từ đây suy ra

$$E(x_e = \frac{k_1 k_2 x_1 + x_2 + k_1 x_3}{1 + k_1 + k_1 k_2}, y_e = \frac{k_1 k_2 y_1 + y_2 + k_1 y_3}{1 + k_1 + k_1 k_2}).$$

Gọi: $F = BN \times CP$ và $G = CP \times AM$.

Tương tự như trên chúng ta nhận được

$$F(x_f = \frac{k_2k_3x_2 + x_3 + k_2x_1}{1 + k_2 + k_2k_3}, y_f = \frac{k_2k_3y_2 + y_3 + k_2y_1}{1 + k_2 + k_2k_3})$$

$$G(x_g = \frac{k_3k_1x_3 + x_1 + k_3x_2}{1 + k_3 + k_3k_1}, y_g = \frac{k_3k_1y_3 + y_1 + k_3y_2}{1 + k_3 + k_3k_1}).$$

Đặt: $\delta = (1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)$ và thực hiện biến đổi

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{k_1k_2x_1 + x_2 + k_1x_3}{1 + k_1 + k_1k_2} & \frac{k_2k_3x_2 + x_3 + k_2x_1}{1 + k_2 + k_2k_3} & \frac{k_3k_1x_3 + x_1 + k_3x_2}{1 + k_3 + k_3k_1} \\ \frac{k_1k_2y_1 + y_2 + k_1y_3}{1 + k_1 + k_1k_2} & \frac{k_2k_3y_2 + y_3 + k_2y_1}{1 + k_2 + k_2k_3} & \frac{k_3k_1y_3 + y_1 + k_3y_2}{1 + k_3 + k_3k_1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 1 + k_1 + k_1k_2 & 1 + k_2 + k_2k_3 & 1 + k_3 + k_3k_1 \\ k_1k_2x_1 + x_2 + k_1x_3 & k_2k_3x_2 + x_3 + k_2x_1 & k_3k_1x_3 + x_1 + k_3x_2 \\ k_1k_2y_1 + y_2 + k_1y_3 & k_2k_3y_2 + y_3 + k_2y_1 & k_3k_1y_3 + y_1 + k_3y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1k_2 & k_2 & 1 \\ 1 & k_2k_3 & k_3 \\ k_1 & 1 & k_3k_1 \end{vmatrix} = \frac{(1 - k_1k_2k_3)^2}{\delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Từ đây suy ra $S_{EFG} = \frac{(1 - k_1k_2k_3)^2}{(1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)}$. $\square$

Mệnh đề 2.6. Cho tam giác ABC . Lấy điểm M, N, P thuộc cạnh BC, CA và AB , tương ứng. Khi đó

(i) (Ceva) Điều kiện cần và đủ để AM, BN, CP đồng quy tại một điểm là $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.

(ii) Khi AM, BN, CP đồng quy thì $S_{MNP} \leq \frac{1}{4}S_{ABC}$.

Chứng minh: (i) Giả thiết AM, BN, CP đồng qui tại điểm T . Đặt $\widehat{BTM} = T_1, \widehat{MTC} = T_2, \widehat{CTN} = T_3$. Khi đó

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{S_{MBT}}{S_{MCT}} \cdot \frac{S_{NCT}}{S_{NAT}} \cdot \frac{S_{PAT}}{S_{PBT}} = \frac{\sin T_1}{\sin T_2} \cdot \frac{\sin T_3}{\sin T_1} \cdot \frac{\sin T_2}{\sin T_3} = 1.$$

Ngược lại, giả thiết $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$. Ta chỉ ra AM, BN, CP đồng qui tại một điểm. Gọi T là giao điểm giữa BN và CP . Gọi giao điểm giữa AT với BC là M' . Theo chứng minh trên có $\frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$. Do vậy $\frac{MB}{MC} = \frac{M'B}{M'C}$ và từ đây suy ra $M' \equiv M$.

(ii) Khi AM, BN, CP đồng qui thì $u, v, t > 0$ và $uv t = 1$. Vì $(1+u)(1+v)(1+t) \geq 8$ nên $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1+1}{(1+u)(1+v)(1+t)} \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. $\square$

Ví dụ 2.19. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Ký hiệu r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp trong các tam giác ABC, BCD, CDA và DAB . Chứng minh rằng

$$\left(1 - \frac{ab}{2Rr_1}\right) \left(1 - \frac{bc}{2Rr_2}\right) \left(1 - \frac{cd}{2Rr_3}\right) \left(1 - \frac{da}{2Rr_4}\right) = \frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(ac+bd)^2}.$$

Bài giải: Đặt $x = AC, y = BD$. Từ $(a+b+x)r_1 = \frac{abx}{2R}$ suy ra $x = \frac{a+b}{\frac{ab}{2Rr_1} - 1}$. Tương tự, $x = \frac{c+d}{\frac{cd}{2Rr_3} - 1}, y = \frac{b+c}{\frac{b+c}{2Rr_2} - 1}, y = \frac{d+a}{\frac{da}{2Rr_4} - 1}$. Bởi vì $ac+bd = xy$ nên ta nhận được

$$(ac+bd)^2 = x^2 y^2 = \left(\frac{a+b}{\frac{ab}{2Rr_1} - 1}\right) \left(\frac{b+c}{\frac{b+c}{2Rr_2} - 1}\right) \left(\frac{c+d}{\frac{cd}{2Rr_3} - 1}\right) \left(\frac{d+a}{\frac{da}{2Rr_4} - 1}\right).$$

Biến đổi được đồng nhất thức

$$\left(1 - \frac{ab}{2Rr_1}\right) \left(1 - \frac{bc}{2Rr_2}\right) \left(1 - \frac{cd}{2Rr_3}\right) \left(1 - \frac{da}{2Rr_4}\right) = \frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{(ac+bd)^2}.$$

$\square$

Ví dụ 2.20. Cho điểm O ở trong tam giác ABC . Một đường thẳng d qua O cắt AB và AC . Ký hiệu khoảng cách từ A, B, C đến d là d_a, d_b, d_c , tương ứng. Chứng minh rằng $d_a S_{OBC} = d_b S_{OCA} + d_c S_{OAB}$.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy sao cho $O(0,0)$, $d : y = 0$ và $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ và $d_a = y_1 > 0$, $d_b = -y_2 > 0$, $d_c = -y_3 > 0$. Quy ước diện tích tam giác được tính qua định theo quy tắc bàn tay phải:

$$\begin{aligned} d_a S_{OBC} &= y_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = y_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ d_b S_{OCA} &= -y_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = y_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ d_c S_{OAB} &= -y_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = -y_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Từ ba hệ thức trên có:

$$d_a S_{OBC} - d_b S_{OCA} - d_c S_{OAB} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Ví dụ 2.21. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB . Chứng minh rằng, với bất kỳ điểm O ở bên ngoài $\triangle ABC$ có một trong các diện tích $S_{OAM}, S_{OBN}, S_{OCP}$ bằng tổng của hai diện tích còn lại.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy sao cho $O(0,0)$ và $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Tọa độ trung điểm $M(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2})$, $N(\frac{x_3 + x_1}{2}, \frac{y_3 + y_1}{2})$, $P(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$. Xét trường hợp O thuộc $\widehat{AGN}$, (G là trọng tâm $\triangle ABC$). Quy ước diện tích tam giác được tính qua định thức theo quy tắc

bàn tay phải, ta có:

$$\begin{aligned}
 2S_{OAM} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \frac{x_2+x_3}{2} & \frac{y_2+y_3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2+x_3 & y_2+y_3 \end{vmatrix} \\
 2S_{OBN} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{x_3+x_1}{2} & \frac{y_3+y_1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3+x_1 & y_3+y_1 \end{vmatrix} \\
 2S_{OCP} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1+x_2 & y_1+y_2 & 1 \\ \frac{2}{x_3} & \frac{2}{y_3} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Như vậy $2S_{OAM} + 2S_{OBN} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} =$
 $2S_{OCP}$ vì đều bằng $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$.

Tương tự xét các trường hợp khác. □

Ví dụ 2.22. Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm M, N, P thuộc cạnh BC, CA, AB , tương ứng. Đặt $u = \frac{MB}{BC}, v = \frac{NC}{CA}, t = \frac{PA}{AB}$. Khi đó hãy:

(i) Tính tỷ số diện tích $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$.

(ii) Chứng minh: $S_{ANP}S_{BPM}S_{CMN} \leq \frac{1}{64}S_{ABC}^3$.

Chứng minh: (i) Giả thiết $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$.

Vì $\overrightarrow{BM} = u\overrightarrow{BC}$ nên $M((1-u)x_2 + ux_3, (1-u)y_2 + uy_3)$.

Tương tự ta cũng có:

$$N((1-v)x_3 + vx_1, (1-v)y_3 + vy_1), P((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2).$$

Ta có:

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (1-u)x_2 + ux_3 & (1-v)x_3 + vx_1 & (1-t)x_1 + tx_2 \\ (1-u)y_2 + uy_3 & (1-v)y_3 + vy_1 & (1-t)y_1 + ty_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & v & 1-t \\ 1-u & 0 & t \\ u & 1-v & 0 \end{vmatrix}.$$

Như vậy: $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = |1 - u - v - t + uv + vt + tu|$.

(ii) Vì $\frac{S_{ANP}}{S_{ABC}} \frac{S_{BPM}}{S_{ABC}} \frac{S_{CMN}}{S_{ABC}} = u(1-u)v(1-v)t(1-t) \leq \frac{1}{64}$ nên chúng ta có ngay bất đẳng thức $S_{ANP}S_{BPM}S_{CMN} \leq \frac{1}{64}S_{ABC}^3$. $\square$

2.2.2. Bài toán véc tơ liên quan tới tam giác

Bài toán về véc tơ liên quan tới tam giác thường được sử dụng trong hình học được phát biểu như sau:

Mệnh đề 2.7. Cho $\triangle ABC$ với độ dài cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$ và điểm I thuộc mặt phẳng (ABC) . Khi đó

(i) Nếu I thuộc miền $\triangle ABC$ thì có đồng nhất thức

$$\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(ii) Nếu I thuộc miền ngoài $\triangle ABC$ và nằm trong góc $\hat{A}$ thì

$$-\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(iii) Với tâm đường tròn nội tiếp I và tâm đường tròn bàng tiếp J ở trong góc $\hat{A}$ ta có các đồng nhất thức $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Chứng minh: (i) Đặt hệ tọa độ Ixy sao cho $I(0,0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ và $C(x_3, y_3)$. Diện tích các tam giác IBC, ICA, IAB được quy ước tính bởi

$$2S_{IBC} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, 2S_{ICA} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \text{ và } 2S_{IAB} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Do vậy :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IA}.2S_{IBC} &= (x_2y_3 - x_3y_2)(x_1, y_1) \\ \overrightarrow{IB}.2S_{ICA} &= (x_3y_1 - x_1y_3)(x_2, y_2) \\ \overrightarrow{IC}.2S_{IAB} &= (x_1y_2 - x_2y_1)(x_3, y_3). \end{aligned}$$

Bởi vì hai định thức sau triệt tiêu $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ và $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ nên

$$\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(ii) Nếu I thuộc miền ngoài tam giác ABC và nằm trong góc $\hat{A}$ thì

$$S_{IBC} = -S_{ICB}. \text{ Do vậy } -\overrightarrow{IA}.S_{IBC} + \overrightarrow{IB}.S_{ICA} + \overrightarrow{IC}.S_{IAB} = \vec{0}.$$

(iii) là hiển nhiên. $\square$

Ví dụ 2.23. Giả sử tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I, J làm tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $\hat{A}$ của tam giác. Khi đó có bất đẳng thức sau đây:

- (i) $aEA^2 + bEB^2 + cEC^2 \geq abc$ với điểm E tùy ý.
- (ii) $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.
- (iii) $aJA^2 - bJB^2 - cJC^2 = abc$.
- (iv) $a(AH^2 + AK^2 - AJ^2) + b(BK^2 + BJ^2 - BH^2) + c(CJ^2 + CH^2 - CK^2) = -3abc$ khi J, H, K là tâm đường tròn bàng tiếp và ở trong góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, tương ứng, của tam giác.

Bài giải: (i) Từ bất đẳng thức $(a\overrightarrow{EA} + b\overrightarrow{EB} + c\overrightarrow{EC})^2 \geq 0$ ta suy ra

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^2EA^2 + b^2EB^2 + c^2EC^2 + 2ab\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} + 2bc\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC} \\ &\quad + 2ca\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EA} \\ &= a^2EA^2 + b^2EB^2 + c^2EC^2 + ab(EA^2 + EB^2 - c^2) \\ &\quad + bc(EB^2 + EC^2 - a^2) + ca(EC^2 + EA^2 - b^2). \end{aligned}$$

Giả ước cho $a + b + c$ được bất đẳng thức $aEA^2 + bEB^2 + cEC^2 \geq abc$.

(ii) Từ $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 2.7 ta suy ra

$$\begin{aligned} 0 &= a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\vec{IA} \cdot \vec{IB} + 2bc\vec{IB} \cdot \vec{IC} + 2ca\vec{IC} \cdot \vec{IA} \\ &= a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - c^2) \\ &\quad + bc(IB^2 + IC^2 - a^2) + ca(IC^2 + IA^2 - b^2). \end{aligned}$$

Giả ước cho $a + b + c$ được đồng nhất thức $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$.

(iii) Từ $-a\vec{JA} + b\vec{JB} + c\vec{JC} = \vec{0}$ theo Mệnh đề 2.7 ta suy ra

$$\begin{aligned} 0 &= a^2JA^2 + b^2JB^2 + c^2JC^2 - 2ab\vec{JA} \cdot \vec{JB} + 2bc\vec{JB} \cdot \vec{JC} - 2ca\vec{JC} \cdot \vec{JA} \\ &= a^2JA^2 + b^2JB^2 + c^2JC^2 - ab(JA^2 + JB^2 - c^2) \\ &\quad + bc(JB^2 + JC^2 - a^2) - ca(JC^2 + JA^2 - b^2). \end{aligned}$$

Giả ước $-a + b + c$ được đồng nhất thức $-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = -abc$.

(iv) Như trên có các đồng nhất thức $-aJA^2 + bJB^2 + cJC^2 = -abc$, $aHA^2 - bHB^2 + cHC^2 = -abc$ và $aKA^2 + bKB^2 - cKC^2 = -abc$. Vậy $a(AH^2 + AK^2 - AJ^2) + b(BJ^2 - BH^2 + BK^2) + c(CJ^2 + CH^2 - CK^2) = -3abc$. $\square$

2.3. Thể tích, bán kính mặt cầu ngoại tiếp qua định thức

2.3.1. Tích vô hướng, tích có hướng của hai véc tơ

1) Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Định lý 2.8. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

a) $\vec{a} + \vec{b} = a_1; b_1 + a_2; b_2; a_3 + b_3$.

b) $\vec{a} - \vec{b} = a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3$.

c) $k\vec{a} = k(a_1; a_2; a_3) = (ka_1; ka_2; ka_3)$, với k là một số thực.

Chứng minh. Theo giả thiết : $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$; $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$
suy ra: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$

Vậy: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Chứng minh tương tự cho trường hợp b) và c)

Hệ quả 2.9.

a) Trong không gian $Oxyz$, nếu cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A)$; $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$ thì:

- $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k

$$\vec{MA} = k \cdot \vec{MB} \Leftrightarrow M \left(\frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k}; \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k}; \frac{z_A - k \cdot z_B}{1 - k} \right)$$

- G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \vec{OG} = \left(\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \right)$

$$\Leftrightarrow G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

2) Tích vô hướng của hai vectơ

Định nghĩa 2.1. Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ - không. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Định lý 2.10. Trong không gian $Oxyz$ tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Chứng minh. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \cdot (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$

$$= a_1 b_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \cdot \vec{k} + a_2 b_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + a_2 b_3 \vec{j} \cdot \vec{k} +$$

$$+ a_3 b_1 \vec{k} \cdot \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \cdot \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k} \cdot \vec{k}.$$

$$\text{Vì } \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \text{ và } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \text{ nên } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

3) Tích có hướng của hai vectơ.

Định nghĩa 2.2. Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$. Tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu: $[\vec{a}, \vec{b}]$ là một vectơ có tọa độ xác định bởi:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Định nghĩa 2.3. Tích hỗn hợp của các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong không gian là tích vô hướng của véc tơ $[\vec{a}, \vec{b}]$ với véc tơ $\vec{c}$, và kí hiệu $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c}$

- Nếu $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ và $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ thì

$$[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)x_3 + (x_1 z_2 - z_1 x_2)y_3 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)z_3.$$

Mệnh đề 2.11. Cho các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn. Ta có:

- (i) $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- (ii) $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin \varphi$, trong đó φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$
- (iii) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
- (iv) $[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$.

Chứng minh. Gọi các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt có tọa độ $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ ta có:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \quad (*)$$

- (i) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì hoặc $\vec{b} = \vec{0}$, hoặc $\vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} = k\vec{b}$, khi đó rõ ràng cả ba định thức (*) đều bằng 0.

Ngược lại giả sử cả ba định thức (*) bằng 0, tức là :

$$\begin{cases} y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0 & (a) \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 = 0 & (b) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 & (c). \end{cases}$$

Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì $\vec{b}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Vậy chỉ xét trường hợp $\vec{a} \neq \vec{0}$, khi đó có ít nhất một trong ba số x_1, y_1, z_1 khác 0. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_1 \neq 0$. Từ (b) và (c) ta suy ra $z_2 = \frac{x_2}{x_1}.z_1, y_2 = \frac{x_2}{x_1}.y_1$ và cố nhiên $x_2 = \frac{x_2}{x_1}.x_1$. Vậy $\vec{b} = \frac{x_2}{x_1}.\vec{a}$, tức là $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Đặc biệt: $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

(ii) Ta có $\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = [\vec{a}, \vec{b}]^2$ (1)

Thật vậy: $\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2$

$= (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 = [\vec{a}, \vec{b}]^2$.

Từ (1) suy ra: $[\vec{a}, \vec{b}]^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi)^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \sin^2 \varphi$, tức là: $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$

(iii) Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2)$

$[\vec{b}, \vec{a}] = (y_2z_1 - z_2y_1, z_2x_1 - x_2z_1, x_2y_1 - y_2x_1)$

Cộng vế: $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}] = (0, 0, 0) = \vec{0}$. Vậy: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

(iv) $[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$.

Đặt: $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, ta có: $\vec{u} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ và $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$

$[\vec{c}, \vec{a}] = (y_3z_1 - z_3y_1, z_3x_1 - x_3z_1, x_3y_1 - y_3x_1)$

$[\vec{c}, \vec{b}] = (y_3z_2 - z_3y_2, z_3x_2 - x_3z_2, x_3y_2 - y_3x_2)$

Cộng vế với vế ta được: $[\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}] =$

$= \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_3 & x_3 \\ z_1 + z_2 & x_1 + x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \end{vmatrix} \right)$

$= [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$. Vậy: $[\vec{c}, \vec{a} + \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$.

Ví dụ 2.24. Giả sử tứ diện $ABCD$ có độ dài 4 đường cao là h_a, h_b, h_c, h_d và khoảng cách giữa các cặp cạnh đối là d_1, d_2, d_3 . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} + \frac{1}{h_d^2}.$$

Từ đó chỉ ra $\max\{h_a, h_b, h_c, h_d\} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \min\{d_1, d_2, d_3\}$.

Bài giải: Ký hiệu diện tích các mặt đối diện đỉnh A, B, C, D là s_a, s_b, s_c, s_d và thể tích tứ diện $ABCD$ là V . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}, \vec{y} = \overrightarrow{AC}, \vec{z} = \overrightarrow{AD}$. Ta sẽ có $\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} + \frac{1}{h_d^2} = \frac{s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 + s_d^2}{9V^2}$; và khi dựng hình hộp sao cho

mỗi cạnh tứ diện là một đường chéo của một mặt thì sẽ có $d_1 \cdot |\vec{x}, \vec{y} - \vec{z}| = 2V_{hp} = 6V$. Từ đây suy ra hệ thức sau:

$$\frac{36V^2}{d_1^2} = \left([\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{z}, \vec{x}] \right)^2 = [\vec{x}, \vec{y}]^2 + [\vec{z}, \vec{x}]^2 + 2[\vec{x}, \vec{y}] \cdot [\vec{z}, \vec{x}].$$

Tương tự có các hệ thức khác và như vậy ta nhận được $36V^2 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} \right) = 2[\vec{x}, \vec{y}]^2 + 2[\vec{y}, \vec{z}]^2 + 2[\vec{z}, \vec{x}]^2 + 2[\vec{x}, \vec{y}] \cdot [\vec{y}, \vec{z}] + 2[\vec{y}, \vec{z}] \cdot [\vec{z}, \vec{x}] + 2[\vec{z}, \vec{x}] \cdot [\vec{x}, \vec{y}]$.

Dễ dàng biến đổi $[\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{z}]^2 = ([\vec{x}, \vec{y}] + [\vec{y}, \vec{z}] + [\vec{z}, \vec{x}])^2$ nên ta nhận được $\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \frac{4s_a^2 + 4s_b^2 + 4s_c^2 + 4s_d^2}{36V^2} = \frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} + \frac{1}{h_d^2}$. $\square$

Mệnh đề 2.12. [Jacobi] Cho các vectơ $\vec{x}, \vec{y}$ trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn. Ta có đồng nhất thức $\vec{x}^2 \vec{y}^2 = (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 + [\vec{x}, \vec{y}]^2$. Từ đó suy ra $|\vec{x}, \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin(\vec{x}, \vec{y})$.

Chứng minh: Suy ra từ đồng nhất thức Lagrange, $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$. $\square$

Mệnh đề 2.13. Cho các vectơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}$ trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn. Ta có đồng nhất thức

$$(i) \quad [\vec{x}, \vec{y}], \vec{z} = \vec{y}(\vec{x}\vec{z}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}).$$

$$(ii) \quad [\vec{x}, \vec{y}] \cdot [\vec{z}, \vec{t}] = \begin{vmatrix} \vec{x}\vec{z} & \vec{x}\vec{t} \\ \vec{y}\vec{z} & \vec{y}\vec{t} \end{vmatrix}. \text{ Đặc biệt } [\vec{x}, \vec{y}] \cdot [\vec{z}, \vec{y}] = (\vec{x}\vec{z})\vec{y}^2 - (\vec{x}\vec{y})(\vec{y}\vec{z}).$$

$$(iii) \quad [[\vec{x}, \vec{y}], [\vec{z}, \vec{t}]] = \vec{y}(\vec{x}\vec{z}\vec{t}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}\vec{t}).$$

$$(iv) \quad \vec{y}(\vec{x}\vec{z}\vec{t}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}\vec{t}) + \vec{t}(\vec{z}\vec{x}\vec{y}) - \vec{z}(\vec{t}\vec{x}\vec{y}) = \vec{0}.$$

Chứng minh. (i) Suy ra theo tọa độ.

(ii) Giả sử $\vec{x} = (a_1, a_2, a_3), \vec{y} = (b_1, b_2, b_3), \vec{z} = (c_1, c_2, c_3), \vec{t} = (d_1, d_2, d_3)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{x}\vec{z} & \vec{x}\vec{t} \\ \vec{y}\vec{z} & \vec{y}\vec{t} \end{vmatrix} &= (\vec{x}\vec{z})(\vec{y}\vec{t}) - (\vec{x}\vec{t})(\vec{y}\vec{z}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i c_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 b_i d_i \right) - \left(\sum_{i=1}^3 a_i d_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 b_i c_i \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j - a_j b_i)(c_i d_j - c_j d_i) = [\vec{x}, \vec{y}][\vec{z}, \vec{t}]. \end{aligned}$$

Do vậy $[\vec{x}, \vec{y}].[\vec{z}, \vec{t}] = \begin{vmatrix} \vec{x}\vec{z} & \vec{x}\vec{t} \\ \vec{y}\vec{z} & \vec{y}\vec{t} \end{vmatrix}$. Với $\vec{t} = \vec{y}$ có $[\vec{x}, \vec{y}].[\vec{z}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} \vec{x}\vec{z} & \vec{x}\vec{y} \\ \vec{y}\vec{z} & \vec{y}\vec{y} \end{vmatrix}$.

(iii) Theo (i) có $[[\vec{x}, \vec{y}], [\vec{z}, \vec{t}]] = \vec{y}(\vec{x}.\vec{z}, \vec{t}) - \vec{x}(\vec{y}.\vec{z}, \vec{t}) = \vec{y}(\vec{x}\vec{z}\vec{t}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}\vec{t})$.

(iv) Theo (iii) ta có hai hệ thức sau:

$$[[\vec{x}, \vec{y}], [\vec{z}, \vec{t}]] = \vec{y}(\vec{x}\vec{z}\vec{t}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}\vec{t}) \text{ và } [[\vec{z}, \vec{t}], [\vec{x}, \vec{y}]] = \vec{t}(\vec{z}\vec{x}\vec{y}) - \vec{z}(\vec{t}\vec{x}\vec{y}).$$

Bởi vì: $[[\vec{x}, \vec{y}], [\vec{z}, \vec{t}]] + [[\vec{z}, \vec{t}], [\vec{x}, \vec{y}]] = \vec{0}$

nên: $\vec{y}(\vec{x}\vec{z}\vec{t}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}\vec{t}) + \vec{t}(\vec{z}\vec{x}\vec{y}) - \vec{z}(\vec{t}\vec{x}\vec{y}) = \vec{0}$.

Cách chứng minh khác cho (iv): Với $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ và

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3), \text{ ta kí hiệu } (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Khi đó với bốn vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ta luôn có:

$$\vec{u} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{c}\vec{d}) + \vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{0}.$$

Thật vậy: $\vec{u}$ có tọa độ

$$u_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}; u_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}; u_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

đều bằng 0.

Ví dụ 2.25. Ký hiệu diện tích mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$, tương ứng s_a, s_b, s_c, s_d và ký hiệu $\vec{e}_a, \vec{e}_b, \vec{e}_c, \vec{e}_d$ là các vectơ đơn vị vuông góc với mặt $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$, tương ứng, hướng ra phía ngoài. Nếu tứ diện $ABCD$ là tứ diện trục tâm thì

$$s_a\vec{e}_a + s_b\vec{e}_b + s_c\vec{e}_c + s_d\vec{e}_d = \vec{0}.$$

Bài giải: Giả thiết tứ diện $ABCD$ là tứ diện trục tâm, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 cắt nhau tại H . Ta chỉ cần xét trường hợp H ở trong tứ diện; các trường hợp khác xét tương tự. Ta có $\vec{HA}.\vec{HA}_1.s_a + \vec{HB}.\vec{HB}_1.s_b + \vec{HC}.\vec{HC}_1.s_c + \vec{HD}.\vec{HD}_1.s_d = \vec{0}$. Từ các quan hệ $AH.HA_1 = BH.HB_1 = CH.HC_1 = DH.HD_1$ suy ra hệ thức $s_a\vec{e}_a + s_b\vec{e}_b + s_c\vec{e}_c + s_d\vec{e}_d = \vec{0}$. $\square$

Ví dụ 2.26. Giả sử hai tứ diện $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$ thỏa mãn $AB \perp C_1D_1, BC \perp D_1A_1, CA \perp D_1B_1, AD \perp B_1C_1, DB \perp A_1C_1$. Khi đó $DC \perp A_1B_1$.

Bài giải: Giả sử (a_1, a_2, a_3) , $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ và $A_1(0, 0, 0)$, $B_1(y_1, y_2, y_3)$, $C_1(z_1, z_2, z_3)$, $D_1(t_1, t_2, t_3)$. Khi đó ta có

$$(1) : 0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C_1D_1} = \sum_{i=1}^3 (b_i - a_i)(t_i - z_i)$$

$$(2) : 0 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{D_1A_1} = \sum_{i=1}^3 (c_i - b_i)t_i$$

$$(3) : 0 = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{D_1B_1} = \sum_{i=1}^3 (a_i - c_i)(y_i - t_i)$$

$$(4) : 0 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B_1C_1} = \sum_{i=1}^3 (d_i - a_i)(z_i - y_i)$$

$$(5) : 0 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \sum_{i=1}^3 (b_i - d_i)z_i$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = \sum_{i=1}^3 (c_i - d_i)y_i.$$

Từ (2) và (5) có $\sum_{i=1}^3 c_i t_i = \sum_{i=1}^3 b_i t_i$, $\sum_{i=1}^3 d_i z_i = \sum_{i=1}^3 b_i z_i$. Do $(1) - (3) + (4) = 0$,
 $\sum_{i=1}^3 c_i t_i = \sum_{i=1}^3 b_i t_i$, $\sum_{i=1}^3 d_i z_i = \sum_{i=1}^3 b_i z_i$ hay $\sum_{i=1}^3 (c_i - d_i)y_i = 0$ hay $DC \perp A_1B_1$. $\square$

2.3.2. Thể tích, bán kính mặt cầu ngoại tiếp qua định thức

Mệnh đề 2.14. Cho các véc tơ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ trong không gian với hệ tọa độ trực

chuẩn. Ta có đồng nhất thức $\left([\vec{x}, \vec{y}] \cdot \vec{z} \right)^2 = \begin{vmatrix} \vec{x} \cdot \vec{x} & \vec{x} \cdot \vec{y} & \vec{x} \cdot \vec{z} \\ \vec{y} \cdot \vec{x} & \vec{y} \cdot \vec{y} & \vec{y} \cdot \vec{z} \\ \vec{z} \cdot \vec{x} & \vec{z} \cdot \vec{y} & \vec{z} \cdot \vec{z} \end{vmatrix}$.

Chứng minh: Giả sử $\vec{x} = (a, b, c)$, $\vec{y} = (a', b', c')$ và $\vec{z} = (a'', b'', c'')$. Từ

$$\left([\vec{x}, \vec{y}] \cdot \vec{z} \right)^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\text{suy ra } \left([\vec{x}, \vec{y}] \cdot \vec{z} \right)^2 = \begin{vmatrix} \vec{x} \cdot \vec{x} & \vec{x} \cdot \vec{y} & \vec{x} \cdot \vec{z} \\ \vec{y} \cdot \vec{x} & \vec{y} \cdot \vec{y} & \vec{y} \cdot \vec{z} \\ \vec{z} \cdot \vec{x} & \vec{z} \cdot \vec{y} & \vec{z} \cdot \vec{z} \end{vmatrix}. \quad \square$$

Ví dụ 2.27. Giả sử a_1, a_2, a_3 và b_1, b_2, b_3 là **côsin** của các góc do hai đường thẳng (ℓ_1) và (ℓ_2) tạo với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz , tương ứng của hệ tọa độ trực chuẩn $(Oxyz)$. Ký hiệu α là góc giữa tia (ℓ_1) và (ℓ_2) . Khi đó

$$\sin^2 \alpha = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2.$$

Từ đó suy ra rằng, hai đường thẳng (ℓ_1) và (ℓ_2) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 = 1$.

Bài giải: Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Khi đó $\vec{u} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ và $\vec{v} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ là những vectơ đơn vị chỉ phương của (ℓ_1) và (ℓ_2) , tương ứng. Theo Mệnh đề 2.12 suy ra $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - [\vec{u}, \vec{v}]^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2$. $\square$

Ví dụ 2.28. Giả sử $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ và $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ là những góc do ba đường thẳng $(\ell_1), (\ell_2)$ và (ℓ_3) tạo với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz , tương ứng của hệ tọa độ trực chuẩn $(Oxyz)$. Ký hiệu $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ là góc giữa (ℓ_2) và

$$(\ell_3); \text{ giữa } (\ell_3) \text{ và } (\ell_1) \text{ và giữa } (\ell_1) \text{ và } (\ell_2). \text{ Khi đó } \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = 1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3.$$

Bài giải: Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Khi đó có

$$\begin{aligned} \vec{x} = \overrightarrow{IA} &= \cos \alpha_1 \vec{i} + \cos \beta_1 \vec{j} + \cos \gamma_1 \vec{k} \\ \vec{y} = \overrightarrow{IB} &= \cos \alpha_2 \vec{i} + \cos \beta_2 \vec{j} + \cos \gamma_2 \vec{k} \\ \vec{z} = \overrightarrow{IC} &= \cos \alpha_3 \vec{i} + \cos \beta_3 \vec{j} + \cos \gamma_3 \vec{k} \end{aligned}$$

là những vectơ đơn vị chỉ phương của $(\ell_1), (\ell_2)$ và (ℓ_3) , tương ứng. Từ

$$D = \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{vmatrix}^2 = |[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}], \overrightarrow{IC}|^2$$

và theo Mệnh đề 2.14 chỉ ra được

$$|[\vec{IA}, \vec{IB}], \vec{IC}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{x}\vec{x} & \vec{x}\vec{y} & \vec{x}\vec{z} \\ \vec{y}\vec{x} & \vec{y}\vec{y} & \vec{y}\vec{z} \\ \vec{z}\vec{x} & \vec{z}\vec{y} & \vec{z}\vec{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \varphi_3 & \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_3 & 1 & \cos \varphi_1 \\ \cos \varphi_2 & \cos \varphi_1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Như vậy $D = 1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3$. $\square$

Mệnh đề 2.15. Giả sử bốn tia Il_1, Il_2, Il_3 và Il_4 cùng có điểm gốc I . Ký hiệu $\alpha_{ij} = \angle l_i Il_j$ với $i, j = 1, 2, 3, 4$. Khi đó ta có đồng nhất thức

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} & \cos \alpha_{14} \\ \cos \alpha_{21} & 1 & \cos \alpha_{23} & \cos \alpha_{24} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & 1 & \cos \alpha_{34} \\ \cos \alpha_{41} & \cos \alpha_{42} & \cos \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Chứng minh: Ta biết rằng, bốn vectơ bất kỳ trong không gian ba chiều luôn luôn là phụ thuộc tuyến tính. Do vậy, với bốn vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ luôn có biểu diễn $a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 + a_4 \vec{e}_4 = \vec{0}$. Từ đây suy ra hệ thức

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_4 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_4 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_4 \\ \vec{e}_4 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_4 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_4 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_4 \cdot \vec{e}_4 \end{vmatrix} = 0$$

và có được đồng nhất thức
$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} & \cos \alpha_{14} \\ \cos \alpha_{21} & 1 & \cos \alpha_{23} & \cos \alpha_{24} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & 1 & \cos \alpha_{34} \\ \cos \alpha_{41} & \cos \alpha_{42} & \cos \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

Ví dụ 2.29. Tính thể tích hình chóp $SABC$ với $SA = a, SB = b, SC = c$ và góc giữa SB, SC ; giữa SC, SA ; giữa SA, SB bằng $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, tương ứng.

Bài giải: Đặt $\vec{x} = \vec{SA}, \vec{y} = \vec{SB}, \vec{z} = \vec{SC}$ và $V = V_{SABC}$. Từ $36V^2 = |[\vec{SA}, \vec{SB}], \vec{SC}|^2 = \begin{vmatrix} \vec{x}\vec{x} & \vec{x}\vec{y} & \vec{x}\vec{z} \\ \vec{y}\vec{x} & \vec{y}\vec{y} & \vec{y}\vec{z} \\ \vec{z}\vec{x} & \vec{z}\vec{y} & \vec{z}\vec{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab \cos \varphi_3 & ac \cos \varphi_2 \\ ab \cos \varphi_3 & b^2 & bc \cos \varphi_1 \\ ac \cos \varphi_2 & bc \cos \varphi_1 & c^2 \end{vmatrix}$ theo

Mệnh đề 2.14. Ta suy ra ngay công thức sau:

$$V = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3}. \quad \square$$

Ví dụ 2.30. Cho hình chóp $SABC$ với $SA = a, SB = b, SC = c$; góc giữa SB, SC ; giữa SC, SA ; giữa SA, SB là $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, tương ứng I thuộc tam giác ABC và đặt $d = SI, \alpha = \angle ISA, \beta = \angle ISB, \gamma = \angle ISC$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3}}{d} \\ = & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi_3}}{c} \\ + & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \varphi_1 + 2 \cos \beta \cos \gamma \cos \varphi_1}}{a} \\ + & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi_2 + 2 \cos \gamma \cos \alpha \cos \varphi_2}}{b}. \end{aligned}$$

Bài giải: Đặt $V = V_{SABC}, V_1 = V_{SIAB}, V_2 = V_{SIBC}, V_3 = V_{SICA}$. Vì $V = V_1 + V_2 + V_3$ và theo Ví dụ

$$\begin{aligned} V &= \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3} \\ V_1 &= \frac{abd}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi_3} \\ V_2 &= \frac{bcd}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \varphi_1 + 2 \cos \beta \cos \gamma \cos \varphi_1} \\ V_3 &= \frac{acd}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi_2 + 2 \cos \gamma \cos \alpha \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

nên ta suy ra đồng nhất thức dưới đây:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3}}{d} \\ = & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi_3}}{c} \\ + & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - \cos^2 \varphi_1 + 2 \cos \beta \cos \gamma \cos \varphi_1}}{a} \\ + & \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi_2 + 2 \cos \gamma \cos \alpha \cos \varphi_2}}{b} \end{aligned}$$

và nhận được hệ thức cần chứng minh. □

Mệnh đề 2.16. Giả sử cho hình chóp $SABC$ có độ dài cạnh $SA = a, SB = b, SC = c, BC = x, CA = y, AB = z$. Ta có công thức tính thể tích tứ

diện:

$$V = \frac{1}{12\sqrt{2}} \sqrt{\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 + b^2 - z^2 & a^2 + c^2 - y^2 \\ a^2 + b^2 - z^2 & 2b^2 & b^2 + c^2 - x^2 \\ a^2 + c^2 - y^2 & b^2 + c^2 - x^2 & 2c^2 \end{vmatrix}}.$$

Chứng minh: Như trên, có $36V^2 = |[\vec{SA}, \vec{SB}], \vec{SC}|^2$

$$= \begin{vmatrix} \vec{x}.\vec{x} & \vec{x}.\vec{y} & \vec{x}.\vec{z} \\ \vec{y}.\vec{x} & \vec{y}.\vec{y} & \vec{y}.\vec{z} \\ \vec{z}.\vec{x} & \vec{z}.\vec{y} & \vec{z}.\vec{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab \cos \varphi_3 & ac \cos \varphi_2 \\ ab \cos \varphi_3 & b^2 & bc \cos \varphi_1 \\ ac \cos \varphi_2 & bc \cos \varphi_1 & c^2 \end{vmatrix}$$

theo Mệnh đề 2.14. Từ đây suy ra ngay

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & 2ab \cos \varphi_3 & 2ac \cos \varphi_2 \\ 2ab \cos \varphi_3 & 2b^2 & 2bc \cos \varphi_1 \\ 2ac \cos \varphi_2 & 2bc \cos \varphi_1 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

hay ta có công thức tính thể tích:

$$V = \frac{1}{12\sqrt{2}} \sqrt{\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 + b^2 - z^2 & a^2 + c^2 - y^2 \\ a^2 + b^2 - z^2 & 2b^2 & b^2 + c^2 - x^2 \\ a^2 + c^2 - y^2 & b^2 + c^2 - x^2 & 2c^2 \end{vmatrix}}.$$

□

Mệnh đề 2.17. Giả sử tứ diện $ABCD$ có tọa độ bốn đỉnh là $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ và $D(x_4, y_4, z_4)$. Khi đó ta có công thức tính thể tích tứ diện qua tọa độ bốn đỉnh:

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \right\|.$$

Chứng minh: $V_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 & 0 \end{vmatrix}$

nên ta có:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Do vậy, tính thể tích tứ diện qua tọa độ bốn đỉnh:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

□

Mệnh đề 2.18. Giả sử tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có tọa độ 4 đỉnh là $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ và $A_4(x_4, y_4, z_4)$. Kí hiệu R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Khi đó ta có công thức tính bán kính:

$$R = \frac{1}{24V} \sqrt{2l_{13}^2 l_{14}^2 l_{23}^2 l_{24}^2 + 2l_{12}^2 l_{14}^2 l_{32}^2 l_{34}^2 + 2l_{12}^2 l_{13}^2 l_{42}^2 l_{43}^2 - l_{12}^4 l_{34}^4 - l_{13}^4 l_{24}^4 - l_{14}^4 l_{23}^4}$$

với V là thể tích tứ diện và $l_{ij} = l_{ji}$ là độ dài cạnh $A_iA_j = A_jA_i$, $i \neq j$.

Chứng minh: Ta biết thể tích tứ diện không thay đổi qua một phép tịnh tiến. Do vậy, không hạn chế có thể giả thiết tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ chính là gốc tọa độ. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - R^2 = 0 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - R^2 = 0. \end{cases}$$

Từ đây suy ra

$$R^2 = \frac{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}{2} + x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j,$$

(với mọi $i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j$)

Đặt: $t_{ij} = R^2 - x_i x_j - y_i y_j - z_i z_j$.

Khi đó $t_{ij} = t_{ji} = \frac{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}{2} = \frac{l_{ij}^2}{2} = \frac{l_{ji}^2}{2}$.

Xét tích sau

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -z_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & R \\ -x_4 & -y_4 & -z_4 & R \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ -z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 \\ R & R & R & R \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{với } t_{ij} = t_{ji}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vĩ} \quad & \left\| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & R \\ x_2 & y_2 & z_2 & R \\ x_3 & y_3 & z_3 & R \\ x_4 & y_4 & z_4 & R \end{vmatrix} \right\| \quad \text{và} \quad \left\| \begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & -z_1 & R \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 & R \\ -x_3 & -y_3 & -z_3 & R \\ -x_4 & -y_4 & -z_4 & R \end{vmatrix} \right\| \quad \text{đều bằng } 6RV \\
 \text{nên: } 36R^2V^2 &= \left\| \begin{vmatrix} 0 & \frac{l_{12}^2}{2} & \frac{l_{13}^2}{2} & \frac{l_{14}^2}{2} \\ \frac{l_{21}^2}{2} & 0 & \frac{l_{23}^2}{2} & \frac{l_{24}^2}{2} \\ \frac{l_{31}^2}{2} & \frac{l_{32}^2}{2} & 0 & \frac{l_{34}^2}{2} \\ \frac{l_{41}^2}{2} & \frac{l_{42}^2}{2} & \frac{l_{43}^2}{2} & 0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{16} \left\| \begin{vmatrix} 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 & l_{14}^2 \\ l_{21}^2 & 0 & l_{23}^2 & l_{24}^2 \\ l_{31}^2 & l_{32}^2 & 0 & l_{34}^2 \\ l_{41}^2 & l_{42}^2 & l_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} \right\|.
 \end{aligned}$$

Tính định thức cuối cùng và lấy căn ta nhận được công thức tính:

$$R = \frac{1}{24V} \sqrt{2l_{13}^2 l_{14}^2 l_{23}^2 l_{24}^2 + 2l_{12}^2 l_{14}^2 l_{23}^2 l_{34}^2 + 2l_{12}^2 l_{13}^2 l_{24}^2 l_{34}^2 - l_{12}^4 l_{34}^4 - l_{13}^4 l_{24}^4 - l_{14}^4 l_{23}^4}.$$

□

Từ Mệnh đề 2.16 và Mệnh đề 2.18 ta suy ra công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp qua độ dài 6 cạnh của tứ diện.

Hệ quả 2.19. Giả sử tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có độ dài 6 cạnh là $a = l_{12}, b = l_{13}, c = l_{14}, x = l_{34}, y = l_{24}, z = l_{23}$. Đặt $2S = ax + by + cz$. Khi đó bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện được xác định bởi công thức dưới đây:

$$(i) \quad R = \frac{\sqrt{S(S-ax)(S-by)(S-cz)}}{6V}.$$

$$(ii) \quad R = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{S(S-ax)(S-by)(S-cz)}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-z^2 & a^2+c^2-y^2 \\ a^2+b^2-z^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-y^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix}}}.$$

Chứng minh: (i) Theo Mệnh đề 2.18, Bất đẳng thức Ptolemy, ta luôn có $ax + by \geq cz$, $by + cz \geq ax$ và $cz + ax \geq by$, Dễ dàng kiểm tra hệ thức $16S(S-ax)(S-by)(S-cz) =$

$$2l_{13}^2l_{14}^2l_{23}^2l_{24}^2 + 2l_{12}^2l_{14}^2l_{32}^2l_{34}^2 + 2l_{12}^2l_{13}^2l_{42}^2l_{43}^2 - l_{12}^4l_{34}^4 - l_{13}^4l_{24}^4 - l_{14}^4l_{23}^4.$$

Do vậy ta có: $R = \frac{\sqrt{S(S-ax)(S-by)(S-cz)}}{6V}.$

(ii) Hiển nhiên $R = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{S(S-ax)(S-by)(S-cz)}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-z^2 & a^2+c^2-y^2 \\ a^2+b^2-z^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-y^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix}}}.$ □

Mệnh đề 2.20. Cho tứ diện $SABC$. Với $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$ ta có tỷ số thể tích $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA' SB' SC'}{SA SB SC'}.$

Chứng minh: Đặt $a = SA, b = SB, c = SC, a' = SA', b' = SB', c' = SC'$. Đặt $V' = V_{SA'B'C'}$ và $V = V_{SABC}$. Theo Ví dụ ?? có tỷ số thể tích

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{a'b'c'}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3}}{\frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3}}.$$

Do vậy $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA' SB' SC'}{SA SB SC'}.$ □

Ví dụ 2.31. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Chứng minh rằng, với bất kỳ điểm O ta luôn có bất đẳng thức

$$V_{A_1A_2A_3A_4} \leq \frac{1}{6} \prod_{i=1}^4 \sqrt{OA_i^2 + 1}.$$

Bài giải: Dựng hệ tọa độ $Oxyz$. Giả sử $A_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3, 4$. Ta có

$$36V_{A_1A_2A_3A_4}^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}^2 \leq \prod_{i=1}^4 (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + 1)$$

theo Bất đẳng thức Hadamard. Do vậy $V_{A_1A_2A_3A_4} \leq \frac{1}{6} \prod_{i=1}^4 \sqrt{OA_i^2 + 1}$. $\square$

Ví dụ 2.32. Cho góc tam diện $Sxyz$. Giả sử điểm N ở trong góc tam diện và mặt phẳng (P) qua N cắt Sx, Sy, Sz tại A, B, C , tương ứng. Khi đó tỷ số thể tích $\frac{V_{SABC}^2}{V_{SNBC} \cdot V_{SNCA} \cdot V_{SNAB}}$ là một hằng số.

Bài giải: Gọi khoảng cách từ N đến $(SBC), (SCA), (SAB)$ là a, b, c , tương ứng và đặt $SA = x, SB = y, SC = z$. Khi đó a, b, c là hằng số và ta có

$$\frac{V_{SABC}^2}{V_{SNBC} \cdot V_{SNCA} \cdot V_{SNAB}} = \frac{6^3 V_{SABC}^2}{(ayz) \cdot (bzx) \cdot (cxy)} = \frac{6^3 V_{SABC}^2}{abcx^2y^2z^2}.$$

Mặt khác, ta lại có $6^3 V_{SABC}^2 = x^2y^2z^2(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$ theo Ví dụ 2.29, trong đó $\alpha = \angle BSC, \beta = \angle CSA, \gamma = \angle ASB$. Như vậy, tỷ số thể tích cần tính được biểu diễn

$$\frac{V_{SABC}^2}{V_{SNBC} \cdot V_{SNCA} \cdot V_{SNAB}} = \frac{6(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)}{abc}$$

là một hằng số. $\square$

Ví dụ 2.33. Cho điểm O ở trong tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng (P) qua O cắt AB, AC, AD . Ký hiệu khoảng cách từ A, B, C, D đến (P) là t_a, t_b, t_c, t_d , tương ứng. Chứng minh rằng $t_a V_{OBCD} = t_b V_{OCDA} + t_c V_{ODAB} + t_d V_{OABC}$.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ $Oxyz$ để $O(0,0,0)$, $(P) : z = 0$ và $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ với $t_a = z_1 > 0$, $t_b = -z_2 > 0$, $t_c = -z_3 > 0$, $t_d = -z_4 > 0$. Quy ước thể tích tứ diện được tính qua định thức theo quy tắc bàn tay phải:

$$\begin{aligned}
 t_a V_{OBCD} &= z_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = -z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
 t_b V_{OCDA} &= -z_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix} = -z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
 t_c V_{ODAB} &= -z_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
 t_d V_{OABC} &= -z_4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = -z_4 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Như vậy, hiệu $T = t_a V_{OBCD} - t_b V_{OCDA} - t_c V_{ODAB} - t_d V_{OABC}$ đúng bằng

$$\begin{aligned}
 T &= -z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
 &+ z_4 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Tóm lại $t_a V_{OBCD} = t_b V_{OCDA} + t_c V_{ODAB} + t_d V_{OABC}$. □

Ví dụ 2.34. Cho tứ diện $ABCD$ và trọng tâm D_1 của mặt ABC . Gọi A_1, B_1, C_1 là giao điểm giữa các đường thẳng đi qua A, B, C , tương ứng, song song với DD_1 và cắt các mặt tương ứng của tứ diện. Chứng minh rằng, ta luôn có $V_{A_1 B_1 C_1 D_1} = 3V_{ABCD}$.

Bài giải: Ta có thể bỏ qua giả thiết D_1 là trọng tâm $\triangle ABC$. Với điểm tùy ý D_1 thuộc miền trong tam giác ABC luôn có ba số thực dương a, b, c với $a + b + c = 1$, $D\vec{D}_1 = a\vec{D}A + b\vec{D}B + c\vec{D}C$. Vì $AA_1, BB_1, CC_1 \parallel DD_1$ nên dễ dàng suy ra các biểu diễn

$$D_1\vec{A}_1 = \frac{a^2\vec{D}A + b(b+1)\vec{D}B + c(c+1)\vec{D}C}{a}$$

$$D_1\vec{B}_1 = \frac{a(a+1)\vec{D}A + b^2\vec{D}B + c(c+1)\vec{D}C}{b}$$

$$D_1\vec{C}_1 = \frac{a(a+1)\vec{D}A + b(b+1)\vec{D}B + c^2\vec{D}C}{c}. \text{ Từ đây có thể viết}$$

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{\begin{vmatrix} a^2 & b(b+1) & c(c+1) \\ a(a+1) & b^2 & c(c+1) \\ a(a+1) & b(b+1) & c^2 \end{vmatrix}}{6abc} = 3V_{ABCD}. \quad \square$$

Ví dụ 2.35. [Dự bị IMO 1988] Cho tứ diện $ABCD$ với trung điểm K của cạnh AB và trung điểm L của cạnh CD . Chứng minh rằng, bất kỳ mặt phẳng nào chứa đường thẳng KL đều chia tứ diện thành hai phần với thể tích bằng nhau.

Bài giải: Với hệ tọa độ $Oxyz$, $A(0,0,0)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ và $D(x_4, y_4, z_4)$. Chỉ cần xét trường hợp mặt phẳng (P) chứa KL cắt BC tại E và cắt AD tại F . Khi đó $s =: \frac{EB}{EC} = \frac{FA}{FD}$. Tọa độ điểm K, L, E, F :

$$K\left(\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}, \frac{z_2}{2}\right), \quad L\left(\frac{x_3+x_4}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}, \frac{z_3+z_4}{2}\right)$$

$$F\left(\frac{sx_4}{s+1}, \frac{sy_4}{s+1}, \frac{sz_4}{s+1}\right), \quad E\left(\frac{x_2+sx_3}{s+1}, \frac{y_2+sy_3}{s+1}, \frac{z_2+sz_3}{s+1}\right).$$

Đặt $V_1 = V_{ACKELF} = V_{AKEL} + V_{AECL} + V_{ALFK}$. Định hướng tứ diện có

$$\begin{aligned}
 6V_{AKEL} &= \begin{vmatrix} \frac{x_2}{2} & \frac{y_2}{2} & \frac{z_2}{2} \\ \frac{x_2 + sx_3}{\frac{s+1}{x_3+x_4}} & \frac{y_2 + sy_3}{\frac{s+1}{y_3+y_4}} & \frac{z_2 + sz_3}{\frac{s+1}{z_3+z_4}} \\ \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \end{vmatrix} = \frac{s}{4(s+1)} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
 6V_{AECL} &= \begin{vmatrix} \frac{x_2 + sx_3}{s+1} & \frac{y_2 + sy_3}{s+1} & \frac{z_2 + sz_3}{s+1} \\ \frac{x_3}{x_3+x_4} & \frac{y_3}{y_3+y_4} & \frac{z_3}{z_3+z_4} \\ \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2(s+1)} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\
 6V_{ALFK} &= \begin{vmatrix} \frac{x_3+x_4}{\frac{2}{sx_4}} & \frac{y_3+y_4}{\frac{2}{sy_4}} & \frac{z_3+z_4}{\frac{2}{sz_4}} \\ \frac{s+1}{x_2} & \frac{s+1}{y_2} & \frac{s+1}{z_2} \\ \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \end{vmatrix} = \frac{s}{4(s+1)} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Vậy

$$V_1 = \frac{1}{2.6} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2.6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{V_{ABCD}}{2}.$$

□

Ví dụ 2.36. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là trọng tâm các mặt BCD, CDA, DAB, ABC , tương ứng, với bất kỳ điểm O ở bên ngoài tứ diện $ABCD$ có một cách chọn thích hợp $u, v, t \in \{1, -1\}$ để $|V_{OB_1C_1D_1} + uV_{OC_1D_1A_1} + vV_{OD_1A_1B_1} + tV_{OA_1B_1C_1}| = \frac{1}{27}V_{ABCD}$.

Bài giải: Dựng hệ tọa độ $Oxyz$ để $O(0, 0, 0)$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ và $D(x_4, y_4, z_4)$. Tọa độ trọng tâm các mặt tứ diện $ABCD$.

$$\begin{aligned}
 A_1 &\left(\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}, \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}, \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3} \right) \\
 B_1 &\left(\frac{x_1 + x_3 + x_4}{3}, \frac{y_1 + y_3 + y_4}{3}, \frac{z_1 + z_3 + z_4}{3} \right) \\
 C_1 &\left(\frac{x_2 + x_1 + x_4}{3}, \frac{y_2 + y_1 + y_4}{3}, \frac{z_2 + z_1 + z_4}{3} \right) \\
 D_1 &\left(\frac{x_2 + x_3 + x_1}{3}, \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3}, \frac{z_2 + z_3 + z_1}{3} \right).
 \end{aligned}$$

Đặt $X = \sum_{i=1}^4 x_i$, $Y = \sum_{i=1}^4 y_i$ và $Z = \sum_{i=1}^4 z_i$, Đặt $V_a = 6V_{OB_1C_1D_1}$.

Ta biểu diễn:

$$V_a = \pm \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{x_1 + x_3 + x_4}{3} & \frac{y_1 + y_3 + y_4}{3} & \frac{z_1 + z_3 + z_4}{3} & 1 \\ \frac{x_2 + x_1 + x_4}{3} & \frac{y_2 + y_1 + y_4}{3} & \frac{z_2 + z_1 + z_4}{3} & 1 \\ \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} & \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} & \frac{z_2 + z_3 + z_1}{3} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\pm 1}{27} \begin{vmatrix} X - x_2 & Y - y_2 & Z - z_2 \\ X - x_3 & Y - y_3 & Z - z_3 \\ X - x_4 & Y - y_4 & Z - z_4 \end{vmatrix} = \frac{\pm 1}{27} \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ký hiệu:

$$T = \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

với việc chọn dấu $+$, $-$ một cách thích hợp. Từ

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

suy ra:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Do vậy:

$$\pm V_{ABCD} \pm 27V_{OB_1C_1D_1} \pm 27V_{OC_1D_1A_1} \pm 27V_{OD_1A_1B_1} \pm 27V_{OA_1B_1C_1} = 0.$$

Từ đó suy ra kết quả: Tồn tại một cách chọn thích hợp $u, v, t \in \{1, -1\}$ để
 $|V_{OB_1C_1D_1} + uV_{OC_1D_1A_1} + vV_{OD_1A_1B_1} + tV_{OA_1B_1C_1}| = \frac{1}{27}V_{ABCD}.$ $\square$

2.3.3. Khai thác bài toán vectơ của tứ diện

Mệnh đề 2.21. Với điểm O trong tứ diện $ABCD$ và điểm O' nằm ngoài tứ diện $ABCD$, những góc tam diện đỉnh A ta luôn có

(i) $\vec{OA}.V_{OBCD} + \vec{OB}.V_{OCDA} + \vec{OC}.V_{ODAB} + \vec{OD}.V_{OABC} = \vec{0}$. Đặc biệt,
 $\vec{IA}.s_a + \vec{IB}.s_b + \vec{IC}.s_c + \vec{ID}.s_d = \vec{0}$ khi I là tâm mặt cầu nội tiếp trong tứ diện.

(ii) $-\vec{O'A}.V_{O'BCD} + \vec{O'B}.V_{O'CDA} + \vec{O'C}.V_{O'DAB} + \vec{O'D}.V_{O'ABC} = \vec{0}$.

Chứng minh: Đặt hệ tọa độ $Oxyz$. Giả sử $O(0, 0, 0)$, $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, (c_1, c_2, c_3) và $D(d_1, d_2, d_3)$. Theo quy tắc bàn tay phải, quy

$$\text{ước } 6V_{OABC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \end{vmatrix}, \text{ v.v... Khi đó}$$

$$6u_1 = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0. \text{ Tương tự ta cũng có } u_2 = u_3 = 0. \quad \square$$

Với tứ diện $ABCD$ ta có bất đẳng thức và đồng nhất thức sau:

Ví dụ 2.37. Giả sử tứ diện $ABCD$ có $BC = a, CA = b, AB = c, DA = x, DB = y, DC = z$ và I là tâm mặt cầu nội tiếp trong tứ diện. Khi đó ta có đồng nhất thức $s_a IA^2 + s_b IB^2 + s_c IC^2 + s_d ID^2$

$$= \frac{a^2 s_b s_c + b^2 s_c s_a + c^2 s_a s_b + x^2 s_a s_d + y^2 s_b s_d + z^2 s_c s_d}{s_a + s_b + s_c + s_d}.$$

Bài giải: Từ $\vec{IA}.s_a + \vec{IB}.s_b + \vec{IC}.s_c + \vec{ID}.s_d = \vec{0}$ theo Mệnh đề ?? suy ra

$$\begin{aligned}
0 &= s_a^2 IA^2 + s_b^2 IB^2 + s_c^2 IC^2 + s_d^2 ID^2 + 2s_a s_b \vec{IA}.\vec{IB} + 2s_a s_c \vec{IA}.\vec{IC} \\
&+ 2s_a s_d \vec{IA}.\vec{ID} + 2s_b s_c \vec{IB}.\vec{IC} + 2s_b s_d \vec{IB}.\vec{ID} + 2s_c s_d \vec{IC}.\vec{ID} \\
&= s_a^2 IA^2 + s_b^2 IB^2 + s_c^2 IC^2 + s_d^2 ID^2 + s_a s_b (IA^2 + IB^2 - c^2) \\
&+ s_a s_c (IA^2 + IC^2 - b^2) + s_a s_d (IA^2 + ID^2 - x^2) + s_b s_c (IB^2 + IC^2) \\
&- s_b s_c a^2 + s_b s_d (IB^2 + ID^2 - y^2) + s_c s_d (IC^2 + ID^2 - z^2) \\
&= (s_a IA^2 + s_b IB^2 + s_c IC^2 + s_d ID^2)(s_a + s_b + s_c + s_d) \\
&- (a^2 s_b s_c + b^2 s_c s_a + c^2 s_a s_b + x^2 s_a s_d + y^2 s_b s_d + z^2 s_c s_d).
\end{aligned}$$

Để dàng suy ra đồng nhất thức $s_a IA^2 + s_b IB^2 + s_c IC^2 + s_d ID^2 = \frac{a^2 s_b s_c + b^2 s_c s_a + c^2 s_a s_b + x^2 s_a s_d + y^2 s_b s_d + z^2 s_c s_d}{s_a + s_b + s_c + s_d}$. $\square$

Ví dụ 2.38. Với điểm M nằm ngoài tứ diện $ABCD$, nhưng nằm trong góc tam diện đỉnh A ta luôn có

$$MB.V_{MCDA} + MC.V_{MDBA} + MD.V_{MBCA} \geq MA.V_{MBCD}.$$

Bài giải: Từ hệ thức $\vec{MB}.V_{MCDA} + \vec{MC}.V_{MDBA} + \vec{MD}.V_{MBCA} = \vec{MA}.V_{MBCD}$ theo Mệnh đề 2.21 ta suy ra ngay bất đẳng thức sau đây: $MB.V_{MCDA} + MC.V_{MDBA} + MD.V_{MBCA} \geq MA.V_{MBCD}$. $\square$

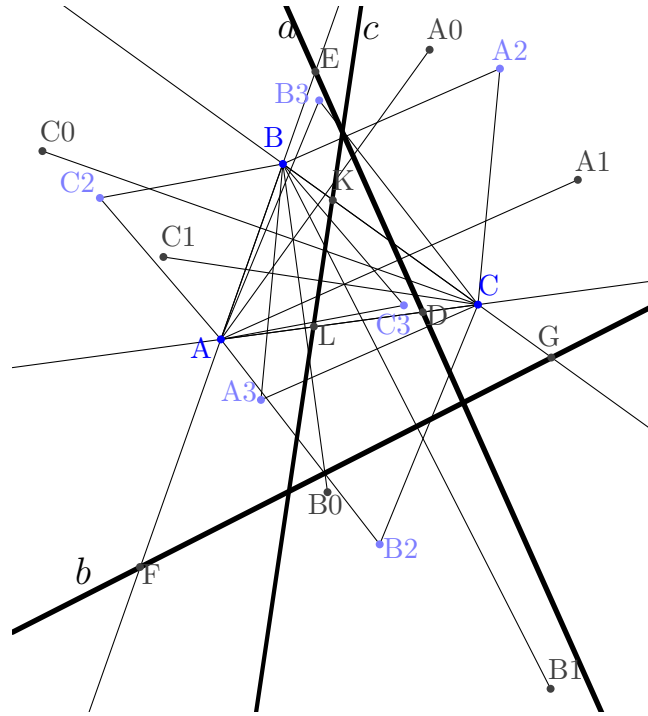
2.4. Đồ thị phẳng 21 - điểm K_3

Giả sử tam giác ABC có độ dài ba cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$. Ký hiệu $\mathbf{a}$ là đường thẳng cắt đường thẳng AC tại điểm cách đều hai điểm A và B , cắt đường thẳng AB tại điểm cách đều hai điểm A và C . Ký hiệu $\mathbf{b}$ là đường thẳng cắt đường thẳng BA tại điểm cách đều hai điểm B và C , cắt đường thẳng BC tại điểm cách đều hai điểm B và A . Ký hiệu $\mathbf{c}$ là đường thẳng cắt đường thẳng CB tại điểm cách đều hai điểm C và A , cắt đường thẳng CA tại điểm cách đều hai điểm C và B .

Gọi A_0, B_0, C_0 là những điểm đối xứng với A, B, C qua BC, CA, AB , tương ứng. Gọi A_1, B_1, C_1 là những điểm đối xứng với A, B, C qua $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, tương ứng. Gọi 2 điểm E là những điểm thỏa mãn $aEA = bEB = cEC$, gọi 2 điểm F là những điểm nhìn các cạnh tam giác ABC dưới góc $\frac{\pi}{3}$ hay $\frac{2\pi}{3}$.

Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Gọi A_2, A_3 là các đỉnh của các tam giác đều BCA_2, BCA_3 , gọi B_2, B_3 là các đỉnh của các tam giác đều CAB_2, CAB_3 và gọi C_2, C_3 là các đỉnh của các tam giác đều ABC_2, ABC_3 . Bây giờ chúng ta sẽ tìm khai triển dưới dạng phân thức liên tục của số thực. Trong chương 1, chúng ta đã biết cách khai triển dưới dạng phân thức liên tục của số hữu tỷ. Trong phần này, trước tiên ta xem xét lại quá trình này, sau đó, bằng phương pháp tương tự, ta tìm khai triển phân thức liên tục cho số vô tỷ.



Ví dụ 2.39. Xác định phương trình α khi biết tọa độ A, B, C .

Bài giải: Dựng hệ tọa độ Oxy sao cho $A(0; 0)$, $B(x_2; kx_2)$, $C(x_3; hx_3)$. Điểm $P_0(p; hp)$ cách đều A và B khi và chỉ khi

$$p^2 + h^2 p^2 = (p - x_2)^2 + (hp - kx_2)^2.$$

Vậy $P_0\left(\frac{x_2(1+k^2)}{2(1+hk)}; \frac{x_2h(1+k^2)}{2(1+hk)}\right)$. Điểm $N_0(n; kn)$ cách đều A và C khi và chỉ khi $N_0\left(\frac{x_3(1+h^2)}{2(1+hk)}; \frac{x_3k(1+h^2)}{2(1+hk)}\right)$. Đường thẳng α chính là đường thẳng

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{x_2(1+k^2)}{2(1+hk)} & \frac{x_2h(1+k^2)}{2(1+hk)} & 1 \\ \frac{x_3(1+h^2)}{2(1+hk)} & \frac{x_3k(1+h^2)}{2(1+hk)} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{hay } \mathfrak{a} : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & x_2 h & \frac{2(1+hk)}{1+k^2} \\ x_3 & x_3 k & \frac{2(1+hk)}{1+h^2} \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

Mệnh đề 2.22. Giả sử $\triangle ABC$ có độ dài cạnh a, b, c . Khi đó 21 điểm nêu trên đều thuộc tập K_3 tất cả các điểm M thỏa mãn

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 + MA^2 & a^2 MA^2 \\ 1 & b^2 + MB^2 & b^2 MB^2 \\ 1 & c^2 + MC^2 & c^2 MC^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Chứng minh: Khi $M \equiv A$ thì $MA = 0, MB = AB = c, MC = AC = b$.

$$\text{Khi đó } \begin{vmatrix} 1 & a^2 + MA^2 & a^2 MA^2 \\ 1 & b^2 + MB^2 & b^2 MB^2 \\ 1 & c^2 + MC^2 & c^2 MC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ 1 & b^2 + c^2 & b^2 c^2 \\ 1 & c^2 + b^2 & c^2 b^2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Vậy } A, A_0 \in K_3. \text{ Tương tự } B, B_0, C, C_0 \in K_3.$$

$$\text{Vì } a^2 + HA^2 = b^2 + HB^2 = c^2 + HC^2 = 4R^2 \text{ nên } \begin{vmatrix} 1 & a^2 + HA^2 & a^2 HA^2 \\ 1 & b^2 + HB^2 & b^2 HB^2 \\ 1 & c^2 + HC^2 & c^2 HC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4R^2 & a^2 HA^2 \\ 1 & 4R^2 & b^2 HB^2 \\ 1 & 4R^2 & c^2 HC^2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Vậy } H \in K_3.$$

$$\text{Vì } \begin{vmatrix} 1 & a^2 + OA^2 & a^2 OA^2 \\ 1 & b^2 + OB^2 & b^2 OB^2 \\ 1 & c^2 + OC^2 & c^2 OC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 + R^2 & a^2 R^2 \\ 1 & b^2 + R^2 & b^2 R^2 \\ 1 & c^2 + R^2 & c^2 R^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ nên } O \in K_3.$$

$$\text{Đặt } aEA = u. \text{ Vì } \begin{vmatrix} 1 & a^2 + EA^2 & a^2 EA^2 \\ 1 & b^2 + EB^2 & b^2 EB^2 \\ 1 & c^2 + EC^2 & c^2 EC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 + EA^2 & u^2 \\ 1 & b^2 + EB^2 & u^2 \\ 1 & c^2 + EC^2 & u^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ nên}$$

hai điểm E cũng thuộc K_3 .

$$\text{Đặt } v = AA_2^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}S \text{ và } w = AA_3^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2\sqrt{3}S.$$

Vì

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 + A_2 A^2 & a^2 A_2 A^2 \\ 1 & b^2 + A_2 B^2 & b^2 A_2 B^2 \\ 1 & c^2 + A_2 C^2 & c^2 A_2 C^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 + v & a^2 v \\ 1 & b^2 + v & b^2 v \\ 1 & c^2 + v & c^2 v \end{vmatrix} = 0$$

nhên $A_2 \in K_3$. Tương tự $A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 \in K_3$.

Giả sử F nhìn ba cạnh dưới cùng một góc $\frac{2\pi}{3}$. Đặt $x = FA, y = FB, z = FC$. Khi đó $a^2 = y^2 + z^2 + yz, b^2 = z^2 + x^2 + zx, c^2 = x^2 + y^2 + xy$. Vì

$$F^* := \begin{vmatrix} 1 & a^2 + FA^2 & a^2 FA^2 \\ 1 & b^2 + FB^2 & b^2 FB^2 \\ 1 & c^2 + FC^2 & c^2 FC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 + z^2 + xy & a^2 x^2 \\ 1 & x^2 + y^2 + z^2 + yz & b^2 y^2 \\ 1 & x^2 + y^2 + z^2 + zx & c^2 z^2 \end{vmatrix} \text{ nên ta có}$$

$$F^* = \begin{vmatrix} 1 & xy & a^2 x^2 \\ 1 & yz & b^2 y^2 \\ 1 & zx & c^2 z^2 \end{vmatrix} = c^2 xz^3 - b^2 xy^3 + a^2 x^3 y - c^2 yz^3 + b^2 y^3 z - a^2 x^3 z$$

và dễ dàng thấy $F^* = 0$ qua việc thay $a^2 = y^2 + yz + z^2, b^2 = z^2 + zx + x^2$ và $c^2 = x^2 + xy + y^2$. Như vậy hai điểm F cũng thuộc K_3 .

Việc kiểm tra ba điểm còn lại là A_1, B_1, C_1 cũng thuộc K_3 được coi là một bài tập. $\square$

Ví dụ 2.40. Điều kiện cần và đủ để trọng tâm G của $\triangle ABC$ thuộc K_3 là tam giác ABC cân.

Bài giải: Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + GA^2 &= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} + \frac{2a^2}{3} \\ b^2 + GB^2 &= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} + \frac{2b^2}{3} \\ c^2 + GC^2 &= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} + \frac{2c^2}{3}. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} g &= \begin{vmatrix} 1 & a^2 + GA^2 & a^2 GA^2 \\ 1 & b^2 + GB^2 & b^2 GB^2 \\ 1 & c^2 + GC^2 & c^2 GC^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2a^2}{3} & a^2 GA^2 \\ 1 & \frac{2b^2}{3} & b^2 GB^2 \\ 1 & \frac{2c^2}{3} & c^2 GC^2 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^2 GA^2 \\ 1 & b^2 & b^2 GB^2 \\ 1 & c^2 & c^2 GC^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{3} [b^2 c^2 (GC^2 - GB^2) + c^2 a^2 (GA^2 - GC^2) + a^2 b^2 (GB^2 - GA^2)] \\ &= \frac{1}{3} [b^2 c^2 (b^2 - c^2) + c^2 a^2 (c^2 - a^2) + a^2 b^2 (a^2 - b^2)] \\ &= -\frac{1}{3} (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Vậy $G \in K_3$ khi và chỉ khi $\triangle ABC$ cân. $\square$

Mệnh đề 2.23. Nếu tam giác ABC không đều thì bậc của K_3 đúng bằng 3.

Chứng minh: Đặt $u = MA^2, v = MB^2, t = MC^2$ và $\alpha = a^2, \beta = b^2, \gamma = c^2$. Như vậy

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha + u & \alpha u \\ 1 & \beta + v & \beta v \\ 1 & \gamma + t & \gamma t \end{vmatrix} \\ &= \gamma vt - \beta vt + \alpha ut - \gamma ut + \beta uv - \alpha uv \\ &\quad + \alpha \gamma u - \alpha \beta u + \alpha \beta v - \beta \gamma v + \beta \gamma t - \alpha \gamma t. \end{aligned}$$

Biểu diễn $u = x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1$, $v = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2$ và $t = x^2 + y^2 + a_3x + b_3y + c_3$, Khi đó hệ số của $(x^2 + y^2)^2$ đúng bằng $\gamma - \beta + \alpha - \gamma + \beta - \alpha = 0$. Vậy K_3 là đồ thị bậc ≤ 3 . Dễ dàng kiểm tra bậc của K_3 bằng 3 khi tam giác ABC không đều. $\square$

Chú ý 2.1. Phương trình K_3 thông qua định thức rất phức tạp

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)MA^2.MB^2 + (b^2 - c^2)MB^2.MC^2 + (c^2 - a^2)MC^2.MA^2 = \\ a^2c^2(MA^2 - MC^2) + c^2b^2(MC^2 - MB^2) + b^2a^2(MB^2 - MA^2). \end{aligned}$$

Kết luận

Luận văn đã trình bày và đạt được một số kết quả sau:

1. Trình bày một số kiến thức cơ bản của Ma trận, các phép toán về ma trận; Định thức và một số đồng nhất thức cổ điển; Vành ma trận $K[A]$, các phép toán biến hình như phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, đối xứng tâm và phép vị tự thông qua ma trận định thức.
2. Trình bày một số phép biến đổi tọa độ đặc biệt và vận dụng giải các bài toán hình học sơ cấp thông qua định thức.
3. Dùng định thức và phương pháp tọa độ để biểu diễn phép biến đổi, xây dựng và tính toán. Qua đó có thể sử dụng một số kết quả của đại số tuyến tính vào xét các bài toán diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp thông qua tọa độ đỉnh và độ dài các cạnh của tam giác. Thể tích bán kính mặt cầu ngoại tiếp và đưa ra một số ví dụ cụ thể.

Tài liệu tham khảo

- [1] W. Grobner, *Matrizenrechnung*, Bibliographisches Institut AG, Mannheim 1966.
- [2] Nguyễn Văn Mậu và Đàm Văn Nhĩ, Đồng nhất thức và phương pháp tọa độ trong Hình học, Nhà Xuất Bản ĐHQG Hà Nội 2012.
- [3] Đàm Văn Nhĩ, Số phức trong giải Toán sơ cấp, Tạp chí Khoa học ĐHSP Hà Nội số 6 -2006, 40-48.
- [4] Đàm Văn Nhĩ, Ma trận vuông và dãy số, Bản tin Dạy và Học trong nhà trường ĐHSP Hà Nội số 2 -2012.
- [5] Đàm văn Nhĩ, Mở rộng Bất đẳng thức Ptolemy và Hayashi cho đa giác, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 426, 12 2012.
- [6] D. V. Nhi, Proving some geometric identities by using the determinants, Journal of Science and Arts, Year 12, No. 4 (21) 2012, 385-394.
- [7] A. Pogorelov, *Geometry*, Mir Publishers Moscow 1987.
- [8] Tuyển tập: *The IMO Compendium 1959-2004*.
- [9] Nguyễn Duy Thuận - Nông Quốc Chinh- Phi Mạnh Ban, *Đại Số Tuyến Tính*, NXB Đại học sư phạm, (2003)